中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030423

共軛可分解式之研究

學校名稱：桃園市立石門國民中學

作者：	指導老師：
國二 許甜恬 國二 李睿澤	陳虹伊

關鍵詞：因式分解、畢氏三元數

摘要

我們將可同時被整係數分解的兩個式子ax^2+bx+c與ax^2+bx-c稱為「共軛可分解式」。當已知可被因式分解的ax^2+bx+c時，將係數依序分別乘上等比數列，所得新式子必可被因式分解，我們稱這組式子為「孿生可分解式」，這很容易獲得。但是要找到共軛可分解式卻相當困難。本研究在探討並找尋共軛可分解式的規則，並進而找出其生成公式。

從式子可被分解與方程式根之公式的關係，發現共軛可分解式的係數與畢氏三元數有關。再利用本原畢氏三元數公式，找出一種共軛可分解式的生成公式。最後推論放寬限制後本原畢氏三元數可以表示出所有畢氏三元數。後續研究只要能證明，或配合幾何性質，必能找出所有共軛可分解式的規則。

壹、 研究動機

我們研究「共軛可分解式」的動機，是來自於國二上學期時，數學老師出了兩題因式分解的題目，但是係數很像，導致很多同學在判斷上發生錯誤。而且在教科書上有一題：「甲乙兩人做同一題因式分解，…，乙看錯常數項之正負，得到答案是…。」我們就在想：「x 的二次多項式的常數項，是正的時候和是負的時候都可以分解？」這真是奇妙的事情啊！所以我們想把這種「題型」的規則找出來。

考慮兩個 x 的二次多項式的因式分解：

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$$

這兩式均可被整係數因式分解。但是另兩個二次多項式：

$x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$可以被因式分解。

x^2+6x-5 不能被整係數因式分解。

所以已經知道一個二次多項式可以被因式分解，不代表它的常數項變號後的二次多項式

也可以被因式分解。這裡所討論的都局限於整數係數因式分解，不考慮有根號的分解式。

在因式分解的題目中，有很多係數變號後也可以分解的例子。例如已知 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$。

1.一次項係數變號：$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

2.係數反序：$6x^2+5x+1=(2x+1)(3x+1)$

3.係數依序分別乘上等比數列：x^2+5x+6的係數 1、5、6，依序分別乘上 1、2、4，變成$x^2+10x+24$，可分解為 $(x+4)(x+6)$。同樣地，x^2+5x+6的係數 1、5、6，依序分別乘上 4、2、1，變成 $4x^2+10x+6$，也可分解為 $2(2x+3)(x+1)$。

其實上述這幾種都是「係數依序乘等比數列」形成新的可分解式。設$k\neq 0, r\neq 0$，這種「若 ax^2+bx+c 可被整係數因式分解，則係數分別乘上等比數列k, kr, kr^2得到 $kax^2+krbx+kr^2c$ 也可被整係數因式分解」的一組式子，我們稱之為「變生可分解式」，因為只要知道可分解的 ax^2+bx+c，另外的 $kax^2+krbx+kr^2c$ 一定就可以被整係數因式分解（說明於附錄一），所以很容易找到變生可分解式的例子。

但是，ax^2+bx+c 與 ax^2+bx-c 同時可被整係數因式分解的例子卻不是那麼容易被找到。由於找尋網路上尚未有相關的研究，而在高中數學將複數 $a+bi$ 和 $a-bi$ 稱為共軛複數，將兩條雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$與$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$稱為共軛雙曲線，在生物學和物理學也有類似的成對以「共軛」來命名的情形。所以我們也把「ax^2+bx+c 與 ax^2+bx-c 同時可被整係數因式分解」的一組式子稱為「共軛可分解式」（這個名詞是我們暫定的），因為有類似的「一加一減」的意涵。本研究即在找出共軛可分解式的規則與生成公式。

貳、 研究目的

本研究在探討如何找出共軛可分解式的例子，是否存在相同的規則。有以下幾個目的：

一、期望能找出共軛可分解式的共同規則及生成公式。

二、教與學：(1)老師出題時，要出係數類似的題目，提供學生來練習或測驗，以判斷學生是否真的熟練因式分解的訣竅。(2)學生也可以找出係數類似的題目來練習，以釐

清觀念及提昇因式分解的能力。若因思考方向不同，而導致答案錯誤時，則也可以換方向做。對於類似題目但答案完全不同時，我們可以注意到關鍵，即可找出不同的作法。

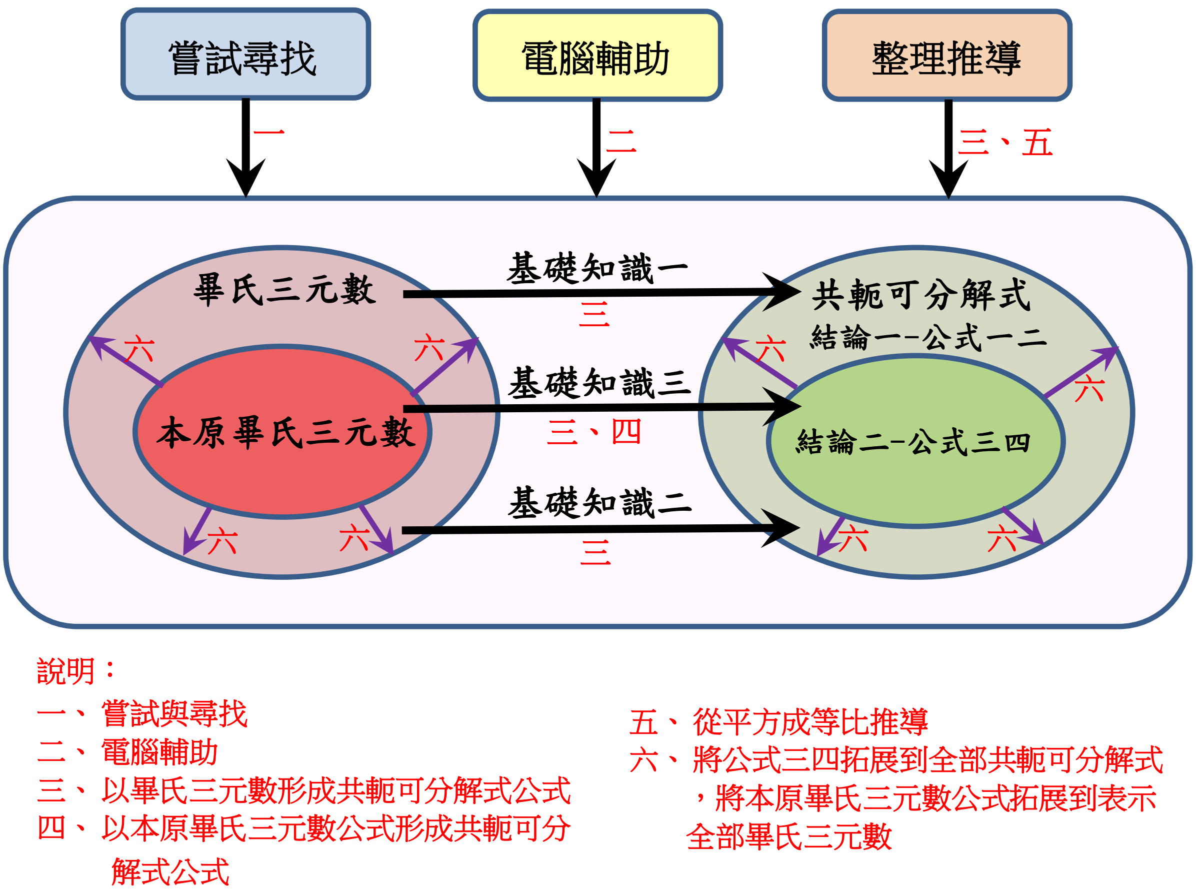
三、在研究過程中，發現生成規則與畢氏三元數有關。期盼能藉由此研究找出畢氏三元數的一般型生成公式。

參、 研究設備及器材

一、紙、筆

二、電腦及 Excel、GeoGebra 軟體

肆、 研究過程及結果



圖一　研究脈絡示意圖

一、嘗試

(一)自己尋找例子

我們試著自己找出共軛可分解式的例子，除了x^2+5x+6和x^2+5x-6這組之外，另外只找到$2x^2+5x+3$和$2x^2+5x-3$這組，還有一些是計算錯誤的例子。我們發現其實很不容易找到，而且在課本裡這類型的題目很少。

