中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030422

滾積木遊戲探討

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國三 游復廷	沈志強
國三 蔣沁珊	張惠芳
國三 吳書磊	

關鍵詞：滾積木、最少移動步數

摘要

滾積木遊戲為一邊長 1×1×2 的長方體積木，在由邊長為 1×1 的方格所組成的棋盤上，立於起點，利用**倒**、**滾**、**立**三種移動方式向**前**、**後**、**左**、**右**方向移動，移動立於終點，即算過關。(走過的格子可重複走)

本作品主要在探討：

一、滾積木遊戲的有解及無解狀態。

二、探討 m×n 矩形過關移動最少步數。

三、探討 m×n 矩形移動最少步數路徑數量。

四、探討不規則形狀之棋盤如何過關。

最後利用 Scratch 製作一滾積木遊戲。

壹、研究動機

國二的數學寒假作業為「找一個數學相關的遊戲」，有位同學找了這個滾積木遊戲，於是我們進行多次的過關，卻發現大家同一關的過關方法及走的步數都不大一樣，因此，激起我們想要對此進行步數、移動法則的探討，以助於我們找出過關最少步數。

貳、研究目的

1.探討遊戲**有解**、**無解**狀態。

2.尋找有解的**最小矩形**。

3.研究 m×n 矩形當起點固定，每一有解方格之**最少移動步數**。

4.研究 m×n 矩形當起點固定，每一有解方格之**最少移動步數路徑數量**。

5.探討不規則形狀之棋盤如何過關。

6.利用電腦軟體 Scratch 設計滾積木遊戲。

參、研究內容

滾積木遊戲介紹

有一邊長為 $1\times1\times2$ 的長方體積木，在由邊長為 1×1 的方格所組成的棋盤上(如圖 1-1)，立於起點，利用**倒**、**滾**、**立**三種移動方式向**前**、**後**、**左**、**右**方向移動，移動立於終點，即算過關。(走過的格子可重複走)

圖 1-1

倒：將積木倒下，如圖 1-2

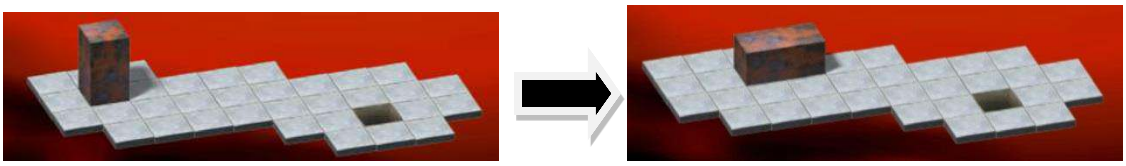


圖 1-2

滾：滾動積木，如圖 1-3

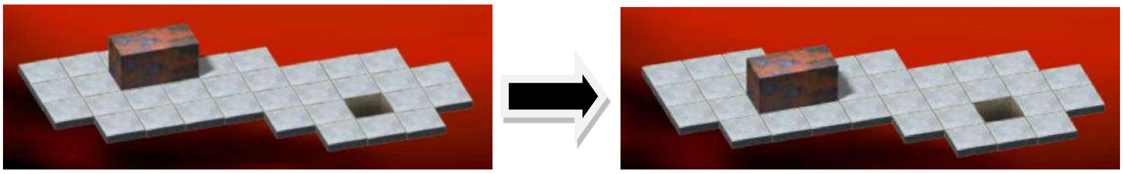


圖 1-3

立：將積木立起，如圖 1-4

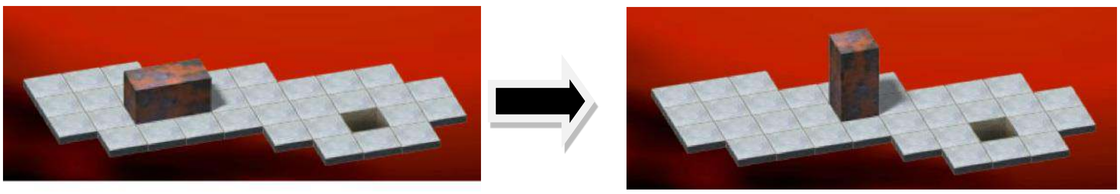


圖 1-4

這是個有趣的遊戲，能夠過關真令人興奮。我們一開始不斷嘗試如何過關，並且過完所有的關卡。而在玩的過程中，我們發現三個人走的步數皆不同，解法並不唯一。因此，我們試著要找出最少步數，並在最少步數下找出不同解法。另外，我們想要了解矩形中任意一方格當起點是否一定能移動到任意一終點。

