

中華民國第 55 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030424

音符的十二金釵

學校名稱：雲林縣私立東南國民中學

作者： 國二 謝孟樵 國二 廖堃瓏 國二 陳俐穎	指導老師： 許延絹 廖金淵
---	-----------------------------

關鍵詞：音頻、比值、統計值

摘要

音樂在人們生活中扮演著重要的角色，幾個簡單的音符就可以交織出動人、朗朗上口的旋律。透過這次資料分析，我們能夠知道受歡迎的歌曲或許是有一定規律的。

音頻，是聲音震動的頻率。當兩個音之間有著一定比例的音頻比時，就會產生和諧音，這就是我們研究的目標。我們發現兩個半音之間音頻比值為 $\sqrt[3]{2}$ ，例如 C- \sharp C、 \sharp C-D 間的頻率比；由音頻比的特性，我們研究了過百首的歌曲後，發現歌曲中音頻比為 0.89、1 和 1.12 所出現的比例占整首歌的 40%~70%，眾數是以 0.89、1、1.12 為主；中位數幾乎都是 1。我們歸納出一首好聽好記的旋律，其音符間大多都是上下一個全音，配合歌曲意境再添加一些急升或急降的音階。同時我們發現這 107 首歌的頻率比平均值十分趨近常態分配

$$X \sim N(1.021, 0.00795^2)。$$

壹、研究動機

我們三位都是國樂班的學生，對於音樂非常的喜愛，但音樂裡的科學數據，我們卻渾然不知；在上樂理課時，老師說過有一位數學家 J.J. Sylvester(1814-1897) 曾說：

「音樂是聽覺的數學，數學是理性發出的音樂，兩者皆源於相同的靈魂。」

而音樂跟數學到底有什麼關連？這又讓我們回想起二年級上學期自然與生活科技課中，老師提到聲音是有特定頻率的，因此我們不禁開始想：「那頻率到底跟音樂有怎樣的關聯性？」於是我們開始尋找、研究關於音樂中頻率的規律。

貳、研究目的

- 一、 找尋歌曲之中的音符、節拍的規律。
- 二、 十二平均律的探討。
- 三、 輸入音階頻率並找出頻率比在統計上的意義。

參、研究設備與器材

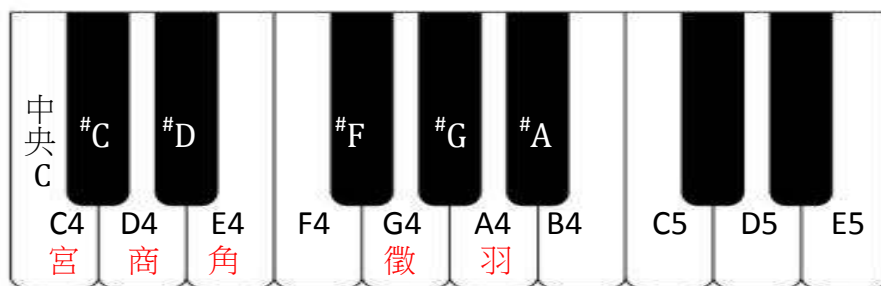
民間樂譜、樂器、Excel 軟體、計算機、電腦。

肆、研究方法

一、定義

以下是我們所討論的數據定義如下：

(一)音符簡譜：取用吉他譜及鋼琴譜將音符轉換成數字，如(圖一)、(表一)所示。



(圖一)音名與鋼琴的相對位置。

簡譜	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
音名	C3	D3	E3	F3	G3	A3	B3	C4	D4	E4	F4	G4
簡譜	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
音名	A4	B4	C5	D5	E5	F5	G5	A5	B5	C6		

(表一)音名與簡譜對照表 註：升降音符如 $\sharp C$ 的簡譜為 1.5， $\sharp D$ 的簡譜為 2.5，其他以此類推。

(二)節拍：我們將節拍時間化

八分音符 $\text{♪} = 0.5$ 秒 四分音符 $\text{♩} = 1$ 秒

二分音符 $\text{♪} = 2$ 秒 全音符 $\text{♩} = 4$ 秒

(三)頻率：(附件一)中為常見的音符頻率。

(四)波次：在節拍時間下所產生完整波的次數，節拍(秒) \times 頻率(次/秒) = 波次。

(五)頻率比：後音頻率 \div 前音頻率。

(六)波次比：後音波次 \div 前音波次。

(七)樣本標準差：

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{式一})$$

樣本標準差的計算就是將每個數值的值 (x_i) 減去樣本平均值 (\bar{x})，然後平方相加，

再除以(總數 $n - 1$)，最後開平方根就得出了 s (標準差)，其計算式如(式一)。

(八) 近似值

由於表格式是由 EXCEL 所計算，所以有些數值小數位太長，所以僅取近似值做為代表。

二、周杰倫歌曲討論

首先，我們依據 YouTube 的點閱率，挑選了周杰倫寫的幾首非常受歡迎的曲目來研究，其中包含有菊花台(2006)、紅塵客棧(2012)、簡單愛(2001)。

(一)菊花台這首歌曲的各項資料：

完整個歌曲資料如(表四)所示，由(表二)我們發現這首曲子中沒有 4(Fa)，而 7(Si) 只出現 2 次。整首歌有 171 個音符，170 個頻率比。其中，
 頻率比 0.89 出現 44 次，占整首歌約 26%；
 頻率比 1 出現 31 次，占整首歌約 18%；
 頻率比 1.12 出現 42 次，占整首歌約 25%；
 這 3 種比例一共占了約 69%，
 我們也發現頻率比的眾數是 0.89，中位數是 1。

波次比	次數	波次比	次數	波次比	次數
0.14	1	0.56	2	2.00	1
0.19	1	0.67	1	2.12	1
0.20	2	0.84	12	2.24	16
0.25	1	0.89	27	2.38	2
0.28	3	1.00	8	2.67	5
0.33	1	1.06	1	3.56	4
0.37	3	1.12	14	3.57	1
0.40	2	1.19	10	4.49	4
0.42	5	1.50	6	4.76	1
0.45	4	1.68	5	6.24	1
0.50	21	1.78	4		

簡譜	次數	頻率比	次數
-2	2	0.50	2
1	21	0.75	2
2	36	0.79	2
3	43	0.84	20
4	0	0.89	44
5	29	1.00	31
6	16	1.06	2
7	2	1.12	42
8	12	1.19	16
9	6	1.26	1
10	4	1.33	2
		1.50	6

(表二) 菊花台的簡譜、頻率比次數整理表。

(表三) 菊花台的波次比次數整理表
 波次比 0.89 出現 27 次，2.24 出現 16 次，
 1.12 出現 14 次，1 出現 8 次。

菊花台

簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比
1	261.63	1.12	2	293.66	0.89	3	329.63	1.00	6	440	0.89
2	293.66	1.12	1	261.63	1.26	3	329.63	1.19	5	392	1.12
3	329.63	1.00	3	329.63	1.00	5	392	0.84	6	440	0.89
3	329.63	1.19	3	329.63	0.89	3	329.63	0.89	5	392	0.84
5	392	1.12	2	293.66	1.12	2	293.66	1.12	3	329.63	0.89
6	440	1.00	3	329.63	1.00	3	329.63	0.79	2	293.66	0.89
6	440	1.50	3	329.63	1.19	1	261.63	1.00	1	261.63	0.84
10	659.26	0.89	5	392	0.84	1	261.63	1.12	-2	220	1.19
9	587.33	0.89	3	329.63	0.89	2	293.66	1.12	1	261.63	1.12
8	523.25	1.00	2	293.66	1.12	3	329.63	1.19	2	293.66	1.00
8	523.25	0.84	3	329.63	0.79	5	392	0.84	2	293.66	0.89
6	440	0.89	1	261.63	1.00	3	329.63	0.89	1	261.63	1.12
5	392	1.12	1	261.63	1.12	2	293.66	1.00	2	293.66	0.89
6	440	0.89	2	293.66	1.12	2	293.66	0.89	1	261.63	1.12
5	392	0.84	3	329.63	1.19	1	261.63	1.12	2	293.66	1.12
3	329.63	0.89	5	392	0.84	2	293.66	1.12	3	329.63	1.00
2	293.66	0.89	3	329.63	0.89	3	329.63	1.19	3	329.63	1.19
1	261.63	0.84	2	293.66	1.00	5	392	0.84	5	392	1.12
-2	220	1.19	2	293.66	0.89	3	329.63	1.33	6	440	1.00
1	261.63	1.12	1	261.63	1.12	6	440	0.89	6	440	1.50
2	293.66	1.00	2	293.66	1.12	5	392	1.12	10	659.26	0.89
2	293.66	1.12	3	329.63	1.19	6	440	0.89	9	587.33	0.89
3	329.63	0.89	5	392	0.84	5	392	1.00	8	523.25	1.00
2	293.66	0.89	3	329.63	1.33	5	392	0.84	8	523.25	1.12
1	261.63	1.12	6	440	0.89	3	329.63	1.19	9	587.33	0.89
2	293.66	1.12	5	392	1.12	5	392	0.84	8	523.25	0.75
3	329.63	1.00	6	440	0.89	3	329.63	0.89	5	392	1.00
3	329.63	1.19	5	392	1.00	2	293.66	1.12	5	392	0.84
5	392	1.12	5	392	0.84	3	329.63	1.19	3	329.63	1.50
6	440	1.00	3	329.63	1.19	5	392	0.84	7	493.88	1.06
6	440	1.50	5	392	1.00	3	329.63	0.89	8	523.25	0.50
10	659.26	0.89	5	392	0.84	2	293.66	1.00	1	261.63	1.12
9	587.33	0.89	3	329.63	0.89	2	293.66	0.89	2	293.66	1.12
8	523.25	1.00	2	293.66	1.12	1	261.63	1.00	3	329.63	0.89
8	523.25	1.12	3	329.63	1.19	1	261.63	1.12	2	293.66	0.89
9	587.33	0.89	5	392	0.84	2	293.66	1.12	1	261.63	
8	523.25	0.75	3	329.63	0.89	3	329.63	1.00			
5	392	1.00	2	293.66	1.00	3	329.63	1.19			
5	392	0.84	2	293.66	1.00	5	392	1.12			
3	329.63	1.50	2	293.66	0.89	6	440	1.00			
7	493.88	1.06	1	261.63	1.12	6	440	1.50			
8	523.25	0.50	2	293.66	1.12	10	659.26	0.89			
1	261.63	1.12	3	329.63	1.00	9	587.33	0.89			
2	293.66	1.12	3	329.63	0.89	8	523.25	1.00			
3	329.63	0.89	2	293.66	1.12	8	523.25	0.84			

0.89 1.00 1.12 (表四) 菊花台完整歌曲的頻率比總表。

(二)紅塵客棧這首歌曲的各項資料如(表五)、(表六)：

由(表六)可知這首歌也是沒有 4(Fa)，而 7(Si)只出現 5 次。整首歌有 444 個音符，有 443 個頻率比，頻率比 0.89 出現 106 次，占整首歌約 24%；頻率比 1 出現 34 次，占整首歌約 7.8%；頻率比 1.12 出現 114 次，占整首歌約 25.6%；這 3 種比例一共占了約 57.4%，我們也發現頻率比的眾數是 1.12，中位數是 1。

簡譜	次數	頻率比	次數
1	11	0.56	8
2	20	0.59	3
3	45	0.63	1
4	0	0.67	7
5	68	0.75	22
6	58	0.79	10
7	5	0.84	43
8	66	0.89	106
9	86	1	34
10	66	1.12	114
11	0	1.19	52
12	12	1.26	1
13	7	1.33	15
		1.5	23
		1.68	4

(表六) 紅塵客棧簡譜、頻率比次數整理表。

波次比	次數	波次比	次數	波次比	次數
0.06	3	0.75	17	2.67	15
0.11	3	0.79	4	2.81	1
0.13	1	0.84	21	3.00	4
0.17	1	0.89	68	3.36	1
0.22	7	1	10	3.37	9
0.25	3	1.12	60	3.56	5
0.28	4	1.19	20	3.57	2
0.29	1	1.25	1	4.00	2
0.33	5	1.26	3	4.45	2
0.34	1	1.33	5	4.49	3
0.37	11	1.34	4	5.00	1
0.4	1	1.5	2	5.04	2
0.42	12	1.68	4	5.35	3
0.44	1	1.78	10	6.00	1
0.45	5	1.89	6	6.34	1
0.5	8	2	6	7.14	2
0.56	17	2.25	4	9.51	1
0.59	18	2.38	10	10.10	1
0.67	23	2.52	6	12.70	1

(表五) 紅塵客棧波次比次數整理表
波次比 0.89 出現 68 次，1.12 出現 60 次，1 出現 10 次。

(三)簡單愛這首歌曲的各項資料如(表七)、(表八)：

由(表七)發現這首歌 4(Fa)出現 17 次、-4(Fa)出現 1 次、-1(Si)出現 17 次。整首歌有 263 個音符，262 個頻率比，頻率比 0.89 出現 36 次，占整首歌約 14%；