(二)猜想共軛可分解式規則

我們觀察 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ 與 $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$ 這組例子，推論出共軛可分解式的模式大概會像

$$x^2+bx+c=(x+u)(x+vw) \text{ 及 } x^2+bx-c=(x+uv)(x-w)$$

的形式。先從最簡單的情況開始，設$w=1$，就變成

$$x^2+bx+c=(x+u)(x+v) \text{ 及 } x^2+bx-c=(x+uv)(x-1)$$

此時，$b=u+v=uv-1$ 且 $c=uv$。當然我們先在b,c,u,v都是正整數的情況下討論。當 $u=v$ 時 b 會無整數解。設 $u>v$，如果 u 與 v 都是質數，發現只有$(u,v)=(3,2)$這種可能。理由如下：

$$b=u+v=uv-1\text{，}uv-u-v=1\text{，}uv-u-v+1=2\text{，}$$

$$(u-1)(v-1)=2\text{，則}u-1=2\text{且}v-1=1\text{，故}(u,v)=(3,2)\text{。}$$

我們仿照上面的模式，增加到 u,v,w 是三個質數的情況，找到 2、3、5 的例子。

$$x^2+(2\cdot5+3)x+(2\cdot5\cdot3)=(x+2\cdot5)(x+3)$$

$$x^2+(3\cdot5-2)x-(2\cdot5\cdot3)=(x+3\cdot5)(x-2)$$

即 $x^2+13x+30=(x+10)(x+3)$ 與 $x^2+13x-30=(x+15)(x-2)$。

但是其他三個質數的例子卻沒有找到。四個質數的例子倒是不只一組。

1. $x^2+(2\cdot7+3\cdot5)x+(2\cdot3\cdot5\cdot7)=(x+2\cdot7)(x+3\cdot5)$

   $x^2+(5\cdot7-2\cdot3)x-(2\cdot3\cdot5\cdot7)=(x+5\cdot7)(x-2\cdot3)$

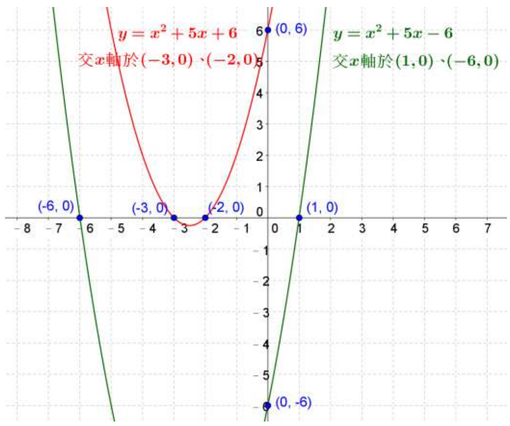
2. $x^2+(7+2\cdot3\cdot13)x+(2\cdot3\cdot7\cdot13)=(x+7)(x+2\cdot3\cdot13)$

   $x^2+(7\cdot13-2\cdot3)x-(2\cdot3\cdot7\cdot13)=(x+7\cdot13)(x-2\cdot3)$

由於例子可能無限多個，但是並未看出規則。所以除了仿照上面模式慢慢找之外，還要另外設法發展出新的研究方向。

(三)利用電腦輔助尋找例子

老師介紹我們電腦上的動態幾何數學軟體 GeoGebra，並藉由國三數學所教的拋物線$y = ax^2 + bx + c$ 方程式與圖形的關係（如圖二），發現若$ax^2 + bx + c$可被分解為$(sx + t)(ux + v)$，則 $y = ax^2 + bx + c$與 x 軸交點的 x 坐標為$\left(-\frac{t}{s}, 0\right)$及$\left(-\frac{v}{u}, 0\right)$（其中$-\frac{t}{s}$及$-\frac{v}{u}$為整數或有理數）。所以$ax^2 + bx + c$ 與 $ax^2 + bx - c$ 是一組共軛可分解式，象徵著 $y = ax^2 + bx + c$ 及 $y = ax^2 + bx - c$ 與 x 軸的兩組兩個交點的 x 坐標均為整數或有理數！



圖二　在電腦 GeoGebra 程式上操作拋物線找尋共軛可分解式

我們研究共軛可分解式是 $y = ax^2 + bx + c$ 與 $y = ax^2 + bx - c$，考慮 $a = 1$ 時簡化為 $y = x^2 + bx + c = (x - u)(x - v)$ 的圖形，其與 x 軸交於 $(u, 0)$ 及 $(v, 0)$ 兩點，與 y 軸交於 $(0, c)$ 一點。可知 $u + v = -b$ 及 $uv = c$（韋達 Viète 定理，根與係數關係）。$y = x^2 + bx + c$ 與 $y = x^2 + bx - c$，兩者的 b 相同，表示兩條拋物線個別與 x 軸兩交點的中點相同，都是$\left(\frac{-b}{2}, 0\right)$。而兩拋物線與 y 軸的交點分別為$(0, c)$ 及 $(0, -c)$，上下對稱於原點。而將 $y = x^2 + bx + c$ 圖形往下平移 2c 單位，即可與 $y = x^2 + bx - c$ 圖形重合。

這個 GeoGebra 軟體的操作方式是，先設定 $y = x^2 + bx + c$ 與 x 軸的兩個交點

$(u,0)$ 及 $(v,0)$，而且可以用滑鼠拉動，則可產生拋物線 $y=x^2+bx+c$ 圖形，接著也同時產生拋物線 $y=x^2+bx-c$ 圖形，並可找到其與 x 軸的兩個交點 A、B。所以拉動兩點 $(u,0)$ 及 $(v,0)$ 使得 u 與 v 都是整數，看看後來的交點 A 與 B 的 x 坐標是否也是整數。如果是，那就找到了共軛可分解式。

例如在圖二的例子中，$y=x^2+bx+c$與x軸的兩個交點為 $(-2,0)$ 及 $(-3,0)$，故拋物線為$y=(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$，另一拋物線為$y=x^2+5x-6$，其與 x 軸交點為$(-6\ ,0)$及$(\ 1\ ,0)$，故可知 $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$，形成一組共軛可分解式。

我們利用這個軟體找到另一組共軛可分解式 $x^2+13x+30=(x+10)(x+3)$ 及 $x^2+13x-30=(x+15)(x-2)$。如果把整個坐標範圍擴大，可以再找到其他的共軛可分解式。

雖然我們對於國三的數學並不熟，而且在電腦上的操作並未找出規則，但也提供我們一個思考方向。後續研究可以試著從幾何方面著手。

二、學習基礎知識

請教過幾位老師後，我們學到了幾個基礎知識：

(一)基礎知識一：可被整係數因式分解之多項式係數與方程式根的關係

已知整係數多項式 ax^2+bx+c 可被整係數因式分解，設$ax^2+bx+c=(sx+t)(ux+v)$，其中 a,b,c,s,t,u,v 均是不為 0 的整數，則$ax^2+bx+c=0$的兩根為有理根$-\frac{t}{s}$及$-\frac{v}{u}$。而$ax^2+bx+c=0$的兩根公式為$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。若兩根為有理數，則$\sqrt{b^2-4ac}$為有理數。

更進一步，因為限制a,b,c為非零的整數，則此時$\sqrt{b^2-4ac}$為整數，故b^2-4ac為完全平方數。（完全平方數是一個正整數的平方，也是正整數）

所以整係數多項式 ax^2+bx+c 可被整係數因式分解，即 b^2-4ac為完全平方數。

(二)基礎知識二：平方和公式與平方差公式組合

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

兩式相加可得$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$。

(三)基礎知識三：畢氏三元數與本原畢氏三元數

設a,b,c為正整數，若滿足$a^2+b^2=c^2$，則稱(a,b,c)為畢氏三元數。

本原畢氏三元數的生成公式為$a=s^2-t^2$、$b=2st$、$c=s^2+t^2$（其中s,t為正整數，$s>t$）。

並不是所有的畢氏三元數都可以用本原畢氏三元數的公式來表示，例如(9,12,15) 就無法用s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2來表示。

三、找出共軛可分解式與畢氏三元數的關係

以下在 a、b、c 均為正整數的情況下來討論共軛可分解式，其他若有負整數的情形可由上述學生可分解式模式來處理。

(一)推導關係

基礎知識一提供我們很重要的思考方向。設 ax^2+bx+c 與 ax^2+bx-c 為共軛可分解式，依照基礎知識一，可知 b^2-4ac 與 b^2+4ac 均為完全平方數，設 $m^2=b^2-4ac$ 及 $n^2=b^2+4ac$，其中 m,n 均為正整數。因為$a>0,b>0,c>0$，很明顯地知道 $m<b<n$。

