中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030425

『一顆老鼠屎，壞了幾鍋粥?』

--探究三角組合圖形破洞後的剩餘三角形數

學校名稱：金門縣立金城國民中學

作者：	指導老師：
國二 歐陽瑩芸	張全豐
國二 楊汭錠	宋文法
國二 莊育瑄	

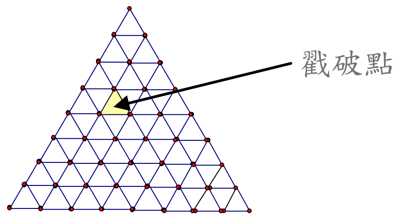
關鍵詞：規律性、等差級數、數形關係

摘要：

生活中，常常因為一個不小心，一段美麗的意外就此展開。 我們從三角形中的三角形個數計數開始。 計數三角形個數的過程中因為力道太大導致其中的一個小三角形意外地被搓破一個洞。並且發現計數時偶爾會有三角形是包含此被戳破的三角形。直覺告訴我們當任意戳破一個三角形時，剩餘的三角形數會有一個規律存在。經過一連串的抽絲剝繭與討論，我們終於找出這規律。研究過程之中，我們發現會有一些同樣的思維模式來解決問題。不得不說，數學的世界真的太豐富且無奇不有了。

壹、 研究動機:

數學課時老師在黑板上出了一道三角形中的三角形個數問題，如圖 1 (8*8 階)。希望我們能夠找出其中的三角形總數。當我用筆數算三角形個數時，不小心戳破了其中一個邊長為 1 的三角形，並且發現針對這個戳破的三角形，也落在其它邊長更大的三角形之中。也就是說，戳破的三角形影響了其它邊長較大三角形的計數。除此之外，當我嘗試戳破其它邊長為 1 的三角形時，影響的三角形個數有不一樣的結果。因此，這樣短暫的行為與結果讓我激起一個想法，那就是『三角形中的三角形個數如果任意的戳破其中一個邊長為1的三角形時，是否能夠計算出沒被破壞的三角形個數』。



(圖 1)

貳、 研究問題：

一、 研究三角形中的三角形中， 8*8 階下戳破任一個邊長 1 的正立三角形後『剩餘正立三角形個數』。

二、 推導一般化式子：研究三角形中的三角形中，n*n 階下戳破任一個邊長 1 的正立三角形後『剩餘正立三角形個數』。

三、 延伸討論：研究正多邊形的情形，例如：正方形中的正方形下戳破任一個邊長 1 的正方形後『剩餘正方形個數』。 正五邊形、正六邊形……又如何呢？

參、研究設備及器材：

GSP 繪圖軟體、縝密的思考、紙筆。

肆、研究過程：

[定義]符號及變數意義:

首先，老師教我們做研究時必須清楚定義出研究需要用到的輔助符號與輔助變數。一來可以方便做研究，二來可以讓有興趣此題目的人，更快速了解我們的研究過程。因此，以下是我們根據需求所定義的符號與變數。另外，我們將三角形的計數，鎖定在正立的三角形數目，讓問題單純化。

＜符號＞

△k：邊長為 k 的三角形個數。

$\boxed{k}$：邊長為 k 的正方形個數。

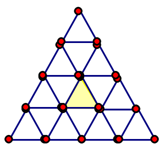
＜變數＞

n：三角形的階數。

p：戳破的三角形之層數。

q：戳破的三角形由左至右數的位置。

例如：



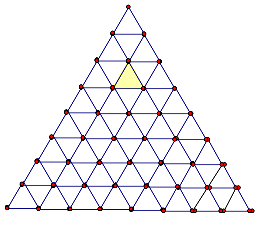
（圖 2）

圖 2 中，n = 4、(p, q) = (3, 2)。

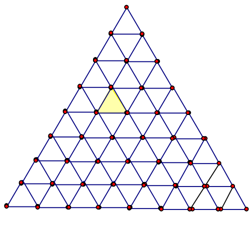
一、研究三角形中的三角形中，8*8 階下戳破一個邊長 1 的正立三角形後『剩餘三角形個數』。

在計數 8*8 階下必須先確定戳破洞的位置(p, q)在哪。我們用兩個例子來做觀察與討論：

（一）當(p, q) = (3, 2)，如圖 3-1。



（圖 3-1）



（圖 3-2）

計算的方式為: 先計算邊長為 1 的三角形，再計算邊長為 2 的三角形，以此類推。在計數過程中如果包含戳破洞則不累計。

所以：

邊長 1: (1 + 2 + 3 + ... + 8) - 1 = 35。
邊長 2: (1 + 2 + 3 + ... + 7) - 3 = 25。
邊長 3: (1 + 2 + 3 + ... + 6) - 4 = 17。
邊長 4: (1+ 2 + 3 + 4 + 5) - 4 = 11。
邊長 5: (1 + 2 + 3 + 4) - 4 = 6。
邊長 6: (1 + 2 + 3) - 4 = 2。
邊長 7: (1 + 2) - 3 = 0。
邊長 8: (1) - 1 = 0。

因此，剩餘三角形個數為 $35+25+17+11+6+2=96$(個)。

（二） 當(p, q) = (4, 2)時，如圖 3-2。結果會一樣嗎? 以下是我們的觀察：

邊長 1: (1 + 2 + 3 + ... + 8) - 1 = 35。
邊長 2: (1 + 2 + 3 + ... + 7) - 3 = 25。
邊長 3: (1 + 2 + 3 + ... + 6) - 5 = 16。
邊長 4: (1 + 2 + 3 + ... + 5) - 6 = 9。
邊長 5: (1 + 2 + 3 + 4) - 6 = 4。
邊長 6: (1 + 2 + 3) - 5 = 1。
邊長 7: (1 + 2) - 3 = 0。
邊長 8: (1) - 1 = 0。