頻率比 1 出現 79 次，占整首歌約 30%；

頻率比 1.12 出現 39 次，占整首歌約 15%；

這 3 種頻率比的比例一共占了約 59%；我們也發現頻率比的眾數是 1，中位數是 1。

簡譜	次數	頻率比	次數
-5	1	0.67	4
-4	1	0.75	10
-3	18	0.79	4
-2	35	0.84	20
-1	17	0.89	36
1	89	0.94	18
2	39	1	79
3	27	1.06	17
4	17	1.12	39
5	17	1.19	17
6	2	1.33	15
		1.5	3

(表七) 簡單愛簡譜、頻率比次數整理表。

波次比	次數	波次比	次數	波次比	次數
0.04	1	0.56	3	1.33	8
0.09	1	0.59	4	1.5	3
0.12	1	0.63	2	1.68	6
0.14	1	0.75	12	1.89	2
0.17	1	0.84	11	2	12
0.25	2	0.89	32	2.24	4
0.31	1	0.94	12	2.25	1
0.33	1	1	49	2.67	2
0.37	1	1.06	17	3	2
0.45	10	1.12	27	4	1
0.5	12	1.19	15	8	2
0.53	1	1.26	2	9.51	1

(表八) 簡單愛波次比次數整理表

波次比 0.89 出現 32 次，1 出現 49 次，1.12 出現 27 次。

由周杰倫的歌曲之中，我們發現他專輯內中國風的歌曲（例如菊花台、紅塵客棧），Fa 和 Si 出現的比例非常少或者是沒有出現。對照中國古代的歌曲是用五聲音階來編曲的，歌曲裡就只會出現宮（C-Do）、商（D-Re）、角（E-Mi）、徵（G-Sol）、羽（A-La）五音（如圖一的位置所示），缺少音階中的 F(Fa)和 B(Si)。而菊花台、紅塵客棧等現代的歌曲，這類屬於中國風的歌曲，在編曲的風格極有可能與古代的五聲音階相似，因此聽起來就會有濃濃的中國風韻味。在另一方面，周杰倫其他非中國風的歌曲（例如：簡單愛），Fa 和 Si 出現的比例就比中國曲風高出許多，共佔整首歌中的 13%左右。

三、歌曲討論

輸入完上述歌曲後我們不禁想到這幾首是熱門流行歌，那早期流行的民歌或閩南語歌是不是也有些特殊規律？我們增加了頻率比的標準差及平均數來討論頻率比的分布。

首先我們依據網路中的點閱量開始隨機選取了幾首歌曲來討論，在這部分，我們以下列三首歌為例子來說明：

(一)針線情(曲：張錦華，1996)

完整個歌曲資料如(表九)所示，針線情這首歌中出現頻率比的次數整合如(表十)：

整首歌有 148 個音符，有 147 個頻率比，

頻率比 0.89 出現 36 次，占整首歌約 24%；

頻率比 1 出現 12 次，占整首歌約 8%；

頻率比 1.12 出現 39 次，占整首歌約 27%；

這 3 種比例一共占了約 59%，

我們也發現頻率比的眾數是 1.12，中位數是 1。

標準差 $s \doteq 0.205$ ，平均 $\bar{x} \doteq 1.02$ 。

由表(十一)是針線情頻率比的分組次數分配表算出

在平均數上下 1 個標準差內的頻率比約 83%；

在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 95%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 99%。

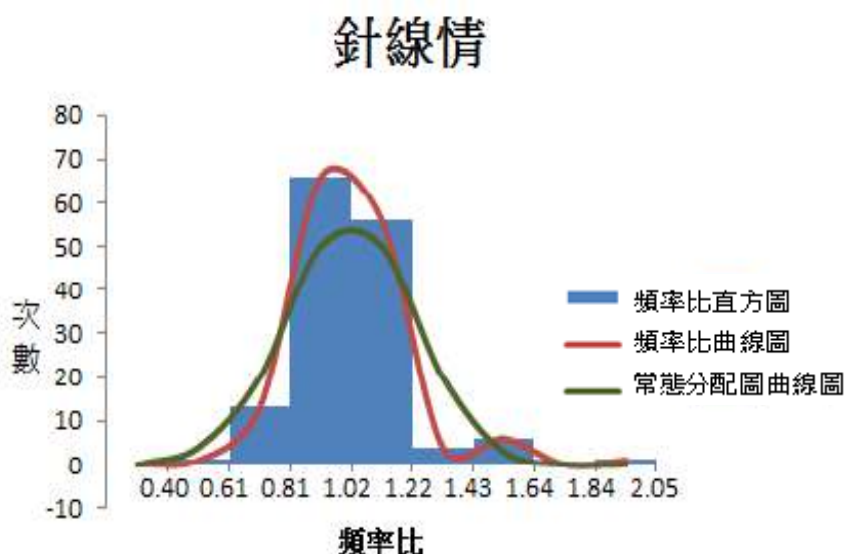
而 (圖二) 則顯示其分組頻率比的次數分配情況。

頻率比	次數
0.56	1
0.67	8
0.75	1
0.79	4
0.84	13
0.89	36
0.94	5
1	12
1.12	39
1.19	17
1.33	4
1.5	6
2	1

(表十) 針線情頻率比分配表。

頻率比分組	次數
以下 ~ 0.403	0
0.403 ~ 0.609	1
0.609 ~ 0.814	13
0.814 ~ 1.020	66
1.020 ~ 1.225	56
1.225 ~ 1.430	4
1.430 ~ 1.636	6
1.636 ~ 1.841	0
1.841 ~ 2.047	1
2.047 以上	0

(表十一) 針線情頻率比次數分配表。



(圖二) 針線情頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

針線情											
簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比
-2	220.00	1.19	1	261.63	1.12	6	440.00	0.89	-2	220.00	1.50
1	261.63	1.12	2	293.66	0.89	5	392.00	0.84	3	329.63	0.89
2	293.66	1.12	1	261.63	0.84	3	329.63	1.19	2	293.66	1.12
3	329.63	0.67	-2	220.00	1.50	5	392.00	0.84	3	329.63	0.79
-2	220.00	1.19	3	329.63	1.00	3	329.63	0.89	1	261.63	0.94
1	261.63	1.12	3	329.63	1.33	2	293.66	1.12	-1	246.94	0.89
2	293.66	1.12	6	440.00	0.89	3	329.63	0.89	-2	220.00	
3	329.63	0.67	5	392.00	1.12	2	293.66	1.12			
-2	220.00	1.19	6	440.00	0.89	3	329.63	0.89			
1	261.63	1.12	5	392.00	0.84	2	293.66	0.89			
2	293.66	1.12	3	329.63	0.89	1	261.63	0.84			
3	329.63	0.67	2	293.66	1.12	-2	220.00	1.19			
-2	220.00	1.19	3	329.63	0.89	1	261.63	1.12			
1	261.63	1.12	2	293.66	1.12	2	293.66	1.12			
2	293.66	1.12	3	329.63	0.89	3	329.63	1.19			
3	329.63	0.67	2	293.66	0.89	5	392.00	0.84			
-2	220.00	1.19	1	261.63	1.12	3	329.63	0.89			
1	261.63	1.12	2	293.66	0.89	2	293.66	1.12			
2	293.66	1.12	1	261.63	1.12	3	329.63	0.89			
3	329.63	1.33	2	293.66	1.12	2	293.66	1.12			
6	440.00	0.89	3	329.63	1.00	3	329.63	0.89			
5	392.00	0.84	3	329.63	0.89	2	293.66	0.89			
3	329.63	1.19	2	293.66	0.89	1	261.63	0.84			
5	392.00	1.12	1	261.63	0.84	-2	220.00	1.00			
6	440.00	0.75	-2	220.00	1.00	-2	220.00	1.19			
3	329.63	1.33	-2	220.00	1.50	1	261.63	0.94			
6	440.00	0.89	3	329.63	0.89	-1	246.94	0.89			
5	392.00	1.12	2	293.66	1.12	-2	220.00	1.19			
6	440.00	0.89	3	329.63	0.79	1	261.63	1.12			
5	392.00	0.84	1	261.63	0.94	2	293.66	1.12			
3	329.63	0.89	-1	246.94	0.89	3	329.63	1.19			
2	293.66	1.12	-2	220.00	2.00	5	392.00	0.56			
3	329.63	0.67	6	440.00	1.19	-2	220.00	1.50			
-2	220.00	1.00	8	523.25	0.94	3	329.63	0.67			
-2	220.00	1.50	7	493.88	0.89	-2	220.00	1.19			
3	329.63	0.89	6	440.00	1.12	1	261.63	1.12			
2	293.66	1.12	7	493.88	0.89	2	293.66	1.12			
3	329.63	0.79	6	440.00	0.89	3	329.63	1.00			
1	261.63	0.94	5	392.00	1.00	3	329.63	1.33			
-1	246.94	0.89	5	392.00	0.84	6	440.00	0.89			
-2	220.00	1.50	3	329.63	1.19	5	392.00	1.12			
3	329.63	0.67	5	392.00	1.12	6	440.00	0.89			
-2	220.00	1.19	6	440.00	1.00	5	392.00	0.84			
1	261.63	1.12	6	440.00	1.00	3	329.63	1.19			
2	293.66	1.12	6	440.00	0.89	5	392.00	0.84			
3	329.63	1.00	5	392.00	1.00	3	329.63	0.67			
3	329.63	0.79	5	392.00	1.12	-2	220.00	1.00			

0.89 1.00 1.12 (表九) 針線情完整歌曲的頻率比總表。

(二) 女人花(曲：陳耀川，1997)

女人花這首歌中出現頻率比的次數整合如(表十二)：

整首歌有 72 個音符，有 71 個頻率比，
 頻率比 0.89 出現 15 次，占整首歌約 21%；
 頻率比 1 出現 16 次，占整首歌約 23%；
 頻率比 1.12 出現 10 次，占整首歌約 14%；
 這 3 種比例一共占了約 58%，
 我們也發現頻率比的眾數是 1，中位數是 1。

頻率比	次數
0.67	2
0.75	5
0.84	8
0.89	15
1	16
1.12	10
1.19	8
1.26	1
1.33	3
1.59	1
1.68	2

(表十二) 女人花頻率比分配表。

標準差 $s \doteq 0.20604$ ，平均 $\bar{x} \doteq 1.016$ 。

由(表十三)是女人花頻率比的分組次數分配表中算出

在平均數上下 1 個標準差內的頻率比有 57 次占了約 80%；

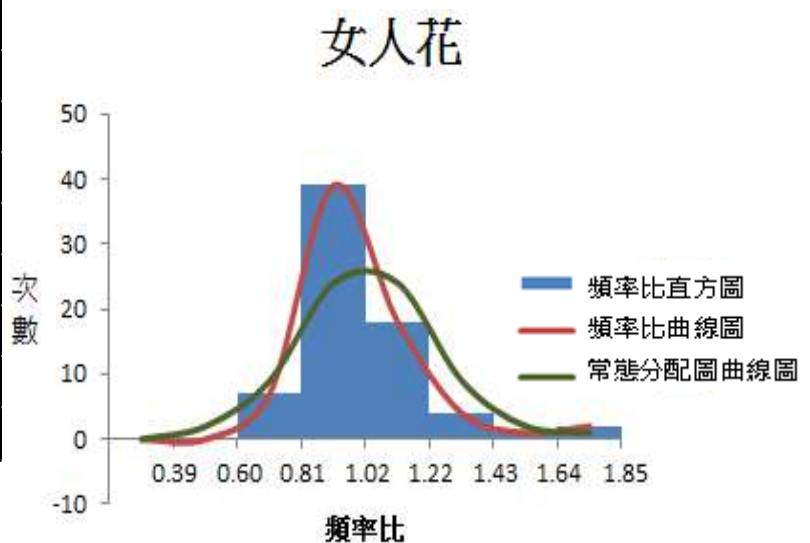
在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 96%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 97%；

而 (圖三) 則顯示其分組頻率比的次數分配情況。

頻率比分組	次數
以下 ~ 0.601	0
0.601 ~ 0.808	7
0.808 ~ 1.016	39
1.016 ~ 1.223	18
1.223 ~ 1.431	4
1.431 ~ 1.638	1
1.638 ~ 1.846	2
2.053 以上	0

(表十三) 女人花頻率比分配表。



(圖三) 女人花頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

(三)小城故事(曲：湯尼，1979)