一、有解？無解？

首先，我們先找出**必定無解**的狀況：

1. 當起點周圍方格無法讓積木移動時
2. 當終點設在無法使積木向任何方向移動的地點時
3. 當移動的路徑可能無法被站立或是倒下時
4. 棋盤不夠寬時，當起點固定後，大部分方格無法當終點

前面三點非常直觀就知道，而第 4 點當棋盤為 m×1 或 m×2 時，如下圖 2，若積木立於第一排第一格，因為棋盤不夠寬，積木只能向左、右倒、立或向上、下滾。因為**一倒一立共移動三格**，積木能立的終點必定是每一排第 3x+1 (x=0,1,2,……)之方格，而非第 3x+1 之方格就無法當終點了。(底下黑色格子即積木可立之格子，而綠色方格即為無解區)

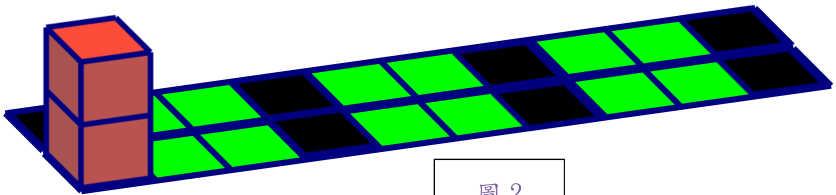


圖 2

由以上四點無解的狀況，我們推測若要每格方格都有解**矩形必須要夠寬**，因此接著我們研究 m×n 矩形當 m、n 皆大於 2 是否每一方格一定都有解？

為了研究的方便，我們做了以下幾個規定和表示方法：

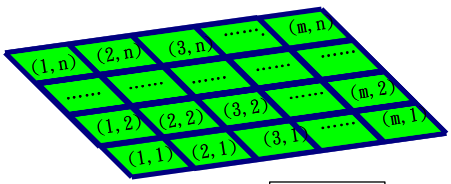


圖 3-1

1. 我們將 m×n 矩形座標化，如右圖 3-1。
2. 倒(pour)− P_x：積木向右倒、P_x^-：積木向左倒、P_y：積木向上倒、P_y^-：積木向下倒。

3. 滾(roll)－R_x：積木向右滾、R_x^-：積木向左滾、R_y：積木向上滾、R_y^-：積木向下滾。

4. 立(stand)－S_x：積木向右立、S_x^-：積木向左立、S_y：積木向上立、S_y^-：積木向下立。

5. $m \times n$ 矩形與 $n \times m$ 矩形為**對稱**圖形，因此**我們只討論 $m \times n$ 矩形，其中** $m \geq n$。

6. A→B：代表以 A 方格為起點，而可移動立於 B 方格。

7.我們用 H(head)表示起點。

先來看 3×3 矩形，如右圖 3-2，我們由必定無解的第 1、2 點狀況可得知，(2 , 2)這方格無論是當起點或當終點，都無法到達矩形上任一方格，故為無解。若以(1 , 1)當起點，則除了(2 , 2)外，每一方格都能立起，也就是每一格都可當終點。

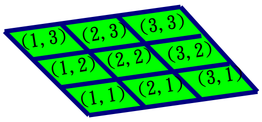


圖 3-2

例如以(1, 1)為起點，(1, 2)為終點移動方式為 $P_x + R_y + S_x^-$

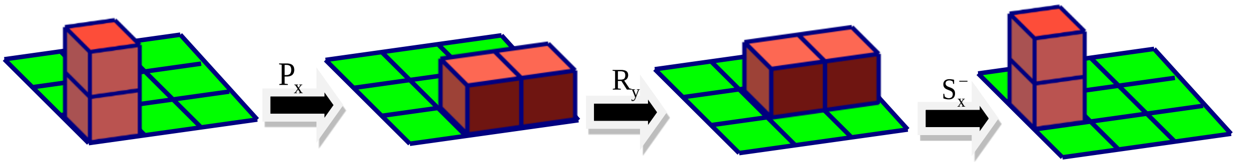


圖 3-3

我們將以(1, 1)為起點立於每一方格的移動方式寫在底下表格：

表格 1

$P_x + R_y + R_y + S_x^-$	$P_x + R_y + R_y + S_x^-$ $+ P_y^- + R_x + S_y$	$P_x + R_y + R_y + S_x^- +$ $P_y^- + R_x + R_x + S_y$
$P_x + R_y + S_x^-$	**無解**	$P_y + R_x + R_x + S_y^-$ $+ P_x^- + R_y + S_x$
起點	$P_y + R_x + S_y^-$	$P_y + R_x + R_x + S_y^-$