因此，剩餘三角形個數為$35+25+16+9+4+1=90$(個)。
看來，不同位置似乎有不同結果！

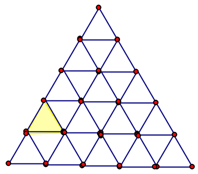
小小分析：由以上的計數可以知道不同的戳破洞位置(p, q)所造成的結果(剩餘數)會有所不同。此外，在計數時眼力要十分犀利，否則很容易計算錯誤。如此便激發我們想找出一個一般化的式子，來計算剩餘個數的動機。以下是我們探究一般化的過程。

二、研究三角形中的三角形中，n*n 階下戳破一個邊長 1 的正立三角形後『剩餘三角形個數』。

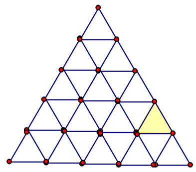
步驟一: <u>畫圖並蒐集數據</u>。

我們在【數學思考】這一本書裡學到，若要找出問題的規律性，首先可從特殊的例子觀察，並且循序漸進地、由簡至繁做討論。此外，我們認為必須先規劃畫圖的格式才可以幫助我們找尋規律性。因此，附錄之表 1 是我們團隊在起初規劃的畫圖格式。表 1 裡有由簡至繁的圖形，並列出剩餘三角形個數。我們總共表列出 n=1 至 6、所有 p，q 的可能性下之剩餘數。在數據中我們發現 q 呈現對稱性:

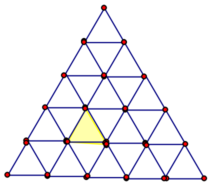
例如，在 n = 5、p = 4 時，(q = 1) ≡ (q = 4)、(q = 2) ≡ (q = 3)。
　　如圖 4。



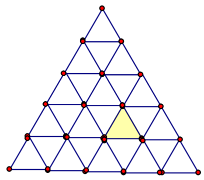
≡



q = 1，剩餘數 = 27　　　q = 4，剩餘數 = 27



≡



q = 2，剩餘數 = 23　　　q = 3，剩餘數 = 23

(圖 4)

然而，q 的對稱性並無法直接幫助我們從數據中看出任何的規律性。因此，我們勢必做更進一步的分析。我們反覆思考老師給我們的建議，那就是『抽絲剝繭、拆解再拆解』。於是，提出一種概念 —『正面思考不行，不如反向思考』。也就說，既然我們要算的是剩餘三角形個數，那麼何不『先計算尚未破壞時的三角形個數，再減去這戳破的洞共影響多少個三角形』。

步驟二: 計算尚未破壞時的三角形個數。

附錄之表 2 中顯示對於不同的 n*n 階其對應的三角形個數。依照規律性，我們可推論當階數為 n*n 時，三角形個數為:

$$S_n = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) \quad \text{-----(式 1)}$$

(式 1)中可以引入高中數學的 Σ 來簡化式子，也就是：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(1+2+3+\cdots+k) \quad \text{(1+2+⋯+k 為等差級數)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(分配律)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] \quad \text{(同類項合併)}$$

$$=\frac{1}{12}[n(n+1)(2n+1)+\ 3n(n+1)\ ]$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\quad \text{----------------------------(式 2)}$$

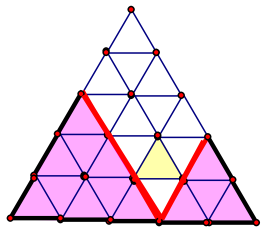
(式 2)的導出跨出了成功的第一步。接下來我們很期待能夠導出被破壞時受影響的三角形個數的公式，如此一來用(式 2)來減即可得到剩餘的三角形個數。以下我們繼續探究。

步驟三： 計算被破壞時，受影響的三角形個數。

有了步驟一的經驗，我們決定計數受影響的三角形個數之前再次考慮是否可以抽絲剝繭地拆解計算方式。幸運地，我們回到圖形的觀察中發現一些規則或者特徵。

(一) 與戳破洞同層的三角形是不受影響的。

(二) 如下圖 5，紫色區域部分所構成的種種三角形皆為不受影響部分。左邊紫色區域的形成方式是以『戳破洞的左下點畫出一條分割紅線、戳破洞的右下點畫出另一條分割紅線』組成。



(圖 5)

接著試圖更進一步找出其它規律。先從『縱向思考』開始，也就是固定 p、q 的值，檢視當增加 n 時，觀察受影響的三角形個數之變化。我們從最簡情況：(p, q) = (1,1)開始觀察。附錄之表 3 為觀察之對象。我們有一個重大發現。描述如下：

當 n = p 時，假設受影響的三角形個數為 I。

則，

n = p + 1 時，影響數變為 2×I。

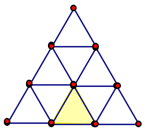
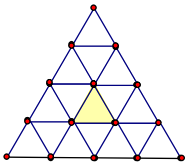
n = p + 2 時，影響數變為 3×I。

n = p + 3 時，影響數變為 4×I。

⋮

以此類推。

我們繼續探討這規律的原因，也就是觀察從 n = p 至 n = p + 1 時，到底增加了那些受影響的三角形？下圖 6 為 n = 3 至 n = 4 的情形。做個簡單的分析，如下。