小城故事這首歌中出現頻率比的次數整合如(表十四)：

整首歌有 92 個音符，有 91 個頻率比，

頻率比 0.89 出現 17 次，占整首歌約 19%；

頻率比 1 出現 15 次，占整首歌約 16%；

頻率比 1.12 出現 19 次，占整首歌約 21%；

這 3 種比例一共占了約 56%，

我們也發現頻率比的眾數是 1.12，中位數是 1。

標準差 $s \doteq 0.17$ ，平均 $\bar{x} \doteq 1.013$ 。

(表十五)是小城故事頻率比的分組次數分配表，算出

頻率比	次數
0.67	1
0.75	10
0.84	9
0.89	17
1	15
1.12	19
1.19	13
1.26	1
1.33	5
1.59	1

(表十四) 小城故事頻率比分配表。

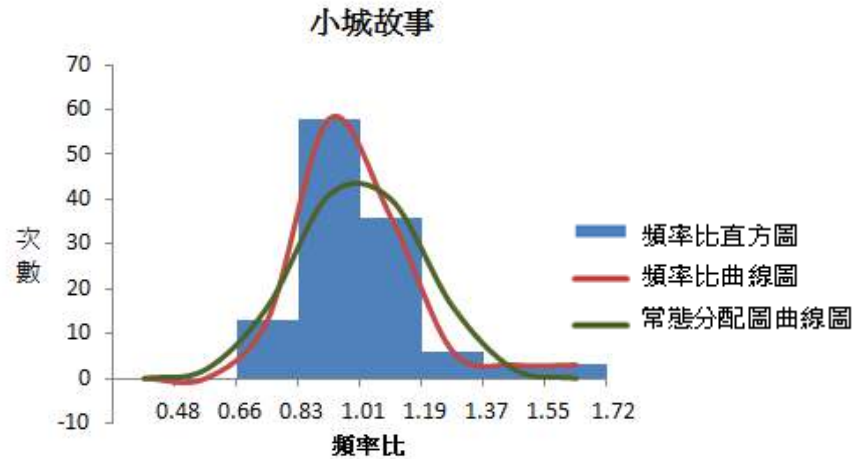
在平均數上下 1 個標準差內的頻率比有 73 次占了約 80%；

在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 99%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 100%；

而 (圖四) 則顯示其分組頻率比的次數分配情況。

頻率比分組		次數
以下	0.655	0
0.655 ~	0.834	11
0.834 ~	1.013	41
1.013 ~	1.192	32
1.192 ~	1.371	6
1.371 ~	1.549	0
1.549 ~	1.728	1
1.728	以上	0



(圖四) 小城故事頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

(表十五) 小城故事頻率比分配表。

我們也重新整理的周杰倫歌曲的頻率比統計數值如(表十六)：

菊花台		紅塵客棧		簡單愛	
眾數	0.89	眾數	1.12	眾數	1
中位數	1	中位數	1	中位數	1
平均值	1.01	平均值	1.02	平均值	1.01
標準差	0.167	標準差	0.212	標準差	0.15
頻率比分組	次數	頻率比分組	次數	頻率比分組	次數
以下~0.51	2	以下~0.39	0	以下~0.56	0
0.51~0.68	0	0.39~0.6	11	0.56~0.71	4
0.68~0.85	24	0.6~0.81	40	0.71~0.86	34
0.85~1.01	75	0.81~1.02	183	0.86~1.01	133
1.01~1.18	44	1.02~1.23	166	1.01~1.16	56
1.18~1.35	19	1.23~1.45	16	1.16~1.31	17
1.35~1.51	6	1.45~1.66	23	1.31~1.46	15
		1.66~1.87	4	1.46~1.61	3
總合	170	總合	443	總合	262
1 個標準差內的頻率比有	70%	1 個標準差內的頻率比有	79%	1 個標準差內的頻率比有	72%
2 個標準差內的頻率比有	95%	2 個標準差內的頻率比有	91%	2 個標準差內的頻率比有	92%
3 個標準差內的頻率比有	99%	3 個標準差內的頻率比有	99%	3 個標準差內的頻率比有	99%

(表十六) 周杰倫歌曲統計數值。

四、票選歌曲

接下來我們從弦與歌隨機挑選了近百首的歌曲，並由音樂班的同學和老師挑選他們喜歡的歌曲，每人可勾選 10 首自己喜歡的歌曲。我們發出 100 張票選，回收 89 張選票，其他有 2 張選票只勾選 5 首，有一張選票只勾選 7 首，有一張選票只勾選 9 首，投票結果如(表十七)。

雋永好歌選票單，不分曲風請選出10首您認為好聽的歌曲											
目次	歌名	票數	目次	歌名	票數	目次	歌名	票數	目次	歌名	票數
民歌			國語流行						台語		
1	阿美阿美	9	1	女人花	2	28	認錯	2	1	阮若打開心內的窗	4
2	滾滾紅塵	2	2	小城故事	4	29	稻香	38	2	針線情	1
3	廟會	3	3	戀曲1990	8	30	獨角戲	5	3	白牡丹	1
4	木棉道	5	4	早知道愛	2	31	瀟灑走一回	9	4	再會啦心愛的無緣的人	12
5	再別康橋	1	5	用心良苦	8	32	聽不到	10	5	酒後的心聲	9
6	雨夜花	9	6	愛如潮水	17	33	一了百了	2	6	牽阮的手	7
7	拜訪春天	4	7	新不了情	26	34	月亮代表我的心	23	7	思暮的人	11
8	望春風	11	8	親密愛人	2	35	何日君再來	3	8	黃昏的故鄉	0
9	秋蟬	3	9	大約在冬季	3	36	你不是真正的快樂	25	9	舊情也綿綿	3
10	萍聚	6	10	十年	18	37	我只在乎你	3	10	山頂的黑狗兄	9
11	愛的真諦	5	11	小酒窩	54	38	我怎麼能離開你	1	11	媽媽請妳也保重	0
12	鑼聲若響	11	12	天黑黑	49	39	我是不是你最疼愛的人	6	12	志明與春嬌	17
13	一剪梅	2	13	手放開	19	40	給我一杯忘情水	7			
14	不了情	2	14	只要你過得比我好	4	41	野百合也有春天	0			
15	光陰的故事	5	15	同手同腳	12	42	為了愛夢一生	0			
16	童年	17	16	恰似你的溫柔	6	43	哭砂	6			
17	明天會更好	5	17	突然好想你	32	44	寂寞的戀人阿	2			
18	陽光和小雨	2	18	海海人生	2	45	你怎麼捨得我難過	4			
19	外婆的澎湖灣	18	19	朋友	20	46	吻別	16			
20	快樂天堂	17	20	花心	2	47	洋葱	46			
21	站在高崗上	6	21	我願意	8	48	得意的笑	1			
23	龍的傳人	15	22	孤單北半球	26	49	最後一夜	1			
			23	意難忘	0	50	愛你一萬年	2			
			24	愛上一個不回家的人	12	51	對面的女孩看過來	15			
			25	愛情釀的酒	4	52	聽海	28			
			26	當你孤單你會想誰	27						
			27	寧夏	22						

(表十七)票選得票數統計。

第一名為小酒窩(曲：林俊傑，2008)，得票數 54 ；

第二名為天黑黑(曲：李偲菘，2000)，得票數 49 ；

第三名為洋葱(曲：阿信，2008)，得票數 46。

另外以曲風區別，民歌票數第一名為外婆的澎湖灣(葉佳修，1979)，得票數 18；台語歌票選第一名為志明與春嬌(阿信，1999)，得票數 17。我們將這幾首歌的完整個歌曲資料如(表十八~表二十)：

(表十八) 小酒窩完整歌曲的頻率比總表。

簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比
3	329.63	1.00	-2	220.00	1.12	3	329.63	0.75	8	523.25	1.00	8	523.25	1.00	3	329.63	0.67	-2	220.00	1.00
3	329.63	1.06	-1	246.94	1.06	-1	246.94	0.79	8	523.25	0.75	8	523.25	1.00	-2	220.00	1.12	-2	220.00	0.75
4	349.23	0.94	1	261.63	0.84	-3	196.00	1.00	5	392.00	1.00	8	523.25	1.12	-1	246.94	1.06	-5	164.81	2.38
3	329.63	0.89	-2	220.00	1.19	-3	196.00	1.12	5	392.00	1.68	9	587.33	0.89	1	261.63	0.94	5	392.00	0.56
2	293.66	1.00	1	261.63	0.94	-2	220.00	1.12	10	659.26	0.89	8	523.25	0.84	-1	246.94	1.06	-2	220.00	1.19
2	293.66	1.00	-1	246.94	1.06	-1	246.94	1.06	9	587.33	1.12	6	440.00	1.19	1	261.63	0.94	1	261.63	0.94
2	293.66	1.33	1	261.63	1.12	1	261.63	0.84	10	659.26	0.89	8	523.25	0.94	-1	246.94	1.06	-1	246.94	1.19
5	392.00	0.75	2	293.66	1.12	-2	220.00	1.00	9	587.33	0.84	7	493.88	1.00	1	261.63	1.26	2	293.66	0.75
2	293.66	0.89	3	329.63	1.00	-2	220.00	0.75	7	493.88	0.79	7	493.88	1.33	3	329.63	0.75	-2	220.00	0.89
1	261.63	1.00	3	329.63	0.67	-5	164.81	1.00	5	392.00	1.00	10	659.26	1.06	-1	246.94	0.89	-3	196.00	1.12
1	261.63	1.00	-2	220.00	1.12	-5	164.81	1.59	5	392.00	0.84	11	698.46	1.12	-2	220.00	1.12	-2	220.00	1.12
1	261.63	1.68	-1	246.94	1.06	1	261.63	0.94	3	329.63	1.50	12	783.99	1.12	-1	246.94	0.89	-1	246.94	1.06
6	440.00	0.89	1	261.63	0.84	-1	246.94	1.06	7	493.88	1.06	13	880.00	0.89	-2	220.00	1.12	1	261.63	1.12
5	392.00	0.75	-2	220.00	1.19	1	261.63	0.94	8	523.25	0.84	12	783.99	0.89	-1	246.94	0.79	2	293.66	1.12
2	293.66	1.19	1	261.63	0.84	-1	246.94	1.19	6	440.00	1.00	11	698.46	1.12	-3	196.00	1.00	3	329.63	1.06
4	349.23	0.94	-2	220.00	1.19	2	293.66	0.75	6	440.00	0.75	12	783.99	0.67	-3	196.00	1.33	4	349.23	0.94
3	329.63	0.89	1	261.63	1.26	-2	220.00	0.75	3	329.63	1.00	8	523.25	1.12	1	261.63	1.26	3	329.63	1.06
2	293.66	1.00	3	329.63	0.75	-5	164.81	1.33	3	329.63	1.00	9	587.33	0.89	3	329.63	1.06	4	349.23	0.94
2	293.66	1.00	-1	246.94	0.89	-2	220.00	1.12	3	329.63	1.59	8	523.25	1.26	4	349.23	0.94	3	329.63	0.89
2	293.66	1.12	-2	220.00	1.12	-1	246.94	1.06	8	523.25	0.94	10	659.26	1.06	3	329.63	0.89	2	293.66	1.00
3	329.63	1.19	-1	246.94	0.89	1	261.63	1.12	7	493.88	1.06	11	698.46	1.12	2	293.66	0.67	2	293.66	0.89
5	392.00	0.84	-2	220.00	1.12	2	293.66	1.12	8	523.25	0.94	12	783.99	1.12	-3	196.00	1.33	1	261.63	0.00
3	329.63	1.19	-1	246.94	0.79	3	329.63	1.06	7	493.88	1.19	13	880.00	0.89	1	261.63	1.12			
5	392.00	1.00	-3	196.00	1.00	4	349.23	0.94	9	587.33	0.75	12	783.99	0.89	2	293.66	1.12			
5	392.00	1.50	-3	196.00	1.33	3	329.63	1.06	6	440.00	0.89	11	698.46	1.12	3	329.63	0.79			
9	587.33	0.84	1	261.63	1.00	4	349.23	0.94	5	392.00	1.12	12	783.99	0.67	1	261.63	1.00			
7	493.88	1.06	1	261.63	1.26	3	329.63	0.89	6	440.00	1.12	8	523.25	1.12	1	261.63	0.75			
8	523.25	1.00	3	329.63	1.06	2	293.66	1.00	7	493.88	1.06	9	587.33	0.89	-3	196.00	1.00			
8	523.25	1.00	4	349.23	0.94	2	293.66	0.89	8	523.25	1.12	8	523.25	0.50	-3	196.00	1.00			
8	523.25	0.94	3	329.63	0.89	1	261.63	0.75	9	587.33	1.12	1	261.63	0.94	-3	196.00	1.68			
7	493.88	0.89	2	293.66	0.67	-3	196.00	1.00	10	659.26	1.06	-1	246.94	1.06	3	329.63	0.89			
6	440.00	1.12	-3	196.00	1.33	-3	196.00	0.89	11	698.46	0.94	1	261.63	0.94	2	293.66	1.12			
7	493.88	1.06	1	261.63	1.12	-4	174.61	1.00	10	659.26	1.06	-1	246.94	1.06	3	329.63	0.89			
8	523.25	0.84	2	293.66	1.12	-4	174.61	1.50	11	698.46	0.94	1	261.63	0.63	2	293.66	0.84			
6	440.00	1.19	3	329.63	0.79	1	261.63	1.00	10	659.26	1.00	-5	164.81	1.19	-1	246.94	0.79			
8	523.25	0.50	1	261.63	1.00	1	261.63	1.26	10	659.26	0.89	-3	196.00	1.12	-3	196.00	1.00			
1	261.63	0.94	1	261.63	0.75	3	329.63	1.00	9	587.33	0.89	-2	220.00	1.12	-3	196.00	1.12			
-1	246.94	1.06	-3	196.00	1.00	3	329.63	0.79	8	523.25	1.12	-1	246.94	1.06	-2	220.00	1.12			
1	261.63	0.94	-3	196.00	1.00	1	261.63	1.12	9	587.33	0.89	1	261.63	0.94	-1	246.94	1.06			
-1	246.94	1.06	-3	196.00	1.68	2	293.66	1.33	8	523.25	1.12	-1	246.94	1.06	1	261.63	0.84			
1	261.63	0.63	3	329.63	1.00	5	392.00	1.33	9	587.33	0.75	1	261.63	0.94	-2	220.00	0.75			
-5	164.81	1.19	3	329.63	0.89	8	523.25	1.12	6	440.00	1.19	-1	246.94	1.06	-5	164.81	1.00			
-3	196.00	1.00	2	293.66	1.12	9	587.33	1.12	8	523.25	1.12	1	261.63	1.12	-5	164.81	1.59			
-3	196.00	1.12	3	329.63	1.00	10	659.26	0.79	9	587.33	0.89	2	293.66	1.12	1	261.63	0.84			