我們只寫出以(1 , 1)為起點的表格，因我們發現不需每一格都檢驗是否可為起點。

發現一：若 A→B 成立，則必存在 B→A，也就是 A↔B

說明：顯而易見的，若 A→B 成立，只要依同樣路徑逆回去則 B→A 也成立，也就是 A↔B

發現二：A→B 且 A→C，則必存在 B→C

說明：若 A→B，則由發現一得知 B→A，又 A→C，因此必存在 B→C

由發現二可得知除了(2 , 2)外任一方格當起點至少都可經由(1 , 1)到其他方格。因此我們發現，若只討論有無解，可只討論以(1 , 1)為起點的狀況，不需再以其他方格作為起點。

定理一：4×3 矩形為每一方格皆有解的最小矩形。

證明：將 4×3 矩形視為兩個 3×3 矩形重疊，如右圖 3-4(紫色部分為重疊地帶)。

當積木以(1 , 1)為起點時在 3×3 矩形中只有(2 , 2)無解……(1)

但當積木經 $P_x + S_x$ 立於(4 , 1)時，在 3×3 矩形中只有(3 , 2)無解……(2)

又(1 , 1)→(3 , 2)成立，(4 , 1)→(2 , 2)成立……(3)

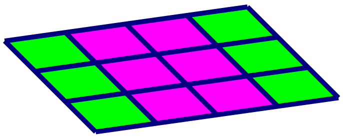


圖 3-4

由(1)、(2)、(3)利用發現二得知每一方格皆有解

因 3×3 矩形並非每格方格皆有解，故 4×3 矩形為每一方格皆有解的最小矩形

定理二：任意 m×n 矩形，若 m×n 大於 4×3 則必定每個方格皆有解。

證明：如同定理一的證明，我們可將 m×n 矩形視為多個 4×3 矩形重疊，如下圖 3-5。

因此，顯而易見的每個方格皆有解。(紫色為重疊部分，由 2 塊 4×3 矩形所組成的 5×3 矩形)

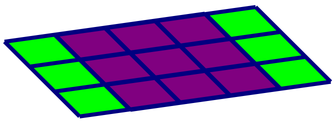


圖 3-5

確定 m×n 大於 4×3 則必定每個方格皆有解後，我們想研究每一方格移動的最少步數、移動方式及最小步數移動路徑數。

二、移動最少步數

1. 以(1 , 1)為起點

為了找出每一方格移動的最少步數，我們一開始先分工實際操作 3×4、4×4、5×5、6×6

的矩形。在實際操作中我們有了幾個新發現，有助於之後的研究：

發現三：(1)　$(a , b)+ P_x + S_x =(a+3 , b)$ 向右一倒一立移動了三格，同理向左亦同。

(2)　$(a , b)+ P_y + S_y =(a , b+3)$ 向上一倒一立移動了三格，同理向下亦同。

(3)　$(a , b)+ P_x + S_x^- =(a , b)$ 向右倒後向左立，則立於原來方格，同理向左倒後向右立、向上倒後向下立、向下倒後向上立，亦立於原來方格。

(4) **無論向左右滾動 R_x (R_x^-)滾動幾次必須介於一次的向上、下倒 P_y (P_y^-)、立 S_y (S_y^-)之間。同理，向上、下滾動 R_y (R_y^-)滾動必須介於一次的左右倒 P_x (P_x^-)、立 S_x (S_x^-)之間。**

(5) $P_y + R_x + R_x + R_x + S_y = P_y + S_y + P_x + S_x$ ， $P_x + R_y + R_y + R_y + S_x = P_x + S_x + P_y + S_y$ ，也就是滾三次相當於一次倒加一次立