由$4ac=n^2-b^2=b^2-m^2$，可知m^2,b^2,n^2成等差數列，得$n^2+m^2=2b^2$，也明顯地看出 m,b,n 同為奇數或同為偶數。

由基礎知識二，設$n=p+q$、$m=p-q$（因 m,n 同為奇數或同為偶數，故 p,q 均為正整數），從$n^2+m^2=2b^2$可得$(p+q)^2+(p-q)^2=2(p^2+q^2)=2b^2$。所以如果能找到畢氏三元數$(q,p,b)$滿足$p^2+q^2=b^2$，則能找到 $n=p+q$、$m=p-q$。而$4ac=n^2-b^2=(p+q)^2-b^2=p^2+2pq+q^2-b^2=2pq$，可知$ac=\frac{1}{2}pq$。此時取$b=\sqrt{p^2+q^2}$，可得到結論一的第一部分。

結論一（第一部分）

只要找到畢氏三元數$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{b})$滿足$\boldsymbol{p^2+q^2=b^2}$，並且找到正整數 a、c 滿足$\boldsymbol{ac=\frac{1}{2}pq}$，則 $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ 與 $\boldsymbol{ax^2+bx-c}$ 必為共軛可分解式。

這裡有一點需要補充說明，畢氏三元數(q,p,b)較小的兩數 q , p 至少有一個是偶數（證明於附錄二），所以$ac=\frac{1}{2}pq$必為整數。

(二)舉例說明

1. 例 1.已知$(q,p,b)=(3,4,5)$為畢氏三元數。此時$ac=\frac{1}{2}pq=6$。

(1) 當$(a,b,c)=(1,5,6)$時，

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$$

正好為研究動機的例子。

(2) 當$(a,b,c)=(2,5,3)$時，

$$2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)$$

$$2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$$

這正是我們找到的例子。

(3) 當$(a,b,c)=(3,5,2)$時，

$$3x^2+5x+2=(x+1)(3x+2)$$

$$3x^2+5x-2=(x+2)(3x-1)$$

可從例 1(2)依照孿生可分解式之係數反序規則推得。

(4) 當$(a,b,c)=(6,5,1)$時，

$$6x^2+5x+1=(2x+1)(3x+1)$$

$$6x^2+5x-1=(6x-1)(x+1)$$

可從例 1(1)依照孿生可分解式之係數反序規則推得。

由此例中可知，固定$ac=6$且$b=5$，由$(a,b,c)=(1,5,6)$得共軛可分解式

x^2+5x+6及x^2+5x-6。我們發現可以用孿生可分解式的規則來簡化過程。

(1) 其係數 1、5、6 分別乘上等比數列 2、1、$\frac{1}{2}$可得$(a,b,c)=(2,5,3)$的共軛可分解式$2x^2+5x+3$及$2x^2+5x-3$。

(2) 其係數 1、5、6 分別乘上等比數列 3、1、$\frac{1}{3}$可得$(a,b,c)=(3,5,2)$的共軛可分解式$3x^2+5x+2$及$3x^2+5x-2$。

(3) 其係數 1、5、6 分別乘上等比數列 6、1、$\frac{1}{6}$可得$(a,b,c)=(6,5,1)$的共軛可分解式$6x^2+5x+1$及$6x^2+5x-1$。

這意謂著，只要訂出$a=1$、$c=\frac{1}{2}pq$、$b=\sqrt{p^2+q^2}$，必定可得一組共軛可分解式。其他的 a、c 的情況可從孿生可分解式的「係數分別乘上等比數列」的規則可得到共軛可分解式。以下以討論$a=1$的情況為主。

2. 例 2.已知$(q,p,b)=(5,12,13)$為畢氏三元數。此時$ac=\frac{1}{2}pq=30$、$b=13$。

(1) 當$(a,b,c)=(1,13,30)$時，

$$x^2+13x+30=(x+3)(x+10)$$

$$x^2+13x-30=(x+15)(x-2)$$

(2) 當$(a,b,c)=(2,13,15)$時，

$$2x^2+13x+15=(x+5)(2x+3)$$

$$2x^2+13x-15=(x-1)(2x+15)$$

(3) 當$(a,b,c)=(3,13,10)$時，

$$3x^2+13x+10=(x+1)(3x+10)$$

$$3x^2+13x-10=(x+5)(3x-2)$$

(4) 當$(a,b,c)=(5,13,6)$時，

$$5x^2+13x+6=(x+2)(5x+3)$$

$$5x^2+13x-6=(x+3)(5x-2)$$

(5) 以下略。

同樣地只要找到整數 a、c 滿足$ac=\frac{1}{2}pq=30$，所形成的ax^2+bx+c 與 ax^2+bx-c 必為共軛可分解式。簡化過程為設$a=1$、$b=\sqrt{p^2+q^2}$、$c=\frac{1}{2}pq$，找出第一組共軛可分解式後，係數分別乘上等比數列可得到其他組的共軛可分解式。

(三)推導分解式

當已經找到畢氏三元數 (q,p,b) 滿足$p^2+q^2=b^2$，以及 a、c 滿足$ac=\frac{1}{2}pq$。

此時$n=p+q$、$m=p-q$， $ax^2+bx+c=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm m}{2a}$

$\Rightarrow 2ax+b=\pm m\Rightarrow 2ax+b\pm m=0$，利用這兩式合成可分解的多項式。

由$(2ax+b+m)(2ax+b-m)=4a^2x^2+4abx+b^2-m^2$，將$p,q$代入，得

$(2ax+b+p-q)(2ax+b-p+q)=4a^2x^2+4abx+b^2-(p-q)^2$

$=4a^2x^2+4abx+2pq$，同除以 4 得

$a^2x^2+abx+\frac{pq}{2}=\left(ax+\frac{b+p-q}{2}\right)\left(ax+\frac{b-p+q}{2}\right)$，

簡化形式，取 $a=1$ 得

$$x^2+bx+\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p-q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p+q}{2}\right)$$

同理可得

$$x^2+bx-\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p+q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p-q}{2}\right)$$

這為共軛可分解式的簡化一般型式公式，為結論一的第二部分公式結果。至於 $a\neq 1$ 的情形，可依孿生可分解式規則，係數分別乘上等比數列而得到。

結論一（第二部分）

只要找到畢氏三元數$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{b})$滿足$\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2=\boldsymbol{b}^2$，則可以得到共軛可分解式簡化的一般型式為

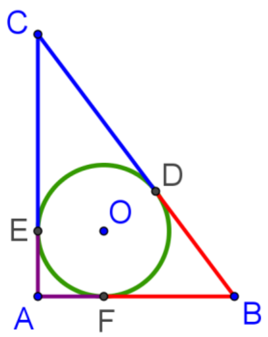
$$\boldsymbol{x^2+bx+\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p-q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p+q}{2}\right)} \quad \text{（公式一）}$$

$$\boldsymbol{x^2+bx-\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p+q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p-q}{2}\right)} \quad \text{（公式二）}$$

這裡也有一點需要說明，畢氏三元數(q,p,b)較小的兩數 q , p 至少有一個是偶數（證明於附錄二）。所以 q、p、b 可能同為偶數或是兩奇數一偶數（不可能是兩偶數一奇數），故$\frac{b+p-q}{2}$、$\frac{b-p+q}{2}$、$\frac{b+p+q}{2}$、$\frac{b-p-q}{2}$也都是整數。

(四)幾何方面的巧合

因為畢氏三元數 (q,p,b) 滿足 $p^2+q^2=b^2$ 的性質，我們想到直角三角形。如圖三，以長度 q、p 為兩股$\overline{AB}$、$\overline{AC}$，以 b 為斜邊作直角三角形，上述之$x^2+bx+\frac{pq}{2}$係數 b 為斜邊$\overline{BC}$，而 $\frac{pq}{2}$ 恰好為直角三角形的面積！



圖三　直角三角形中各角色與共軛可分解式係數的關係

接著作ΔABC的內切圓，分別切三邊 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 於 F、E、D，由於$\overline{AB}=q$、$\overline{AC}=p$、$\overline{BC}=b$，在分解式$x^2+bx+\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p-q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p+q}{2}\right)$中，$\frac{b+p-q}{2}$恰為$\overline{CE}=\overline{CD}$，是 C 點切線段長；$\frac{b-p+q}{2}$恰為$\overline{BF}=\overline{BD}$，是 B 點切線段長。另外在分