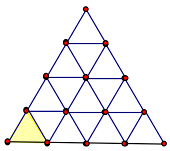
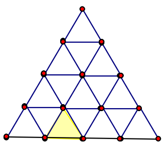
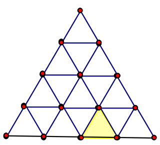
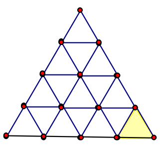
圖 形		影響數		
		$\triangle_1$ = 1 $\triangle_2$ = 2 $\triangle_3$ = 1		
		$\triangle_1$ = 1 $\triangle_2$ = 2 $\triangle_3$ = 1	→	$\triangle_2$ = 1 $\triangle_3$ = 2 $\triangle_4$ = 1

原來，因為 n 增加 1 階，則『原本一個邊長為 k 的受影響三角形就會增加一個邊長為 k+1 的受影響三角形』。於是，我們得到一個重要的結論，如下：

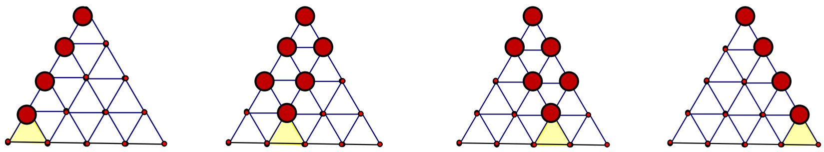
假設戳破洞的位置在(p , q)，且 n = p 時的受影響三角形個數為 I，則當 n > p 時，受影響的三角形個數為 S'_n:

$S'_n = (n - p + 1) \times I$ ----------------------------------(式 3)

這樣的結論，對於接下來的分析產生莫大的幫助，因為我們『只要在 n = p、戳破位置為(p, q)時，再分析出受影響的三角形個數 I 就可以計算出不管 n 為何，戳破洞在任何位置上的影響數』。所以接下來就是要求出(式 3)中的 I 值。我們觀察出當 p 相同但 q 不同時，I 值會有所變化。所以我們決定用『橫向思考』的方式來解決這個 I 值的問題並且附錄之表 4 整理出這些數據資料。例如，在 p = 4:

	q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
				
影響數	4	6	6	4

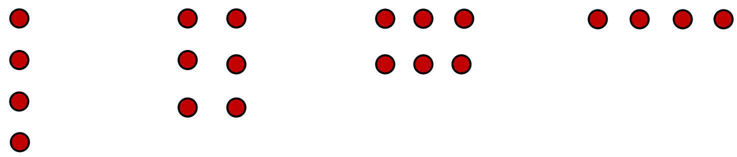
一開始若是純粹用數據的觀點來看，我們不好看出其規律性，然而當我們做了一個動作之後，竟然發現令人振奮的現象。這個動作就是在計數影響數時，特別用筆標註記號。如下圖 6。



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

（圖 6）

接著再將這些紅點做些調整並立正排排好，得到下圖 7 的樣貌。



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

（圖 7）

看出來了嗎? 圖 7 中這四個圖形分別是 1×4， 2×3， 3×2，4×1。『每個乘法的前項呈現遞增並且剛好等於 q 值; 每個乘法的後項呈現遞減，並且由 p 開始遞減』。為了再次確認這樣的規律性，檢查了 p = 1 至 p = 8 的確是有這樣的規律性。如此一來，我們得到了 I 的計算方式，如下式 4。

當 n = p、戳破位置為(p, q)時，受影響的三角形個數 I 為:

$$I = q\times(p-q+1) \text{ ---------------------------------(式 4)}$$

將(式 3)與(式 4)合併在一起，則得出:

對於任意 n 階的三角形，戳破洞的位置為 (p, q)時，則
受影響的三角形個數為S'_n:

$$\begin{aligned} S'_n &= (n - p + 1)\times I \\ &= (n - p + 1)\times q\times(p-q+1) \\ &= q(p-q+1)(n-p+1) \text{ ----------------------(式 5)} \end{aligned}$$

步驟四: 下結論。

結合步驟二與步驟三的結果，可以得出『剩餘三角形個數』之一般解。此一般解是利用『先計算尚未破壞時的三角形個數，再減去這戳破的洞共影響多少個三角形』而得。因此，由(式 2)與(式 5)得出

任意 n 階的三角形，戳破洞的位置為(p, q)時剩餘三角形個數為:

$S_n - S'_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - q\,(p-q+1)(n-p+1)$ ----(式 6)

我們將(式 6)中的 $q\,(p-q+1)$ 稱為**影響基數**、$(n-p+1)$ 稱為 p 與 n 之間的 **GAP**，以利步驟五的證明。其中影響基數不會因為 n 的增加而有所變化，而 GAP 卻會因為 n 增加而增加。

步驟五: 數學歸納法證明一般解的正確性。

(一) 確認初始值是對的。

在 n = 1，(p, q) = (1, 1)時:

$$S_1 - S'_1 = \frac{1}{6}\times 1(1+1)(1+2) - 1(1-1+1)(1-1+1)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

由實際值與 $S_1 - S'_1$ 的結果得證 → **當 n = 1 時等式成立**。

(二) 假設 n = k 時是對的。也就是:

$$S_k - S'_k = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) - q\,(p-q+1)(k-p+1)\text{。}$$

(三) 則 n = k + 1 時，驗證等式成立。

1. 尚未破壞時的三角形個數為:

$$S_{k+1} = S_k + [\,1+2+3+\cdots+k+(k+1)\,]$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) + \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2)(\frac{k+3}{6})$$

$$= \frac{1}{6}(\,k+1)[(k+1)+1]\,[\,(k+1)+\,2\,]$$

2. 破壞時影響的三角形個數為:

