# 中華民國第55屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

國中組　數學科

**最佳團隊合作獎**

030426

## k 等分凸多邊形面積之實例說明及推論

學校名稱：嘉義縣立太保國民中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國三 林怡津 | 蔡宗憲 |
| 國三 李欣潔 | 官清安 |
| 國三 高恩佑 | |


關鍵詞：k 等分、凸多邊形

摘要：過任一點作射線 k 等分凸多邊形面積，需先考慮點的位置，隨著點的位置不一樣，作法有些許不同。

壹、研究動機：配合課本的「幾何圖形與尺規作圖」、「相似形」及「幾何與證明」章節，且之前老師曾提到凸多邊形上一點之作法，如果點不在凸多邊形上，是否一樣能夠 k 等分凸多邊形面積呢？

貳、研究目的：將一已知的凸多邊形，過任一點作射線 k 等分其面積。

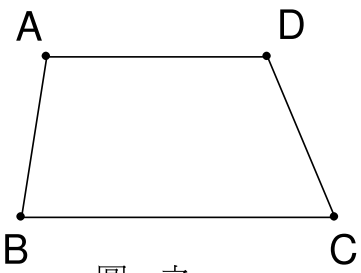
參、研究設備及器材：紙、筆、尺、圓規。

肆、研究過程或方法：

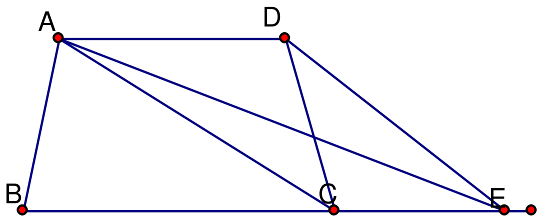
一、凸多邊形上一點

(一)、先將凸多邊形面積轉換爲等面積之三角形。

作圖 1、已知任意四邊形 ABCD，試作△ABE 面積=四邊形 ABCD 面積。
( 如圖一之一 )




圖一之一




圖一之二

作法：( 如圖一之二 )

(1) 連 $\overline{AC}$

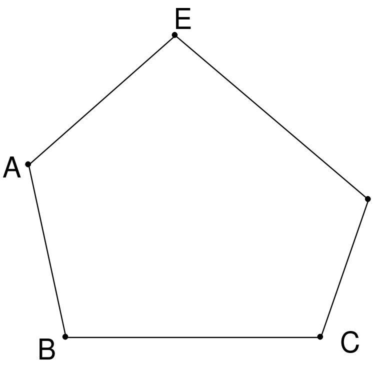
(2) 過 D 點，作 $\overline{DE}$ // $\overline{AC}$ ，交 $\overrightarrow{BC}$ 於 E 點

(3) 連 $\overline{AE}$ ，則△ABE 即爲所求

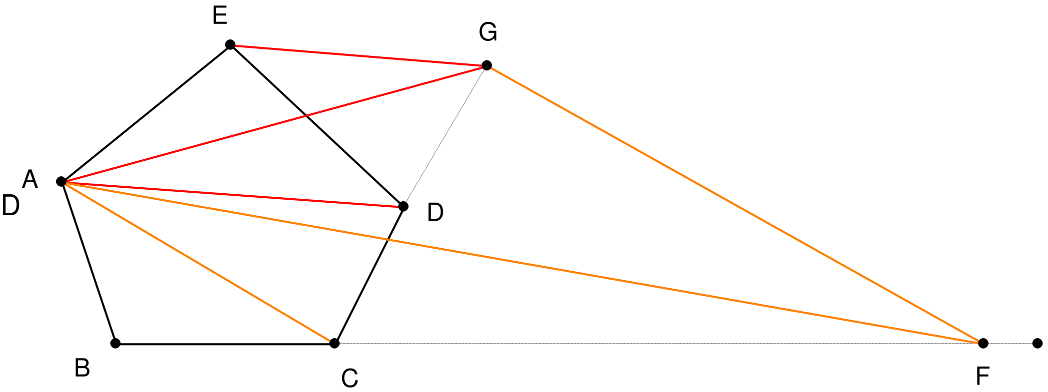
證明：

∵ACED 爲梯形　　∴△ABE 面積=ABCD 面積

作圖 2、已知任一五邊形 ABCDE，試作△ABF 面積=五邊形 ABCDE 面積。
( 如圖二之一 )




圖二之一




圖二之二

作法：( 如圖二之二 )

(1) 連 $\overline{AD}$

(2) 過 E 作 $\overline{EG}$ // $\overline{AD}$ ，交 $\overrightarrow{CD}$ 於 G 點

(3) 連 $\overline{AC}$ ，過 G 作 $\overline{GF}$ // $\overline{AC}$ ，交 $\overrightarrow{BC}$ 於 F

