

# 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國中組 地球科學科

### 最佳團隊合作獎

030509

日『振』當中

-利用日光偏振訊息簡易計算觀測者所在經緯度

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：  國三 林品妘  國三 黃子容  國二 黃唯翔	指導老師：  蔡名峯  韓顏吉
---	-----------------------------

關鍵詞：偏振度、定位、經緯度

## 摘要

本研究利用日光偏振訊息找出太陽方位，發現  $\omega$ (日光強度的極大值對稱軸旋轉角度)與太陽方位角  $A_s$ 的關係為： $A_s = -\omega + \phi$ ，負號代表逆時針旋轉， $\phi$  為偏光膜初始角度。因此可藉由日光偏振訊息得知太陽的所在方位角。

此外，為了得知觀測者所在經緯度，本組採用三角定位法，並以原地觀測到不同時刻的太陽方位角，及已知兩點太陽直射地球的經緯度，來作推算，並輔以球面三角學加以修正，且更進一步測試觀測者在不同緯度、經度、觀測時間差及觀測時間等情形，使本計算模式更完善。本計算模式為本組創新之研究，其適用範圍隨太陽直射緯度而變化，最小適用範圍在正午前後的 2 小時，且兩次觀測時間間隔只需 15 分鐘，比一般只能在正午時推算經緯度的方法還來的便利。

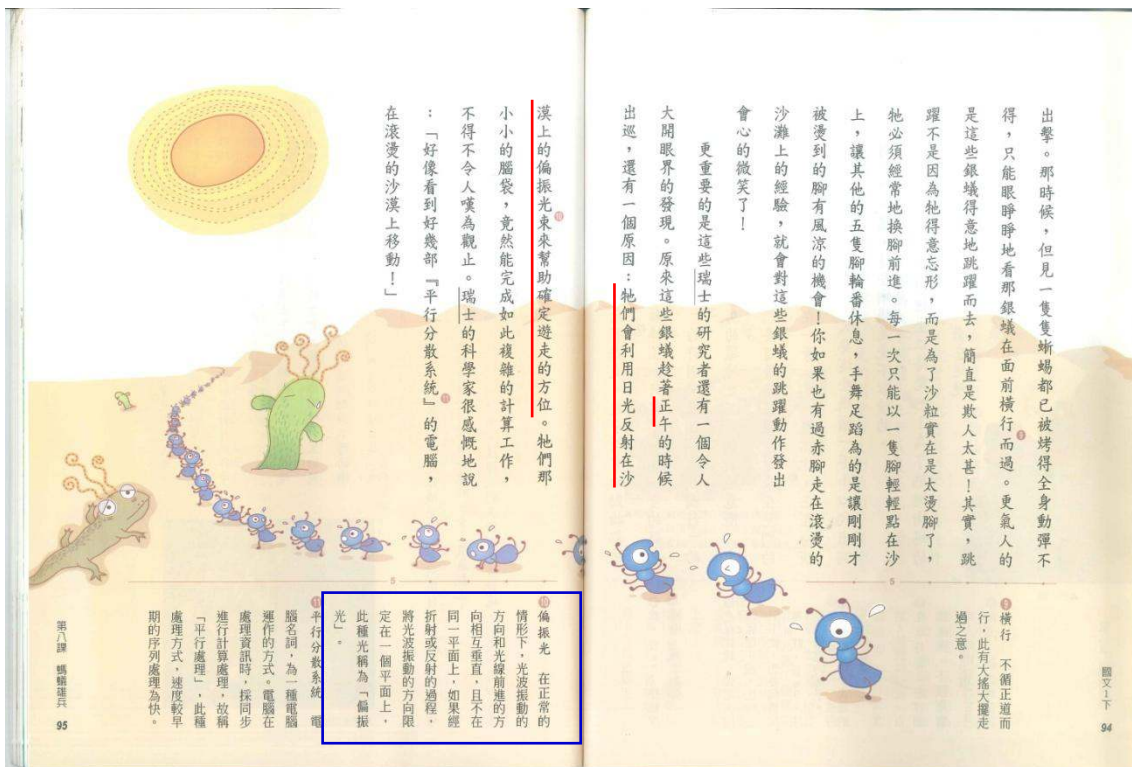
## 壹、前言

### 一、研究動機

維京人是從西元 8 世紀到 11 世紀侵擾並殖民歐洲沿海和英國島嶼的民族。其足跡遍及從歐洲大陸至北極廣闊疆域，歐洲這一時期被稱為「維京時期」(Viking Age)，維京人甚至比哥倫布發現新大陸早五百多年就已登陸了美洲。此外，遠洋航行意味著冒險，主要是因為無法準確測量經度，那麼，這些維京人是怎樣在海上辨別方向的呢？(在中國羅盤尚未傳至歐洲之前)

從維京人的傳說中，瞭解到除了觀察太陽以外，維京人還使用一種「太陽石」(sunstone)來幫助他們辨別方向。尤其在陰天的時候，「太陽石」更顯得重要。有人認為，「太陽石」可以解析太陽光的偏振訊息，進而達到定位的目的。

另外在翰林版國文 1 下第二冊第 8 課「螞蟻雄兵」一文提到，非洲銀蟻為了生存，選擇在最熱的中午外出覓食，除了可以躲避天敵外，還可以「利用日光反射在沙漠上的偏振光束來幫助確定遊走的方位」，這樣的行為令我們嘆為觀止，因此本組想利用此次科展的機會來探討如何藉由太陽光的偏振訊息來定位。



翰林版國文 1 下第二冊第 8 課「螞蟻雄兵」，選自「用心動腦話科學」，作者曾志朗。

## 二、研究目的






- (一) 如何由太陽光的偏振情形來決定太陽的方位？
- (二) 如何由所觀測到的太陽方位角來推算所觀測者的經緯度？

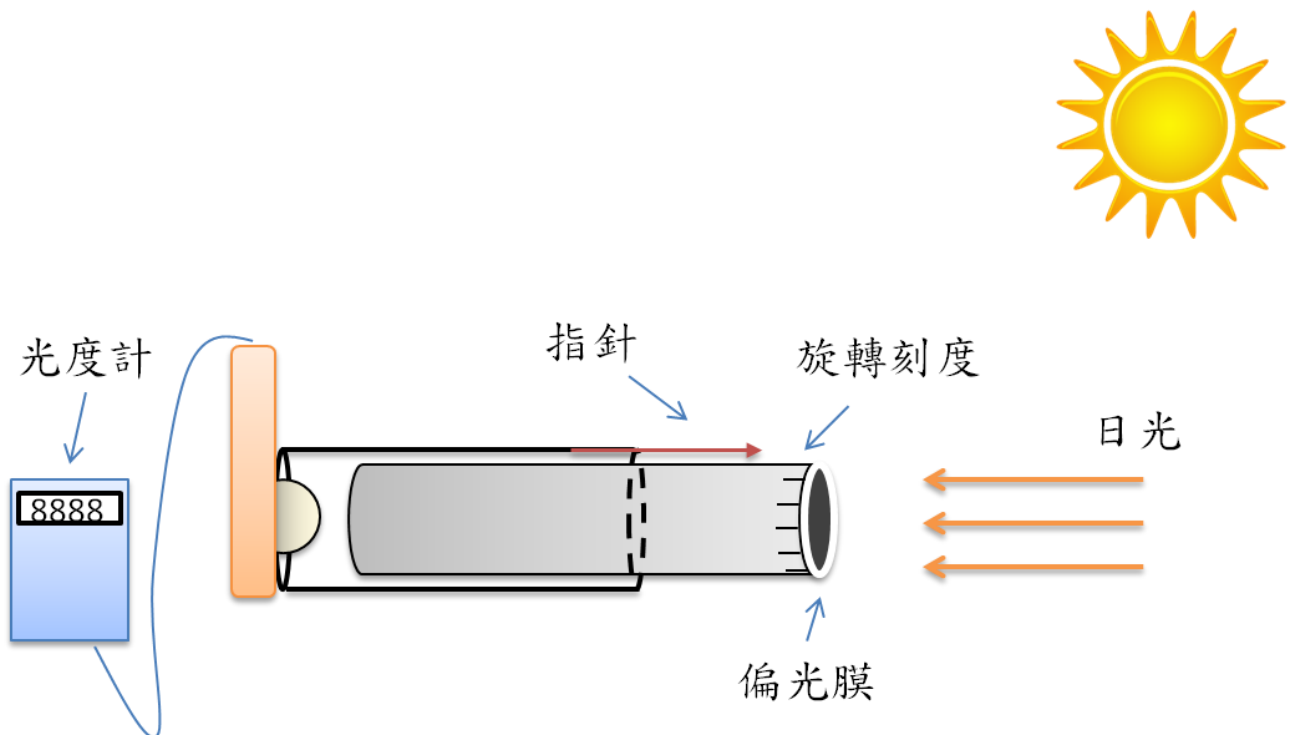
## 貳、研究過程與方法

### 一、實驗器材

		
3D 立體眼鏡上的偏光膜	市售偏光膜	光學偏振鏡片
		
太陽觀測方位盤	指南針	量角器
		
光度計 LX-103	光度計 TES-1339	pvc 管
		
絕緣膠布		

## 二、偏光光學觀測管製作

		
<p>準備兩支粗細不同的水管。</p>	<p>在其外圍繞上絕緣膠布，使兩水管可緊密嵌合。</p>	<p>內管以量角器每隔 15°畫上刻度。</p>
		<p>根據測試發現，管長越長，越能減少非直線入射光的影響。</p>
<p>外管貼上縫針，充當刻度指針。</p>	<p>將內外兩管嵌合，並在內管貼上裁切好的偏光膜。</p>	



### 三、參考資料

#### (一) 太陽方位角與仰角

**方位角**：在測繪、地質與地球物理勘探、航空、航海、炮兵射擊及部隊行進時等，都廣泛使用。不同的方位角可以相互換算。從某點的指北方向線起，依順時針方向到目標方向線之間的水準夾角，叫**方位角**。所有角

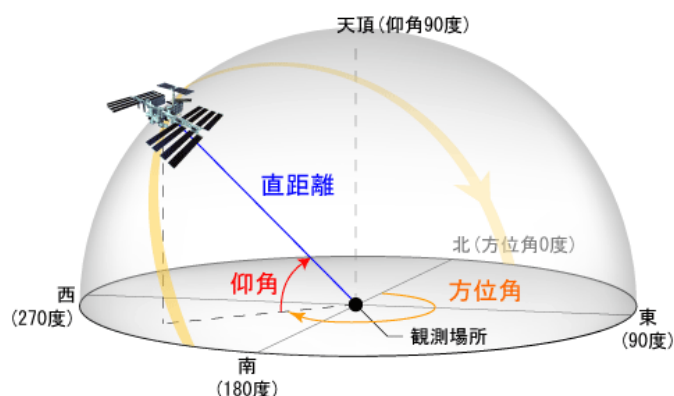


圖 2 方位角與仰角示意圖。

度以正北方設為  $0^\circ$ ，順時針轉一圈後的角度為  $360^\circ$ 。因此：正北方： $0^\circ$ 或  $360^\circ$ 、正東方： $90^\circ$ 、正南方： $180^\circ$ 、正西方： $270^\circ$ 。