在(p, q)時，影響基數為$q\,(p-q+1)$，此不會因為 n 值的改變而有變化。而 n = k 時的 GAP 為(k − p + 1)，所以當 n = k + 1 時，GAP 會增加 1。即:

GAP′= GAP + 1

$= (k - p + 1) + 1$

$= [\,(k + 1) - p + 1\,]$

故 n = k + 1 時，影響數 S'_{k+1} 為:

$$S'_{k+1} = \text{影響基數} \times GAP'$$
$$= q(p-q+1)[(k+1)-p+1]$$

3. <u>由 1 及 2 的結論得出 n = k + 1 的剩餘個數為</u>:

$$S_{k+1} - S'_{k+1} = \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]$$
$$-q(p-q+1)[(k+1)-p+1]$$

故，n = k + 1 時等式成立。(由數學歸納法得知)

小結論:我們歷經了抽絲剝繭的方式分析出剩餘三角形個數的公式，如(式 6)，這讓我們思考是否可以平行研究正方形的情形。因此，以下我們更進一步對正方形的情形做分析。

三、研究正方形中的正方形下戳破一個邊長 1 的正方形後『剩餘正方形個數』。

基於問題二解決的經驗，問題三的解決就決定直接採用『反向思考』，也就是『先計算尚未破壞時的正方形個數，再減去這戳破洞共影響多少個正方形』。

步驟一:<u>計算尚未破壞時的正方形個數</u>。

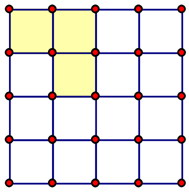
附錄之表 5 中顯示對於不同的 n*n 階，其對應的正方形個數。依照其規律性，我們可推論 n*n 階時，正方形個數 S_n 為:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots 4^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ ----------------------------(式 7)}$$

步驟二: <u>觀察被破壞時，受影響的正方形個數之特性</u>。

首先，我們先從 n=1 開始分別收集受影響且邊長為 k(k = 1, 2, 3, . . . n)的正方形個數，試圖去觀察有甚麼特性。如附錄之表 6。並且因為觀察到 p 與 q 皆具有對稱性，因此，我們在製作表格時便省略了對稱部分。例如，n = 4 時探討的破洞位置只需要下圖 8 的黃色部分，即(p, q) = (1, 1), (1, 2), (2, 2)。因為『所有的破洞經過圖形的旋轉、翻轉後，都會落入黃色的部分』。



（圖 8）

所以(p, q)中，(1, 3) ≡ (1, 2);　(1, 4) ≡ (1, 1)
(2, 1) ≡ (1, 2);　(2, 3) ≡ (2, 2)
(2, 4) ≡ (1, 2);　(3, 1) ≡ (1, 2)
(3, 2) ≡ (2, 2);　(3, 3) ≡ (2, 2)
(4, 1) ≡ (1, 1);　(4, 2) ≡ (1, 2)
(4, 3) ≡ (1, 2);　(4, 4) ≡ (1, 1)

特性一: n*n 階時，受影響的正方形其邊長必有 k = 1, 2, 3,...n 類別。例如，n = 4 時，受影響的正方形邊長類別包含

$\boxed{1}$ 、$\boxed{2}$ 、$\boxed{3}$ 、$\boxed{4}$ 。

特性二: n*n 階時，受影響的正方形邊長類別，其值具有對稱性。
例如，n = 6、(p, q) = (2, 3)時，

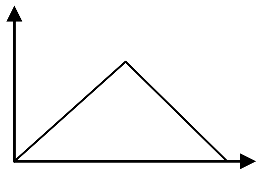
$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 4
$\boxed{3}$= 6
$\boxed{4}$= 6
$\boxed{5}$= 4
$\boxed{6}$= 1

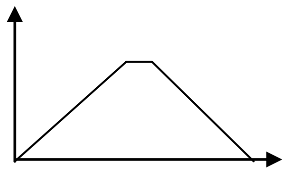
特性三: n 為奇數與 n 為偶數時，邊長類別的對稱性有些許差異。
例如，n = 7、(p, q) = (2, 4)時，

$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 4
$\boxed{3}$= 6
$\boxed{4}$= 8
$\boxed{5}$= 6
$\boxed{6}$= 4
$\boxed{7}$= 1

其與特性二的例子 n = 6 不同。讀者可以發現 n 為奇數與偶

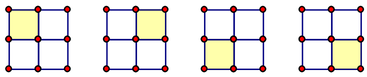
數時，k 對應值的分布示意圖有如下圖 9、圖 10 也就是奇數時，最中間不會重複；偶數時，最中間會重複。


（圖 9）


（圖 10）

特性四：針對邊長類別的值：

（一）發現 $\boxed{1}$值至多為 1^2；$\boxed{2}$值至多為 2^2，以此類推。當然邊長類別的對稱部分不包含在內。因為，$\boxed{1}$只能自己影響自己，值至多為 1。$\boxed{2}$最多影響為下圖 11 四種，值至多為 2^2。以此類推。


（圖 11）

（二）發現會受(p, q)的位置影響。例如，當(p, q) = (1, 1)時，所有的邊長類別值皆為 1。看起來是被 p×q 給限制住上限了。讀者可以參考附錄之表 6。

（三）發現若邊長類別為 k，則受 k×p 的影響。例如，n = 7、(p, q) = (1, 3)時，邊長類別上半部的值分別為：

$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 2
$\boxed{3}$= 3
$\boxed{4}$= 3

若只利用(一)與(二)來看，則上限為 k^2 與 p×q 的最小值，也就是 1, 3, 3, 3。然而實際上卻是 1, 2, 3, 3。這也讓我們注意到這個 2 有機會是被 k×p 給限制住的。因此，我們再觀察其它 n 與(p, q)值，的確也有如此限制。