解式$x^2+bx-\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p+q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p-q}{2}\right)$中，$\frac{b+p+q}{2}$為周長的一半，而$-\frac{b-p-q}{2}$正好是內切圓半徑，也正是$\overline{AE}=\overline{AF}$為 A 點切線段長。這麼多的巧合，讓我們覺得很有發展空間！因為因式分解大多是代數的計算，如果能與幾何圖形連結，也許會有更多的發現。可惜這部份我們還未整理出規則，有待後續的研究。

四、利用本原畢氏三元數公式形成共軛可分解式公式

(一)推導公式

綜合基礎知識二與基礎知識三，利用本原畢氏三元數的生成公式，設$p=s^2-t^2$，$q=2st$，$b=s^2+t^2$（其中s,t為正整數，$s>t$），代入上述的簡化的一般型式公式一及公式二，可得

$$x^2+(s^2+t^2)x+st(s^2-t^2)=(x+s^2-st)(x+t^2+st)$$

$$x^2+(s^2+t^2)x-st(s^2-t^2)=(x+s^2+st)(x+t^2-st)$$

分解形式為

$$x^2+(s^2+t^2)x+st(s+t)(s-t)=[x+s(s-t)][x+t(s+t)]$$

$$x^2+(s^2+t^2)x-st(s+t)(s-t)=[x+s(s+t)][x-t(s-t)]$$

這裡關鍵數字的移動模式，跟前面「一、嘗試」的「（二）猜想共軛可分解式規則」的想法正好相符。

公式三與公式四這兩式可視為共軛可分解式的一種生成公式。這與結論一的公式一及公式二的不同點在於：結論一需要自己找出畢氏三元數代入才會得到共軛可分解式，而這裡的生成公式只要用任意正整數s,t（$s>t$）代入即可得到一組共軛可分解式，相當簡便。

推導這個生成公式的過程中，p、q 有對稱型式，故改用$q=s^2-t^2$、$p=2st$、$b=s^2+t^2$代入也會得到同一組公式。

結論二

對於任意正整數 s、t，（s > t），可以得到一組共軛可分解式

$$\boldsymbol{x^2+(s^2+t^2)x+st(s^2-t^2)=(x+s^2-st)(x+t^2+st)} \qquad \textbf{（公式三）}$$

$$\boldsymbol{x^2+(s^2+t^2)x-st(s^2-t^2)=(x+s^2+st)(x+t^2-st)} \qquad \textbf{（公式四）}$$

但是有一點必須注意，並不是所有的畢氏三元數都可以用本原畢氏三元數的公式來表示。所以上述結論，並不能表示出所有的共軛可分解式。這留待後續的研究。

(二)舉例說明

1. 例 3.將$(s,t)=(2,1)$ 代入公式三及公式四，可得

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$$

也與研究動機和例 1(1)的例子相符。

2. 例 4.將$(s,t)=(3,2)$ 代入公式三及公式四，可得

$$x^2+13x+30=(x+3)(x+10)$$

$$x^2+13x-30=(x+15)(x-2)$$

與例 2(1)相同。

3. 例 5.將$(s,t)=(4,1)$ 代入公式三及公式四，可得

$$x^2+17x+60=(x+12)(x+5)$$

$$x^2+17x-60=(x+20)(x-3)$$

4. 例 6.將$(s,t)=(4,3)$ 代入公式三及公式四，可得

$$x^2+25x+84=(x+4)(x+21)$$

$$x^2+25x-84=(x+28)(x-3)$$

我們利用電腦 Excel 程式找出部分例子，收錄在附錄三。

五、從m^2,b^2,n^2成等差數列推導共軛可分解式公式

由前面「三、找出共軛可分解式與畢氏三元數的關係」得到的m^2, b^2, n^2成等差數列性質，我們可以繼續發展。

由 $4ac = n^2 - b^2 = b^2 - m^2$，可知 m^2, b^2, n^2 成等差數列，得 $n^2 + m^2 = 2b^2$，也明顯看出 m, b, n 同為奇數或同為偶數。我們設 $m = b - 2s$及$n = b + 2t$，其中 s 與 t 都是正整數，$s > t$。為了簡化過程，我們設$a = 1$，此時

$$4c = n^2 - b^2 = (b + 2t)^2 - b^2 = 4bt + 4t^2$$

$$4c = b^2 - m^2 = b^2 - (b - 2s)^2 = 4bs - 4s^2$$

，聯立解可得$b = \frac{s^2+t^2}{s-t}$，$c = \frac{(s^2+t^2)t}{s-t} + t^2 = \frac{st(s+t)}{s-t}$，得到一組可分解式為

$x^2 + \frac{s^2+t^2}{s-t}x + \frac{st(s+t)}{s-t}$ 與 $x^2 + \frac{s^2+t^2}{s-t}x - \frac{st(s+t)}{s-t}$，但是因 $\frac{s^2+t^2}{s-t}$ 與 $\frac{st(s+t)}{s-t}$ 不保證為整數，故對此組式子的係數分別乘上等比數列 1、$(s-t)$、$(s-t)^2$（目的在消去分母)，得到共軛可分解式為

$$x^2 + (s^2 + t^2)x + st(s^2 - t^2) \text{ 與 } x^2 + (s^2 + t^2)x + st(s^2 - t^2)$$

，這恰巧與結論二相同。所以並沒有產生新的結論。

由於這裡並不是從畢氏三元數出發推導的，所以我們有個想法：是不是可以反過來，由共軛可分解式找出可以表示所有的畢氏三元數之公式呢？但因為上面的過程中曾經依序乘上等比數列，所以在邏輯上無法將共軛可分解式的公式與畢氏三元數公式劃上等價。但我們推測，所有畢氏三元數應該可以表示為本原畢氏三元數的倍數，即如 $r(s^2 - t^2)$、$2rst$、$r(s^2 + t^2)$ 的形式。這乘上 r 的倍數的想法是源自上面依序乘上等比數列的公比 r。這也待後續的研究。

六、最簡共軛可分解式與畢氏三元數、本原畢氏三元數的關聯性

上面推導共軛可分解式的過程中使用畢氏三元數和本原畢氏三元數公式，我們接著研究共軛可分解式的規則是否能將本原畢氏三元數公式拓展到能表示所有畢氏三元數。

(一)最簡共軛可分解式的定義

在觀察共軛可分解式的幾個例子中，我們發現有一些存在著孿生可分解式的規則。例如在結論二的公式中，取 $(s,t)=(2,1)$ 時，得共軛可分解式 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$及$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$；取 $(s,t)=(3,1)$ 時，得共軛可分解式 $x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$ 及$x^2+10x-24=(x+12)(x-2)$。依照孿生可分解式的規則，把$x^2+10x\pm24$的係數分別乘上等比數列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$，即可得到$x^2+5x\pm6$。這類似分數的約分的過程，所以我們把共軛可分解式中，二次項係數為 1、一次項係數和常數項互質者稱為「最簡共軛可分解式」(這是我們的暫定名稱，仿最簡分數的分子分母互質模式)。例如 $x^2+5x\pm6$ 和 $x^2+25x\pm84$ 是最簡共軛可分解式，但是$x^2+10x\pm24$ 和 $2x^2+5x\pm3$ 是共軛可分解式，但不是最簡共軛可分解式。

其他的共軛可分解式可經由孿生可分解式規則變為最簡共軛可分解式(後面研究會證明)。例如將 $x^2+20x+96=(x+8)(x+12)$ 與 $x^2+20x-96=(x+24)(x-4)$係數分別乘上 $1,\frac{1}{4},\frac{1}{16}$ 變成 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ 及 $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$ 為最簡共軛可分解式。

(二)公式如何得到最簡共軛可分解式？

我們比較感興趣的，是在結論二的公式三 $x^2+(s^2+t^2)x+st(s^2-t^2)$ 與公式四 $x^2+(s^2+t^2)x-st(s^2-t^2)$中，參數 s 和 t 有何關係時，這兩個公式可得到最簡共軛可分解式？另外最簡共軛可分解式對應的畢氏三元數有沒有特別的條件？

在電腦執行所得到的數據和例子中，我們發現$(s,t)=(2,1),(4,1),(4,3),(5,2),(5,4)$等等情形得到最簡共軛可分解式，而且注意到其中一例 $(s,t)=(4,3)$時得到$x^2+25x+84$之一次項係數和常數項都不是質數；可是當$(s,t)=(3,1),(5,1),(4,2),(5,3)$等等情形得到不是最簡的共軛可分解式。所以我們歸納出，當 s 與 t 互質，而且 s 與 t 為一奇數一偶數時，結論二的公式三、四可得到最簡共軛可分解式。這性質證明於附錄四。