**仰角**：如果視線在水準線以上，則視線與水準線的夾角即被稱為仰角。

#### (二) 地平座標系

地平座標系是天球座標系統中的一種，以觀測者所在地為中心點，所在地的地平線作為基礎平面，將天球適當的分成能看見的上半球和看不見（被地球本身遮蔽）的下半球。上半球的頂點（最高點）稱為天頂，下半球的頂點（最低點）稱為地底。

地平座標系統是固定在地球上而不是恆星，所以天體出現在天球上的高度和方位會隨著時間，在天球上不停的改變。另一方面，因為基礎平面是觀測者所在地的地平面，所以相同的在天體在相同的時間從不同的位置觀察，也會有不同的高度和方位。

#### (三) 經緯度的歷史

在現實中，由於缺乏可靠的海上定位方法，早期的人類只敢沿著海岸線航行，因此活動範圍僅限於近海，或者是像地中海之類的小片水域。直到 13 世紀，浩瀚的大洋依舊是人類無法跨越的天然障礙。

15 世紀的葡萄牙人首先發展出用天體位置計算緯度的方法，讓人類逐漸具有在大洋中定位的能力。隨著天文航海學的成熟，勇敢的航海家開始深入大洋探索新世界，揭開了大航海時代的序幕。究竟人類是如何利用天體來定位的呢？



**緯度的測量**：天空中最常見也最容易觀察的天體莫過於太陽了，人們自然以它為參考天體。太陽與地平線的夾角稱作太陽高度。太陽每天由東方升起，高度逐漸增加，在正午（又稱中天）時，高度達到一天的最大值，然後太陽逐漸下降，黃昏時沒入地平線。

為了方便說明，先假設地軸垂直於公轉面，這代表太陽永遠直射在赤道上。正午的時候，觀察者所在的經線正好轉到面對太陽的位置，這時的太陽高度角是一天的最大值。然而由於觀察者所處的緯度不同，見到的太陽高度角也不同，

緯度越高，見到的太陽也越低，也就是觀察者所處的緯度恰等於 90 度減去正午時的太陽高度角。以北半球為例，考慮太陽直射地球緯度，則**觀察者所處的緯度與太陽直射地球的緯度之差會等於 90 度減去正午時的太陽高度角**。另外，若考慮地球公轉的關係，造成一個太陽日會有長短的差異，所以實際計算上還必須考慮與平均太陽日的時間差，因此科學家提供了所謂時間方程式(Equation of time)。

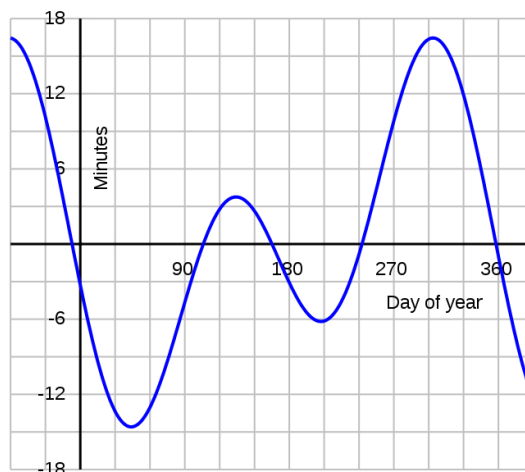


圖 3 時間方程式(Equation of time)

**經度的測量**：接下來我們來看如何決定經度。由於地球每 24 小時自西向東轉一圈，所以，經度每向東一度，時間就提早四分鐘。因此，觀察者出海的時候，只要帶著一個設定為格林威治標準時間的精準時鐘，在當地正午的時候，比較當地的時間和格林威治的時間差了多少小時，就可以算出自己所在的經度了。

#### (四) Stellarium

Stellarium 是一個星圖模擬軟體，選定時間與地點，即可以看見如同使用眼睛、雙筒望遠鏡或是小型天文望遠鏡所見的星空，包括 60 多萬顆恆星、太陽系的主要天體和 109 個深空天體影像，同時模擬日出、日落、日食、月食和凌日等各種天文現象，還可使天球顯示各種不同的模擬工具，如星座圖像、赤道座標、地平座標和 10 種世界各地的星空文化等。



圖 4 Stellarium 程式。

## 四、研究原理

### (一) 球面三角學

球面三角學是球面幾何學的一部分，主要在處理、發現和解釋多邊形(特別是三角形)在球面上的角與邊的聯繫和關係。在天文學上的重要性是用於計算天體軌道和地球表面與太空航行時的天文導航。

本研究使用下面兩組恆等式：

$$\text{當 } \angle C=90^\circ \text{ 時, } \sin A = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \tan A = \frac{\tan a}{\sin b}。$$

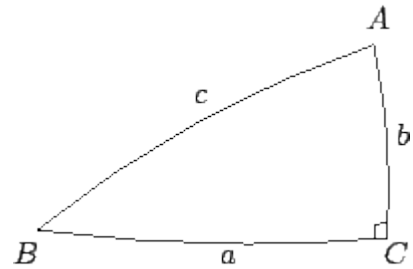


圖 5 球面直角三角形。

### (二) 瑞利散射 (Rayleigh 散射)

由英國物理學家瑞利的名字命名。它是半徑比光或其他電磁輻射的波長小很多的微小顆粒對入射光束的散射。顆粒可以是單個原子或分子。它可以發生在當光通過透明的固體和液體，但在氣體中最顯著。

瑞利散射指出空氣分子散射之總能量與入射光波長 $\lambda$ 的四次方成反比，而方向特性則依與入射方向所夾之散射角 $\theta$ 決定之即：

$$I = I_0 \frac{8\pi^4 N\alpha^2}{R^2\lambda^4} (1 + \cos^2\theta)$$

上式中  $I_0$  與  $I$  分別代表入射與散射光強度， $R$  為散射分子與觀察者距離， $N$  為散射分子密度，而  $\alpha$  與散射氣體分子形狀及折射率有關。

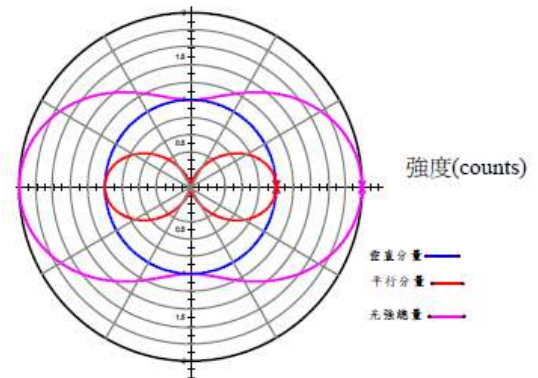


圖 6 瑞利散射之光強分佈圖。

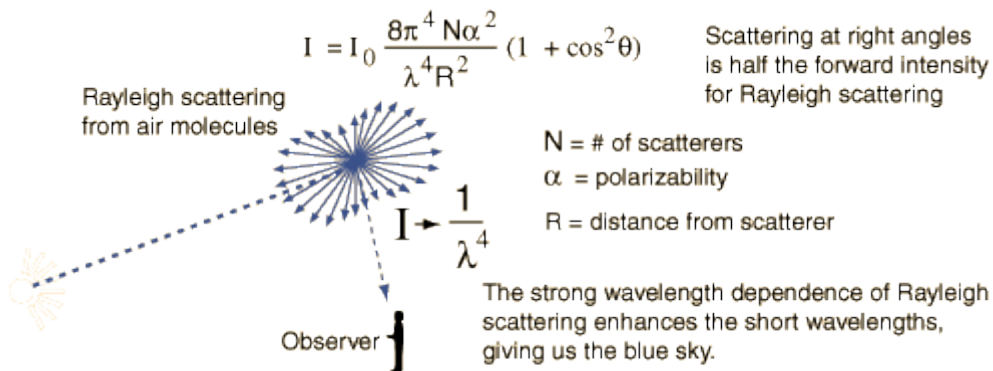


圖 7 瑞利散射示意圖。



### (三) 天空偏振光分佈模型

太陽光在大氣中傳輸時，被大氣層中的空氣分子、氣溶膠粒子散射和吸收，使得天空光呈現一定的偏振特性。在晴朗無雲的條件下，大氣對太陽光散射主要是瑞利散射，散射的光線主要是線偏振光；由偏振度和偏振方位角來描述。

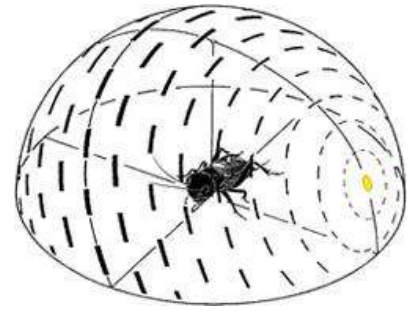


圖 8 太陽光偏振情形示意圖。

在圖 9 所示的地平坐標系中，S 表示太陽，OP 表示天空中觀測的方向，Z 表示天頂。由 Rayleigh 散射理論得知，待測光束的 **E-vector** 振動方向垂直於太陽 S、地面觀察點 O 和天空中觀察方向 P 點所構成的面。偏振方位角  $\psi$  定義為天空中觀察方向 P 點的 **E-vector** 振動方向與過 Z 點子午線 (ZP 弧) 的夾角。

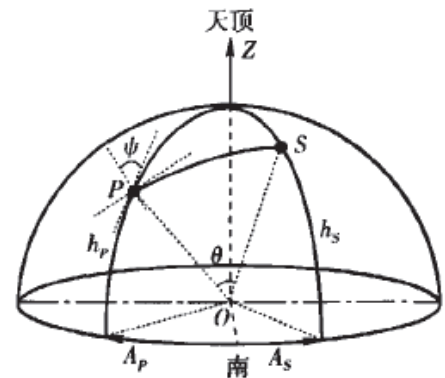


圖 9 天空觀測點 P 的 **E-vector** 偏振情形。

又因為 P 點的 **E-vector** 振動方向垂直於 PS，所以偏振方位角  $\psi=90^\circ-\angle Z P S$ 。

在球面三角形 ZPS 中，由球面三角形的餘弦定理知：

$$\cos\theta = \sinh_p \times \sinh_s + \cosh_p + \cosh_s \cos(A_s - A_p)$$

其中  $\theta$  是入射光方向 OS 與觀測方向 OP 的夾角， $h_s$  是太陽的高度角， $A_s$  是太陽的方位角， $h_p$  是球面天空中觀察點 p 的高度角， $A_p$  是觀察點 P 的方位角。有座標轉換正南方向代表著方位角  $0^\circ$ ，正西方向代表方位角  $90^\circ$ 。