(4) 連 $\overline{AF}$ ，則△ABF 面積=ABCDE 面積

證明：

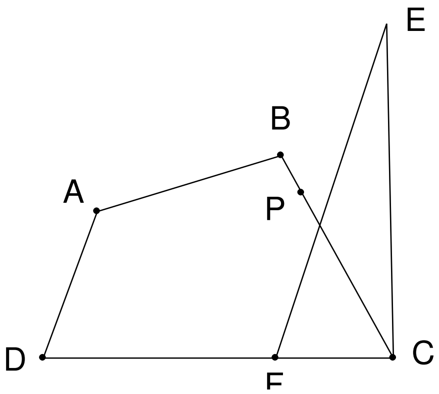
∵ADGE 為梯形　　∴△ACG 面積=ACDE 面積

∵ACFG 為梯形　　∴△ABF 面積=ABCG 面積=ABCDE 面積

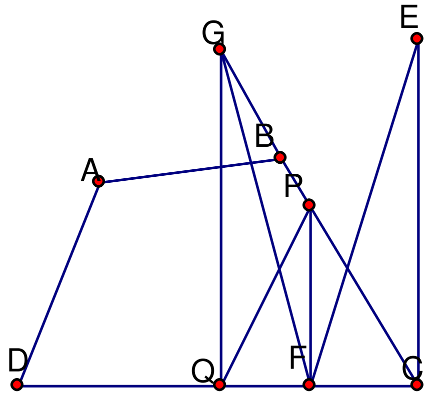
推論一：若為凸 n 多邊形，利用梯形性質，可以轉換為等面積之三角形，再畫出其 k 分之一面積。

(二)、接著開始分割，先舉幾個簡單的例子，概述我們的作法。

作圖 1、已知四邊形 ABCD 和△CEF，F 在 $\overline{CD}$ 上(F≠C、D)，P 在 $\overline{BC}$ 上(P≠B、C)，求作 $\overline{CD}$ 上一點 Q，使得△CPQ 面積=△CEF 面積。( 如圖三之一 )




圖三之一




圖三之二

作法：( 如圖三之二 )

(1) 作△CEF 面積=△CFG 面積

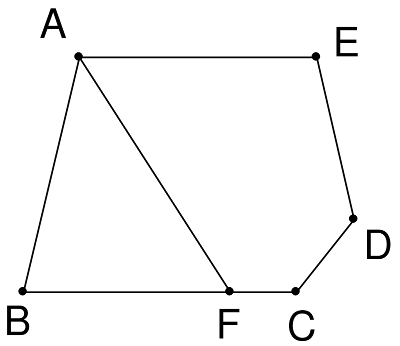
(2) 連 $\overline{PF}$ ，過 G 作 $\overline{GQ} // \overline{PF}$ ，交 $\overline{CD}$ 於 Q 點

(3) 連 $\overline{PQ}$ ，則△CPQ 即爲所求

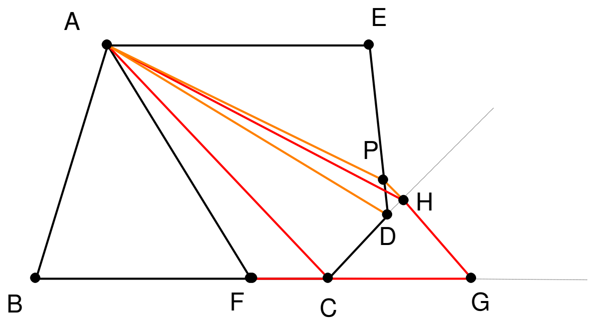
證明：

∵△CFG 面積=△CEF 面積(同底等高)　　∴△CPQ 面積=△CFG 面積

作圖 2、已知△ABF 面積=$\frac{1}{3}$五邊形 ABCDE 面積，試作一點 P 在五邊形上，使得 $\overline{AF}$ 和 $\overline{AP}$ 三等分五邊形 ABCDE 面積。( 如圖四之一 )




圖四之一




圖四之二

作法：( 如圖四之二 )

(1) 將 $\overline{BC}$ 延伸，作 $\overline{FG} = \overline{BF}$

(2) 連 $\overline{CA}$ ，延伸 $\overline{CD}$ ，作 $\overline{GH} // \overline{AC}$ ，交 $\overrightarrow{CD}$ 於 H 點

(3) 連 $\overline{AD}$ ，作 $\overline{PH} // \overline{AD}$ ，交 $\overline{DE}$ 於 P 點