（四）發現邊長類別的值只受(一)、(二)、(三)的影響，並且其值為取 k^2、p×q、k×p 最小者。可用 $\min(k^2, p\times q, k\times p)$表示。

步驟三：計算受影響的正方形個數之模型一。

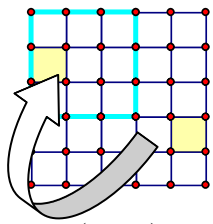
由步驟二所討論的特性，我們試圖找出影響正方形個數的模型。由特性一知道，我們的模型可以使用 Σ 來表示，且 k 值從 1 至 n。藉由特性四可以推估模型樣式可為：

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{min}(k^2, p \times q, k \times p)$$

然而，從特性二、三知道『邊長類別具有對稱性以及 p, q 個別也具對稱性』的特點得知，勢必要將模型中的 k、p、q 做轉換。
以下便是針對各個變數做轉換的分析。

(一) p 與 q 的轉換。

此轉換目的是為了『不管破洞在任何地方，都希望轉到整個正方形的左上方部分』來看。如下圖 11 的例子，我們希望原本(p, q) = (4, 5)，轉換後跑到藍色範圍內的(p, q) = (2, 1)。

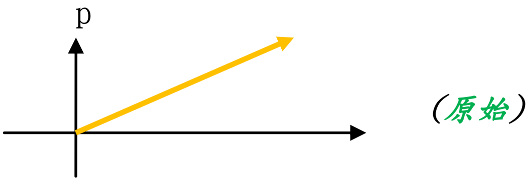


(圖 11)

首先 p 的轉換中考量到 n 為奇數與偶數時會有小差異的情況，因此刻意將 n 為奇數與 n 為偶數分開討論。例如，n = 6 時，p = 1, 2, 3 轉換後其值不變，並且 p = 4, 5, 6 轉換後其值變為 p′ = 3, 2, 1；而 n = 7 時，p = 1, 2, 3, 4 轉換後其值不變，並且 p = 5, 6, 7 轉換後其值變為 p′ = 3, 2, 1。

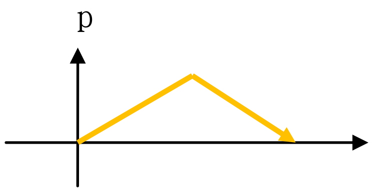
<分析 p>

在 n 為奇數下觀察 p 值的分布示意圖如下圖 12。



(圖 12)

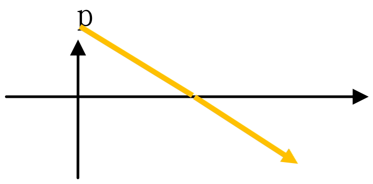
然而希望經過轉換後，p′的分布變為下圖 13。



（目標）

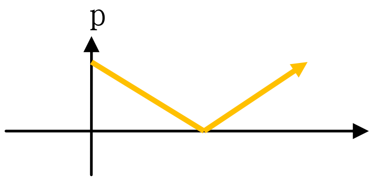
（圖 13）

我們發現這個轉折點似乎為所有 p 的中間值，於是將原本 p 全部都減去(n+1)/2，得到下圖 14。



（圖 14）

再將圖 14 的值取上絕對值後得到圖 15。



（圖 15）

再用(n+1)/2 減去圖 15 即可得到圖 13 的結果。所以在 n 為奇數時，我們推得 p 的轉換函數 p′ 為:

$$p'(p) = \frac{n+1}{2} - \left|\frac{n+1}{2} - p\right| \text{ ----------------------------------(式 8)}$$

令人興奮的是，接下來要探討的 n 為偶數的情形，其 p 的轉換函數也可適用(式 8)。例如 n = 6 時，

$$p'(1) = 3.5 - |3.5 - 1| = 1$$
$$p'(2) = 3.5 - |3.5 - 2| = 2$$
$$p'(3) = 3.5 - |3.5 - 3| = 3$$
$$p'(4) = 3.5 - |3.5 - 4| = 3$$
$$p'(5) = 3.5 - |3.5 - 5| = 2$$
$$p'(6) = 3.5 - |3.5 - 6| = 1$$

<分析 q>

我們觀察到 q 的轉換函數與 p 的討論是一模一樣的，因此可以直接得到 q 的轉換函數，如(式 9)。

$$q'(q) = \frac{n+1}{2} - \left|\frac{n+1}{2} - q\right| \text{ ----------------------------------(式 9)}$$

（二）邊長類別 k 的轉換。

我們觀察到 k 的轉換如同 p 與 q 的轉換情形，因此依然同理得出 k 的轉換函數，如(式 10)。

$k'(k)=\frac{n+1}{2}-\left|\frac{n+1}{2}-k\right|$ --------------------------------(式 10)

（三）受影響的正方形個數之模型。

由(一)與(二)的 k、p、q 轉換函式，我們最終得到受影響的正方形個數之模型為:

對於任意 n 階的正方形，戳破洞的位置為(p, q)時，則
受影響的正方形個數為 S'_n:

$S'_n=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{min}(\,k'^2(k),\ \ p'(p)\cdot q'(q),\ k'(k)\cdot p'(p)\,)$ -----(式 11)

，其中 $k'(k)=\frac{n+1}{2}-\left|\frac{n+1}{2}-k\right|$， $p'(p)=\frac{n+1}{2}-\left|\frac{n+1}{2}-p\right|$，