在球面三角形 ZPS 中，由球面三角形的正弦定理知：

$$\cos\psi = \frac{\sin(A_s - A_p)}{\sin\theta} \times \cosh_s \quad (1)$$

同時偏振度定義為：

$$P(\theta) = \frac{1 - \cos^2\theta}{1 + \cos^2\theta} P_{max} = \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta} P_{max} \quad (2)$$

當  $\theta=90^\circ$  時， $P(90^\circ)=P_{max}$ 。

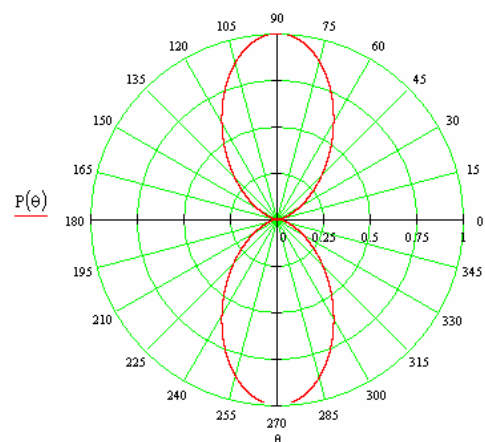


圖 10 瑞利散射偏振程度對散射角度關係圖。

由式(1)和(2)可以計算出天空中觀測方向光束的偏振度  $\delta$  和偏振方位角  $\psi$ 。從公式看來，在某一天的某一時刻、某一位置，天空中具有相對穩定的偏振模式。

其最為人知的應用就是利用偏光鏡把天空的藍色加深，使藍天白雲的對比更強。選擇拍攝角度有個很簡單的規則（見右圖），首先伸出食指指向太陽，再豎起大姆指與食指垂直、並且繞食指轉一圈，於是姆指劃過的方向就是可以得到最大效果的拍攝方向；換言之，最佳的拍攝方向與從相機到太陽的方向垂直。當相機愈偏離這個方向（比如朝太陽方向或反太陽方向偏移），效果就愈低，若偏向大過某個角度效果就不顯著甚或消失。

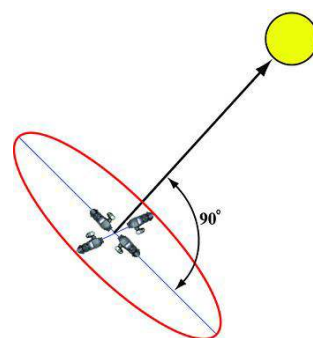


圖 11 偏光鏡使用方向示意圖。

#### (四) 偏振度

線偏振光與自然光互相摻雜，則為部分偏振光(partially polarized light)，這時發出沿線偏振方向光振動的原子或分子比發出沿其他方向光振動的原子或分子要多，因而這個方向光振動的功率密度比其他方向的光振動的功率密度要大。通常用偏振度(degree of polarization) $P$ 來表示線偏振的程度，偏振度定義為：

$$P = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$$

式中  $I_M$  和  $I_m$  是部分偏振光在兩個特殊方向上的光強度，分別對應於最大和最小的光強度。若  $P=1$ ，是完全線偏振光； $P=0$  是自然光；而  $P<1$  是部分偏振光。

## 參、研究結果與討論

### 一、如何由太陽光的偏振情形來決定太陽的位置？

#### (一) 探討太陽光偏振情形與太陽所在方位角之關係。

傳說中維京海盜利用方解石雙折射的特性來得知太陽的方位，尤其是在**天候不佳的時候更為實用**，只要有光線，即使看不到太陽，仍舊可以辨別太陽的方位。因此本組想探討天空的偏振特性與太陽所在。

#### 實驗方式：

將偏光光學觀測管接在光度計上，對準**天頂(仰角 90°)**，接著以**每隔 15°逆時針**的方向旋轉內管，紀錄太陽光的強度。

#### 實驗結果：

地點：本校家政教室二樓露天走道，經緯度 N24.09,E120.55(利用 google map 查詢)

日期：2014.01.22

光度計：LUX103

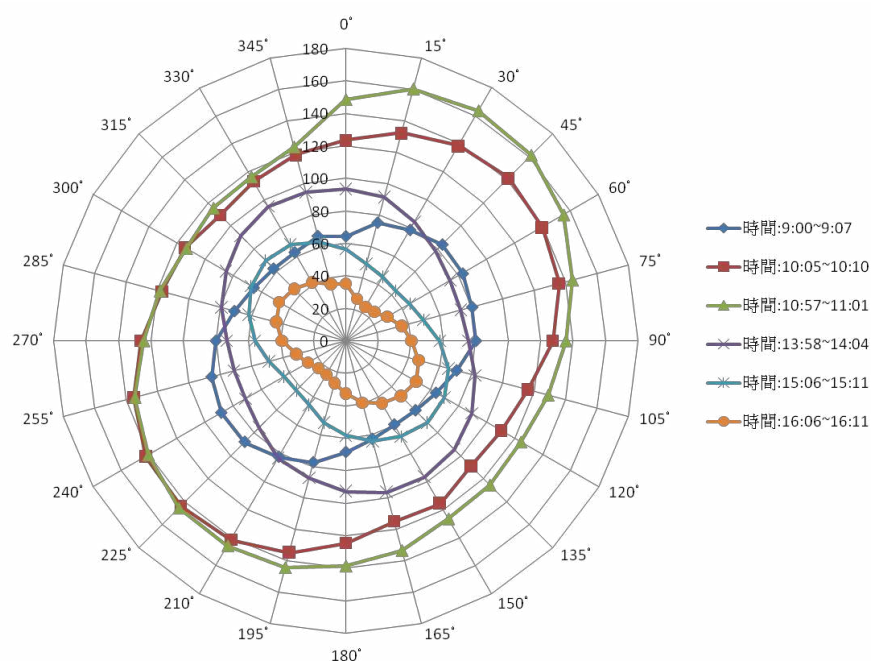


圖 12 偏光膜旋轉角度與太陽光強度關係圖。(2014.01.22)

**說明：**藉由在不同時刻測量太陽光強度變化，發現會形成類似橢圓的圖形，而且隨著時間變化，圖形也會跟著旋轉。由此驗證因太陽光具偏振特性，光強度變化才會形成橢圓圖形，而橢圓圖形會隨著時間旋轉，這是因為太陽方位隨時間改變，因此**本組推測光強度圖形的極大值對稱軸(橢圓長軸)會與太陽方位有關。**

## 實驗結果：

地點:本校家政教室二樓露天走道經緯度 N24.09,E120.55(利用 google map 查詢)

日期:2014.01.27

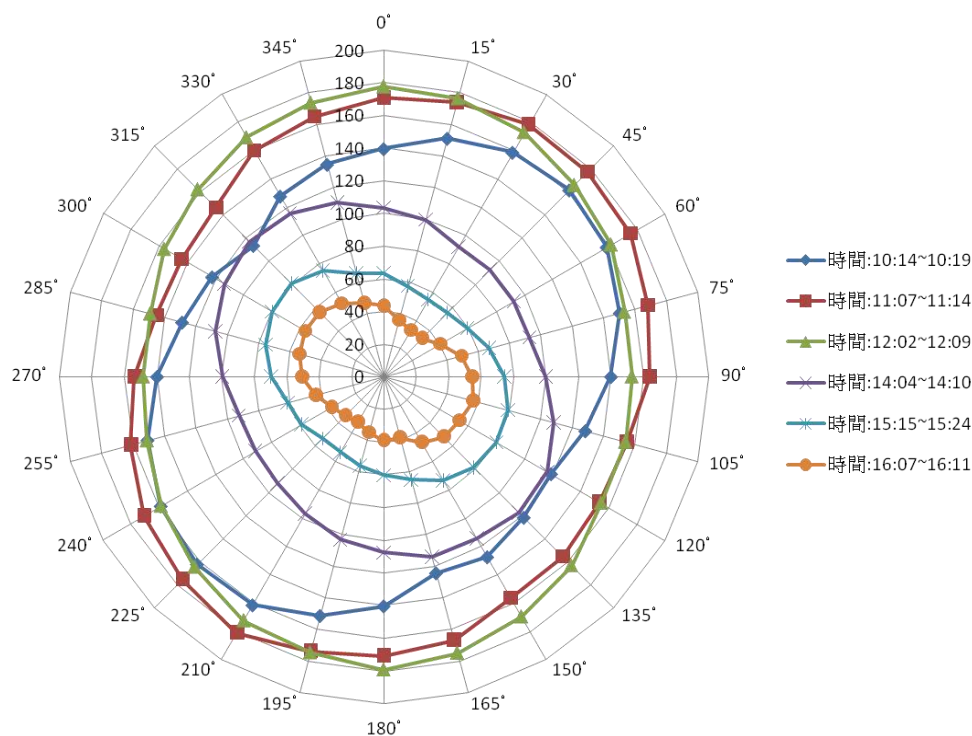


圖 13 偏光膜旋轉角度與太陽光強度關係圖。(2014.01.27)

再次實驗後發現，太陽光確實具有偏振情形，因此再利用 Stellarium 軟體得知觀測時太陽的方位角，並與觀測太陽光強度極大值對稱軸(橢圓的長軸)的旋轉角度來做圖，找出兩者間的關係。另外，發現太陽光的強弱僅能影響橢圓圖形的大小，而不會影響其旋轉情形，因此在日光強度較差的條件下，仍可觀測。