(4) 連 $\overline{AP}$ ，則 $\overline{AP}$ 即爲所求

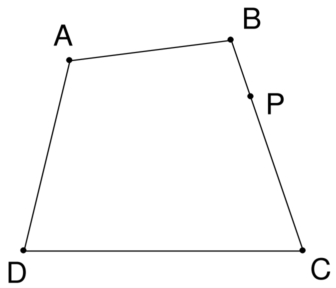
證明：

∵ $\overline{FG} = \overline{BF}$　　∴△AFG 面積＝△ABF 面積

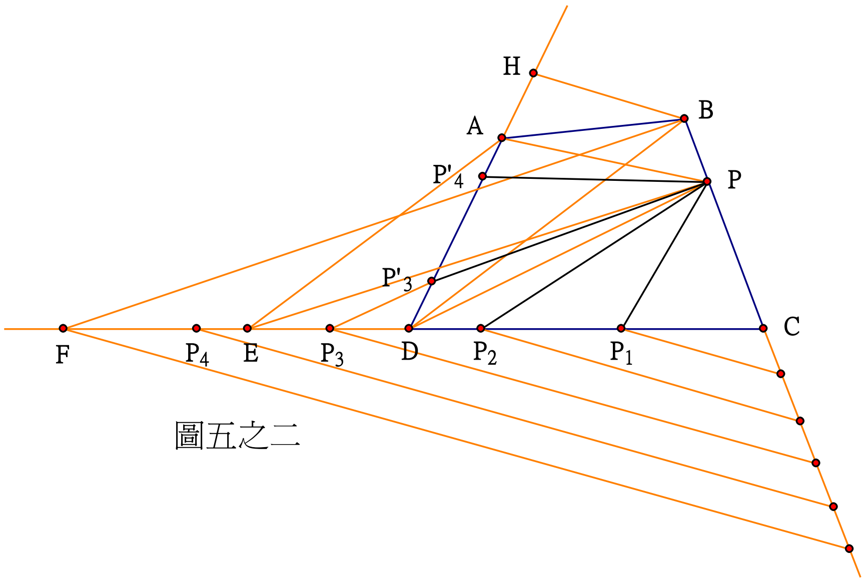
∵ACGH 爲梯形　　∴AFGH 面積=△AFG 面積

∵ADHP 爲梯形　　∴AFCDP 面積=AFGH 面積

作圖 3、任意四邊形 ABCD，P 在 $\overline{BC}$ 上，求作過 P 點之射線，將四邊形五等分 ( 如圖五之一 )




圖五之一




圖五之二

作法：( 如圖十五之二 )

(1) 連 $\overline{BD}$，過 A 點，作 $\overline{AE} // \overline{BD}$，交 $\overrightarrow{CD}$ 於 E 點

(2) 連 $\overline{PE}$，過 B 點，作 $\overline{BF} // \overline{PE}$，交 $\overrightarrow{CD}$ 於 F 點

(3) 將 $\overline{CF}$ 五等分，可得 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 四點

(4) 連 $\overline{PD}$，過 $P_3$ 點，作 $\overline{P_3P_3'} // \overline{PD}$，交 $\overline{AD}$ 於 $P_3'$ 點

(5) 連 $\overline{PA}$，過 B 點作 $\overline{BH} // \overline{PA}$，交 $\overrightarrow{DA}$ 於 H 點

(6) 作 $\overline{P_3'P_4'} = \overline{P_4'H}$，則 $\overline{PP_1}$、$\overline{PP_2}$、$\overline{PP_3'}$、$\overline{PP_4'}$ 即為所求

證明：

(1) 由肆、一、(二)、作圖 1 的證明，可得證 $\Delta PCF$ 面積= ABCD 面積

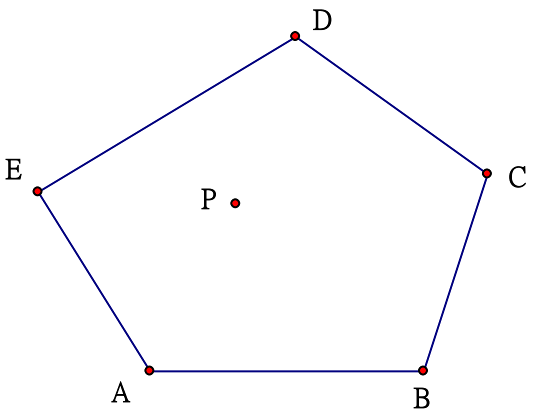
(2) 由肆、一、(二)、作圖 2 的證明，可得證 $\overline{PP_1}$、$\overline{PP_2}$、$\overline{PP_3'}$、$\overline{PP_4'}$ 五等分 ABCD 面積

推論二：若為凸 n 多邊形，利用梯形性質，可於有限步驟內，將凸 n 多邊形外之面積轉換至凸 n 多邊形內，藉此 k 等分凸 n 多邊形面積。

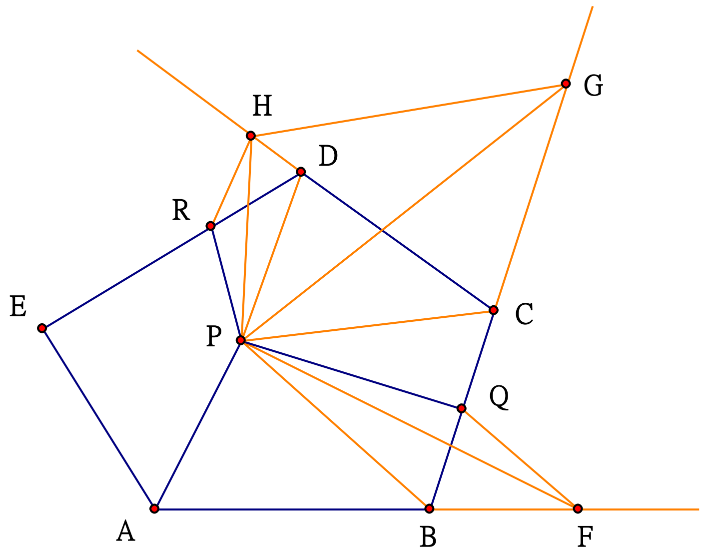
二、凸多邊形內一點

(一)、舉例說明，形內一點之分割法。

作圖 1、已知五邊形 ABCDE，過 P 作射線將其三等分。




圖六之一




圖六之二

作法：( 如圖六之二 )