0.89 1.00 1.12

(表十九) 天黑黑完整歌曲的頻率比總表。

簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比
1	261.63	2	3	329.63	1	9	587.33	0.89	5	392	1	5	392	0.89
8	523.25	0.5	3	329.63	0.67	8	523.25	1.26	5	392	1.12	4	349.23	0.94
1	261.63	2	-2	220	1.19	10	659.26	0.89	6	440	0.79	3	329.63	0.89
8	523.25	0.5	1	261.63	1.26	9	587.33	0.67	4	349.23	1.12	2	293.66	1.12
1	261.63	2	3	329.63	0.89	5	392	1.5	5	392	0.89	3	329.63	0.59
8	523.25	0.5	2	293.66	1.12	9	587.33	0.89	4	349.23	0.94	-3	196	1.68
1	261.63	1	3	329.63	0.89	8	523.25	0.94	3	329.63	1.06	3	329.63	1.06
1	261.63	2	2	293.66	1.12	7	493.88	1.06	4	349.23	0.84	4	349.23	1.12
8	523.25	0.5	3	329.63	1	8	523.25	1.12	2	293.66	1.12	5	392	1
1	261.63	2	3	329.63	1.06	9	587.33	0.89	3	329.63	1.06	5	392	1
8	523.25	0.5	4	349.23	0.84	8	523.25	0.94	4	349.23	1.12	5	392	1.33
1	261.63	2	2	293.66	1.12	7	493.88	0.79	5	392	0.89	8	523.25	0.75
8	523.25	0.5	3	329.63	1.19	5	392	0.84	4	349.23	0.94	5	392	1
1	261.63	1.26	5	392	1.5	3	329.63	0.89	3	329.63	0.89	5	392	1.12
3	329.63	1.06	9	587.33	0.89	2	293.66	1.12	2	293.66	1.12	6	440	0.89
4	349.23	1.12	8	523.25	0.94	3	329.63	1.19	3	329.63	1	5	392	0.89
5	392	1	7	493.88	1.06	5	392	1	3	329.63	1.06	4	349.23	1
5	392	1	8	523.25	1.12	5	392	1.5	4	349.23	0.94	4	349.23	0.94
5	392	0.84	9	587.33	0.89	9	587.33	0.89	3	329.63	0.89	3	329.63	1.06
3	329.63	1.06	8	523.25	0.94	8	523.25	0.94	2	293.66	1.33	4	349.23	0.84
4	349.23	1.12	7	493.88	0.79	7	493.88	1.06	5	392	1.26	2	293.66	1.12
5	392	1	5	392	0.84	8	523.25	1.12	7	493.88	1.06	3	329.63	1.06
5	392	1.12	3	329.63	0.89	9	587.33	0.89	8	523.25	1	4	349.23	0.94
6	440	0.79	2	293.66	1.12	8	523.25	0.94	8	523.25	0.63	3	329.63	1.06
4	349.23	0.94	3	329.63	1.19	7	493.88	0.79	3	329.63	1	4	349.23	1.12
3	329.63	1.06	5	392	1.5	5	392	0.84	3	329.63	1.19	5	392	0.63
4	349.23	0.84	9	587.33	0.89	3	329.63	0.89	5	392	1	-1	246.94	1.19
2	293.66	1.12	8	523.25	0.94	2	293.66	1.12	5	392	1.12	2	293.66	0.89
3	329.63	1.06	7	493.88	1.06	3	329.63	1.59	6	440	0.79	1	261.63	1.26
4	349.23	1	8	523.25	1.12	8	523.25	0.75	4	349.23	0.94	3	329.63	1.06
4	349.23	1.12	9	587.33	0.89	5	392	1	3	329.63	1.06	4	349.23	1
5	392	0.89	8	523.25	0.94	5	392	1.12	4	349.23	0.84	4	349.23	0.94
4	349.23	0.94	7	493.88	0.79	6	440	1.19	2	293.66	1	3	329.63	1.06
3	329.63	0.89	5	392	0.84	8	523.25	0.84	2	293.66	0.89	4	349.23	1.12
2	293.66	1.12	3	329.63	0.89	6	440	1.19	1	261.63	0.94	5	392	0.63
3	329.63	0.59	2	293.66	1.12	8	523.25	1	-1	246.94	0.89	-1	246.94	1.19
-3	196	1.68	3	329.63	1.33	8	523.25	0.84	-2	220	0.89	2	293.66	0.89
3	329.63	1.06	6	440	0.89	6	440	1.19	-3	196	2	1	261.63	1.12
4	349.23	1.12	5	392	1	8	523.25	0.84	5	392	1.5	2	293.66	1.12
5	392	1	5	392	1.12	6	440	1.19	9	587.33	0.89	3	329.63	1.06
5	392	1	6	440	1.19	8	523.25	0.84	8	523.25	1.12	4	349.23	0.94
5	392	0.84	8	523.25	0.84	6	440	1.19	9	587.33	0.89	3	329.63	1.06
3	329.63	1.06	6	440	1.19	8	523.25	0.75	8	523.25	1.12	4	349.23	1.12
4	349.23	1.12	8	523.25	1	5	392	1	9	587.33	0.56	5	392	0.63
5	392	1	8	523.25	0.84	5	392	1.12	3	329.63	1.06	-1	246.94	1.06
5	392	1.12	6	440	1.19	6	440	1.33	4	349.23	1.12	1	261.63	1.26
6	440	0.79	8	523.25	0.84	9	587.33	0.89	5	392	1	3	329.63	0.89
4	349.23	0.94	6	440	1.19	8	523.25	1.12	5	392	1	2	293.66	1.12
3	329.63	1.06	8	523.25	0.75	9	587.33	0.89	5	392	0.84	3	329.63	1
4	349.23	0.84	5	392	1	8	523.25	1.12	3	329.63	1.06	3	329.63	0.67
2	293.66	1.12	5	392	1.12	9	587.33	0.89	4	349.23	1.12	-2	220	1.19
3	329.63	1.06	6	440	1.33	8	523.25	1.12	5	392	1	1	261.63	1.26
4	349.23	0.94	9	587.33	0.89	9	587.33	0.89	5	392	1.12	3	329.63	0.89
3	329.63	1.06	8	523.25	1.12	8	523.25	1.12	6	440	0.79	2	293.66	1.12
4	349.23	1.12	9	587.33	0.89	9	587.33	0.67	4	349.23	0.94	3	329.63	0.89
5	392	0.63	8	523.25	1.12	5	392	0.84	3	329.63	1.06	2	293.66	1.12
-1	246.94	1.19	9	587.33	0.89	3	329.63	1.06	4	349.23	0.84	3	329.63	0.79
2	293.66	0.89	8	523.25	1.12	4	349.23	1.12	2	293.66	1.12	1	261.63	
1	261.63	1.26	9	587.33	0.89	5	392	0.67	3	329.63	1.06			
3	329.63	0.89	8	523.25	1.26	1	261.63	1.26	4	349.23	1			
2	293.66	1.12	10	659.26	0.89	3	329.63	1.19	4	349.23	1.12			

0.89 1.00 1.12

(表二十) 洋蔥完整歌曲的頻率比總表。

簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比	簡譜	頻率	頻率比
-3	196.00	2.00	1	261.63	0.84	5	392.00	0.75	5	392.00	2.00	10	659.26	0.89
5	392.00	0.84	-2	220.00	1.33	2	293.66	0.89	12	783.99	0.84	9	587.33	1.12
3	329.63	1.06	2	293.66	1.00	1	261.63	0.94	10	659.26	0.89	10	659.26	0.89
4	349.23	1.12	2	293.66	1.12	-1	246.94	1.06	9	587.33	1.12	9	587.33	1.12
5	392.00	0.89	3	329.63	1.00	1	261.63	0.84	10	659.26	1.19	10	659.26	0.89
4	349.23	0.94	3	329.63	1.06	-2	220.00	1.33	12	783.99	1.00	9	587.33	1.12
3	329.63	0.75	4	349.23	1.26	2	293.66	1.00	12	783.99	1.33	10	659.26	0.79
-1	246.94	1.06	6	440.00	1.33	2	293.66	1.12	15	1046.50	1.00	8	523.25	1.68
1	261.63	0.63	9	587.33	0.89	3	329.63	1.00	15	1046.50	0.75	13	880.00	0.89
-5	164.81	1.33	8	523.25	0.56	3	329.63	1.06	12	783.99	0.75	12	783.99	1.12
-2	220.00	1.12	2	293.66	1.19	4	349.23	1.26	9	587.33	1.12	13	880.00	0.56
-1	246.94	1.06	4	349.23	0.94	6	440.00	1.33	10	659.26	0.89	7	493.88	1.59
1	261.63	0.63	3	329.63	1.33	9	587.33	0.89	9	587.33	1.12	12	783.99	0.89
-5	164.81	1.50	6	440.00	1.00	8	523.25	0.56	10	659.26	1.00	11	698.46	1.12
-1	246.94	1.06	6	440.00	0.89	2	293.66	1.19	10	659.26	0.79	12	783.99	0.50
1	261.63	1.26	5	392.00	1.12	4	349.23	0.94	8	523.25	1.00	5	392.00	1.78
3	329.63	1.59	6	440.00	1.12	3	329.63	1.33	8	523.25	1.68	11	698.46	0.94
8	523.25	0.94	7	493.88	1.06	6	440.00	1.00	13	880.00	0.89	10	659.26	1.06
7	493.88	0.79	8	523.25	0.84	6	440.00	0.89	12	783.99	1.12	11	698.46	1.00
5	392.00	1.12	6	440.00	1.00	5	392.00	1.12	13	880.00	0.56	11	698.46	0.94
6	440.00	1.00	6	440.00	0.94	6	440.00	1.12	7	493.88	1.59	10	659.26	1.06
6	440.00	1.19	5.5	415.30	0.79	7	493.88	1.06	12	783.99	0.89	11	698.46	1.00
8	523.25	0.94	3	329.63	1.50	8	523.25	0.84	11	698.46	1.12	11	698.46	0.94
7	493.88	0.79	7	493.88	1.06	6	440.00	1.00	12	783.99	1.00	10	659.26	1.06
5	392.00	0.89	8	523.25	0.84	6	440.00	0.94	12	783.99	0.89	11	698.46	1.00
4	349.23	0.71	6	440.00	1.50	5.5	415.30	1.19	11	698.46	0.94	11	698.46	0.94
-1	246.94	1.06	10	659.26	1.06	7	493.88	1.06	10	659.26	1.06	10	659.26	0.89
1	261.63	1.50	11	698.46	0.94	8	523.25	1.26	11	698.46	1.00	9	587.33	0.89
5	392.00	0.67	10	659.26	1.06	10	659.26	1.00	11	698.46	0.94	8	523.25	1.00
1	261.63	1.12	11	698.46	1.00	10	659.26	1.06	10	659.26	1.06	8	523.25	0.75
2	293.66	0.84	11	698.46	0.94	11	698.46	0.94	11	698.46	1.00	5	392.00	1.33
-1	246.94	0.79	10	659.26	0.79	10	659.26	1.06	11	698.46	0.94	8	523.25	
-3	196.00	1.00	8	523.25	1.00	11	698.46	1.00	10	659.26	1.06			
-3	196.00	1.33	8	523.25	1.00	11	698.46	0.94	11	698.46	0.94			
1	261.63	1.00	8	523.25	0.84	10	659.26	0.79	10	659.26	0.89			
1	261.63	1.26	6	440.00	0.67	8	523.25	0.84	9	587.33	0.67			
3	329.63	1.00	2	293.66	0.67	6	440.00	1.19	5	392.00	1.00			
3	329.63	1.19	-3	196.00	1.00	8	523.25	0.84	5	392.00	2.00			
5	392.00	1.00	-3	196.00	1.33	6	440.00	1.78	12	783.99	0.84			
5	392.00	1.00	1	261.63	1.00	12	783.99	0.84	10	659.26	0.89			
5	392.00	1.00	1	261.63	1.26	10	659.26	1.19	9	587.33	1.12			
5	392.00	0.75	3	329.63	1.00	12	783.99	0.84	10	659.26	1.00			
2	293.66	0.89	3	329.63	1.19	10	659.26	0.89	10	659.26	1.59			
1	261.63	0.94	5	392.00	1.00	9	587.33	0.67	15	1046.50	1.00			
-1	246.94	1.06	5	392.00	1.00	5	392.00	1.00	15	1046.50	0.63			