(6)若此步數為最少步數，則在移動路徑中，不會有到同一點兩次的狀況。

發現四：任意 m×n 矩形有解的方格中，若**移動步數為最少步數，則不會有同方向滾動三次**。

說明：由發現三 (5)可知同方向每滾三次可被倒、立取代，也就是三步可以用兩步取代，因此，若移動步數為最少，則不會有同方向滾動三次。

依據上述發現三、發現四，底下是 4×3、4×4、5×5、6×6 以(1 , 1)為起點，立於其他方格的最少移動步數:

表格 2

4	7	7	4
3	6	7	3
H	3	4	2

2	3	4	4
4	6	7	4
3	6	6	3
H	3	4	2

5	6	6	5	6
2	3	4	4	5
4	6	7	4	6
3	6	6	3	6
H	3	4	2	5

6	7	7	6	7	8
5	6	6	5	6	7
2	3	4	4	5	6
4	6	7	4	6	7
3	6	6	3	6	7
H	3	4	2	5	6

從上表可發現，除了 4×3 的矩形(3 , 2)、(2 , 3)方格外，當矩形擴大時同一座標方格最少移動步數皆不會再改變，也就是其最小步數。接著我們想求出 $m\times n$ 矩形以(1 , 1)為起點，任一方格為終點的最少步數。

為方便研究，我們將$(1,1)\xrightarrow{\min}(x,y)$代表以(1 , 1)為起點，移動至終點座標(x , y)的最少步數。

定理三：$m\times n$ 矩形$(m\ge4, n\ge4)$以(1 , 1)為起點，移動至終點座標(x , y)，若終點方格與起點方格的座標差為(3A+C，3B+D)，其中 $A、B\in\{0,1,2,3\cdots\cdots\}$，$C、D\in\{0,1,2\}$，則最少步數為：

(一) 2(A+B)+C+D　　if　A≥1、B≥1

(二) 2(A+B)+C+D　　if　A=0、B≥1、D=0 或 B=0、A≥1、C=0

(三) 2(A+B)+C+D+1　if　A=0、B≥1、C=2、D=1,2 或 B=0、A≥1、D=2、C=1,2

(四) 2(A+B)+C+D+2　if　A=0、B≥1、C=0,1、D=1,2 或

B=0、A≥1、D=0,1、C=1,2

(五) 2(A+B)+C+D+2　if　A=0、B=0 且 C=0、D=1,2 或 D=0、C=1,2

(六)其他特殊座標$(1,1)\xrightarrow{\min}(2,2)=6$、$(1,1)\xrightarrow{\min}(2,3)=6$、$(1,1)\xrightarrow{\min}(3,2)=6$、

$(1,1)\xrightarrow{\min}(3,3)=7$

證明：由發現三、發現四得知一倒、立即移動了 3 格且同一方向的滾不會大於 2 次，因此我們將終點方格與起點方格的座標差表示為(3A+C，3B+D)，

(一) A≥1，則與 x 軸座標差 3A+C≥3，也就是說必須往 x 軸倒、立 A 次、滾 C 次，但往 x 軸滾必須至少介於一次往 y 軸倒、立之間。

又 B≥1，與 y 軸座標差 3B+D≥3，y 軸方向也需倒、立 B 次、滾 D 次，且 y 軸滾必須至少介於一次往 x 軸倒、立之間。

因為 1 次的倒、立需兩步、而滾需 1 步，所以最少步數為

2A+C+2B+D

=2(A+B)+C+D

(二) A=0 則與 x 軸座標差 3A+C=C≤2，因此不需往 x 軸倒、立，只需往 x 軸滾 C 次且必須至少介於一次往 y 軸倒、立之間。

又 B≥1，D=0，因此 y 軸座標差為 3 的倍數，只需倒、立 B 次即可。

所以最少步數為

2B+C……(1)

同理，B=0，A≥1，C=0 則最少步數為 2A+D……(2)

合併(1)、(2)得知，若 A=0，B≥1，D=0 或 B=0，A≥1，C=0，最少步數為

2(A+B)+C+D

(三) A=0，B≥1，C=2，D=1,2

B≥1，y 軸方向需倒、立 B 次，而 A=0 本不需往 x 軸倒、立，但 D=1,2 需往 y 軸滾 D 次，且必須介於一次往 x 軸倒、立之間，因此當 C=2，本需滾動 2 次，移動方式其中一段需變為 $P_x+\cdots\cdots+S_x+P_y+R_x^-+S_y$，增加了 1 步。