(1) 連 $\overline{PA}$，利用肆、一、(一)、作圖 2 之作法，

作△PAF 面積 = $\frac{1}{3}$ 五邊形 ABCDE 面積

(2) 利用肆、一、(二)、作圖 2 之作法，可得 $\overline{PQ}$

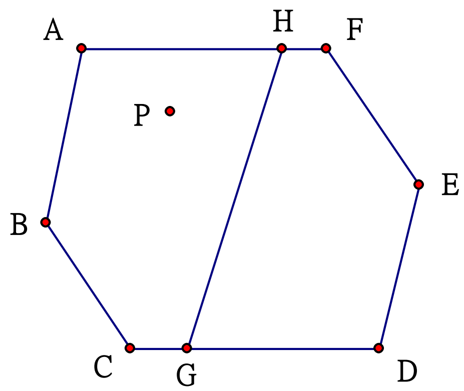
(3) 同理可得 $\overline{PR}$

證明：由肆、一、(一)、作圖 2 及肆、一、(二)、作圖 2 的證明，即可得證

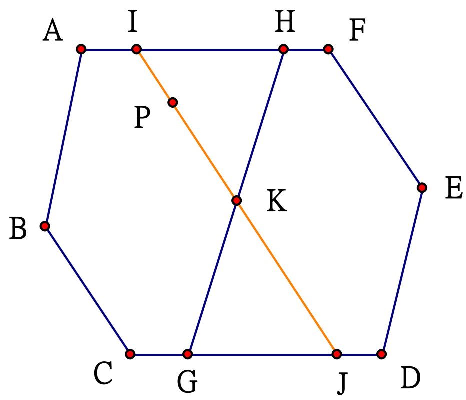
推論三：若為凸 n 多邊形，利用形上一點之作法，即可過形內一點作射線 k 等分凸 n 多邊形面積。

(二)、形內一點作二等分時，將此兩射線變為一直線。

作圖 1、六邊形 ABCDEF 中，已知 $\overline{AF}$ // $\overline{CD}$，求作過 P 之直線，各交 $\overline{AF}$ 、 $\overline{CD}$ 及 $\overline{GH}$ 於 I、J、K，使得△HKI 面積=△GKJ 面積。




圖七之一




圖七之二

作法：( 如圖七之二 )

(1) 作$\overline{GH}$中點 K

(2) 連$\overleftrightarrow{PK}$，各交$\overline{AF}$ 、$\overline{CD}$於 I、J 兩點

(3) 則△HKI 面積=△GKJ 面積

證明：

∵∠HIK=∠GJK

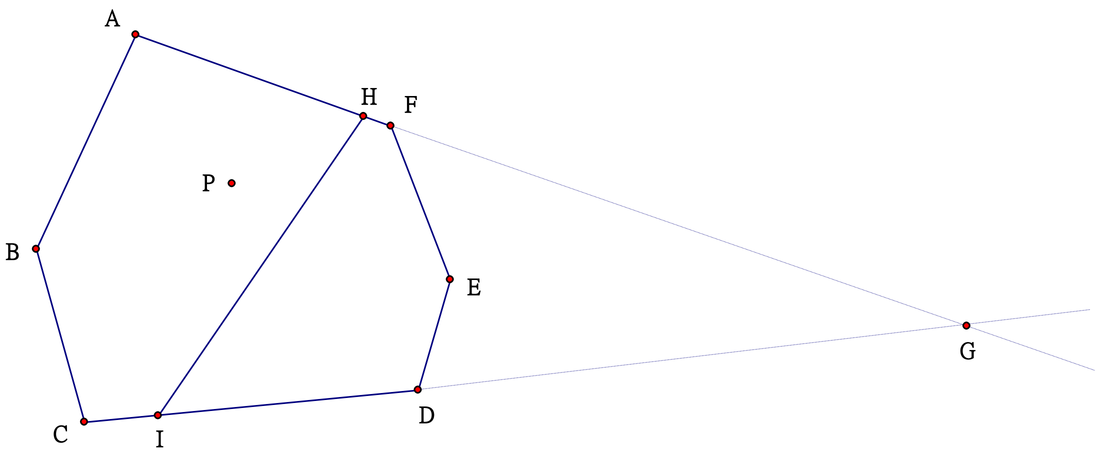
∠HKI=∠GKJ

$\overline{HK}=\overline{GK}$

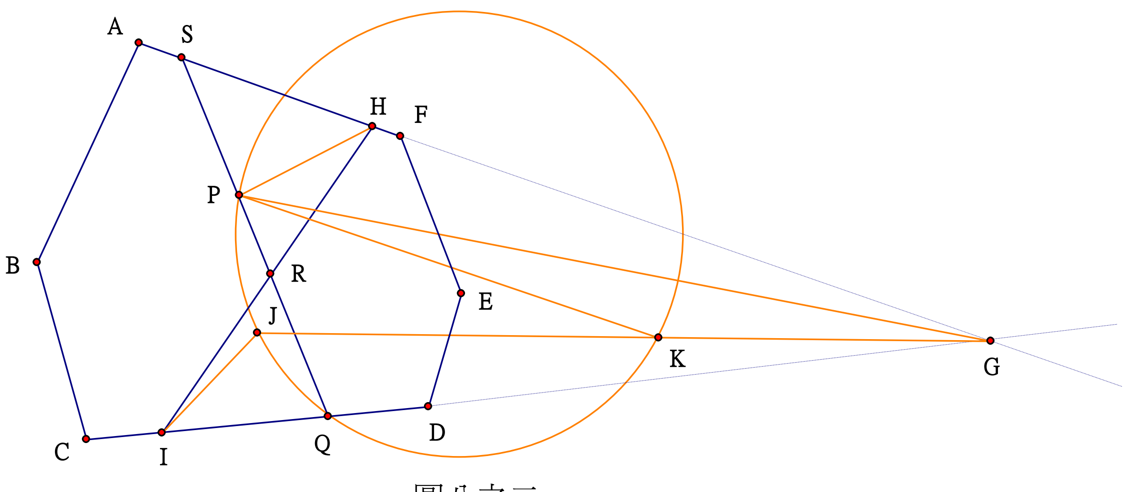
∴△HKI ≅△GKJ

⇒△HKI 面積=△GKJ 面積

作圖 2、六邊形 ABCDEF 中，已知$\overline{AF}$不平行$\overline{CD}$，且交於 G 點，求作過 P 之直線，各交$\overline{AF}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{HI}$於 S、Q、R，使得△HRS 面積=△IRQ 面積。