 0.89 1.00 1.12

(一)小酒窩這首歌中出現頻率的次數總合：

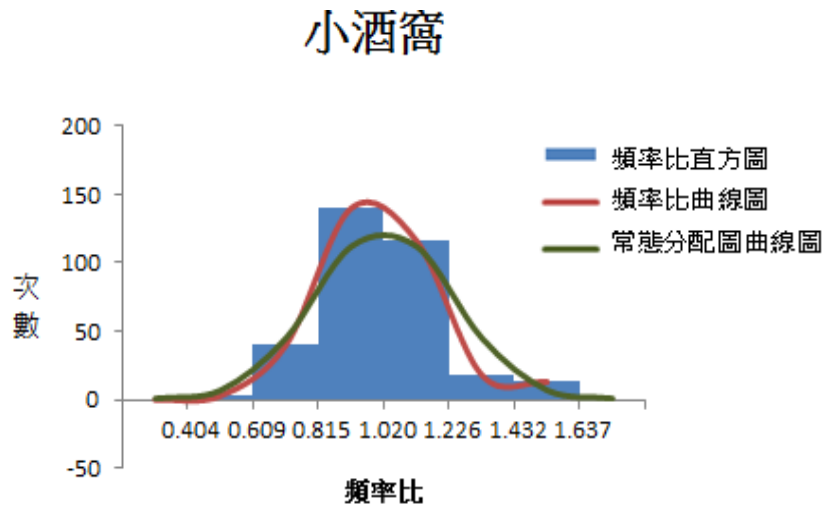
標準差 $s \cong 0.205632$ ，平均 $\bar{x} \cong 1.02$ 。由頻率比分組次數分配表(表二十一)中算出

在平均數上下 1 個標準差內的頻率比有 119 次占了約 78%；

在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 95%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 100%。(圖五)為其頻率比分組次數分配圖。

組界	次數
以下~0.404	0
0.404~0.609	3
0.609~0.815	40
0.815~1.020	140
1.020~1.226	116
1.226~1.432	18
1.432~1.637	13



(表二十一) 小酒窩頻率比分配表。(圖五) 小酒窩頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

(二)天黑黑整首歌中出現頻率的次數總合：

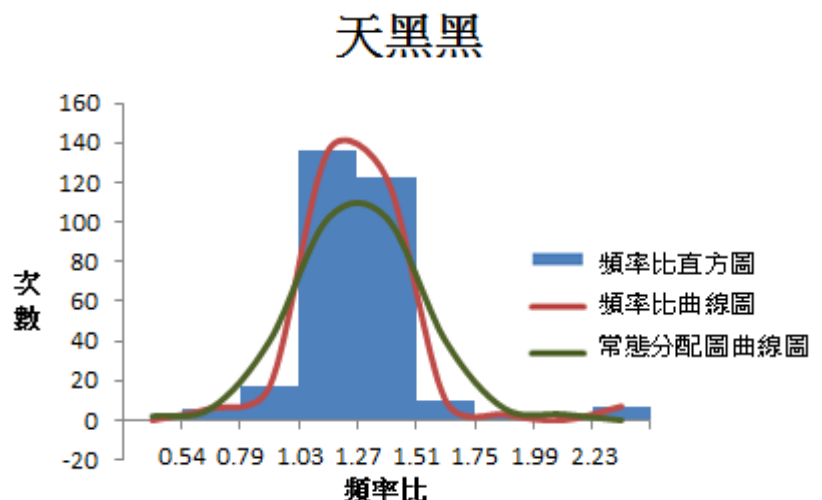
標準差 $s \cong 0.24$ ，平均 $\bar{x} \cong 1.026$ 。由頻率比分組次數分配表(表二十二)中算出

在平均數上下 1 個標準差內的頻率比有 258 次占了約 86%；

在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 95%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 98%。(圖六)為其頻率比分組次數分配圖。

組界	次數
以下~0.31	0
0.31~0.54	6
0.54~0.79	17
0.79~1.03	136
1.03~1.27	122
1.27~1.51	10
1.51~1.75	3
1.75~1.99	0
1.99~2.23	7



(表二十二) 天黑黑頻率比分配表。

(圖六) 天黑黑頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

(三)洋蔥這首歌中出現頻率的次數總合：

標準差 $s \doteq 0.250217$ ，平均 $\bar{x} \doteq 1.03$ 。由頻率比分組次數分配表(表二十三)中算出

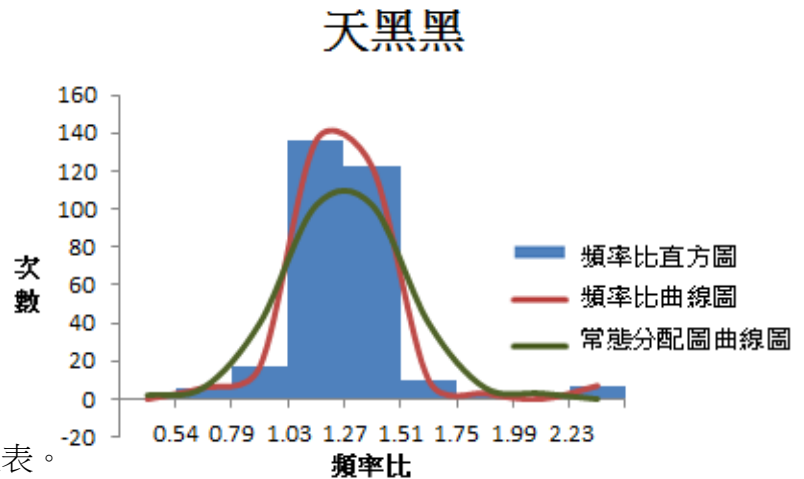
在平均數上下 1 個標準差內的頻率比有 165 次占了約 78%；

在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 94%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 100%。(圖七)為其頻率比分組次數分配圖。

組界	頻率
以下~0.28	0
0.28~0.53	1
0.53~0.78	19
0.78~1.03	106
1.03~1.28	59
1.28~1.53	15
1.53~1.78	11

(表二十三) 洋蔥頻率比分配表。



(圖七) 洋蔥頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

(四)志明與春嬌整首歌中出現頻率的次數總合：

標準差 $s \doteq 0.223305$ ，平均 $\bar{x} \doteq 1.02$ ，由其頻率比分組次數分配表(表二十四)表算出

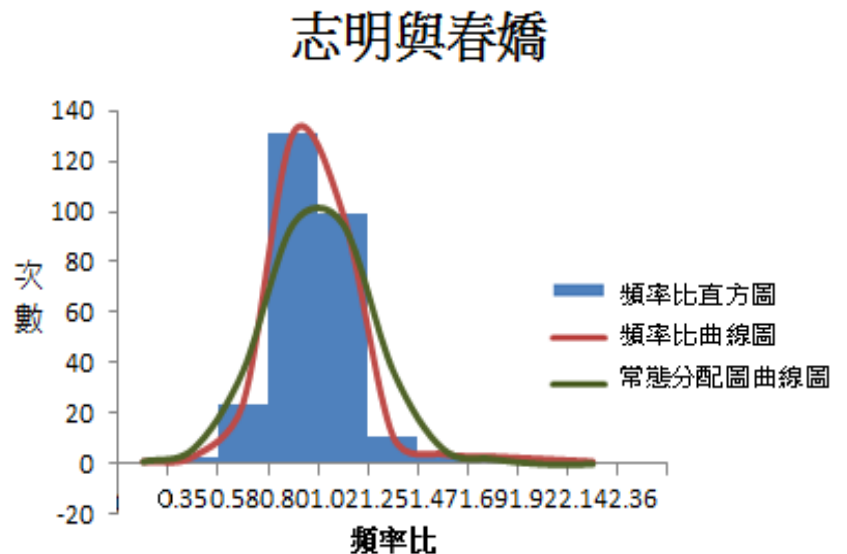
在平均數上下 1 個標準差內的頻率比有 230 次占了約 82%；

在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 95%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 97%。(圖八)為其頻率比分組次數分配圖。

組界	次數
以下~0.35	1
0.35~0.58	3
0.58~0.80	24
0.80~1.02	131
1.02~1.25	99
1.25~1.47	11
1.47~1.69	4
1.69 以上	6

(表二十四) 志明與春嬌頻率比分配表。



(圖八) 志明與春嬌頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

(五) 外婆的澎湖灣整首歌中出現頻率的次數總合：

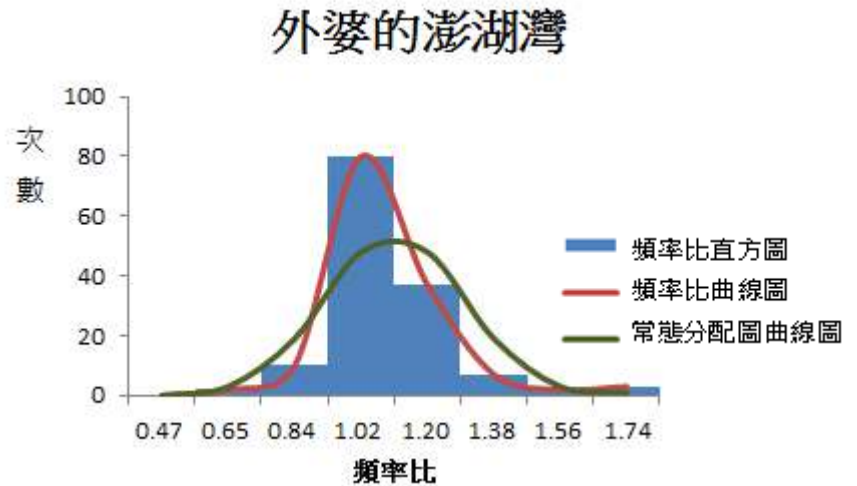
標準差 $s \doteq 0.1814$ ，平均 $\bar{x} \doteq 1.02$ 。由其頻率比分組次數分配表(表二十五)算出

在平均數上下 1 個標準差內的頻率比有 117 次占了約 83%；

在平均數上下 2 個標準差內的頻率比約 95%；

在平均數上下 3 個標準差內的頻率比約 98%。(圖九)為其頻率比分組次數分配圖。

組界	次數
以下~0.47	0
0.45~0.65	2
0.65~1.02	10
1.02~1.20	80
1.20~1.38	37
1.38~1.56	7
1.56~1.74	2
1.74 以上	3



(表二十五) 外婆的澎湖灣頻率比分配表。

(圖九) 外婆的澎湖灣頻率比次數分配圖及常態分配對照曲線圖。

這五首歌曲中，一個標準差的範圍 71%到 88%，二個標準差的範圍都在 94%到 95%之間，三個標準差的範圍都在 97%到 100%。而畫出來的標準差分布的直方圖都類似常態分布圖。所以我們在這裡歸納越受歡迎的歌曲，其分布圖越像常態分布。

伍、討論

一、音符折線圖：

我們最先想要知道的是，一首歌之中音符的分佈狀況，並從分佈狀況中找到歌曲的規律。我們最先選擇周杰倫的歌曲來討論，原因是周杰倫的歌曲有很多風格，例如中國風、抒情曲、饒舌樂…等等。因此，我們假設，若能在周杰倫的歌曲中，找出音符的分佈規律，或許我們能得到一個成果，並以此去研究其他作曲家的歌曲狀況。