同理，B=0，A≥1，D=2，C=1,2 也會增加 1 步，因此最少步數為

2(A+B)+C+D+1

(四) A=0，B≥1，C=0,1，D=1,2

與(三)相同，當 C=1，本需滾動 1 次，移動方式其中一段需變為 $P_x+\cdots\cdots+S_x^-+P_y+R_x+S_y$，增加了 2 步；而當 C=0，本不需滾動倒、立，但移動方式其中一段需變為 $P_x+\cdots\cdots+S_x^-+P_y+S_y$，增加了 2 步。

同理，B=0，A≥1，D=0,1，C=1,2 也會增加兩步，因此最少步數為

2(A+B)+C+D+2

(五) A=0，B=0 且 C=0，D=1,2 或 D=0，C=1,2，證明與(四) 當 C=0 相同，不再贅述。同理，最少步數為

2(A+B)+C+D+2

(六) $(1,1)\xrightarrow{\min}(2,2)$本只需往 x 軸、y 軸各滾 1 次即可，共兩步，但因滾需介於倒、立之間，因此移動方式需改為 $P_y+R_x+S_y^-+P_x+R_y+S_x^-$，增加了 4 步變成 6 步

$(1,1)\xrightarrow{\min}(2,3)$ 本只需往 x 軸、y 軸各滾 1、2 次，共三步，但因滾需介於倒、立之間，因此移動方式需改為 $P_y+R_x+S_y+P_x+R_y^-+S_x^-$，增加了 3 步變成 6 步

$(1,1)\xrightarrow{\min}(3,2)$，同理，移動方式需改為 $P_x+R_y+S_x+P_y+R_x^-+S_y^-$，增加了 3 步變成 6 步

$(1,1)\xrightarrow{\min}(3,3)$，同理，移動方式需改為 $P_x+R_y+R_y+S_x+P_y+R_x^-+S_y^-$，增加了 3 步變成 7 步

底下我們用表格 3 來表示此**定理三**，

黃色方格代表：最少步數 2(A+B)+C+D　　**藍色方格代表：最少步 2(A+B)+C+D+1**

紅色方格代表：最少步數 2(A+B)+C+D+2　　灰色方格代表：其他特殊座標

表格 3

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
									…
									…
									…
									…
									…
									…
	6	7							…
	6	6							…
H									…

最少步數表

6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
8	9	9	8	9	10	10	11	12	12
7	8	8	7	8	9	9	10	11	11
4	5	6	6	7	8	8	9	10	10
6	7	7	6	7	8	8	9	10	10
5	6	6	5	6	7	7	8	9	9
2	3	4	4	5	6	6	7	8	8
4	6	7	4	6	7	6	8	9	8
3	6	6	3	6	7	5	8	9	7
H	3	4	2	5	6	4	7	8	6

表格 4

之前我們發現 4×3 的矩形(1 , 1)$\xrightarrow{\min}$(3 , 2)、(1 , 1)$\xrightarrow{\min}$(2 , 3)皆是 7 步，與 m×n 矩形的 6 步不同，主要是因為依原來的步驟 $P_x+R_y+S_x+P_y+R_x^-+S_y^-$，到第四步驟 $P_x+R_y+S_x+P_y$ 時 y 軸座標需到 4 單位，超過棋盤 y 軸座標上限的三單位，因此需改變移動路徑，在立於(3 , 2)前需躺在(1 , 2)及(2 , 2)上(如下圖)，因此移動方式為 $P_y+R_x+R_x+S_y^-+P_x^-+R_y+S_x$，

同理(1 , 1)$\xrightarrow{\min}$ (2 , 3)不再贅述。

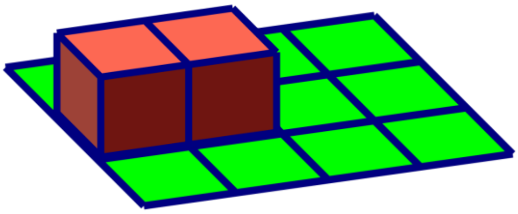


圖 4

2. 以任意(a , b)當起點

在玩遊戲時，我們發現起點通常不會在(1 , 1)，因此我們想探討以任意座標方格(a , b)時到其他終點座標方格的移動方式與最少步數。

定理四：若 A→B 成立，則 $A\xrightarrow{\min}B=B\xrightarrow{\min}A$

證明：由發現一知道，若 A→B 成立，即可 B→A。只要依 A→B 的路徑把移動的先後順序顛倒且方向相反就是 $A\xrightarrow{\min}B=B\xrightarrow{\min}A$