圖八之一




圖八之二

作法：( 如圖八之二 )

(1) 作△HPG～△JIG

(2) 作$\overline{PK}$ // $\overline{AG}$ ，交$\overline{GJ}$ 於 K

(3) 作一圓過 P、K、J，交$\overleftrightarrow{GI}$ 於 Q

(4) 連$\overleftrightarrow{PQ}$，各交$\overline{HI}$ 、 $\overrightarrow{AF}$ 於 R、S，則$\overline{SQ}$即爲所求

證明：

(1) ∵△HPG～△JIG　　∴∠HGP=∠IGJ

∵ $\overline{PK}$ // $\overline{AG}$　　∴∠GSP=∠QPK

又∠QPK =∠QJG

⇒ ∠GSP =∠QJG

⇒△PGS～△QGJ

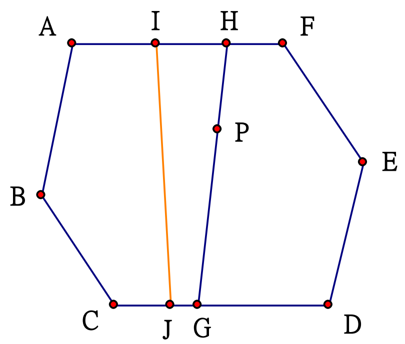
(2) ∵ $\overline{GP}$ ： $\overline{GQ}$ = $\overline{GS}$ ： $\overline{GJ}$　　∴ $\overline{GP}\times\overline{GJ}=\overline{GQ}\times\overline{GS}$

∵ $\overline{GP}$ ： $\overline{GI}$ = $\overline{GH}$ ： $\overline{GJ}$　　∴ $\overline{GP}\times\overline{GJ}=\overline{GI}\times\overline{GH}$

⇒ $\overline{GQ}\times\overline{GS}=\overline{GI}\times\overline{GH}$

⇒△HRS 面積=△IRQ 面積

性質 1：已知$\overline{GH}$ 爲六邊形 ABCDEF 面積之二等分線，形上任一點作面積之二等分線，則必與$\overline{GH}$ 有交點。




圖九

證明：( 如圖九 )

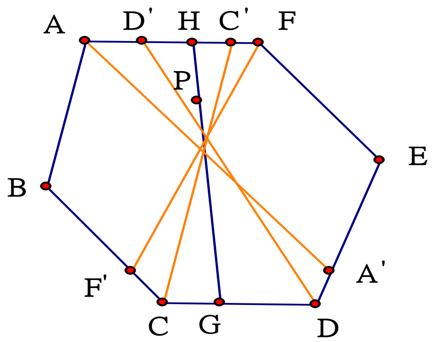
令 $\overline{IJ}$ 爲六邊形 ABCDEF 面積之任意二等分線

∵若 $\overline{IJ}$ 和 $\overline{GH}$ 不相交

則 ABCGH 面積=$\frac{1}{2}$ ABCDEF 面積＞ABCJI 面積=$\frac{1}{2}$ ABCDEF 面積〈矛盾〉

∴ $\overline{IJ}$ 和 $\overline{GH}$ 必交於一點

性質 2：已知 $\overline{GH}$ 為六邊形 ABCDEF 面積之二等分線，過 A、F、D、C 各作面積之二等分線 $\overline{AA'}$、$\overline{FF'}$、$\overline{DD'}$、$\overline{CC'}$，則 $\overline{AA'}$、$\overline{FF'}$、$\overline{DD'}$、$\overline{CC'}$ 必有一條其兩端點與 $\overline{GH}$ 之兩端邊各在同一邊上。




圖十

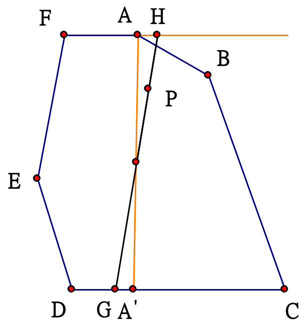
證明：( 如圖十 )

若 $\overline{AA'}$ 和 $\overline{FF'}$ 其兩端點不與 $\overline{GH}$ 之兩端邊各在同一邊上，

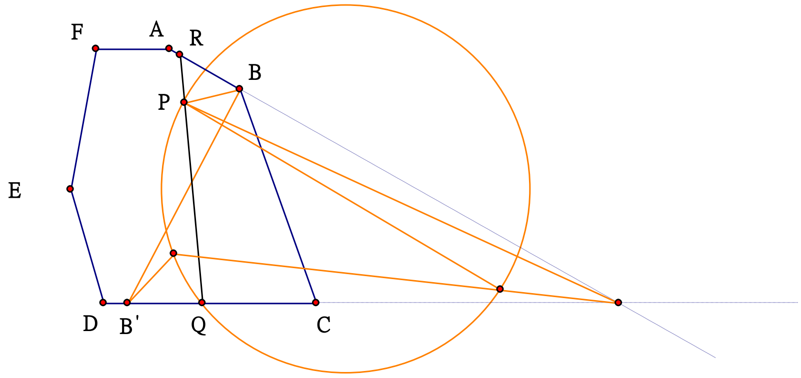
則根據性質 1，可得 $\overline{DD'}$ 和 $\overline{CC'}$ 滿足所求