$q'(q)=\frac{n+1}{2}-\left|\frac{n+1}{2}-q\right|$。

步驟四：計算受影響的正方形個數之模型二。

步驟三似乎看起來已建立了受影響的正方形個數之模型，但是我們認為當 n 值很大時，計算量一定是相當可觀，因此我們必須設法減少計算量。於是，我們觀察到因為邊長類別的值具有對稱性，所以我們想從這部分著手。

然而，如同步驟二的特性三所言，邊長類別的對稱性會因為 n 為奇數與偶數而有所差異。於是可以將受影響的模型分成兩類，即（一）n 為奇數類；（二）n 為偶數類。當 n 為偶數時可將邊長類別完完全全的分成上、下兩部分。於是可以將(式 11)的模型改成:

在 n 為偶數的條件下，

$S'_n=2\times\sum_{k=1}^{n/2}\mathbf{min}(\,k^2,\ \ p'(p)\cdot q'(q), k^2\cdot p'(p)\,)$ -----------(式 12)

如此一來，可以發現兩部分的減少運算量:（一）Σ 只算一半。（二）k

不須再做轉換。

當 n 為奇數時，因為邊長類別 k = (n+1)/2 的值只有一個，因此，可以先不算 k = (n+1)/2 部分的 Σ，最後再將 k = (n+1)/2 的值加起來即可。於是，可以將(式 11)的模型改成:

在 n 為奇數的條件下，

$$S'_n = 2 \times \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \mathbf{min}(\, k^2, p'(p) \cdot q'(q), k^2 \cdot p'(k)\,)$$

$$+ \mathbf{min}(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2, p'(p) \cdot q'(q),\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot p'(k)\,)$$

-------------(式 13)

由(式 12)與(式 13)的合併得模型二:

對於任意 n 階的正方形，戳破洞的位置為(p, q)時，則受影響的正方形個數為 S'_n:

$$S'_n = \begin{cases} 2 \times \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \mathbf{min}(\, k^2,\ p'(p) \cdot q'(q),\ k^2 \cdot p'(k)\,)) + \\ \mathbf{min}(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2,\ p'(p) \cdot q'(q),\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot p'(k)\,),\ n \in \textbf{奇數} \\ \\ 2 \times \sum_{k=1}^{n/2} \mathbf{min}(\, k^2,\ p'(p) \cdot q'(q),\ k^2 \cdot p'(p)\,),\ n \in \textbf{偶數} \end{cases}$$

-------------(式 14)

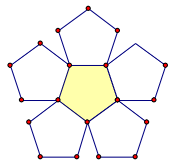
步驟五:下結論。

結合步驟一的(式 7)與步驟三的(式 11)或步驟四的(式 14)可得任意 n 階的正方形，戳破洞的位置為(p, q)時剩餘正方形個數為:

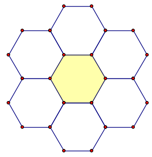
$S_n - S'_n$，其中S_n為(式 7)、S'_n為(式 11)或(式 14)。

四、探討正多邊形的情形，例如：正五邊形、正六邊形…，是否可有解？

（一）是否有正五邊形中的正五邊形?



（圖 16）



（圖 17）

由圖 16 發現，由黃色區域的正五邊形所延伸出去的各個正五邊形並無法將每個正五邊形緊密相連，因此可以判斷正五邊形中的正五邊形是不存在的。

（二）是否有正六邊形中的正六邊形?

由圖 17 觀察到由黃色區域的正六邊形所延伸出去的各個正六邊形是可以將每個正六邊形緊密相連的。然而，延伸出去的正六邊形並無法組成邊長為 2 的正六邊形。因此可以得出正六邊形中的正六邊形是不存在的。

由(一)(二)圖形可以推論，當正多邊形大於六邊時則延伸出去的各個正多邊形會產生重疊，**因此邊數大於六的正多邊形中的正多邊形就不存在，因此也無法討論**。

伍、研究結果：

一、8*8 三角形：發現不同的戳破位置會造成不同的剩餘數。並且位置(p, q)中的 q 也具有對稱性。然而，不同的 n*n 階數改變又會有不同的結果。因此引發求取一般化的動機。

二、一般化結果：正立三角形下，三角形中的三角形中戳破一個邊長 1 的三角形 後『剩餘三角形個數』之模型為:

$$S_n - S_n' = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - q\,(p-q+1)(n-p+1)$$

三、可延伸討論的正多邊形，只有正四邊形與正六邊形，但唯有正方形才有圖形的變化可循。

四、正方形中的正方形下戳破一個邊長 1 的正方形後『剩餘正方形個數』之模型一為:

$$S_n - S_n'$$

$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \sum_{k=1}^{n} \min(\,{k'}^2(k),\ \ p'(p)\cdot q'(q),\ k'(k)\cdot p'(p)\,)\text{。}$$

，其中 $k'(k) = \frac{n+1}{2} - \left|\frac{n+1}{2} - k\right|$， $p'(p) = \frac{n+1}{2} - \left|\frac{n+1}{2} - p\right|$，

$$q'(q)=\frac{n+1}{2}-\left|\frac{n+1}{2}-q\right|$$ 。

五、正方形中的正方形下戳破一個邊長 1 的正方形後『剩餘正方形個數』之模型二為:

<u>n 為奇數</u>:

$$
\begin{aligned}
&S_n-S_n' \\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\mathbf{min}(\,k^2,p'(p)\cdot q'(q),k^2\cdot p'(k)\,)) \\
&\quad+\mathbf{min}(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2,p'(p)\cdot q'(q),\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot p'(k)\,)
\end{aligned}
$$