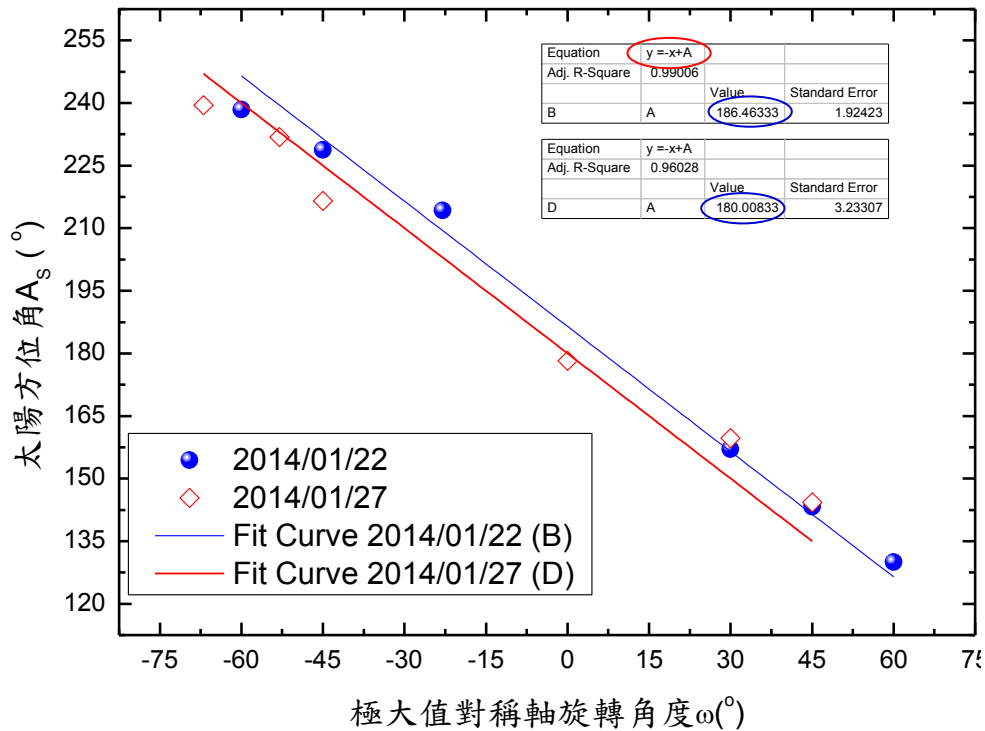


圖 14 太陽方位角與偏振情形極大值對稱軸旋轉角度之關係圖。

討論：

1、由圖 14 發現，不同時間所觀測到的日光偏振情形，其極大值對稱軸旋轉角度  $\omega$  與太陽方位角  $A_s$  是成線性的關係，也就是隨著太陽方位角變化，極大值對稱軸也會跟著旋轉，這正說明太陽光受到大氣的偏振情形與太陽方位角有關。(當對稱軸大於  $180^\circ$  時，以  $360^\circ$  去減，以負的方式呈現)

2、以  $y = -x + A$  的方式來分析太陽方位角  $A_s$  及極大值對稱軸旋轉角度  $\omega$  之關係，本組發現其關係為  $A_s = -\omega + \varphi$ ，負號代表逆時針旋轉。也就是說當太陽方位角改變時，所觀測到太陽光偏振情形也會發生變化，而且只差一固定角度  $\varphi$ ，若能調整好一開始偏光膜的起始角度，及旋轉方式，則可以輕易由極大值對稱軸旋轉角度求得太陽方位角。本偏光觀測管偏光膜初始角度  $\varphi$  約為  $180^\circ \sim 186^\circ$ 。

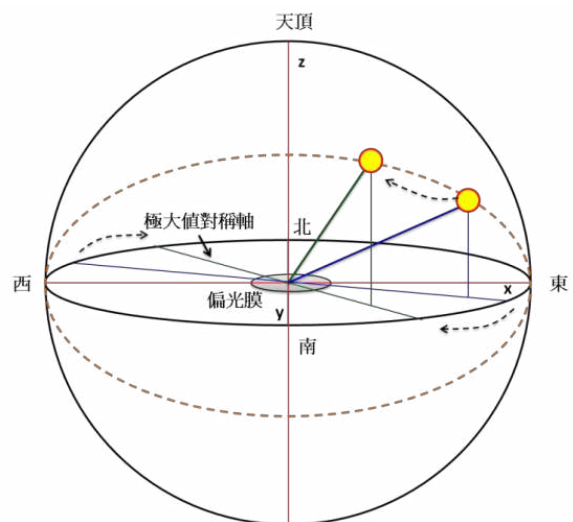


圖 15 極大值對稱軸與太陽方位角變化情形。

(二) 探討太陽光偏振情形與太陽所在仰角之關係。

### 偏振度 P 與太陽高度角之關係

偏振度公式  $P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ ，其中  $I_{\max}$  為太陽光強度極大值，也就是橢圓圖形的半長軸，同樣地， $I_{\min}$  就是橢圓圖形的半短軸，由此可以求得偏振度 P。

**表 1** 不同觀測時間，太陽光偏振度之列表。(2014/01/22)

觀測時間	9 時	10 時	11 時	14 時	15 時	16 時
太陽仰角(理論值)	27°	37°	43°	38.5°	28.25°	17.2°
仰角正弦值	0.454	0.602	0.682	0.623	0.473	0.296
偏振度 P 之值	0.1959	0.1383	0.1088	0.1488	0.2456	0.3514

**表 2** 不同觀測時間，太陽光偏振度之列表。(2014/01/27)

觀測時間	10 時	11 時	12 時	14 時	15 時	16 時
太陽仰角(理論值)	39.1°	45°	47.7°	39°	28.25°	17.2°
仰角正弦值	0.6307	0.7071	0.7396	0.6293	0.4733	0.2957
偏振度 P 之值	0.1775	0.1148	0.1029	0.1264	0.2015	0.2809



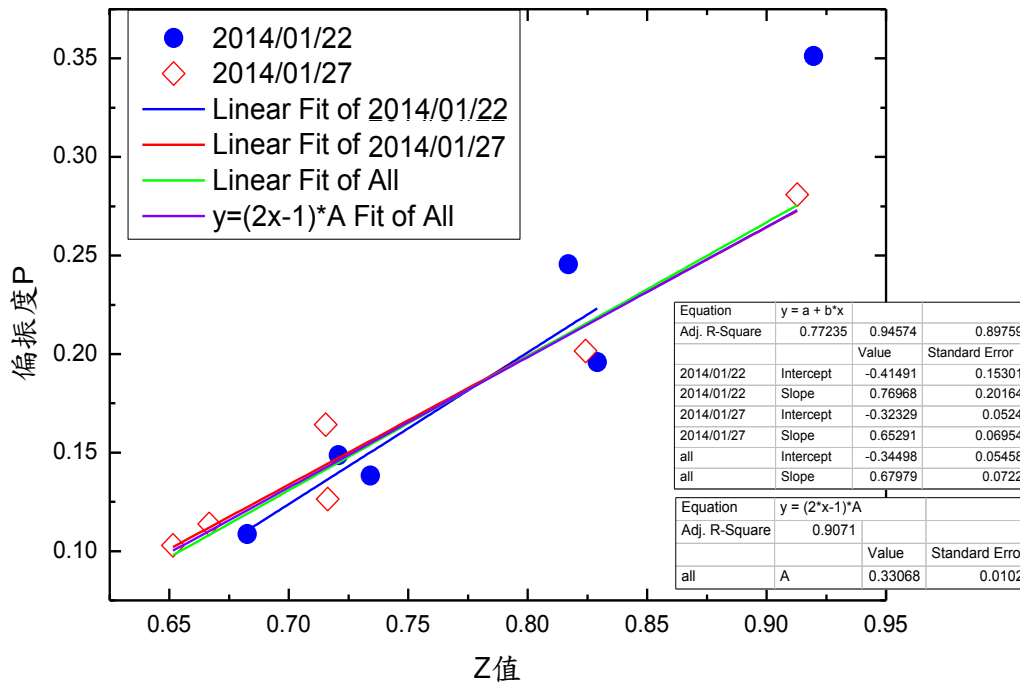


圖 15 偏振度 P 和 Z 值關係圖。

說明：

根據公式得知  $P(\theta) = \frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} P_{\max} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta} P_{\max}$ ，其中  $\theta=90^\circ-h_s$  (太陽高度角)，因此  $\cos\theta=\sin(h_s)$ 。今令 Z 值 =  $\frac{1}{1+\sin^2(h_s)}$ ，則  $P(\theta)/P_{\max}=2Z-1 \rightarrow P(\theta)=(2Z-1) P_{\max}$ ，偏振度 P 會和 Z 值呈線性關係，其係數比值為-2。

結果：

1、由圖 15 可以發現在 2014/1/22 及 2014/1/27 兩天，所觀測到的偏振度 P 和計算出的 Z 值之關係式分別為

$$P=0.770Z-0.415 \text{ 及 } P=0.653Z-0.323$$

，其係數比值  $0.770/(-0.415)=-1.86$  及  $0.653/(-0.323)=-2.02$ ，與理論值-2 近似。這意謂著觀測方向與入射太陽光所夾的角度  $\theta$  確實會影響偏振度 P 的大小。

2、若改以  $P=(2Z-1)*A$  的方式來分析，可以得到天空的最大偏振  $P_{\max}=A=0.330$ 。

3、此結果說明本研究所測量到的日光強度變化情形與理論相符。

接著改以光學偏振鏡片來進行實驗，且改以順時針方向旋轉，與上次測量日期約差半年。

**實驗結果：**

地點:本校操場中央

光度計：TES1339

日期:2015.06.07

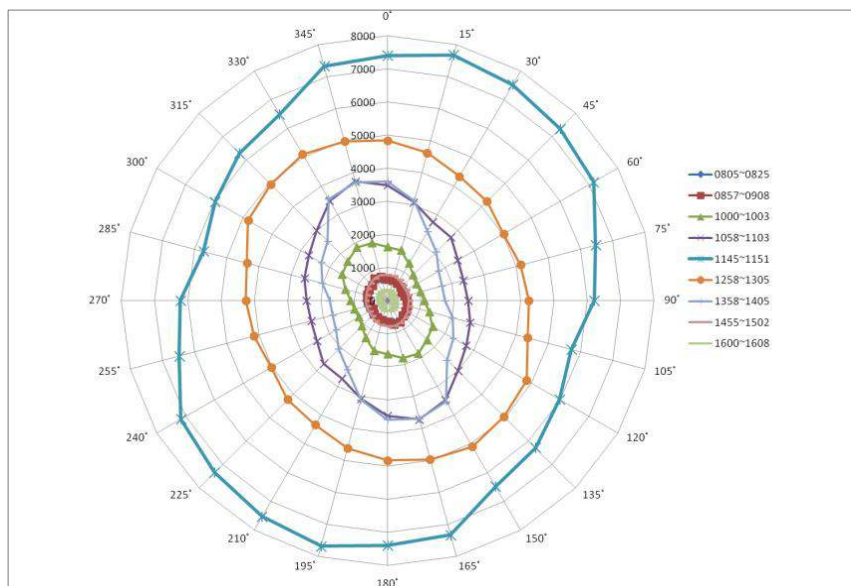


圖 16 光學偏光鏡旋轉角度與太陽光強度關係圖。(2015.06.07)