推論四：必有過凸 n 多邊形頂點之面積二等分線，其兩端點和過形內一點之面積二等分線的兩端點各在同一邊上。

作圖 3、六邊形 ABCDEF 中，過形內一點作一直線將其面積二等分。




圖十一之一




圖十一之二

作法：

(1) 若 $\overline{AF}$ //$\overline{CD}$〈如圖十一之一〉，利用形上一點之作法，過 A 點作出面積之二等分線 $\overline{AA'}$，再利用肆、二、(二)、作圖 1，過 P 作出$\overline{GH}$ 二等分線，但 H 不在形上，故非所求

(2) 若 $\overline{BA}$不平行$\overline{CD}$〈如圖十一之二〉，利用形上一點之作法，過 B 點作出面積之二等分線 $\overline{BB'}$，再利用肆、二、(二)、作圖 2，過 P 作出$\overline{QR}$ 二等分線，則$\overline{QR}$即爲所求

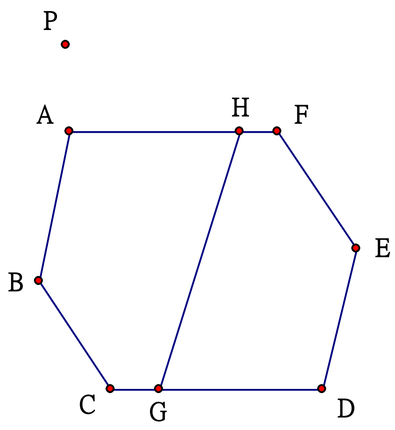
證明：由肆、二、(二)、作圖 1 及作圖 2 之證明即可得證

推論五：由作圖 3 可得知，若$\overline{QR}$亦非所求，重複同樣步驟，根據性質 2，必可找到過形內一點之面積二等分線，其兩端點皆在形上。

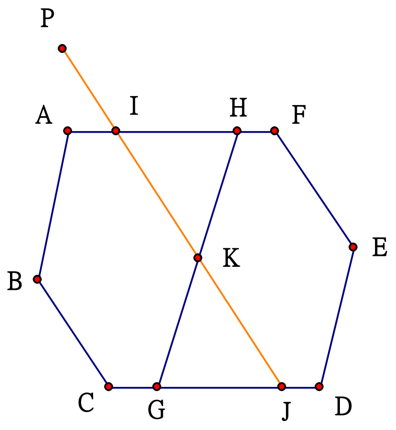
三、凸多邊形外一點

(一)、概述各兩個會使用到的作圖及性質。

作圖 1、六邊形 ABCDEF 中，已知 $\overline{AF}$ //$\overline{CD}$，求作過 P 之直線，各交 $\overline{AF}$ 、$\overline{CD}$ 及$\overline{GH}$ 於 I、J、K，使得△HKI 面積=△GKJ 面積。




圖十二之一




圖十二之二

作法：( 如圖十二之二 )