<u>n 為偶數</u>:

$$
\begin{aligned}
&S_n-S_n' \\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\sum_{k=1}^{n/2}\mathbf{min}(\,k^2,\ p'(p)\cdot q'(q),k^2\cdot p'(p)\,)
\end{aligned}
$$

陸、研究心得與感想:

從這次的科展過程中，我們從生活周遭大家熟悉的三角形，進而演生此次的研究問題，在這過程中，我們大家一同算數學、學習，雖然遇到了許多得瓶頸、問題，但我們彼此間團隊合作，算數學的那股堅持，讓我們獲益匪淺，總而言之，算數學的過程雖然辛苦，但我們是一邊學習、研究及享受的！

第一次參加數學組的科展比賽，難免讓我們覺得特別新奇，這次我們透過了日常生活中十分常見的三角形來當這次科展的主軸，平常對三角形的概念，就只有長寬高周長面積等等很基本的觀念，但是卻透過這個科展活動發現了三角形的未知面貌。雖然過程十分艱辛，即使是假日時間也得花上好幾個小時，就算是小小的一個步驟，三個人也都必須互相幫助才能解開，不過最令我們有成就感的，便是找出公式的當下，那種滋味真的是讓人難以忘懷。這個科展看似簡單，裏頭卻蘊藏了許多不可思議的奥妙讓我們挖掘。我們很喜歡這個科展題目，辛苦，卻讓我們樂在其中。老師，同學互相協助，讓我們從中學習到很多，也讓我們留下了一段十分深刻的美好記憶。

從這次進行科展研究的過程中,我們每個人都獲益良多,從訂定題目、進行討論、學習分析資料、發現規律、架構公式，在每一個過程中，我們都學習到了許多新的知識和研究方法,也感謝老師一路耐心的指導!三角形是結構最簡單的一種形狀,三個頂點三個角三條邊,但在他簡單的構造中，卻潛藏著許多的秘密和原理，也讓我們學習用更細膩的角度，去從生活當中發現處處皆有數學的奥妙!

柒、 參考資料：

（一）數學思考 Thinking Mathematically（九章出版社），建中 49 屆 314 班譯，2000.4 出版

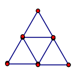
（二）高中課本: 數學歸納法、Σ 運算、平方和公式。

附錄

表 1

		n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
p=1	q=1	0	2	7	16	30	50
p=2	q=1		2	6	14	27	46
	q=2		2	6	13	24	41
p=3	q=1			7	14	26	44
	q=2			6	12	23	40
	q=3			7	14	25	52
p=4	q=1				15	27	43
	q=2				14	23	38
	q=3				14	23	38
	q=4				15	27	43
p=5	q=1					30	45
	q=2					27	40
	q=3					26	38
	q=4					27	40
	q=5					30	45
p=6	q=1						48
	q=2						46
	q=3						44
	q=4						44
	q=5						46
	q=6						48

表 2

n	圖形	個數
1		 = 1
2		 = 1+2  = 1

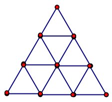
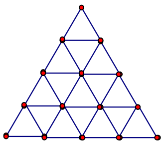
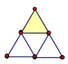
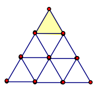
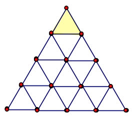
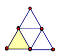
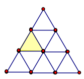
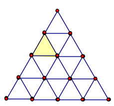
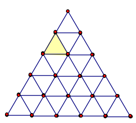
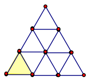
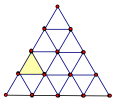
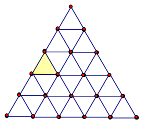
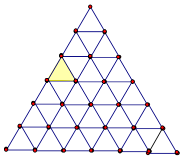
3		△1 = 1+2+3 △2 = 1+2 △3 = 1
4		△1 = 1+2+3+4 △2 = 1+2+3 △3 = 1+2 △4 = 1

表 3

	n	圖形	影響數
(p ,q)=(1,1)	1		1
	2		2
	3		3
	4		4

	n	圖形	影響數
(p ,q)=(2,1)	2		2
	3		4
	4		6
	5		8

	n	圖形	影響數
(p ,q)=(3,1)	3		3
	4		6
	5		9
	6		12

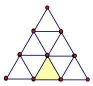
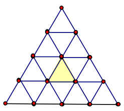
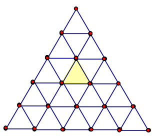
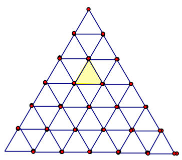
	n	圖形	影響數
(p ,q)=(3,2)	3		4
	4		8
	5		12
	6		16

表 4

	q = 1	q = 2	q = 3	q = 4	q = 5	q = 6	q=7	q=8
p = 1	1	X	X	X	X	X	X	X
p = 2	2	2	X	X	X	X	X	X
p = 3	3	4	2	X	X	X	X	X
p = 4	4	6	6	4	X	X	X	X
p = 5	5	8	9	8	5	X	X	X
p = 6	6	10	12	12	10	6	X	X
p = 7	7	12	15	16	15	12	7	X
p = 8	8	14	18	20	20	18	14	8

表 5

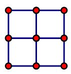
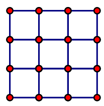
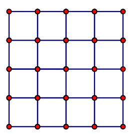
n	圖形	個數
1		$\boxed{1}$ = 1^2
2		$\boxed{1}$ = 2^2 $\boxed{2}$ = 1^2
3		$\boxed{1}$ = 3^2 $\boxed{2}$ = 2^2 $\boxed{3}$ = 1^2
4		$\boxed{1}$ = 4^2 $\boxed{2}$ = 3^2 $\boxed{3}$ = 2^2 $\boxed{4}$ = 1^2