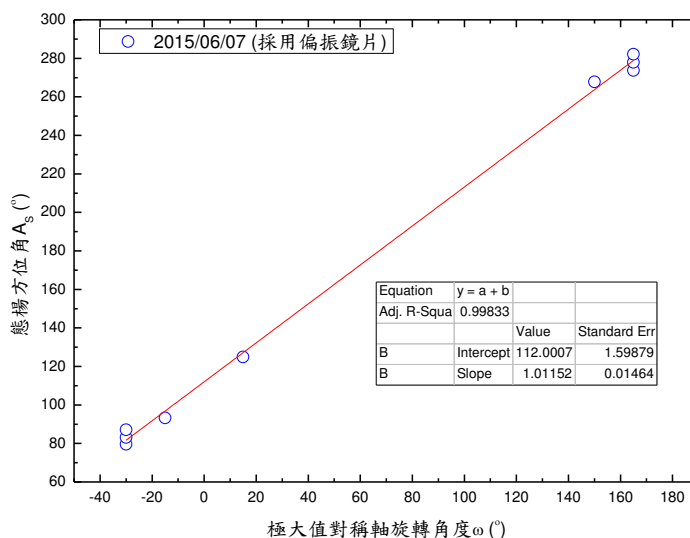


圖 17 太陽方位角與偏振情形極大值對稱軸旋轉角度之關係圖。(2015.06.07)

由圖 16、17 實驗結果得知，太陽方位角與極大值對稱軸旋轉角度仍呈線性關係，不同的是鏡片旋轉方向為順時針，因此斜率為正的。

## 二、如何由所觀測到的太陽方位角及高度角來推算所在地的經緯度？

在茫茫大海中，要如何決定往哪個方向航行，是非常重要的，即使有指南針指引方向，仍舊須依靠經緯度來決定航行的方向。而當已經知道太陽位置時，要如何得知觀測者的經緯度將是很重要的研究課題。本組查找相關文獻，發現只有在正午時分所觀測到的太陽位置才能推算觀測者的經緯度，在航海上的實用性較低，所以本組將針對此課題做詳細探討。

根據 Stellarium 軟體可以在知道在已知經緯度及當地時間的情況下，可以得知觀測到的太陽方位角及高度角，其計算公式如下：

$$\sin(h_s) = \sin\varphi \times \sin\delta + \cos\varphi \times \cos\delta \times \cos t$$

其中  $h_s$  為太陽高度角、 $\varphi$  為地理緯度(+ 為北緯，- 為南緯)、 $\delta$  為太陽赤緯、 $t$  為當地時角，太陽時角在正午時為零，上午為負、下午為正，1 小時差  $15^\circ$ 。因此已知緯度及當地時間便可以計算太陽高度角。

而方位角公式如下：

$$\cos(A_s) = (\sin(h_s) \times \sin\varphi - \sin\delta) / (\cos(h_s) \times \cos\varphi)$$

其中  $A_s$  為太陽方位角。由公式可以求得兩個  $A_s$  值。

第一個  $A_s$  值是午後太陽方位，

當  $\cos(A_s) \leq 0$  時， $90^\circ \leq A_s \leq 180^\circ$ ，

當  $\cos(A_s) \geq 0$  時， $0^\circ \leq A_s \leq 90^\circ$

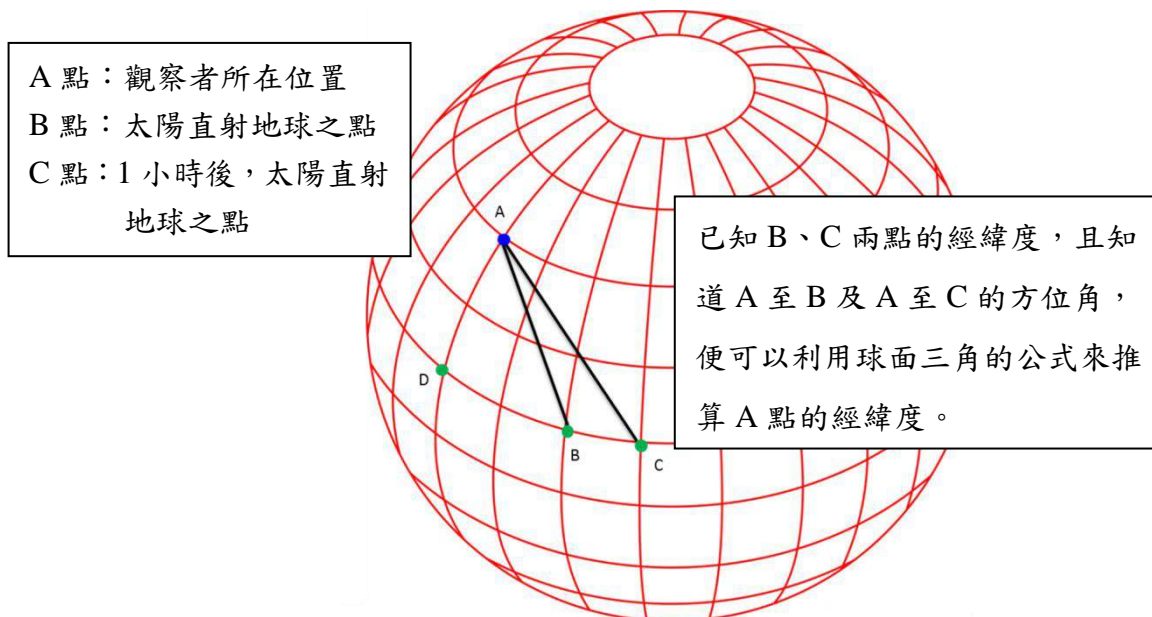
第二個  $A_s$  值是午後太陽方位，取  $360^\circ - A_s$ ，所以同樣可以計算出太陽方位角。

而在已知經緯度及當地時間時，太陽高度角及方位角是具有唯一性(已實際檢驗)，但是在不知道當地時間下，觀測到太陽高度角及方位角是無法利用公式回推出所在地的經緯度，因此必須採用其他方式來計算經緯度。

假設可以觀測到太陽在天空的位置(方位角)，知道觀測時的時間(非當地時間，可能是格林威治標準時間或者是台灣標準時間)，及方向。

### 思考模式

太陽直射地球的位置，會隨著四季及時間而規律變換，因此可以輕易推算出來。而每經過 1 小時，太陽直射位置的經度會有 15°的變化，所以只要觀測到間隔 1 小時所觀測到的太陽方位角便可以利用三角定位法推算出觀測者的經緯度。



首先，由觀測時的時間及日期來推算太陽直射地球的經緯度。

#### 步驟一：由日期來推估太陽直射地球位置的緯度(赤緯)。

假設太陽垂直照射地球的緯度是以簡諧運動的方式在北回歸線(緯度 23.45°)和南回歸線(緯度-23.45°)之間來回運動，我們可以取 23.45°為圓周運動的半徑而導出太陽垂直照射地球緯度的簡諧運動公式：

$$\delta = -23.45^\circ \cos\left(\frac{360}{365}(n + 10)\right) (\delta : \text{太陽垂直照射地球的緯度})$$

n=1 為 1 月 1 日，n=2 為 1 月 2 日以此類推。

或者是參考(中華民國第四十五屆中小學科學展覽會高中組地球科學科以竿窺天談圭表) 所提供的公式

$$\delta = 23.45^\circ \cos\left(\frac{360}{365.25} \times (n - 0.03n \sin \frac{360}{365.25} \times n)\right) \quad (6 \text{ 月 } 22 \text{ 日} \sim 12 \text{ 月 } 21 \text{ 日})$$

$$\delta = 23.45^\circ \cos\left(\frac{360}{365.25} \times (n - 1.75 \times \sin \frac{360}{365.25} \times n)\right) \quad (12 \text{ 月 } 22 \text{ 日} \sim 6 \text{ 月 } 21 \text{ 日})$$

## 步驟二：由手錶時間來推估太陽直射地球的經度。

以臺北時間(GMT+8:00)為例，假設手錶顯示臺北時間 14:00，轉換為格林威治時間為 6:00，代表此時太陽約直射東經 $(12-6)*15^{\circ}=90^{\circ}$ 。(任何地點手錶皆可，只要換算成格林威治時間，不需要知道觀測者所在位置的當地時間，因為不知道經緯度，又如何知道當地實際時間)

## 步驟三：測量當地太陽方位角及經過一小時後太陽方位角，來推算所在地經緯度。

首先以簡單的直角三角形來加以近似，(如右圖)

$$\tan\alpha = x/c \dots\dots(1)$$

$$\tan\beta = (x + 15^{\circ})/c \dots\dots(2),$$

兩式相除後 c 值可消掉。

→  $\tan\beta/\tan\alpha = (x + 15)/x$ ，則可以求出 x 值，然後

再由 B 點的經度回推出 A、D 兩點的經度。

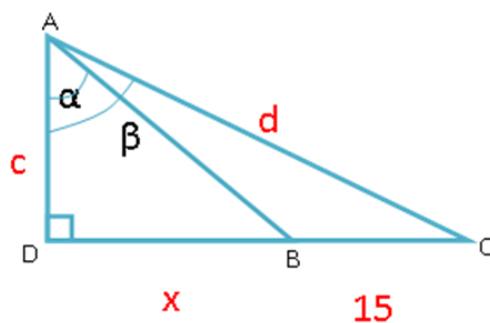


圖 18 直角三角形近似示意圖。

接著利用球面三角公式， $\tan\alpha = \frac{\tan x}{\sin c}$ ，推算出 c，然後加上太陽直射地球的緯度(赤緯)，便是 A 點的緯度。

由台灣氣象局所取得的太陽方位角及仰角資料，以**臺北**為例，在春分當天 13 時、14 時(台灣時間)，太陽方位角分別為  $215.4^{\circ}$ 、 $235.6^{\circ}$ ，推測當時太陽分別直射地球東經 105 度及 90 度，緯度則為 0 度，可初步判斷所在地位置在太陽的東北方。

### 計算過程：

$\alpha=215.4^{\circ}-180^{\circ}=35.4^{\circ}$ ， $\beta=235.6^{\circ}-180^{\circ}=55.6^{\circ}$ 。經由計算 $x \cong 14.22^{\circ}$ ，且  $c=20.89^{\circ}$ ，因此所在地的經度約為  $105^{\circ}+14.22^{\circ}=119.22^{\circ}$ ，緯度為  $0^{\circ}+20.89^{\circ}=20.89^{\circ}$ 。臺北實際經緯度北緯 25.03 度，東經 121.5 度，與估算相近。