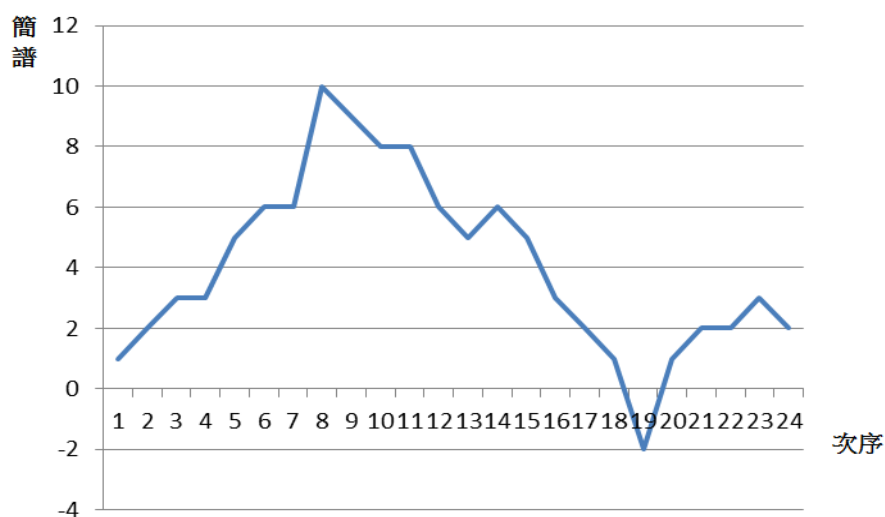
我們將音符轉換成簡譜後，畫成折線圖如(圖十~圖十二)，找尋折線圖之中類似

的分佈情形。一首歌裡面，最讓人印象深刻的段落通常是副歌，因此在這份報告之中，我們只有將歌曲擷取副歌的簡譜與折線圖出，並且比較歌曲中音符的分佈。

(一)菊花台

簡譜	1	2	3	3	5	6	6	10	9	8	8	6	5
簡譜	6	5	3	2	1	-2	1	2	2	3	2		

(表二十六) 菊花台第一段副歌簡譜。

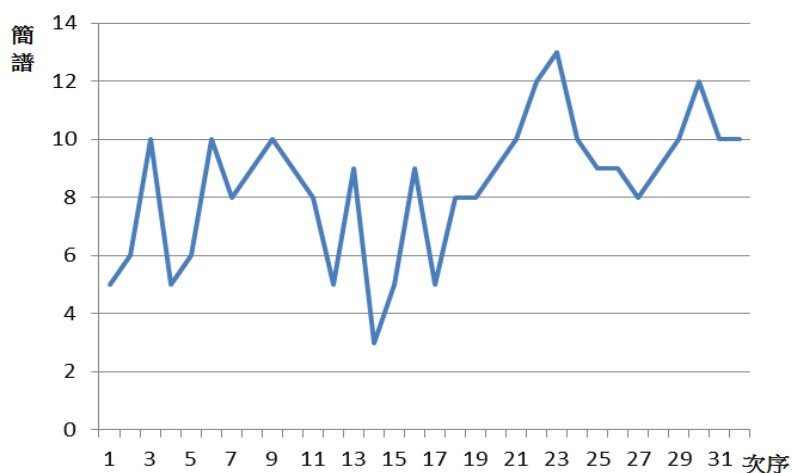


(圖十) 菊花台副歌第一段折線圖。

(二)紅塵客棧

簡譜	5	6	10	5	6	10	8	9	10	9	8	5	9	3	5	9	5	8
簡譜	8	9	10	12	13	10	9	9	8	9	10	12	10	10				

(表二十七) 紅塵客棧副歌第一段簡譜。



(圖十一) 紅塵客棧副歌第一段折線圖。

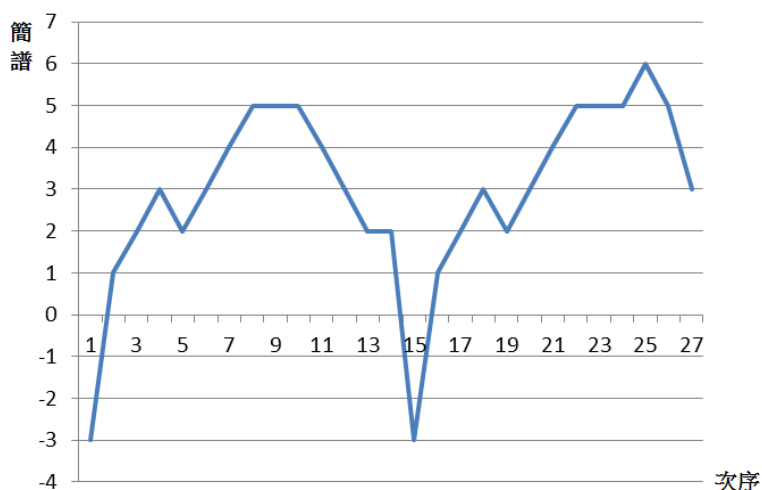
這兩首是周杰倫專輯中屬於中國曲風的歌曲。我們比較中國風的歌曲之中，能夠說明

類似的地方，只有在前段所提到的，缺少了 Fa 和 Si 這兩個音。其餘要找到相似的段落，卻是難以發現歸納。

(三) 簡單愛

簡譜	-3	1	2	3	2	3	4	5	5	5	4	3	2	2
簡譜	-3	1	2	3	2	3	4	5	5	5	6	5	3	

(表二十八) 簡單愛副歌第一段簡譜。



(圖十二) 簡單愛副歌第一段折線圖。

我們試圖加上周杰倫專輯中非中國風的音樂進來討論，折線圖的相關性更不明顯。原本想要參照不同曲風之中，是否有作曲者特殊的規則、分佈，可是比對幾首不同曲風歌曲後，結果讓我們不滿意。因此我們必須考慮，除了音符之外，我們還能在歌曲中，找到其他音樂的特性並且量化後，再來處理和討論。

二、頻率和波次及波次比：

我們沒辦法在音符分佈狀況找到規律，轉個方向去想，聲音的頻率或許是一個方向。我們查詢到音階都有不同頻率(附件一)，而一首歌曲之中，聲音高低狀況，是否能影響我們對歌曲的觀感，並從這些頻率數字中，看能否找到規律性。

我們知道頻率，是每秒震動的次數，也就是說表中的中央 Do(C4)，每秒約震動 261.63 次。但是若單純將歌曲的換算成音階頻率，再轉換成折線圖，那不就和之前的結論一樣了？頻率，一秒鐘的震動次數，也就是一秒鐘產生的波數。我們將頻率乘上節拍，就是這個音符所發生的波次。

因此我們接歌曲中的節拍考慮進來。如果一拍以 1 秒表示，半拍為 0.5 秒，那麼半

拍的 Do(C4)即震動 $261.63 \times 0.5 = 130.815$ 次。因此，我們將歌曲中的音階換成頻率，音符換成節拍後作加乘，得到的次數我們稱之為波次。將後項音符波次除以前項音符波次，即為波次比。

簡譜	節拍	頻率	波次	簡譜	節拍	頻率	波次
1	0.5	262	131	6	0.5	440	220
2	0.5	294	147	5	0.5	392	196
3	1	330	330	3	0.5	330	165
3	0.5	330	165	2	0.5	294	147
5	0.5	392	196	1	1	262	262
6	1	440	440	-2	0.5	220	110
6	0.5	440	220	1	0.5	262	131
10	0.5	659	330	2	1	294	294
9	0.5	587	294	2	0.5	294	147
8	0.5	523	262	3	0.5	330	165
8	0.5	523	262	2	1	294	294
6	0.5	440	220				
5	2	392	784				

(表二十九) 菊花台副歌第一段，頻率與波次。

我們想要從頻率換算的波次中去找出規律，並得到可用的資料。以菊花台副歌第一段(表二十九)，我們發現波次比的數字中，有幾個數字出現次數特別高，而且不僅僅是一首歌而已，完成三首歌後發現這些數字的頻繁出現，讓我們想繼續去探究。整理表如(表二、表六、表八)。但是我們在判讀上有很大的問題，結果我們並不滿意，波次比的數據，組數太多，雖然可以得到幾個比較集中的值，但尚且無法斷定之間的關係；本以為波次或許跟音樂的流暢好聽有關連，但是跟頻率比較起來，我們所分析的數值太雜亂，或許我們所討論的內容還不夠深刻，以後有機會再來好好研究。因此我們又試著直接將前後音符頻率相除，作為頻率比，則發現其中有大量的相關性質。

三、頻率比與十二平均律：

在計算音符的頻率比時，跟波次比一樣，有些數字頻繁出現，參照表三、表五、表八。其中 0.89、1.12 這兩個數字在波次比的比例也頗高。因此我們試著將 Do、Re、Mi、Fa、Sol、La、Si，前後兩個音符相除，多數可以得到 1.12 這個數字，除了 Mi、Fa 這一組。後來也發現 Si 到高音 Do 一樣比值不是 1.12。

我們接著討論到，鋼琴上白鍵之外存在著黑鍵，就是波次比困擾我們的升降音符。由頻率表知，Do 到高八度 Do 的頻率增長了兩倍，同時 Re 到高八度 Re 也恰恰好是兩倍，Do 到高八度 Do 一共有 13 個音，假設其音頻關係成等比數列，產生(13-1)個比值，所以可以推算其比值應為 $\sqrt[12]{2} \doteq 1.0594630$ 。在頻率比的計算、統計的時候，0.89、1、1.12 這些數字的頻繁出現，引起了我們關注。事實上，每個音符都有自己的對應的頻率。在國際上並不是以中央 C4 為基準，而是用 A4 來當。因為 A4 的頻率正好是整數 440Hz，所以才以它來當標準；舉例來說：對於 220Hz 到 440Hz 的差距，與 880Hz 到 440Hz 之間的差距，對於人耳而言是相同的，因此我們將基頻的頻率倍數定為高 8 度。也就是說，A5 的頻率是 A4 的 2 倍。而我們又在 8 度音之間將其分為 12 個等分，所以每個音之間的差距為 $\sqrt[12]{2} \doteq 1.05946309436$ 倍，這 12 個等分又分別代表著 7 個全音和 5 個半音，這就是所謂的 12 平均律也就是一個半音差距的頻率比。

我們得到的頻率比皆與 1.059 有極大關係。比值若是為 1，即上下音相同；升一個半音比值約為 1.06，降一個半音則約 0.94。而 0.89、1.12，則是差了一個全音。

我們最後整理的 107 首各種類型的歌曲，得到音頻比為 0.89 0.94 1.12 1.16 1.26……等等好幾個數字，但由資料顯示 0.89、1、1.12 這三個頻率比例都是最高的，所佔全曲比例大約是 33%~77%不等。(表三十)是 0.89 1 1.12 這三個頻率比比例總和的次數表，有 93 首歌集中在 40%~70%之間。

比例和%	次數
20~30	0
30~40	7
40~50	21
50~60	32
60~70	40
70~80	7
80~90	0

(表三十) 107 首歌曲中頻率比 0.89 1 1.12 比例總和。

因此，我們可以說歌曲之中，同音和差一全音的比值占整首歌的比例約 40%~70%。

四、頻率比在統計上：

(一)眾數與中位數

我們整理了這 107 首歌頻率比的眾數及中位數，如(表三十一)：

眾數	數量	中位數	數量
0.84	1	0.89	3
0.89	31	0.94	6
0.94	1	1	96
1	54	1.06	1
1.12	19	1.12	1
1.19	1		

(表三十一) 107 首歌曲中頻率比的眾數及中位數分布狀況。

我們發現 107 首歌曲之中，頻率比眾數還是以 0.89、1、1.12 為主，眾數最多的是 1；中位數也幾乎都是 1。

在頻率比的意義之中，我們認為眾數可以代表整首歌，大多是以升降某個半音或全音為主。中位數可以說所有頻率的中間值。若偏高(或偏低)，則整首歌的音符是升音(或降音)為多數。看到 0.89、1、1.12 這三個數值頻繁出現，我們想要做進一步的討論。

(二)平均數與標準差

基本上標準差 (S) 是在計算「離散度」，這個數字越小，就表示所有個體間的數值差異越小，也就是每個個體的值趨近於其平均值 (\bar{x})；如果這個數字越大，就表示所有個體間的數值差異越大，個體與個體的數值差距大，也就是說標準差可以來判別整組資料的分散程度。因此，我們又將標準差 (S) 及平均數 (\bar{x}) 加入到討論的範圍內。

我們發現我們所整理出來的這 107 首歌中，在一個標準差內只有 3 首沒有達到 68% 的比例；兩個標準差的比例都在 90-100%，兩個標準差內約 95% 的有 35 筆數據；在三個標準差內都是在 93%-100%，請參閱(表三十二)。