(1) 作 $\overline{GH}$ 中點 K

(2) 連 $\overleftrightarrow{PK}$，各交 $\overline{AF}$ 、$\overline{CD}$ 於 I、J 兩點

(3) 則△HKI 面積=△GKJ 面積

證明：

∵∠HIK=∠GJK

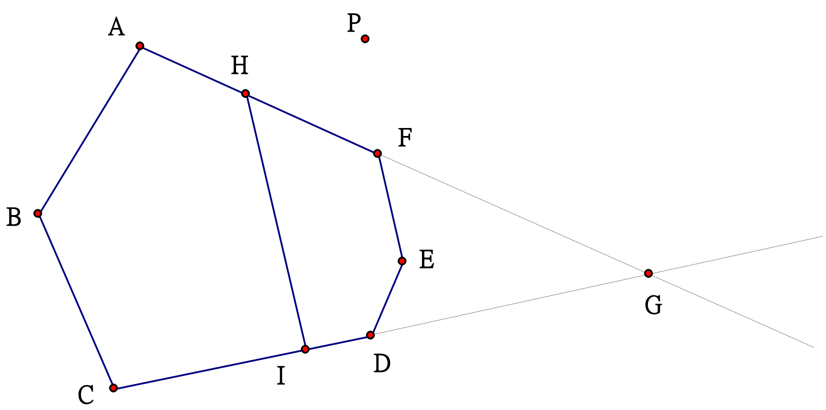
∠HKI=∠GKJ

$\overline{HK} = \overline{GK}$

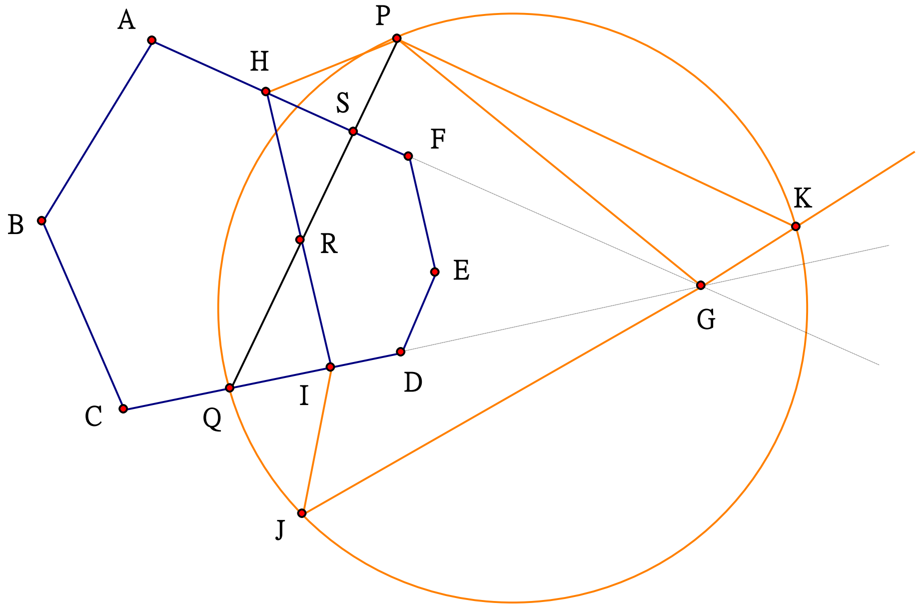
∴△HKI ≅△GKJ

⇒△HKI 面積=△GKJ 面積

作圖 2、六邊形 ABCDEF 中，已知 $\overline{AF}$ 不平行 $\overline{CD}$，且交於 G 點，求作過 P 之直線，各交 $\overline{AF}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{HI}$ 於 S、Q、R，使得△HRS 面積=△IRQ 面積。




圖十三之一




圖十三之二

作法：( 如圖十三之二 )

(1) 作$\triangle HPG \sim \triangle JIG$

(2) 作 $\overline{PK} // \overline{AG}$ ，交 $\overrightarrow{JG}$ 於 K

(3) 作一圓過 P、K、J，交 $\overleftrightarrow{GI}$ 於 Q

(4) 連 $\overleftrightarrow{PQ}$ ，各交 $\overline{HI}$ 、 $\overrightarrow{AF}$ 於 R、S，則 $\overline{SQ}$ 即爲所求

證明：

(1) $\because \angle PGS = \angle JGQ$

又 $\angle GSP = \angle GJQ$〈$\angle GSP + \angle KPS = \angle GJQ + \angle KPS$〉

$\Rightarrow \triangle GSP \sim \triangle GJQ$

$\Rightarrow \overline{GP} : \overline{GQ} = \overline{GS} : \overline{GJ}$

$\Rightarrow \overline{GP} \times \overline{GJ} = \overline{GQ} \times \overline{GS}$

(2) $\because \triangle HPG \sim \triangle JIG$

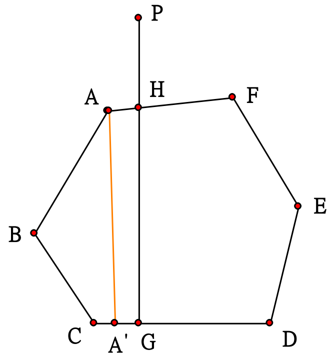
$\therefore \overline{GP} : \overline{GI} = \overline{GH} : \overline{GJ}$

$\Rightarrow \overline{GP} \times \overline{GJ} = \overline{GI} \times \overline{GH}$

(3) $\because \overline{GQ} \times \overline{GS} = \overline{GI} \times \overline{GH}$

$\therefore \triangle GQS$ 面積=$\triangle GHI$ 面積 $\Rightarrow \triangle HRS$ 面積=$\triangle IRQ$ 面積

性質 3：已知$\overline{GH}$爲六邊形 ABCDEF 面積之三等分線，過 A、F、D、C 各作面積之三等分線，則必與$\overline{GH}$有交點。




圖十四

證明：( 如圖十四 )

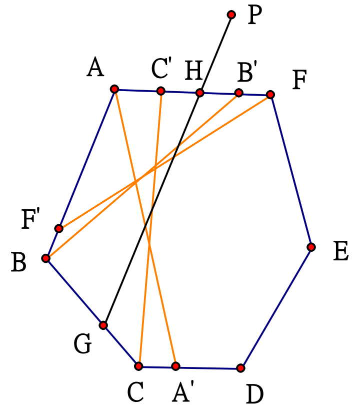
令$\overline{AA'}$爲六邊形 ABCDEF 面積之三等分線

∵若$\overline{AA'}$和$\overline{GH}$不相交

則 AA′CB 面積=$\frac{1}{3}$ABCDEF 面積＞ABCGH 面積=$\frac{1}{3}$ABCDEF 面積〈矛盾〉

∴$\overline{AA'}$和$\overline{GH}$必交於一點

性質 4：已知$\overline{GH}$爲六邊形 ABCDEF 面積之三等分線，過 A、F、D、C 各作面積之三等分線$\overline{AA'}$、$\overline{FF'}$、$\overline{DD'}$、$\overline{CC'}$，則$\overline{AA'}$、$\overline{FF'}$、$\overline{DD'}$、$\overline{CC'}$必有一條其兩端點與$\overline{GH}$之兩端邊各在同一邊上。