利用台灣氣象局所提供的觀測數據，

<http://www.cwb.gov.tw/V7/knowledge/astronomy/cdata/season.htm>。

台 北 (北緯25.03度，東經121.5度)															
季節	時	6	7	8	9	10	11	中天	12	13	14	15	16	17	18
夏至	仰角	11.3	24.1	37.3	50.7	64.2	77.8	88.5	87.8	74.7	61.1	47.6	34.2	21.1	08.4
	方位	069.1	074.1	078.6	082.9	087.4	094.4	180.0	226.4	267.8	273.7	278.1	282.4	287.0	292.1
春分	仰角	01.9	15.1	28.5	41.3	53.0	61.9	65.0	64.9	60.2	50.4	38.4	25.4	12.1	
	方位	090.7	097.3	104.7	114.2	128.2	150.9	180.0	184.1	215.4	235.6	248.3	257.2	264.3	
冬至	仰角		04.2	15.6	25.9	34.3	39.8	41.5	41.4	38.8	32.6	23.6	13.1	01.7	
	方位		118.3	125.9	135.7	148.3	164.1	180.0	182.1	199.8	214.9	226.8	236.0	243.2	

採用直角三角形近似法做計算。

台灣時間	春秋分		夏至		冬至	
	經度	緯度	經度	緯度	經度	緯度
8~9 點	143.96	10.20	140.76	28.65	128.91	24.91
9~10 點	130.03	16.87	141.39	24.52	124.14	28.28
10~11 點	123.31	22.07	113.40	25.18	122.16	29.72
11 點~11 點半	120.03	28.05	123.94	24.29	121.91	30.47
11~12 點	117.78	32.80	118.68	24.69	缺	缺
實際值	121.50	25.03	121.50	25.03	121.50	25.03
12~13 點	121.68	24.45	120.63	24.04	121.79	31.09
13~14 點	119.22	21.14	126.95	24.93	121.00	29.35
14~15 點	110.82	15.34	102.49	25.24	118.49	27.65
15~16 點	94.96	8.56	102.53	30.02	113.24	24.32
16~17 點	71.75	2.96	98.41	37.46	104.74	18.51

由以上的計算結果發現：

- (1) 越接近正午，方位角變化越大，所求得之經緯度越準確。且越接近正午，太陽經度越接近所在地，所以當太陽方位角為  $180^\circ$  即為正午，此時可以根據時間推算出所在地經度，而可由太陽高度角求得所在地的緯度。
- (2) 當兩方位角橫跨  $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $270^\circ$  時，誤差會變大(淡紅色部分)，因此必須加以避免，可以將時間差縮短為半小時(淡藍色部分)，避開橫跨  $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $270^\circ$  的問題。
- (3) 而在上午 10 點到下午 2 點之內都可以精確地利用太陽方位角變化求得所在地經緯度。



採用球面三角形近似法做計算。

考量地球本身是球體，因此改以球面三角法來降低計算的誤差。

如右圖，已知  $\alpha$ 、 $\beta$  (太陽方位角得知) 求出  $x$ 、 $c$

$$\tan\alpha = \frac{\tan x}{\sin c} \dots\dots(1)$$

$$\tan\beta = \frac{\tan(x + 15^\circ)}{\sin c} \dots\dots(2)$$

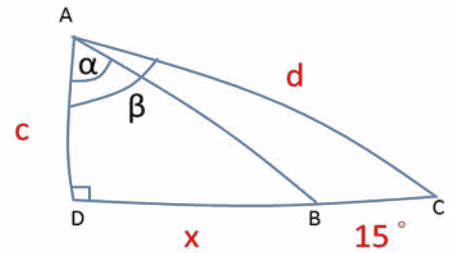


圖 19 球面三角形近似示意圖。

兩式相除

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\tan(x + 15^\circ)}{\tan x} = \frac{\frac{\tan x + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ \tan x}}{\tan x} = m$$

，令  $\tan 15^\circ = n$ ，經整理後  $m \cdot n \cdot \tan^2 x + (1 - m) \times \tan x + n = 0$

$$\tan x = \frac{(m - 1) \pm \sqrt{(1 - m)^2 - 4mn^2}}{2m \cdot n}$$

$$x = \tan^{-1} \left[ \frac{(m - 1) \pm \sqrt{(1 - m)^2 - 4mn^2}}{2m \cdot n} \right]$$

$x$  有兩種可能的結果，到底是取正還是取負?本組進行了下列的測試。

(一) 固定日期為 2015 年 3 月 21 日，太陽直射赤道，觀察者位在東經 E120°，改變緯度為 N15°~N75°及 S15°~S75°，並以 Stellarium 軟體所提供太陽方位角為數據來測試。因為篇幅的關係，僅列出 N30°及 N60°之結果。

實際座標	日期時間	方位角	直角法		球面三角法(取負)		方位角 角度差值	正三角法(取正)	
			經度	緯度	經度	緯度		經度	緯度
<b>E120N30</b>	2015/3/21								
	07:00	96.6	168.46	3.11	166.96	3.53	8.3	118.04	29.97
	08:00	104.9	145.28	9.67	137.52	14.10	10.2	117.48	30.77
	09:00	115.1	128.88	18.03	117.02	31.33	13.6		
	10:00	128.7	120.75	24.68	118.19	29.80	20		
	11:00	148.7	118.21	28.82	118.16	29.86	27.6		
	12:00	176.3	122.40	40.45	121.85	29.92	28.8		
	13:00	205.1	116.56	25.90	118.07	29.70	22		
	14:00	227.1	109.87	19.62	117.90	29.47	15		
	15:00	242.1	95.80	11.60	106.30	18.78	10.8	118.70	30.39
	16:00	252.9	74.17	4.46	76.70	5.30	8.6	118.30	29.87
	17:00	261.5							

實際座標	日期時間	方位角	直角法		球面三角法(取負)		方位角 角度差值	正三角法(取正)	
			經度	緯度	經度	緯度		經度	緯度
<b>E120N60</b>	2015/3/21								
	07:00	101.4	168.39	5.45	166.87	6.19	13.4	118.13	59.78
	08:00	114.8	145.15	17.03	137.15	25.38	14.25	117.85	60.98
	09:00	129.05	129.13	32.12	118.36	59.20	15.3		
	10:00	144.35	120.69	46.76	118.09	60.25	16.35		
	11:00	160.7	118.25	56.64	118.19	59.63	17.2		
	12:00	177.9	122.36	#NUM!	121.82	60.20	17.2		
	13:00	195.1	116.60	49.51	118.11	59.69	16.65		
	14:00	211.75	109.89	35.77	117.96	59.07	15.6		
	15:00	227.35	96.32	21.07	-60.84	106.95	14.35	117.63	58.14
	16:00	241.7	74.06	7.75	76.53	9.20	13.7	118.47	61.35
	17:00	255.4							

根據測試的結果發現在時間 9:00~15:00 求解時取負，而在 7:00~9:00 及 15:00~17:00 取正是所求得的 x 值較為正確，本組認為當越接近正午時 x 之值理當越小，而越遠離則越大。接著將經緯度轉換成 x-y 座標，藉以表示計算結果與實際值偏差情形。舉例來說 E120°N30°便是代表(120,30)，而偏差情形便以兩點間的距離大小來表示。

此外，經由觀察本組認為兩次測量到的太陽方位角之差值是決定取正還是取負的關鍵，由圖可以發現當方位角變化大於 15°時取正，小於 15°時取負，也就是以太陽 1 小時所走的經度度數作判別。若是以 30 分鐘時間間隔做測量，則以 7.5°作判別。

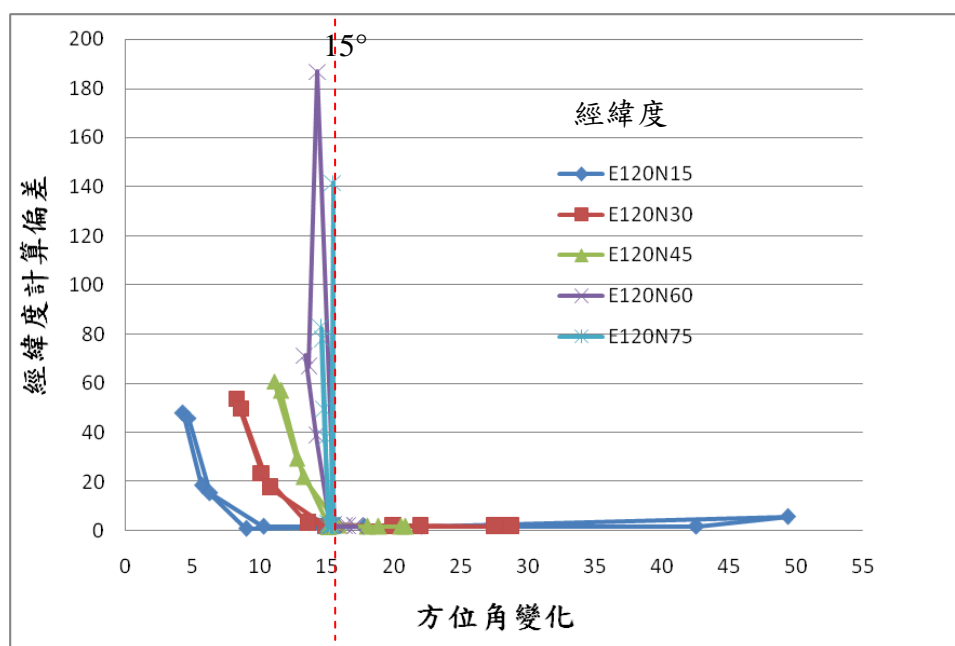


圖 20 若 x 取負時，方位角變化與計算經緯度偏差之關係圖

(二) 固定日期為 2015 年 3 月 21 日，太陽直射赤道，觀察者位在東經 E120°N15°，改變兩次測量的時間差，分別為 30 分及 15 分探討本推算方式的適用性。

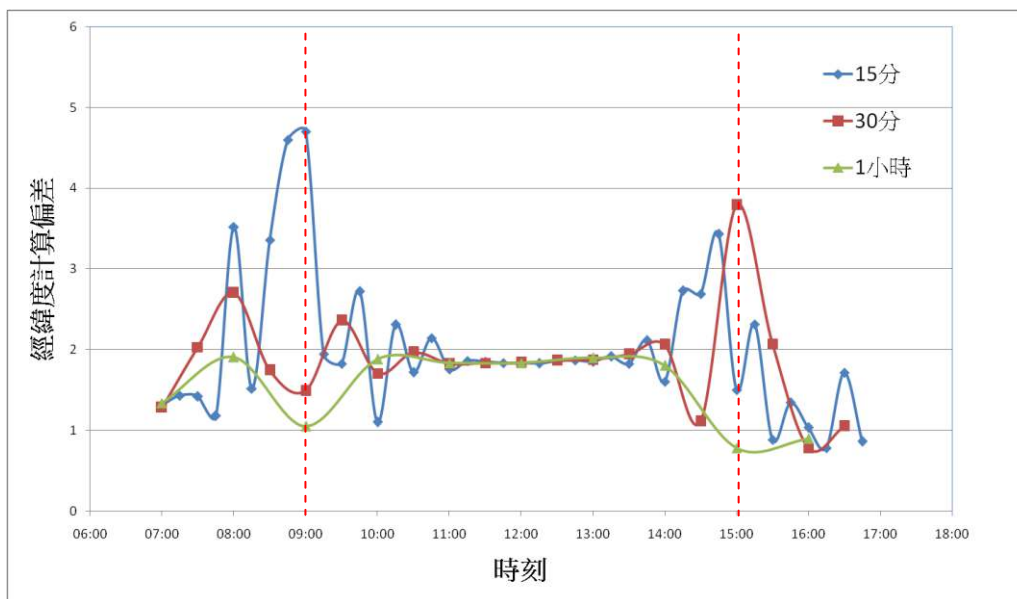


圖 21 不同測量時間間隔，經緯度計算偏差與時刻之關係圖

由圖 21 可以發現測量時間間隔越大，經緯度偏差越穩定，若以較小的測量時間間隔來推算經緯度，則會在 9:00 及 15:00 產生較大的偏差，這是因為求解時取正或取負所造成的。因此本組認為要取得迅速的定位效果，可以每 15 分鐘測量太陽的方位角來作推算。