1個標準差	
組界%	次數
68以下	3
68~78	38
78~88	58
88~98	8

2個標準差	
組界%	次數
85以下	0
85~90	0
90~95	49
95~100	58

3個標準差	
組界%	次數
95以下	1
95~97	10
97~99	62
99~100	34

(表三十二) 107 首歌曲在 1~3 個標準差次數分配的統計結果。

這讓我們想到歌曲的頻率比是不是呈現常態分配？

我們統計了這 107 首歌頻率比平均值的平均 $\bar{x} = 1.021$ ，

頻率比平均值的標準差 $\sigma = 0.00795$ 。

並以標準差為組距做出頻率比的平均值次數分配表如(表三十三)，我們計算出，

在一個標準差內約占 69.16%；

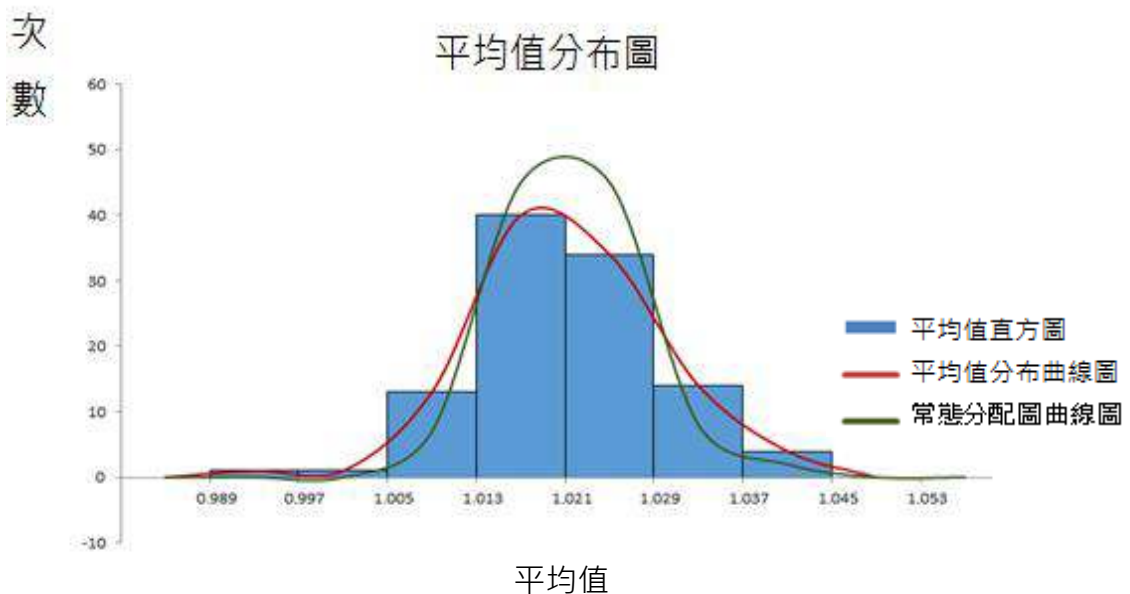
兩個標準差內約占 94.39%；

三個標準差內達占 99.07%。

其頻率比次數分配圖如(圖十三)。

平均分組			次數
0.989		0.997	1
0.997	~	1.005	1
1.005	~	1.013	13
1.013	~	1.021	40
1.021	~	1.029	34
1.029	~	1.037	14
1.037	~	1.045	4

(表三十三) 頻率比的平均值次數分配表。



(圖十三) 107 首歌頻率比平均值的次數分配圖。

在實際應用上，常考慮一組數據具有近似於常態分布的機率分布。若其假設正確，

則約 68% 數值分布在距離平均值 1 個標準差之內的範圍，約 95% 數值分布在距離平均值有 2 個標準差之內的範圍，以及約 99.7% 數值分布在距離平均值有 3 個標準差之內的範圍。所以我們發現這 107 首歌的頻率比平均值十分趨近常態分配

$$X \sim N(1.021, 0.00795^2)$$

另外我們也對這 107 首歌頻率比標準差做分析，得到頻率比的標準差次數分配表如(表三十四)，頻率比標準差的平均約為 0.211，頻率比標準差的標準差約為 0.04179

在一個標準差內約占 73.83%；

兩個標準差內約占 94.39%；

三個標準差內達占 98.13%。

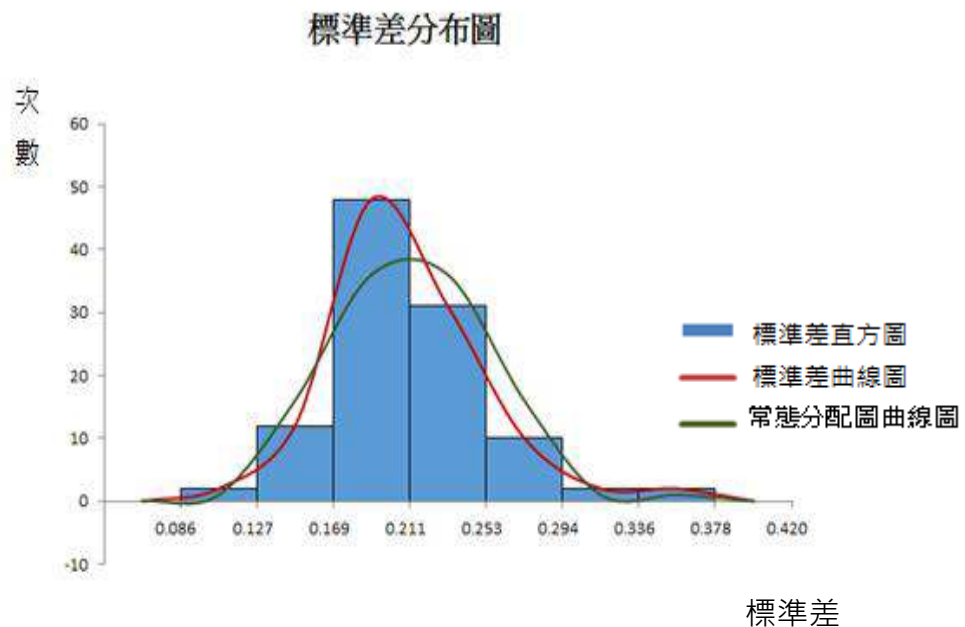
其次數分配圖如(圖十四)。

所以我們發現這 107 首歌的頻率比標準差

也是趨近常態分配。

平均分組			次數
0.086	~	0.127	2
0.127	~	0.169	12
0.169	~	0.211	48
0.211	~	0.253	31
0.253	~	0.294	10
0.294	~	0.336	2
0.336	~	0.378	2

(表三十四) 頻率比的標準差次數分配圖。



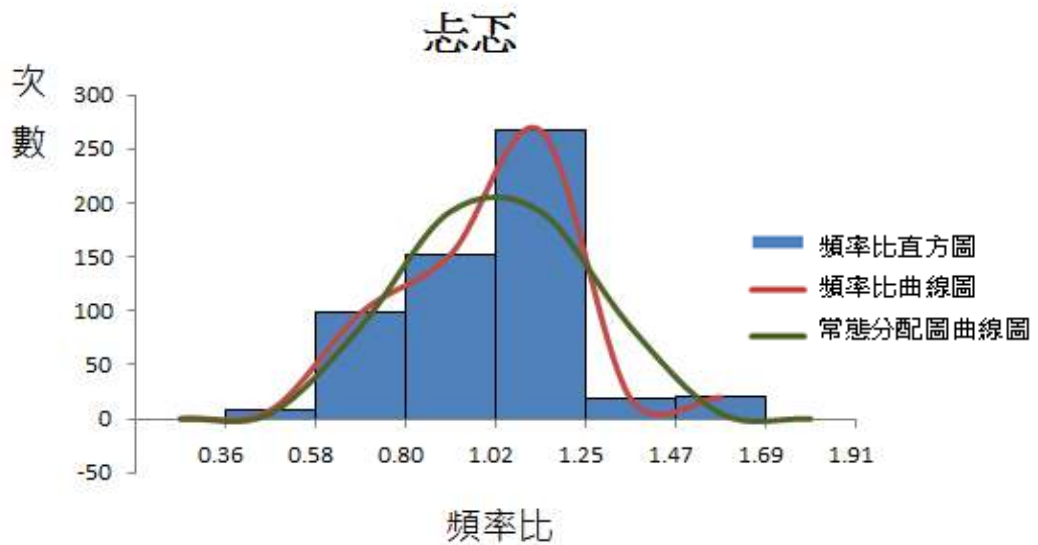
(圖十四) 107 首歌頻率比標準差的次數分配圖。

五、特殊歌曲：

我們有發現幾首比較特殊的歌曲，我們來探討其分配的狀況。

(一) 忐忑(老鑼，2006)：整首歌曲無歌詞，只有“嗯、哦、唉、哟…”而且音符忽高忽低，

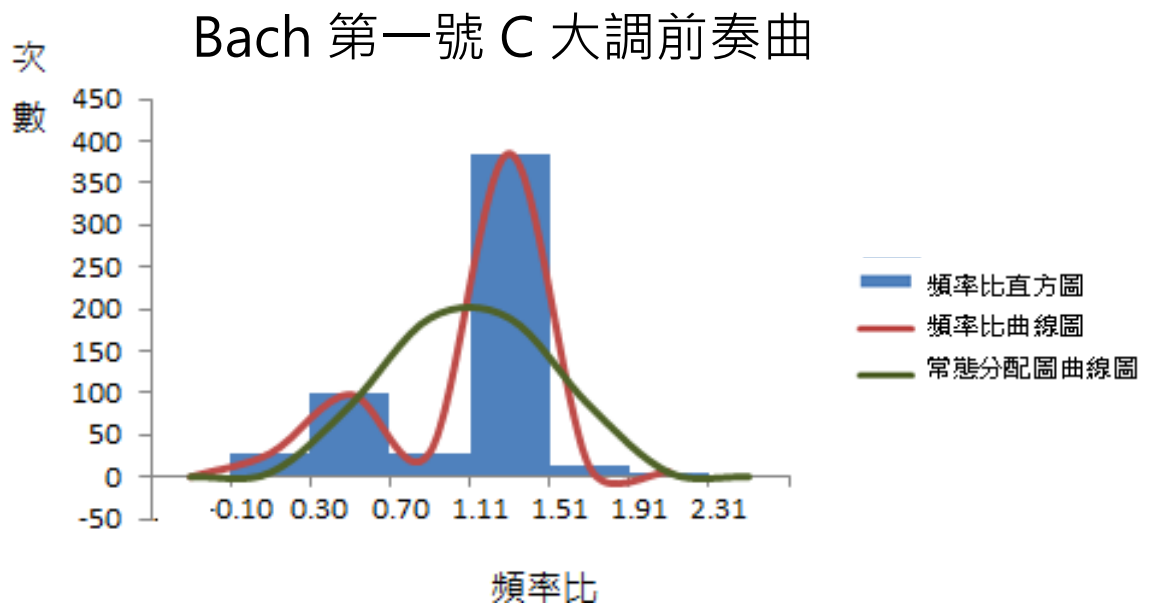
沒有任何調性或旋律，常人根本唱不來而有神曲之稱。其次數分配圖如(圖十五)。



(圖十五) 志忑頻率比次數分配圖。

(二) 巴哈(J. Bach 1685-1750)第一號 C 大調前奏曲：

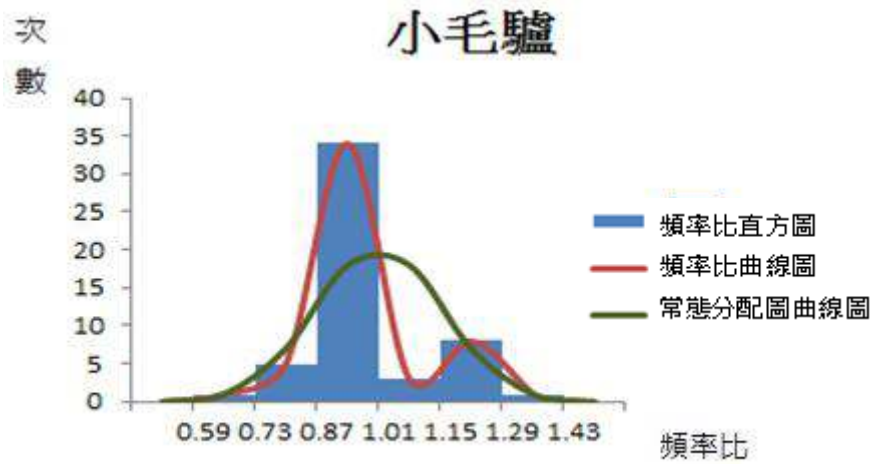
這是一首彈鋼琴的人幾乎都會彈到的練習曲，其旋律耳熟能詳，但為什麼不符合我們的常態分配呢？因為這首歌曲主要功能是訓練功能，練習者每天都會聽到，所以熟悉。其次數分配圖如(圖十六)。