圖十五

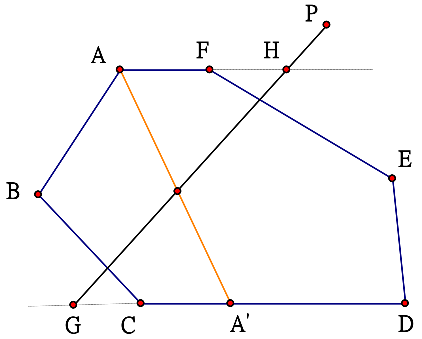
證明：( 如圖十五 )

若 $\overline{AA'}$ 和 $\overline{FF'}$ 其兩端點不與 $\overline{GH}$ 之兩端邊各在同一邊上，

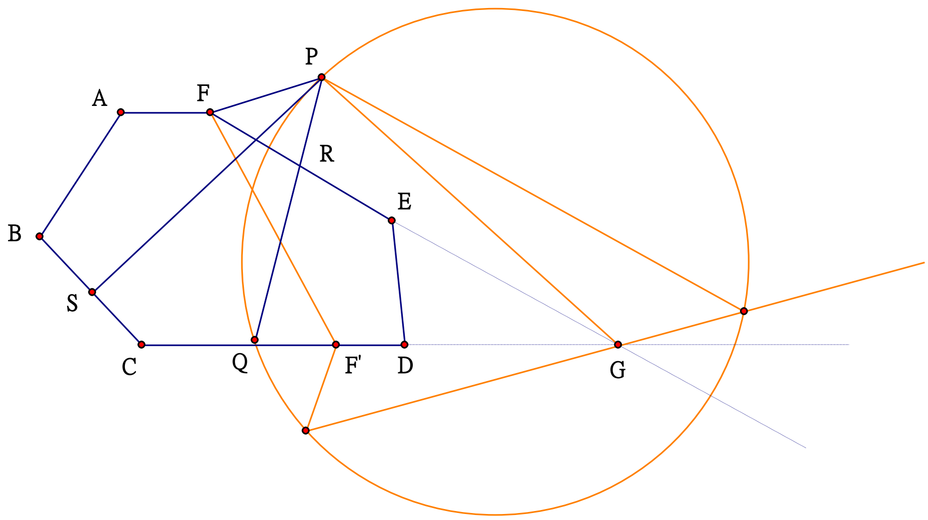
則根據性質 3，可得 $\overline{BB'}$ 和 $\overline{CC'}$ 滿足所求

(二)、舉例說明，形外一點之分割法。

作圖 1、已知六邊形 ABCDEF，過 P 作射線將其三等分。




圖十六之一




圖十六之二

作法：

(1) 若 $\overline{AF} // \overline{CD}$〈如圖十六之一〉，利用形上一點之作法，過 A 點作出面積之三等分線，再利用肆、三、(一)、作圖 1，過 P 作出 $\overline{GH}$ 三等分線，但 G、H 不在形上，故非所求

(2) 若 $\overline{EF}$ 不平行 $\overline{CD}$〈如圖十六之二〉，利用形上一點之作法，過 F 點作出面積之三等分線 $\overline{FF'}$，再利用肆、三、(一)、作圖 2，過 P 作出 $\overline{PQ}$ 三等分線，則 $\overline{PQ}$ 即為所求

(3) 同理可作出另一條三等份線 $\overline{PS}$

證明：由肆、三、(一)、作圖 1 及作圖 2 之證明即可得證

推論六：由肆、三、(二)、作圖 1 可得知，若 $\overline{PQ}$ 亦非所求，重複同樣步驟，根據性質 4，必可找到過形外一點之面積 k 等分線，其兩端點皆在形上。

伍、研究結果：

過任一點作射線將凸多邊形面積 k 等分，需先考慮點的位置，可分為：

一、點在形上：先將凸多邊形轉換為等面積的三角形，作出其面積的 k 分之一，再過點畫出其 k 等分凸多邊形面積的射線。

二、點在形內：利用點在形上的作法，先作出凸多邊形面積的 k 分之一，再過點畫出其 k 等分凸多邊形面積的射線。

三、點在形外：利用點在形內作二等分，將兩射線變為一直線之作法，以及肆、三、(二)、作圖 1 和性質 4，再過點畫出其 k 等分凸多邊形面積的射線。

陸、討論：若凸多邊形改為凹多邊形，是否也能過任一點作出射線將凹多邊形面積 k 等分，其所用到的技巧可能更複雜。

柒、結論：由研究的結果顯示，可將凸多邊形面積 k 等分。

捌、參考資料及其他：

國立台灣科學教育館（民 98)。**全國中小學科學展覽**。

## 【評語】030426

考慮對一個給定的凸多邊形和平面上一點 P，過 P 作 k−1 條直線，將原本的凸多邊形分為個 k 面積相等的圖形的問題，並對此給出了求解的想法。類似的 n 邊形面積的等分問題在歷屆科展中曾多次出現。作者所討論的問題與部分之前參展的作品重疊，有點可惜！雖然作者對整個問題做了清楚的說明，但所使用到的藉由轉換原圖形為等面積圖形，再利用等分點來求解的技巧是典型處理這類問題慣用的手法，在創新方面可再作思考。本作品部分的說明用『推論』來呈現，但沒有給出清楚的說明，在表述的方式上可以再做改進，並更為嚴謹。日後還可考慮對凹多邊形的等分問題作探討。