另外在結論一中，所取的畢氏三元數(q,p,b)，若q,p,b兩兩互質，所得共軛可分解式必為最簡共軛可分解式。理由很簡單，因 b 與 p 互質且 b 與 q 互質，則結論一之公式 $x^2+bx\pm\frac{pq}{2}$ 中，係數 b 與$\frac{pq}{2}$必互質。

目前我們沒辦法證明所有畢氏三元數(q,p,b)，當q,p,b兩兩互質時，必可用本原畢氏三元數公式 s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2 來表示，但是我們檢驗在 100 以內所有畢氏三元數（三數兩兩互質），均可找到正整數 s、t（s > t，s 與 t 互質且 s 與 t 為一奇數一偶數）代入本原畢氏三元數公式與之相符。並將兩者個別代入公式一、二及公式三、四，可得到相同的最簡共軛可分解式。對照例子列出在附錄五。

結論三（第一部分）（猜想，已驗證 100 以內的畢氏三元數）

所有畢氏三元數$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{b})$，當$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{b}$兩兩互質時，必可用本原畢氏三元數公式 $\boldsymbol{s^2-t^2}$、$\boldsymbol{2st}$、$\boldsymbol{s^2+t^2}$ 來表示，而且個別代入公式一、二及公式三、四，可得相同的最簡共軛可分解式。

另外，如果在公式三及公式四中，一次項係數(s^2+t^2)與常數項$st(s^2-t^2)$有質數公因數 r 的話，那麼將係數分別乘上$1,\frac{1}{r},\frac{1}{r^2}$後，會不會有時候無法得到係數為整數的共軛可分解式呢？答案是否定的（這證明於附錄六），也就是說，共軛可分解式$x^2+(s^2+t^2)x\pm st(s^2-t^2)$中，若$(s^2+t^2)$與$st(s^2-t^2)$有質數公因數 r 的話，則$st(s^2-t^2)$必有因數$r^2$，所以我們對 $x^2+(s^2+t^2)x\pm st(s^2-t^2)$ 的係數分別乘上$1,\frac{1}{r},\frac{1}{r^2}$後仍可得到係數為整數的共軛可分解式，故可重複動作到一次項係數與常數項互質為止。（類似分數約分的處理模式）

(三)非最簡之共軛可分解式與畢氏三元數關係

接著我們思考，對於目前檢驗到的畢氏三元數(q,p,b)，當q,p,b兩兩互質時，可用本原畢氏三元數公式 s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2 來表示，將(q,p,b)、(s,t)分別代入公式一、公式二及公式三、公式四所得共軛可分解式均相符，而且是最簡共

軛可分解式。然而如果畢氏三元數(q,p,b)，當q,p,b並不互質呢？因為畢氏三元數(q,p,b)滿足$p^2+q^2=b^2$，所以q,p,b三數中，如果其中兩者有質數的公因數 r，則第三者必有因數 r，所以三者同時有公因數 r。

觀察結論一和結論二的公式：

1. 在公式一及公式二，取畢氏三元數$(q,p,b)=(3,4,5)$（此時三數互質），可得共軛可分解式$x^2+5x\pm 6$，對應到結論二的公式三及公式四取參數$(s,t)=(2,1)$得到相同結果。
2. 公式一、二取$(q,p,b)=(6,8,10)$（此時三數有公因數 2），可得共軛可分解式$x^2+10x\pm 24$，對應到結論二的公式三、四取$(s,t)=(3,1)$可得相同結果。
3. 但是若公式一、二取$(q,p,b)=(9,12,15)$（此時三數有公因數 3），可得共軛可分解式$x^2+15x+54=(x+9)(x+6)$及$x^2+15x-54=(x+18)(x-3)$，結論二的公式三及公式四卻無(s,t)的結果可與之對應！

這個困難點其實和本原畢氏三元數的情況相同，畢氏三元數(9,12,15)無法以本原畢氏三元數公式 s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2 來表示（s,t取正整數）。但是我們如果利用孿生可分解式規則來輔助，則可以得到與(9,12,15)代入公式一、二相同的共軛可分解式！

從最簡共軛可分解式之一的$x^2+5x\pm 6$出發，其對應公式一、二的畢氏三元數為$(q,p,b)=(3,4,5)$；想要變成另一個共軛可分解式 $x^2+15x\pm 54$，對應公式一、二的畢氏三元數為$(q,p,b)=(9,12,15)$，發現前式的畢氏三元數剛好都乘以 3 變成後式的畢氏三元數，而前共軛可分解式係數依序分別乘上$1,3,9$可變成後式。這就是孿生可分解式的係數分別乘上等比數列的規則！

另外從結論二的公式三、四出發，$x^2+5x\pm 6$ 對應公式的參數$(s,t)=(2,1)$，但 $x^2+15x\pm 54$ 則沒有(s,t)可對應。利用孿生可分解式規則，取$r=3$，將分解式$x^2+5x\pm 6$的係數依序分別乘上 $1,r,r^2$ 就可得到 $x^2+15x\pm 54$。我們試著把參數$(s,t)=(2,1)$也直接都乘以 3，得$(s,t)=(6,3)$，代入公式三、四得到不同的共軛可分解式$x^2+45x\pm 486$，接著再把係數依序分別乘上$1,\frac{1}{3},\frac{1}{9}$就可得到

我們想要的 $x^2+15x\pm 54$。我們發現把$(s,t)=(2,1)$直接乘以 3 代入公式三、四時，係數有再平方的情況：一次項係數 (s^2+t^2) 乘了 9，常數項 $st(s^2-t^2)$ 乘了 81。若我們如果放寬 s、t 條件，不限制是整數，直接以$(s,t)=(2\sqrt{3},\sqrt{3})$代入（也就是參數都乘了$\sqrt{3}$），就可直接得到共軛可分解式$x^2+15x\pm 54$。

所以我們猜想，如果改變本原畢氏三元數公式 s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2 中s,t取正整數的條件，放寬到 $s=u\sqrt{r}, t=v\sqrt{r}$（u、v、r 為正整數，$u>v$），應該可以表示所有的畢氏三元數。當然這需要嚴謹的證明，但是目前我們還沒完成。

結論三（第二部分）（猜想，已驗證 100 以內的畢氏三元數）

本原畢氏三元數公式 s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2，放寬到 $s=u\sqrt{r}, t=v\sqrt{r}$（u、v、r 為正整數，$u>v$），應該可以表示所有的畢氏三元數。相同地，結論二的公式三、公式四以此形式參數(s,t)代入應可找到所有共軛可分解式。

這結論猜想的本原畢氏三元數形式其實跟前述的 $r(s^2-t^2)$、$2rst$、$r(s^2+t^2)$ 表示法其實是相同的，只要代入即可形成相同的公式結構。但是結論三的表示方式，一方面是忠於本原畢氏三元數公式，另一方面$\sqrt{r}$的使用是源自本研究中，利用孿生可分解式規則處理非最簡的共軛可分解式的研究流程，而不是只比對數字來作猜測的。

我們檢驗了 100 以內的不互質之畢氏三元數(q,p,b)，與放寬限制的(s,t)，對照發現兩者均可對應（對照表請參考附錄七，若是互質的畢氏三元數與(s,t)對照請參考附錄五），並可對應到相同的非最簡的共軛可分解式。

伍、 結論與建議

一、結論一

只要找到畢氏三元數(q,p,b)滿足$p^2+q^2=b^2$，並且找到正整數 a、c 滿足

$ac=\frac{1}{2}pq$，則 ax^2+bx+c 與 ax^2+bx-c 必為共軛可分解式。

簡化的一般型式為

$$x^2+bx+\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p-q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p+q}{2}\right)$$

$$x^2+bx-\frac{pq}{2}=\left(x+\frac{b+p+q}{2}\right)\left(x+\frac{b-p-q}{2}\right)$$

二、結論二

對於任意正整數 s、t，（s > t），可以得到一組共軛可分解式

$$x^2+(s^2+t^2)x+st(s^2-t^2)=(x+s^2-st)(x+t^2+st)$$

$$x^2+(s^2+t^2)x-st(s^2-t^2)=(x+s^2+st)(x+t^2-st)$$

三、結論三（猜想，已驗證 100 以內的畢氏三元數）

所有畢氏三元數(q,p,b)，當q,p,b兩兩互質時，必可用本原畢氏三元數公式 s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2 來表示，而且個別代入公式一、二及公式三、四，可得相同的最簡共軛可分解式。

本原畢氏三元數公式 s^2-t^2、$2st$、s^2+t^2，放寬到 $s=u\sqrt{r}$, $t=v\sqrt{r}$（u、v、r 為正整數，$u>v$），應該可以表示所有的畢氏三元數。相同地，結論二的公式三、公式四以此形式參數(s,t)代入應可找到所有共軛可分解式。