表 6

n=1	p=1	q = 1
		$\boxed{1}$ = 1

n=2	p=1	q = 1
		$\boxed{1}$ = 1 $\boxed{2}$ = 1

<table>
<tr><th rowspan="3">n=3</th><th rowspan="2">p=1</th><th>q = 1</th><th>q = 2</th></tr>
<tr><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 1
$\boxed{3}$= 1</td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 2
$\boxed{3}$= 1</td></tr>
<tr><th>p=2</th><td></td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 4
$\boxed{3}$= 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="3">n=4</th><th rowspan="2">p=1</th><th>q = 1</th><th>q = 2</th></tr>
<tr><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 1
$\boxed{3}$= 1
$\boxed{4}$= 1</td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 2
$\boxed{3}$= 2
$\boxed{4}$= 1</td></tr>
<tr><th>p=2</th><td></td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 4
$\boxed{3}$= 4
$\boxed{4}$= 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="4">n=5</th><th rowspan="2">p=1</th><th>q = 1</th><th>q = 2</th><th>q = 3</th></tr>
<tr><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 1
$\boxed{3}$= 1
$\boxed{4}$= 1
$\boxed{5}$= 1</td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 2
$\boxed{3}$= 2
$\boxed{4}$= 2
$\boxed{5}$= 1</td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 2
$\boxed{3}$= 3
$\boxed{4}$= 2
$\boxed{5}$= 1</td></tr>
<tr><th>p=2</th><td></td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 4
$\boxed{3}$= 4
$\boxed{4}$= 4
$\boxed{5}$= 1</td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 4
$\boxed{3}$= 6
$\boxed{4}$= 4
$\boxed{5}$= 1</td></tr>
<tr><th>p=3</th><td></td><td></td><td>$\boxed{1}$= 1
$\boxed{2}$= 4
$\boxed{3}$= 9
$\boxed{4}$= 4
$\boxed{5}$= 1</td></tr>
</table>

		q = 1	q = 2	q = 3
n=6	p=1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 1 $\boxed{3}$= 1 $\boxed{4}$= 1 $\boxed{5}$= 1 $\boxed{6}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 2 $\boxed{3}$= 2 $\boxed{4}$= 2 $\boxed{5}$= 2 $\boxed{6}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 2 $\boxed{3}$= 3 $\boxed{4}$= 3 $\boxed{5}$= 2 $\boxed{6}$= 1
	p=2		$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 4 $\boxed{4}$= 4 $\boxed{5}$= 4 $\boxed{6}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 6 $\boxed{4}$= 6 $\boxed{5}$= 4 $\boxed{6}$= 1
	p=3			$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 9 $\boxed{4}$= 9 $\boxed{5}$= 4 $\boxed{6}$= 1

		q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
n=7	p=1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 1 $\boxed{3}$= 1 $\boxed{4}$= 1 $\boxed{5}$= 1 $\boxed{6}$= 1 $\boxed{7}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 2 $\boxed{3}$= 2 $\boxed{4}$= 2 $\boxed{5}$= 2 $\boxed{6}$= 2 $\boxed{7}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 2 $\boxed{3}$= 3 $\boxed{4}$= 3 $\boxed{5}$= 3 $\boxed{6}$= 2 $\boxed{7}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 2 $\boxed{3}$= 3 $\boxed{4}$= 4 $\boxed{5}$= 3 $\boxed{6}$= 2 $\boxed{7}$= 1
	p=2		$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 4 $\boxed{4}$= 4 $\boxed{5}$= 4 $\boxed{6}$= 4 $\boxed{7}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 6 $\boxed{4}$= 6 $\boxed{5}$= 6 $\boxed{6}$= 4 $\boxed{7}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 6 $\boxed{4}$= 8 $\boxed{5}$= 6 $\boxed{6}$= 4 $\boxed{7}$= 1

	p=3			$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 9 $\boxed{4}$= 9 $\boxed{5}$= 9 $\boxed{6}$= 4 $\boxed{7}$= 1	$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 9 $\boxed{4}$= 12 $\boxed{5}$= 9 $\boxed{6}$= 4 $\boxed{7}$= 1
	p=4				$\boxed{1}$= 1 $\boxed{2}$= 4 $\boxed{3}$= 9 $\boxed{4}$= 16 $\boxed{5}$= 9 $\boxed{6}$= 4 $\boxed{7}$= 1

【評語】030425

探討由小正三角（正方）形堆疊出的大正三角（正方）形，在中間有某一小正三角（正方）形缺損時，影響到的正三角（正方）形的個數，給出了完整的答案。第一部份只討論正立的三角形是有點奇怪的，雖然這會讓問題簡化，但相對的，也讓征服問題的難度降低，減損了解決問題的趣味性，有點可惜。後半部關於正方形的部分的結論其實可以化簡的更漂亮。作者的論述並沒有錯，但將結果表示為和的形式，而求出和（相對於給定的參數 n, p, q）的一般化表示又不太困難時，以一般化的表示形式來寫看起來會更漂亮。事實上，當 n 為偶數，且 $p \geq q$ 時，我們可以將結果整理為 $S - S' = \sum_1^n k^2 - 2[\sum_{k \leq q} k^2 + \sum_{q+1 \leq k \leq p} kq + \sum_{p+1 \leq k \leq \frac{n}{2}} pq]$。化簡可得$S - S' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{q(q+1)(2q+1)}{3} - q(p+q+1)(p-q) - (n-2p)pq$。這樣的表示與前一部份的三角形的結論也會比較接近。沒能進一步化簡，感覺上是有點美中不足了。