(三) 固定日期為 2015 年 3 月 21 日，太陽直射赤道，觀察者位在北緯 N30°，改變經度為 E30°~E150°及 W30°~W150°，因篇幅關係僅列出部份結果。

E30N30						E60N30					
日期時間	方位角	球面三角法(取負)		球面三角法(取正)		日期時間	方位角	球面三角法(取負)		球面三角法(取正)	
2015/3/21		經度	緯度	經度	緯度	2015/3/21		經度	緯度	經度	緯度
13:00	96.57	77.03	3.51	27.97	30	11:00	96.6	106.96	3.53	58.04	29.97
14:00	104.87	47.06	14.3	27.94	30.05	12:00	104.9	76.9	14.41	58.09	29.9
15:00	114.98	28.5	29.4	16.5	49.5	13:00	115.002	58.52	29.41	46.48	49.61
16:00	128.7	28.19	29.8	-13.19	#NUM!	14:00	128.73	58.14	29.89	16.86	#NUM!
17:00	148.7	28.17	29.83	-43.17	#NUM!	15:00	148.7	58.32	29.52	-13.32	#NUM!
18:00	176.33	31.84	29.75			16:00	176.66	61.68	30.2		
19:00	205.23	28.13	29.68	76.87	#NUM!	17:00	205.2	57.84	28.96	107.16	#NUM!
20:00	227.2	27.92	29.38	47.08	84.82	18:00	227.48	59.64	31.45	75.36	68.22
21:00	242.18	15.68	18.25	29.32	31.01	19:00	242.15	48.93	20.82	56.07	27.42
22:00	253	-11.12	6	26.12	27.09	20:00	252.97	15.87	5.05	59.13	31.21

由測試結果發現，改變經度只是單純的改變觀測到太陽時間，對於整體結果並無明顯差異。

(三)最後改變太陽直射地球緯度作測試，測試本推算方法是否適用。我們以太陽直射地球最高緯度 N23.45° 來作測試，也就是所謂的夏至。(使用秋分也可以，不影響測試結果)

考量太陽直射 N23.45°，原本一小時經度差 15°將其修正為  $15^\circ \times \cos(23.45^\circ)$

分別列出 E120°N75°及 E120°S45°計算結果。

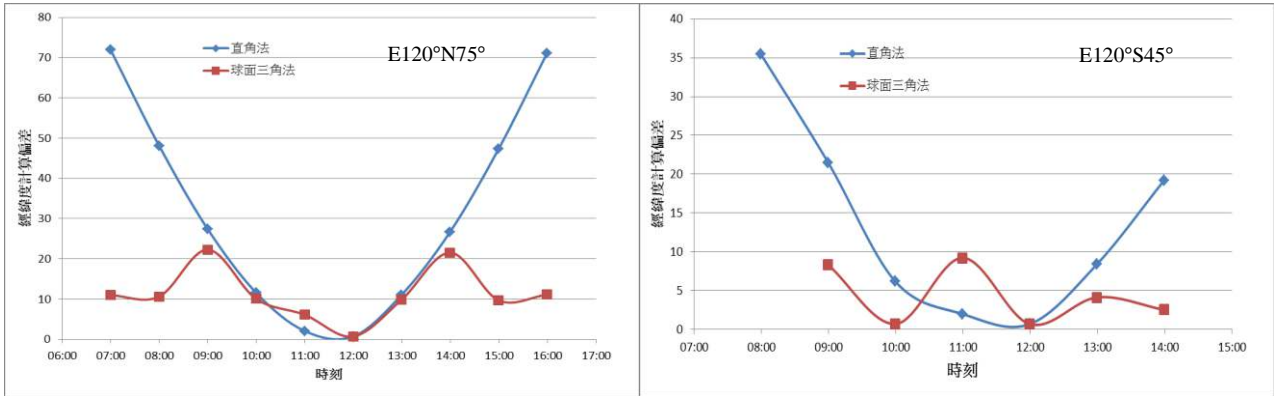


圖 22 太陽直射 N23.45°，不同地點(E120°N75°及 E120°S45°)，經緯度計算偏差與時刻之關係圖。

由圖 22 測試結果得知：

- 1、若太陽直射點與觀測者在同一個半球，則經緯度計算偏差會形成以正午 12:00 為對稱軸的對稱圖形。
- 2、與太陽直射赤道的結果相比，很顯然太陽直射點緯度越高，適用範圍就越小，但是在正午 12:00，誤差依舊極低。

(四) 在測試過程發現當太陽方位角跨越 0°-180°線時，推算方式往往失靈，因此本組在研究出一套專門解決此一情形之計算模式。

$$\tan\alpha = \frac{\tan x_1}{\sin c} \dots\dots(1)$$

$$\tan\beta = \frac{\tan x_2}{\sin c} \dots\dots(2), \text{ 又 } x_1+x_2=15^\circ$$

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\tan(15 - x_1)}{\tan x_1} = \frac{\tan 15 - \tan x_1}{1 + \tan 15 \times \tan x_1} = m$$

$$\text{, 令 } \tan 15^\circ = n, \text{ 經整理後 } m \cdot n \cdot \tan^2 x_1 + (1 + m) \times \tan x_1 - n = 0$$

$$\tan x_1 = \frac{-(m + 1) \pm \sqrt{(m + 1)^2 + 4mn^2}}{2m \cdot n} \quad (\text{取正})$$

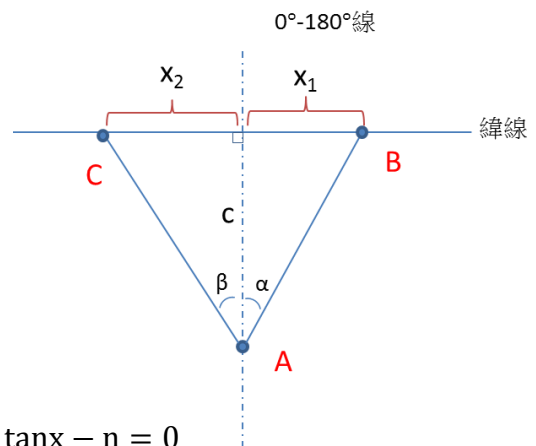


圖 23 球面三角法 0°-180°線，推算示意圖。

$$x_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{-(m+1) + \sqrt{(1+m)^2 + 4mn^2}}{2m \cdot n} \right]$$

最後同樣再利用球面三角公式回推出 c，便可以知道觀測者經緯度。

以太陽直射陽直射 N23.45°，固定經度 120°，不同緯度的計算結果。

實際 經緯度	方位角	計算 經度	計算 緯度	實際 經緯度	方位角	計算 經度	計算 緯度																																		
E120N75	179.5	120.39	74.40	E120N00	0.95	120.39	-0.69																																		
	197.02				329.83			E120N60	179.4	120.35	59.50	E120S15	0.6	120.38	-15.69	202.05	339.35	E120N45	178.95	120.37	44.36	E120S30	0.45	120.37	-30.82	213.7	343.65	E120N30	176.7	120.34	29.35	E120S45	0.4	120.37	-45.57	246.7	345.7	E120N15	2.55	120.40	14.33
E120N60	179.4	120.35	59.50	E120S15	0.6	120.38	-15.69																																		
	202.05				339.35			E120N45	178.95	120.37	44.36	E120S30	0.45	120.37	-30.82	213.7	343.65	E120N30	176.7	120.34	29.35	E120S45	0.4	120.37	-45.57	246.7	345.7	E120N15	2.55	120.40	14.33	E120S60	0.37	120.37	-61.16	303.73	346.55				
E120N45	178.95	120.37	44.36	E120S30	0.45	120.37	-30.82																																		
	213.7				343.65			E120N30	176.7	120.34	29.35	E120S45	0.4	120.37	-45.57	246.7	345.7	E120N15	2.55	120.40	14.33	E120S60	0.37	120.37	-61.16	303.73	346.55														
E120N30	176.7	120.34	29.35	E120S45	0.4	120.37	-45.57																																		
	246.7				345.7			E120N15	2.55	120.40	14.33	E120S60	0.37	120.37	-61.16	303.73	346.55																								
E120N15	2.55	120.40	14.33	E120S60	0.37	120.37	-61.16																																		
	303.73				346.55																																				

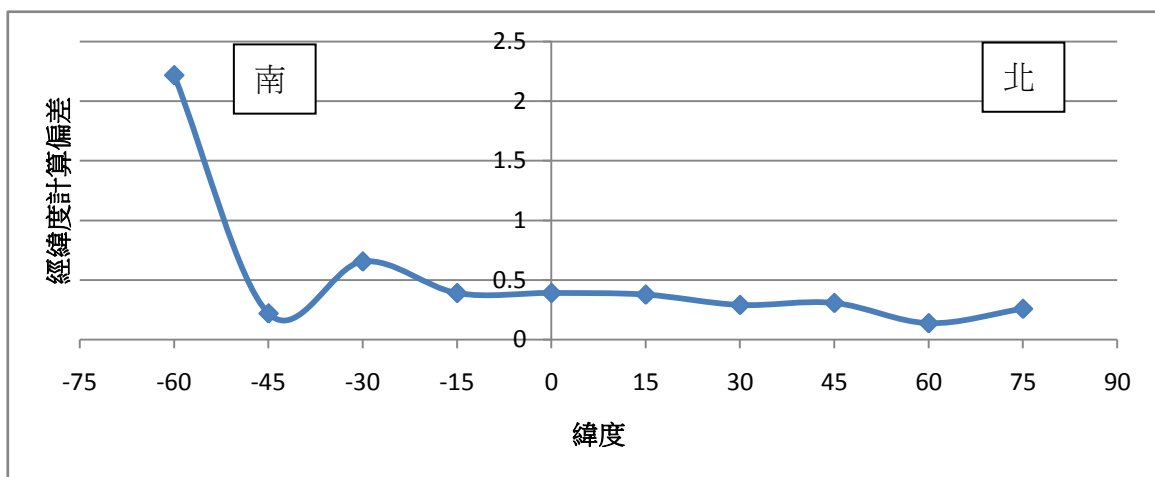


圖 23 太陽直射 N23.45°，不同地緯度，橫跨 0°-180°線時，經緯度計算偏差與時刻之關係圖。

正午時分所估算的結果非常精確，較不受觀測者緯度高低及太陽直射緯度高低之影響。

改以球面三角法做近似，採用台灣氣象局觀測的數據。(台北北緯 25.03 度，東經 121.5 度)