四、建議

由於整數參數的本原畢氏三元數公式並不能表示出所有的畢氏三元數，所以結論二的生成公式無法找出所有的共軛可分解式。或者反過來說，如果能夠找出所有共軛可分解式的生成公式，那麼應該可以推導出所有畢氏三元數的公式。如果結論三的猜想經過證明是正確的，那就可以利用本原畢氏三元數公式表示出所有的畢氏三元數，也可以表示出所有的共軛可分解式。另外還可以從m^2,b^2,n^2成等差數列的性質再發展。還有利用電腦動態幾何軟體 GeoGebra 設計出相關的幾何圖形，以及直角三角形和內切圓的相關性質，期盼能找出共軛可分解式的幾何規則。這都有待後續的研究。

陸、 附錄

一、附錄一：孿生可分解式的規則與使用

已經知道可被整係數因式分解的 ax^2+bx+c，則係數分別乘上等比數列 $k\,,kr\,,kr^2$ 得到 $kax^2+krbx+kr^2c$ 的一組式子必也可被整係數因式分解，我們稱之為「孿生可分解式」。由於 k 與 r 為任意數，只要新式子的係數 $ka\,,krb\,,kr^2c$ 是整數即可，所以孿生可分解式規則所能造出新的可分解式有無限多個。只要是已知一組可分解式，乘上不同的等比數列得到不同的可分解式，這些分解式與原已知可分解式都合稱為一組孿生可分解式。

設已知可分解式 $ax^2+bx+c=(sx+t)(ux+v)$，其中 a,b,c,s,t,u,v 均為非零的整數。明顯可知$a=su$、$b=sv+tu$、$c=tv$。則係數依序分別乘上等比數列$k\,,kr\,,kr^2$ 得

$$kax^2+krbx+kr^2c=k(sx+rt)(ux+rv)$$

$$=(ksx+krt)(ux+rv)=(sx+rt)(kux+krv)$$

只要控制係數為整數，這些式子都可被整係數分解。若是分數，則可以全部同乘以分母的最小公倍數，使係數都變成整數。

以下我們來看看幾個特別的例子。

(一)一次項係數變號

$$ax^2-bx+c=sux^2-(sv+tu)x+tv=(sx-t)(ux-v)$$

可被整係數因式分解。其實將原式 ax^2+bx+c 的係數 $a\,,b\,,c$ 分別依序乘上等比數列 1、-1、1 即可得到 ax^2-bx+c，符合孿生可分解式規則。

(二)係數反序

$$cx^2+bx+a=tvx^2+(sv+tu)x+su=(tx+s)(vx+u)$$

可被整係數因式分解。這也就是將原式 ax^2+bx+c 的係數 $a\,,b\,,c$ 分別依序乘上等比數列 $\frac{c}{a}$、1、$\frac{a}{c}$ 可得到 cx^2+bx+a，符合孿生可分解式規則。

(三)綜合型（一次項係數變號加上係數反序）

$$cx^2 - bx + a = tvx^2 - (sv+tu)x + su = (tx - s)(vx - u)$$

可被整係數因式分解。如果領導係數是負的，可視情況將等號兩邊同時變號。這也是將原式 ax^2+bx+c 的係數 a, b, c 分別依序乘上等比數列 $\frac{c}{a}$、-1、$\frac{a}{c}$ 可得到 cx^2-bx+a，符合孿生可分解式規則。

由此可知，已知可被整係數因式分解的 ax^2+bx+c，則找到其孿生可分解式相當容易。這與本研究的「共軛可分解式」不同。共軛可分解式是指ax^2+bx+c 與 ax^2+bx-c 均可分解，但無法將係數 a、b、c 依序分別乘上等比數列變成 a、b、$-c$。

當我們已經找到一組可被整數分解式 $ax^2+bx+c=(px+q)(sx+t)$，可依照上述模式把係數分別乘等比數列k, kr, kr^2，來產生其他可被整數分解式：

$$kax^2 + krbx + kr^2c = k(sx+rt)(ux+rv)$$

$$= (ksx+krt)(ux+rv) = (sx+rt)(kux+krv)$$

當然係數都仍要是整數，可以控制 k 來達成這個條件。舉例來說，已知

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$，利用 $k=2, r=\frac{1}{2}$，將係數 1 , 5 , 6 分別乘上

$2, \left(2\cdot\frac{1}{2}\right), \left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$，也就是分別乘上 $2, 1, \frac{1}{2}$，

$$2\cdot x^2 + 5\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + 6\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (2\cdot x + 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2})(x + 3\cdot\frac{1}{2})$$

$$= (x + 2\cdot\frac{1}{2})(2\cdot x + 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2})$$

即 $2x^2+5x+3=(2x+2)(x+\frac{3}{2})=(x+1)(2x+3)$，可得另一可分解式。這是用上述得係數分別乘等比數列的 k、r 公式法，可以處理所有情況。

這個過程其實可以簡化，分析x^2+5x+6和$2x^2+5x+3$十字交乘表示方式：

x^2+5x+6		$2x^2+5x+3$
$x \quad +2$	$x \quad +2$	$x \quad +1$
$x \quad +3$	$x \quad +3$	$2x \quad +3$

一次項不變，常數項把 2 移到 x 項，乘開後會到二次項

同樣地，要從 x^2+5x+6 變成 $6x^2+5x+1$：

x^2+5x+6		$6x^2+5x+1$
	$x\quad +2$	
$x\quad +2$		$3x\quad +1$
$x\quad +3$	$x\quad +3$	$2x\quad +1$

將常數項的 2 和 3 移動到前面 x 項，乘開後會到二次項

只要掌握這個數字移動技巧，可以很快產生其他可分解式。然而這些方法都仍符合孿生可分解式的規則。

二、附錄二：畢氏三元數(q,p,b)較小的兩數 q , p 至少有一個是偶數。

證明：利用反證法。

假設 q , p 均為奇數，設$q=2h+1$、$p=2k+1$，其中h,k為整數，

則由 $p^2+q^2=b^2$ 可得 $b^2=(2h+1)^2+(2k+1)^2$

$=4(h^2+h+k^2+k)+2$，故b^2為偶數，即 b 為偶數。

但如此b^2為 4 的倍數，與$b^2=4(h^2+h+k^2+k)+2$ 矛盾。

得證 q , p 至少有一個是偶數。（因h^2+h+k^2+k必為整數）

三、附錄三：利用電腦 Excel 程式找出部分共軛可分解式例子如下：（結論二之公式）

s	t		x^2+	(s^2+t^2)	x+	$st(s^2-t^2)$	=(	x+	s^2-st	)*(	x+	t^2+st	)
s	t		x^2+	(s^2+t^2)	x-	$st(s^2-t^2)$	=(	x+	s^2+st	)*(	x+	t^2-st	)
2	1		x^2+	5	x+	6	=(	x+	2	)*(	x+	3	)
2	1		x^2+	5	x+	-6	=(	x+	6	)*(	x+	-1	)
3	1		x^2+	10	x+	24	=(	x+	6	)*(	x+	4	)
3	1		x^2+	10	x+	-24	=(	x+	12	)*(	x+	-2	)
4	1		x^2+	17	x+	60	=(	x+	12	)*(	x+	5	)
4	1		x^2+	17	x+	-60	=(	x+	20	)*(	x+	-3	)
5	1		x^2+	26	x+	120	=(	x+	20	)*(	x+	6	)

5	1		x^2+	26	x+	-120	=(	x+	30	)*(	x+	-4	)
3	2		x^2+	13	x+	30	=(	x+	3	)*(	x+	10	)
3	2		x^2+	13	x+	-30	=(	x+	15	)*(	x+	-2	)
4	2		x^2+	20	x+	96	=(	x+	8	)*(	x+	12	)
4	2		x^2+	20	x+	-96	=(	x+	24	)*(	x+	-4	)
4	3		x^2+	25	x+	84	=(	x+	4	)*(	x+	21	)
4	3		x^2+	25	x+	-84	=(	x+	28	)*(	x+	-3	)
5	2		x^2+	29	x+	210	=(	x+	15	)*(	x+	14	)
5	2		x^2+	29	x+	-210	=(	x+	35	)*(	x+	-6	)
5	3		x^2+	34	x+	240	=(	x+	10	)*(	x+	24	)
5	3		x^2+	34	x+	-240	=(	x+	40	)*(	x+	-6	)
5	4		x^2+	41	x+	180	=(	x+	5	)*(	x+	36	)
5	4		x^2+	41	x+	-180	=(	x+	45	)*(	x+	-4	)