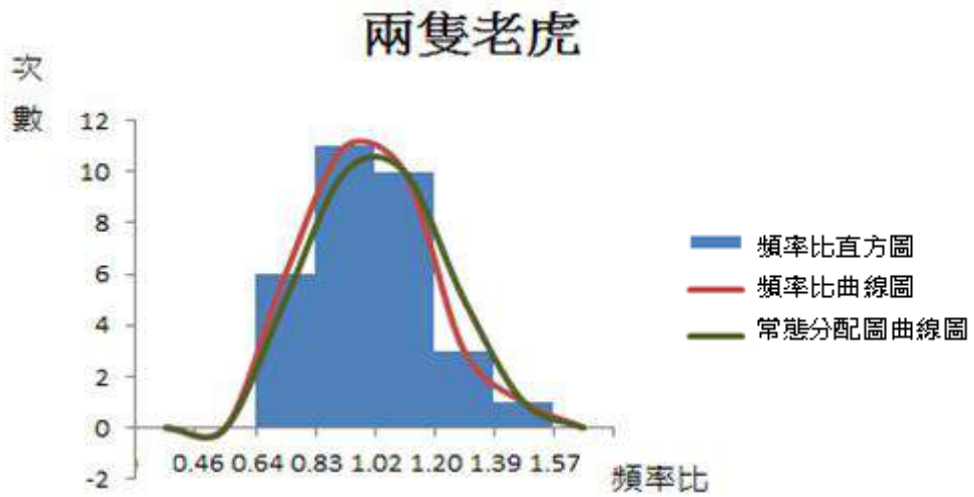
(圖十六) Bach 第一號 C 大調前奏曲頻率比次數分配圖。

(三) 兒歌：大部分也沒有符合常態分配，原因兒歌音符太少，在統計上需要有較多的數值做出來的數值才會精確；從小聽到大聽習慣了、朗朗上口，旋律深刻在腦海裡，

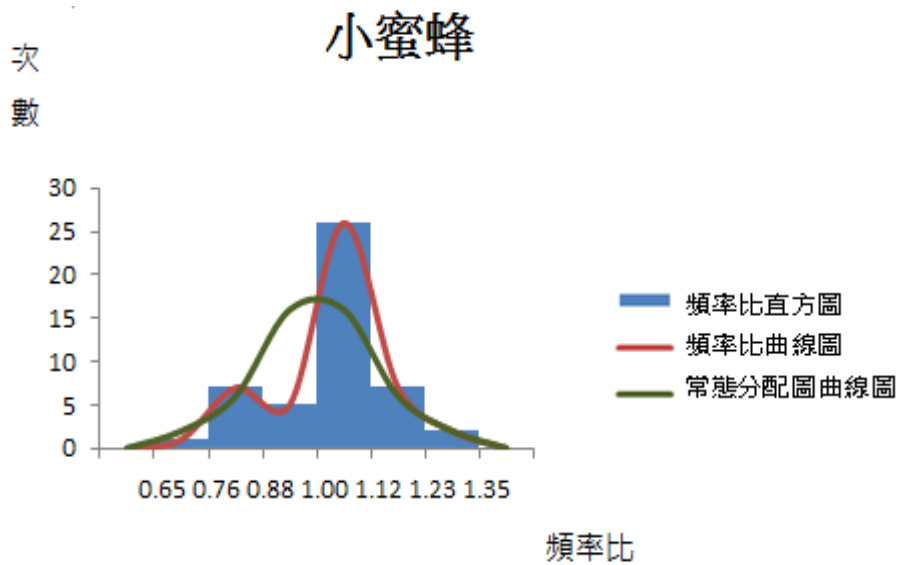
其次數分配圖如(圖十七)、(十八)、(十九)。



(圖十七) 小毛驢頻率比次數分配圖。



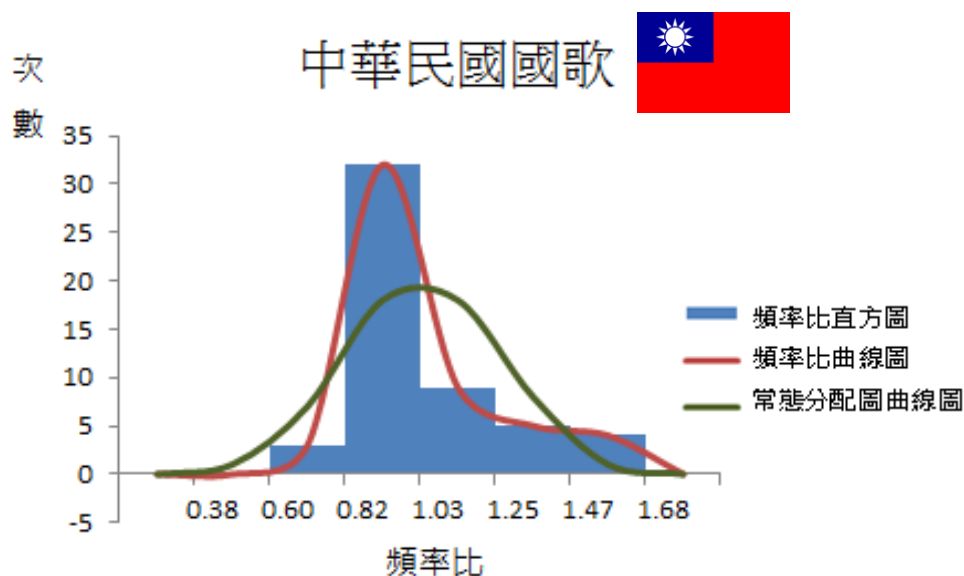
(圖十八) 兩隻老虎頻率比次數分配圖。



(圖十九) 小蜜蜂頻率比次數分配圖。

(四) 中華民國國歌(程懋筠，1924)：

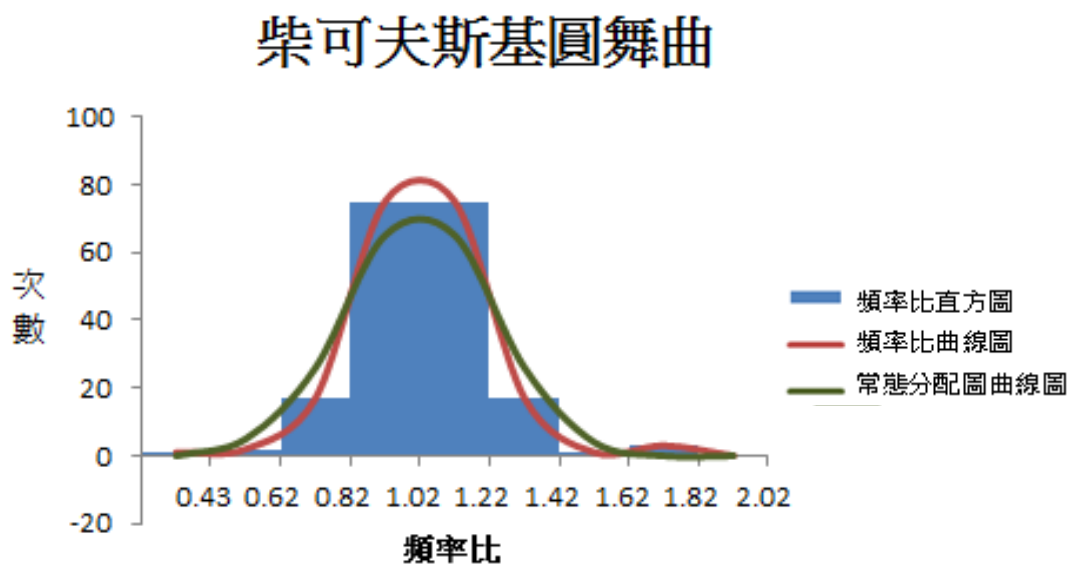
因為有情緒高低的起伏，前段平緩但後段歌曲的情緒高昂，可以表達出作曲者的澎湃情感，所以其分布在頻率比數值偏大的次數相對出現較多次。其次數分配圖如(圖二十)。



(圖二十) 國歌頻率比次數分配圖。

(五) 柴可夫斯基(1840-1893)圓舞曲：

另外還有一首幾乎符合常態分配的曲子，就是柴可夫斯基圓舞曲（柴可夫斯基，1878），這首曲子的曲風輕快、輕鬆活潑，也表現出精緻典雅的風格，所以被世人公認為經典交響樂。其次數分配圖如(圖二十一)。



(圖二十一) 柴可夫斯基圓舞曲頻率比次數分配圖。

柴可夫斯基圓舞曲的平均數 1.02，標準差 0.198779，在一個標準差內約 79%，兩個標準差內約 96%，三個標準差內達 98%，十分類似常態分配。

陸、結論

從音樂到音符、從節拍到音頻，將樂譜上的音符用數字量化了之後，才發現音樂也是一門高深的計算。歌曲要好聽、而且要朗朗上口，可不是那麼容易就能排列組合的。

每首好聽的音樂，其旋律、節奏都不相同，想要找出其中的規律，並非想像的那麼容易。藉由數學統計的概念，首先我們可以很輕易的找出每個音的頻率，再從音的頻率之中，歸納出音頻的相關性，以及歌曲和歌曲之間的相關性。以下是我們的結論：

(一)在音樂上的特性

在討論頻率比時，結果令我們興奮，因為與我們所計算出來的這 13 個音的頻率按照順序排列成一組數列的前後項比值約為 1.0594 極為相近。因此我們可以大膽的說將 Do 到高音 Do 之間加入升降音之後，正好成一個等比數列其比值為 $\sqrt[13]{2} \doteq 1.05946309436$ 。

這 13 個音就是鋼琴上的 Do 到高音 Do，白鍵加上黑鍵總共有十三鍵，代表了十二個音符，全音、半音共十二階，又稱十二平均律。

(二)基本統計上的發現

頻率比所表示的是歌曲中音符的升降變化，而我們統計了百餘首的歌曲，發現頻率比 0.89、1、1.12 所出現的比例占整首歌的 40%~70%，眾數還是以 0.89、1、1.12 為主；中位數幾乎都是 1。我們推論，平均值在歌曲中所代表的是歌曲的平衡狀態，一首好聽並知名的歌曲，音符的升降中可能須保持在一個平衡數值。因此，我們將 107 首歌曲頻率比的平均值做分配討論，發現頻率比的平均值十分趨近常態分配 $X \sim N(1.021, 0.00795^2)$ ，而頻率比的平均值多落在 1 附近。

另外，歌曲頻率比的標準差的特性，我們覺得能代表的是歌曲的離散程度，標準差越高，則代表歌曲急升急降分佈越高。若是頻率比的標準差過低，歌曲則平平無起伏；反之則歌曲的升降太快、或者升降音太多，致使歌曲不容易演唱。我們統計這 107 首歌，發現頻率比的標準差也類似常態分配 $X \sim N(0.211, 0.04179^2)$ ，標準差多落在

0.2 附近。

每首歌搭配上情緒意境使其的高低音起伏都不相同，但頻率比的平均值和標準差卻是非常相近。如果一首歌曲的統計數值能落在這些數據範圍，也許正好是我們覺得好聽的因素之一吧。音樂家感受數學，數學家思考音樂，音樂之於夢想，數學之於生活；或許將來我們可以應用這樣頻率比呈現常態分配的關係，來譜寫出音符的方程式！

柒、參考資料

1. 音高頻率表 · 維基百科 · 取自 <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9F%B3%E9%AB%98>
2. 林怡君 (2007) · 古典樂理入門 · 台灣：世界文物出版社。
3. 周茹萍 (1997) · 音樂基本樂理 · 台灣：大坤出版社。
4. 李啟宏 (2003) · 弦與歌 · 台灣：立誼出版社。
5. Ball, P. (2008). Science and Music: Facing the music, Nature, 453 (7192), 160-162.
6. 鄭嘉緯 · 音階的制訂 · 暨大電子雜誌。
7. 蔡聰明 (民 83) · 音樂與數學：從弦內之音到弦外之音 · 數學傳播，18 (1)，1-20。
8. 許志農 (2014) · 普通高級中學選修數學乙(上) · 台灣：龍騰文化事業股份有限公司。

附件一

頻率，單位為赫茲（括號內為簡譜數值"〔1〕"為中央C）				
八度→	3	4	5	6
音名↓				
C	130.81 (-7)	261.63 (1)	523.25 (8)	1046.5 (15)
$\sharp C/\flat D$	138.59 (-6.5)	277.18 (1.5)	554.37 (8.5)	1108.7 (15.5)
D	146.83 (-6)	293.66 (2)	587.33 (9)	1174.7 (16)
$\sharp D/\flat E$	155.56 (-5.5)	311.13 (2.5)	622.25 (9.5)	1244.5 (16.5)
E	164.81 (-5)	329.63 (3)	659.26 (10)	1318.5 (17)
F	174.61 (-4)	349.23 (4)	698.46 (11)	1396.9 (18)
$\sharp F/\flat G$	185.00 (-3.5)	369.99 (4.5)	739.99 (11.5)	1480.0 (18.5)
G	196.00 (-3)	392.00 (5)	783.99 (12)	1568.0 (19)
$\sharp G/\flat A$	207.65 (-2.5)	415.30 (5.5)	830.61 (12.5)	1661.2 (19.5)
A	220.00 (-2)	440.00 (6)	880.00 (13)	1760.0 (20)
$\sharp A/\flat B$	233.08 (-1.5)	466.16 (6.5)	932.33 (13.5)	1864.7 (20.5)
B	246.94 (-1)	493.88 (7)	987.77 (14)	1975.5 (21)

【評語】 030424

這是一件非常特別的科展作品。作者們主要是要探討音樂與數學的關聯性，希望能透過對於不同歌曲的頻率比的分析，瞭解受歡迎的歌曲是否存在著共通性。本作品針對問卷調查所篩選出受歡迎的歌曲，分析這些歌曲的頻率比，進而找出規律，想法具趣味性，也非常符合科展所希望達成的，即由發現問題到思考、分析問題，進而找出規律以及潛藏在規律中的原理，因此值得鼓勵。本作品目前過於著重於基本的描述性統計分析，所能看到的仍有限制，建議可作其他更深入的分析，處理有意義的問題，例如對音樂的和絃進行探討。