時刻	春秋分			夏至			冬至		
	方位角	經度	緯度	方位角	經度	緯度	方位角	經度	緯度
07:00	97.3	121.91	24.91	74.1	#NUM!	#NUM!	118.3	#NUM!	#NUM!
08:00	104.7	122.48	24.32	78.6	#NUM!	#NUM!	125.9	#NUM!	#NUM!
09:00	114.2	121.77	24.99	82.9	123.50	20.68	135.7	123.73	25.43
10:00	128.2	121.76	24.99	87.4	129.87	23.05	148.3	121.79	25.45
11:00	150.9	121.73	25.05	94.4	119.56	24.49	164.1	121.59	25.762
12:00	184.1	121.73	25.03	226.4	120.59	23.96	182.1	121.60	20.98
13:00	215.4	121.77	25.09	267.8	124.51	24.64	199.8	122.20	28.30
14:00	235.6	121.36	24.66	273.7	119.84	19.22	214.9	122.35	34.57
15:00	248.3	121.81	25.09	278.1	#NUM!	#NUM!	226.8	#NUM!	#NUM!
16:00	257.2	121.68	24.93	282.4	#NUM!	#NUM!	236	#NUM!	#NUM!
17:00	264.3			287			243.2		

經由上表所列結果可以得知，太陽的直射點緯度會影響本方法的適用範圍，如果太陽直射赤道，則所有的時段皆可以使用，但是隨著緯度的增加，適用範圍便會降低，最小的適用範圍大約在正午前後兩小時，但也比一般方法只能在正午使用還來的便利。



為了方便計算，本組利用 EXCEL 程式，整合所有計算過程，只要輸入手錶時間，以及太陽方位角，及測量時間差的經度大小。

使用資料庫的技術，將一年中每天太陽直射的緯度建檔，只要輸入日期，便可以直接輸出太陽赤緯。

先推算格林威治時間，將台灣手錶顯示的時間減去 8 小時

由格林威治時間推算太陽直射經度。

先判斷 $\alpha$ 、 $\beta$  的  $\tan$  值大小，然後較大之值除以較小之值。

時區	時間A	時間B	格林威治時間A	格林威治時間B	太陽直射經度A	太陽直射經度B			
	8 16	17	8	9	60	45			
日期	太陽直射緯度	方位角A	方位角B	$\tan\alpha$ (小角)	$\tan\beta$ (大角)	比值			
3月21日	0	257.2	264.3	4.401516439	10.01870799	2.276194608			
x	c	x	c	兩點經度差值	太陽直射點緯度修正	$\tan 15$ 之值			
61.68070757	24.93600204	13.31929268	3.083271404	15	15	0.267949188			
球面三角(取正)		球面三角(取負)							
經度	緯度	經度	緯度	球面三角計算區					
121.68	24.94	73.32	3.08	0.288784349	0.236745548	0.232465511	13.31929	13.31929268	
				2.263604868	1.855704362	1.076531432	61.68071	61.68070757	

假設方位角大於  $180^\circ$ ，經度則為太陽直射經度  $A+X$ ，若小於  $180^\circ$ ，經度則為太陽直射經度  $B-X$

c 值加上太陽直射緯度

先判斷 $\alpha$ 、 $\beta$  的  $\tan$  值大小，然後以較小之值以球面三角公式計算 c 值。

**實際觀測太陽方位角，並推算出所在地經緯度**

以平板電腦或智慧型手機當作工具，及”指南針- Smart Compass”軟體來測量太陽方位角。



圖 24 指南針。

08:11	08:58	10:04	11:14	12:04	13:05

2014/1/29					
	直角三角形近似法		球面三角近似法		
台灣時間	經度	緯度	修正度數	經度	緯度
8~9 點	144.51	3.94	1.2°	126.38	27.69
9~10 點	121.78	28.28	2°	125.99	22.42
10~11 點	122.38	20.13	無修正	121.44	23.68
11~12 點	118.31	35.60	1°	119.22	29.94
實際值	120.55	24.09		120.55	24.09
12~13 點	120.00	25.16	無修正	121.27	21.36

**討論：**

- 1、實際在學校操場測試，觀測太陽方位角變化，並使用直角三角形近似法及球面三角形法計算觀測者所在經緯度，能準確推算所在地經緯度。
- 2、因為實際測量會有誤差，因此極易造成球面三角法容易產生無解，而直角三角近似法則無此困擾，因此可以先用直角法初估，再輔以球面三角法算出較為精確的數值

## 肆、結論

### 一、如何由太陽光的偏振情形來決定太陽的位置？

- 1、不同時間所觀測到的日光偏振情形，其極大值對稱軸旋轉角度  $\omega$  與太陽方位角  $A_s$  是成線性的關係， $A_s = -\omega + \varphi$ ，負號代表逆時針旋轉， $\varphi$  角表示偏光膜初始角度，也就是說當太陽方位角改變時，所觀測到太陽光偏振情形也會發生變化，若能調整好一開始偏光膜的起始角度，及旋轉方式，則可以輕易由極大值對稱軸旋轉角度求得太陽方位角。且與太陽光強弱無關，因此在陰天也可適用。
- 2、偏振度  $P$  和  $Z$  值之關係式為  $P(\theta)/P_{\max} = 2Z - 1 \rightarrow P(\theta) = (2Z - 1) P_{\max}$ ，其中  $Z$  值 =  $\frac{1}{1 + \sin^2(h_s)}$ ，實驗發現偏振度確實符合此關係式，證明了觀測方向與太陽方向的夾角會影響偏振度的大小，因此若已知  $P_{\max}$  便可以推算出太陽高度角。

### 二、如何由所觀測到的太陽方位角及高度角來推算所在地的經緯度？

- 1、利用在原地觀測到不同時刻的太陽方位角，時間差可以為 15 分、30 分或 1 小時，並搭配太陽直射地球的經緯度回推兩方向的交點，便是觀測者的所在經緯度。
- 2、研究發現越接近正午，計算結果越精準，但是在剛好越過正午時(跨越  $0^\circ - 180^\circ$ )，會有較大的誤差，本組改以另一模式計算，恰好補足此一缺失，且準確度極高。
- 3、使用直角三角形近似法在使用上不易出現無解，而使用球面三角形法因為求解的關係極易因為方位角  $1^\circ$ 、 $2^\circ$  的誤差而出現無解的情形，因此在實務上，可以先以直角三角形近似法先粗估，再以球面三角形法來輔助，增加準確度。
- 4、太陽的直射點緯度會影響本方法的適用範圍，如果太陽直射赤道，則所有的時段皆可以使用，但是隨著緯度的增加，適用範圍便會降低，最小範圍大約在正午前後的兩小時，但也比一般方法只能在正午使用還來的便利。
- 5、此外，地球並非完美球型，因此在理論計算上就存在誤差，只能採取近似的計算。
- 6、本方法即使在緯度較高的地方仍舊適用，雖然實務上經緯度差  $1^\circ$ ，在地球上可能差到 110 公里，但是在遠洋航海上的使用，只要決定大致的方向，等靠近陸地時，在沿岸行駛，便可以到達目的地。
- 7、雖然現在衛星定位非常便利，但本研究提出另一種定位的思考方向，值得大家參考。

## 伍、參考文獻

- 1、殷瑀萱、胡萱庭，(2010)，”複眼定位器”，中華民國第 50 屆中小學科學展覽會高中組生活與應用科學科，國立台灣科學教育館，臺北。
- 2、關桂霞等，(2009)，”天空偏振模式圖動態特性分析”，計算機與應用軟體，Vol.26 No.12；p179~p181。
- 3、趙開春等，(2013)”天空光偏振模式自動探測裝置”，光學精密工程，Vol.21 No.2；p239~p245。
- 4、AndrásBarta ,GáborHorváth,”Psychophysical study of the visual sun location in pictures of cloudy and twilight skies inspired by Viking navigation”,J. Opt. Soc. Am. A/Vol. 22, No. 6/June 2005.
- 5、Guy Ropars etc. ,“A depolarizer as a possible precise sunstone for Viking navigation by polarized skylight”, Proc. R. Soc. A published online 2 November 2011.
- 6、關桂霞等，(2011)，”天空偏振光分佈的實驗研究”，兵工學報，Vol.32 No.4；p459~p1463。
- 7、張睿恩等，(2003)，”以竿窺天”，中華民國第 43 屆中小學科學展覽會高中組地球科學科，國立台灣科學教育館，臺北。
- 8、張睿恩等，(2005)，”以竿窺天談圭表”，中華民國第 45 屆中小學科學展覽會高中組地球科學科，國立台灣科學教育館，臺北。
- 9、陳冠樺等，(2005)，”大氣層厚度光學測量法之研究及創新”，台灣二〇〇五年國際科學展覽會高中組地球與太空科學科，國立台灣科學教育館，臺北。

## 【評語】 030509

優點：

作者能結合兩個天文觀測上獨立的關係（太陽偏光與照射角度，以及天體在天球位置與觀測者所在地）進行研究；並能自己動手製作儀器，有系統地觀測並收集數據，同時還能應用三角幾何的相關知識來推導一些理論值以驗證實驗結果。

缺點：

本計畫探討的兩項科學關係：「太陽光的偏振情形來決定太陽的方位」及「太陽方位角來推算所觀測者的經緯度」，並非新發現，甚至是已能大致掌握的知識，而作者分別對此所做的實驗與測量，其目的是要檢驗哪些我們還不清楚的地方，可能還要更明確的指出來。此外，雖然作者結合兩者以「提出另一種定位的思考方向」，但其適用性與實用性似乎也待作者更進一步說明(例如：在什麼樣的情況下，只能用太陽能偏極得到其位置，再得到經度？此時可利用的其他工具與資訊又有哪些限制？利用太陽軌跡以判斷所在地經緯度的方法比起觀測夜空中其他天體又有什麼好處?)。

建議改進事項：

見上述「缺點」後半段中的建議，作者可思考如何把目前得到的結果，應用到一些尚未探索，解答的科學問題中。