四、附錄四：設 s 與 t 都是正整數。當 s 與 t 互質，而且 s 與 t 為一奇數一偶數時，

結論二的公式可得到最簡共軛可分解式。

這即是在證明：已知 s 與 t 為正整數，且 s > t 時，

s 與 t 互質，而且 s 與 t 為一奇數一偶數$\Leftrightarrow(s^2+t^2)$與$st(s^2-t^2)$互質

（一）預備性質：我們要利用幾個預備性質：

1. s 與 t 互質$\Leftrightarrow$ s 與 $(s\pm t)$ 互質。

2. s 與 t 互質$\Leftrightarrow$ s 與 t^2 互質。

3. s 與 t 為一奇數一偶數時，(s^2+t^2)與(s^2-t^2)均為奇數。

4. s 與 t 為均為奇數或均為偶數時，(s^2+t^2)與(s^2-t^2)均為偶數，不互質。

（二）正式證明：

1. s 與 t 互質$\Leftrightarrow$ s 與 t^2 互質$\Leftrightarrow$ s^2 與 t^2 互質$\Leftrightarrow$ (s^2+t^2) 與 t^2 互質

$\Leftrightarrow$ (s^2+t^2) 與 t 互質。同理可得 s 與 t 互質$\Leftrightarrow$ (s^2+t^2) 與 s 互質。

2. (s^2+t^2) 與 (s^2-t^2) 互質

$\Leftrightarrow$ (s^2+t^2) 與 $\left((s^2+t^2)+(s^2-t^2)\right)$ 互質$\Leftrightarrow$ (s^2+t^2) 與 $2s^2$ 互質

$\Leftrightarrow$“(s^2+t^2) 與 s^2 互質” 且 “s 與 t 為一奇數一偶數”

$\Leftrightarrow$“t^2 與 s^2 互質” 且 “s 與 t 為一奇數一偶數”

$\Leftrightarrow$“t 與 s 互質” 且 “s 與 t 為一奇數一偶數”

得證 s 與 t 互質，而且 s 與 t 為一奇數一偶數$\Leftrightarrow(s^2+t^2)$與$st(s^2-t^2)$互質

五、附錄五：檢驗 100 以內所有畢氏三元數（三數兩兩互質）與本原畢氏三元數公式及最簡共軛可分解式相符。

q	p	b		s	t		x^2+	(s^2+t^2)	x+	$st(s^2-t^2)$	=(	x+	s^2-st	)*(	x+	t^2+st	)
q	p	b		s	t		x^2+	(s^2+t^2)	x-	$st(s^2-t^2)$	=(	x+	s^2+st	)*(	x+	t^2-st	)
3	4	5		2	1		x^2+	5	x+	6	=(	x+	2	)*(	x+	3	)
3	4	5		2	1		x^2+	5	x+	-6	=(	x+	6	)*(	x+	-1	)
5	12	13		3	2		x^2+	13	x+	30	=(	x+	3	)*(	x+	10	)
5	12	13		3	2		x^2+	13	x+	-30	=(	x+	15	)*(	x+	-2	)
7	24	25		4	3		x^2+	25	x+	84	=(	x+	4	)*(	x+	21	)
7	24	25		4	3		x^2+	25	x+	-84	=(	x+	28	)*(	x+	-3	)
8	15	17		4	1		x^2+	17	x+	60	=(	x+	12	)*(	x+	5	)
8	15	17		4	1		x^2+	17	x+	-60	=(	x+	20	)*(	x+	-3	)
9	40	41		5	4		x^2+	41	x+	180	=(	x+	5	)*(	x+	36	)
9	40	41		5	4		x^2+	41	x+	-180	=(	x+	45	)*(	x+	-4	)
11	60	61		6	5		x^2+	61	x+	330	=(	x+	6	)*(	x+	55	)
11	60	61		6	5		x^2+	61	x+	-330	=(	x+	66	)*(	x+	-5	)
12	35	37		6	1		x^2+	37	x+	210	=(	x+	30	)*(	x+	7	)
12	35	37		6	1		x^2+	37	x+	-210	=(	x+	42	)*(	x+	-5	)
13	84	85		7	6		x^2+	85	x+	546	=(	x+	7	)*(	x+	78	)

13	84	85		7	6		x^2+	85	x+	-546	=(	x+	91	)*(	x+	-6	)
16	63	65		8	1		x^2+	65	x+	504	=(	x+	56	)*(	x+	9	)
16	63	65		8	1		x^2+	65	x+	-504	=(	x+	72	)*(	x+	-7	)
20	21	29		5	2		x^2+	29	x+	210	=(	x+	15	)*(	x+	14	)
20	21	29		5	2		x^2+	29	x+	-210	=(	x+	35	)*(	x+	-6	)
28	45	53		7	2		x^2+	53	x+	630	=(	x+	35	)*(	x+	18	)
28	45	53		7	2		x^2+	53	x+	-630	=(	x+	63	)*(	x+	-10	)
33	56	65		7	4		x^2+	65	x+	924	=(	x+	21	)*(	x+	44	)
33	56	65		7	4		x^2+	65	x+	-924	=(	x+	77	)*(	x+	-12	)
36	77	85		9	2		x^2+	85	x+	1386	=(	x+	63	)*(	x+	22	)
36	77	85		9	2		x^2+	85	x+	-1386	=(	x+	99	)*(	x+	-14	)
39	80	89		8	5		x^2+	89	x+	1560	=(	x+	24	)*(	x+	65	)
39	80	89		8	5		x^2+	89	x+	-1560	=(	x+	104	)*(	x+	-15	)
48	55	73		8	3		x^2+	73	x+	1320	=(	x+	40	)*(	x+	33	)
48	55	73		8	3		x^2+	73	x+	-1320	=(	x+	88	)*(	x+	-15	)
65	72	97		9	4		x^2+	97	x+	2340	=(	x+	45	)*(	x+	52	)
65	72	97		9	4		x^2+	97	x+	-2340	=(	x+	117	)*(	x+	-20	)

六、附錄六：設 s 與 t 都是正整數。若(s^2+t^2)與$st(s^2-t^2)$有質數公因數 r 的話，

則$st(s^2-t^2)$必有因數r^2。

證明：已知質數 r 是(s^2+t^2)與$st(s^2-t^2)$的公因數。

1.若 r 是s的因數，則 r 是s^2的因數，故 r 是$((s^2+t^2)-s^2)$的因數，

即 r 是t^2的因數，所以r^2是$st(s^2-t^2)$的因數。

同理可證：若 r 是t的因數，則r^2是$st(s^2-t^2)$的因數。

2.若 r 不是s的因數，而且 r 不是t的因數，則 r 是(s^2-t^2)的因數，

又 r 是(s^2+t^2)的因數，所以 r 是$\left((s^2+t^2)+(s^2-t^2)\right)$的因數，

即 r 是$2s^2$的因數。

(1)若 $r \neq 2$，則 r 是s^2的因數，這與 r 不是 s 的因數矛盾（因為 r 是質數）。

(2)若 $r = 2$，則從「r 不是 s 的因數，而且 r 不是 t 的因數」可知 s 與 t 都是奇數，這樣的話，$(s^2 - t^2)$必為 $r^2 = 4$ 的倍數。（設 $s = 2u - 1$、$t = 2v - 1$，$s^2 - t^2 = (2u-1)^2 - (2v-1)^2 = 4(u^2 - v^2 - u + v)$為 4 的倍數）

故得證$st(s^2 - t^2)$必有因數r^2。

七、附錄七：檢驗 100 以內的不互質之畢氏三元數(q, p, b)，與放寬限制的(s, t)，對照發現兩者均可對應，並可對應到相同的非最簡的共軛可分解式。

q	p	b		s		t		x^2+	(s^2+t^2)	x+	$st(s^2-t^2)$	=(	x+	s^2-st	)*(	x+	t^2+st	)
				u	$\sqrt{}$r	v	$\sqrt{}$r	x^2+	(s^2+t^2)	x-	$st(s^2-t^2)$	=(	x+	s^2+st	)*(	x+	t^2-st	)
6	8	10		2	2	1	2	x^2+	10	x+	24	=(	x+	4	)*(	x+	6	)
6	8	10		2	2	1	2	x^2+	10	x+	24	=(	x+	12	)*(	x+	-2	)
9	12	15		2	3	1	3	x^2+	15	x+	54	=(	x+	6	)*(	x+	9	)
9	12	15		2	3	1	3	x^2+	15	x+	54	=(	x+	18	)*(	x+	-3	)
10	24	26		3	2	2	2	x^2+	26	x+	120	=(	x+	6	)*(	x+	20	)
10	24	26		3	2	2	2	x^2+	26	x+	120	=(	x+	30	)*(	x+	-4	)
12	16	20		4	1	2	1	x^2+	20	x+	96	=(	x+	8	)*(	x+	12	)
12	16	20		4	1	2	1	x^2+	20	x+	96	=(	x+	24	)*(	x+	-4	)
14	48	50		4	2	3	2	x^2+	50	x+	336	=(	x+	8	)*(	x+	42	)
14	48	50		4	2	3	2	x^2+	50	x+	336	=(	x+	56	)*(	x+	-6	)
15	20	25		2	5	1	5	x^2+	25	x+	150	=(	x+	10	)*(	x+	15	)
15	20	25		2	5	1	5	x^2+	25	x+	150	=(	x+	30	)*(	x+	-5	)
15	36	39		3	3	2	3	x^2+	39	x+	270	=(	x+	9	)*(	x+	30	)
15	36	39		3	3	2	3	x^2+	39	x+	270	=(	x+	45	)*(	x+	-6	)

16	30	34		4	2	1	2	x^2+	34	x+	240	=(	x+	24	)*(	x+	10	)
16	30	34		4	2	1	2	x^2+	34	x+	240	=(	x+	40	)*(	x+	-6	)
18	24	30		2	6	1	6	x^2+	30	x+	216	=(	x+	12	)*(	x+	18	)
18	24	30		2	6	1	6	x^2+	30	x+	216	=(	x+	36	)*(	x+	-6	)
18	80	82		5	2	4	2	x^2+	82	x+	720	=(	x+	10	)*(	x+	72	)
18	80	82		5	2	4	2	x^2+	82	x+	720	=(	x+	90	)*(	x+	-8	)
20	48	52		6	1	4	1	x^2+	52	x+	480	=(	x+	12	)*(	x+	40	)
20	48	52		6	1	4	1	x^2+	52	x+	480	=(	x+	60	)*(	x+	-8	)
21	28	35		2	7	1	7	x^2+	35	x+	294	=(	x+	14	)*(	x+	21	)
21	28	35		2	7	1	7	x^2+	35	x+	294	=(	x+	42	)*(	x+	-7	)
21	72	75		4	3	3	3	x^2+	75	x+	756	=(	x+	12	)*(	x+	63	)
21	72	75		4	3	3	3	x^2+	75	x+	756	=(	x+	84	)*(	x+	-9	)
24	32	40		2	8	1	8	x^2+	40	x+	384	=(	x+	16	)*(	x+	24	)
24	32	40		2	8	1	8	x^2+	40	x+	384	=(	x+	48	)*(	x+	-8	)
24	45	51		4	3	1	3	x^2+	51	x+	540	=(	x+	36	)*(	x+	15	)
24	45	51		4	3	1	3	x^2+	51	x+	540	=(	x+	60	)*(	x+	-9	)
24	70	74		6	2	1	2	x^2+	74	x+	840	=(	x+	60	)*(	x+	14	)
24	70	74		6	2	1	2	x^2+	74	x+	840	=(	x+	84	)*(	x+	-10	)
25	60	65		3	5	2	5	x^2+	65	x+	750	=(	x+	15	)*(	x+	50	)
25	60	65		3	5	2	5	x^2+	65	x+	750	=(	x+	75	)*(	x+	-10	)
27	36	45		6	1	3	1	x^2+	45	x+	486	=(	x+	18	)*(	x+	27	)
27	36	45		6	1	3	1	x^2+	45	x+	486	=(	x+	54	)*(	x+	-9	)
28	96	100		8	1	6	1	x^2+	100	x+	1344	=(	x+	16	)*(	x+	84	)
28	96	100		8	1	6	1	x^2+	100	x+	1344	=(	x+	112	)*(	x+	-12	)
30	40	50		2	10	1	10	x^2+	50	x+	600	=(	x+	20	)*(	x+	30	)
30	40	50		2	10	1	10	x^2+	50	x+	600	=(	x+	60	)*(	x+	-10	)

30	72	78		3	6	2	6	x^2+	78	x+	1080	=(	x+	18	)*(	x+	60	)
30	72	78		3	6	2	6	x^2+	78	x+	1080	=(	x+	90	)*(	x+	-12	)
32	60	68		8	1	2	1	x^2+	68	x+	960	=(	x+	48	)*(	x+	20	)
32	60	68		8	1	2	1	x^2+	68	x+	960	=(	x+	80	)*(	x+	-12	)
33	44	55		2	11	1	11	x^2+	55	x+	726	=(	x+	22	)*(	x+	33	)
33	44	55		2	11	1	11	x^2+	55	x+	726	=(	x+	66	)*(	x+	-11	)
35	84	91		3	7	2	7	x^2+	91	x+	1470	=(	x+	21	)*(	x+	70	)
35	84	91		3	7	2	7	x^2+	91	x+	1470	=(	x+	105	)*(	x+	-14	)
36	48	60		4	3	2	3	x^2+	60	x+	864	=(	x+	24	)*(	x+	36	)
36	48	60		4	3	2	3	x^2+	60	x+	864	=(	x+	72	)*(	x+	-12	)
39	52	65		2	13	1	13	x^2+	65	x+	1014	=(	x+	26	)*(	x+	39	)
39	52	65		2	13	1	13	x^2+	65	x+	1014	=(	x+	78	)*(	x+	-13	)
40	42	58		5	2	2	2	x^2+	58	x+	840	=(	x+	30	)*(	x+	28	)
40	42	58		5	2	2	2	x^2+	58	x+	840	=(	x+	70	)*(	x+	-12	)
40	75	85		4	5	1	5	x^2+	85	x+	1500	=(	x+	60	)*(	x+	25	)
40	75	85		4	5	1	5	x^2+	85	x+	1500	=(	x+	100	)*(	x+	-15	)
42	56	70		2	14	1	14	x^2+	70	x+	1176	=(	x+	28	)*(	x+	42	)
42	56	70		2	14	1	14	x^2+	70	x+	1176	=(	x+	84	)*(	x+	-14	)
45	60	75		2	15	1	15	x^2+	75	x+	1350	=(	x+	30	)*(	x+	45	)
45	60	75		2	15	1	15	x^2+	75	x+	1350	=(	x+	90	)*(	x+	-15	)
48	64	80		8	1	4	1	x^2+	80	x+	1536	=(	x+	32	)*(	x+	48	)
48	64	80		8	1	4	1	x^2+	80	x+	1536	=(	x+	96	)*(	x+	-16	)
51	68	85		2	17	1	17	x^2+	85	x+	1734	=(	x+	34	)*(	x+	51	)
51	68	85		2	17	1	17	x^2+	85	x+	1734	=(	x+	102	)*(	x+	-17	)
54	72	90		6	2	3	2	x^2+	90	x+	1944	=(	x+	36	)*(	x+	54	)
54	72	90		6	2	3	2	x^2+	90	x+	1944	=(	x+	108	)*(	x+	-18	)

57	76	95		2	19	1	19	x^2+	95	x+	2166	=(	x+	38	)*(	x+	57	)
57	76	95		2	19	1	19	x^2+	95	x+	2166	=(	x+	114	)*(	x+	-19	)
60	63	87		5	3	2	3	x^2+	87	x+	1890	=(	x+	45	)*(	x+	42	)
60	63	87		5	3	2	3	x^2+	87	x+	1890	=(	x+	105	)*(	x+	-18	)
60	80	100		4	5	2	5	x^2+	100	x+	2400	=(	x+	40	)*(	x+	60	)
60	80	100		4	5	2	5	x^2+	100	x+	2400	=(	x+	120	)*(	x+	-20	)

【評語】030423

探討和可同時分解為整係數一次因式時，需滿足的條件，給出了近乎完整的解答。這是一個有趣的問題。作者們聰明的利用一些基礎的數學概念，對所考慮的問題作了詳盡的討論。能由一個簡單的習題發想，給出這樣一個問題並進行深入的分析，頗具創意，值得嘉許。作品中提及不是所有的畢氏三數組都可由本原畢氏三數組的公式導出，所以公式三和公式四不能表示出所有的共軛可分解式。這應該可以透過乘上一個等比數列解決。例如：當時，我們得出共軛可分解式和，乘上…，我們可以還原回由所得出的共軛可分解式和。透過這樣的方式，應該可以對原始的問題給出一個完整的答案。沒有看到這樣的關聯性是有點可惜了。