例如: $P_x+R_y+S_x^-$ 倒過來就是 $P_x+R_y^-+S_x^-$

首先我們先從 4×3 的矩形開始探討，由定理四及對稱性，因此我們只要分別以(1 , 1)、(2 , 1)、(1 , 2)及 (2 , 2)為起點即可。最少步數分別如下表格 5：

表格 5

4	**7**	7	4
3	6	**7**	3
H	3	4	2

7	4	7	7
6	3	6	6
3	H	3	4

3	6	6	3
H	9	9	2
3	6	6	3

6	3	6	7
9	H	9	9
6	3	6	7

因為 4×3 的矩形不夠寬，用 m×n 最少路徑容易超過棋盤，部分需要特殊解法，因此最少步數較無規律。

4×4 的矩形，也由定理四及對稱性，因此我們只要分別以(1 , 1)、(2 , 1)及 (2 , 2)為起點即可。最少步數分別如下表格 6：

表格 6

2	3	4	4
4	6	7	4
3	6	6	3
H	3	4	2

3	2	3	4
6	4	6	6
6	3	6	6
3	H	3	4

6	4	6	7
6	3	6	6
3	H	3	4
6	3	6	6

由以上的表格我們發現，除了黃色方格外，無論起點在何處，起點座標與終點座標差相同時，最少移動步數也相同。因此我們持續操作並探討任意 m×n 矩形 $(m\geq 4, n\geq 4)$ 的情況。

定理五： $m \times n$ 矩形$(m \geq 4, n \geq 4)$，若$(a_1\ ,\ b_1) \to (x_1\ ,\ y_1)$的座標差與$(a_2\ ,\ b_2) \to (x_2\ ,\ y_2)$的座標差相同，則$(a_1\ ,\ b_1) \xrightarrow{\min} (x_1\ ,\ y_1) = (a_2\ ,\ b_2) \xrightarrow{\min} (x_2\ ,\ y_2)$。

除了底下四種狀況：$(1, 1) \leftrightarrow (3, 3)$、$(m, 1) \leftrightarrow (m-2, 3)$、$(1, n) \leftrightarrow (3, n-2)$、$(m, n) \leftrightarrow (m-2, n-2)$比其他座標差$(2, 2)$多 1 步。

證明：若移動方式不會超過棋盤，對於一般$(a_1\ ,\ b_1) \to (x_1\ ,\ y_1)$的座標差與$(a_2\ ,\ b_2) \to (x_2\ ,\ y_2)$的座標差相同時的最少步數移動方式皆相同，因此

$$(a_1\ ,\ b_1) \xrightarrow{\min} (x_1\ ,\ y_1) = (a_2\ ,\ b_2) \xrightarrow{\min} (x_2\ ,\ y_2)$$

而$(1, 1) \leftrightarrow (3, 3)$、$(m, 1) \leftrightarrow (m-2, 3)$、$(1, n) \leftrightarrow (3, n-2)$、$(m, n) \leftrightarrow (m-2, n-2)$

這四種狀況，雖然座標差皆為$(2, 2)$，但一般座標差為$(2, 2)$的移動方式為

$P_x + R_y^- + S_x + P_y + R_x^- + S_y$ 或 $P_y + R_x^- + S_y + P_x + R_y^- + S_x$ 各是 6 步

這樣的移動方式在

$(1, 1) \leftrightarrow (3, 3)$、$(m, 1) \leftrightarrow (m-2, 3)$、$(1, n) \leftrightarrow (3, n-2)$、$(m, n) \leftrightarrow (m-2, n-2)$

這四種狀況都會超過棋盤，因此移動方式需改為

$P_x + R_y + R_y + S_x + P_y + R_x^- + S_y^-$ 或 $P_y + R_x + R_x + S_y + P_x + R_y^- + S_x^-$ 各是 7 步

因此，$(1, 1) \leftrightarrow (3, 3)$、$(m, 1) \leftrightarrow (m-2, 3)$、$(1, n) \leftrightarrow (3, n-2)$、$(m, n) \leftrightarrow (m-2, n-2)$比其他座標差$(2, 2)$多 1 步

下圖 5 當同顏色之方格相互為起點和終點時，其最少步數比其他座標差為$(2, 2)$者多 1 步，其餘方格當座標差相同時期最少步數必會相同。

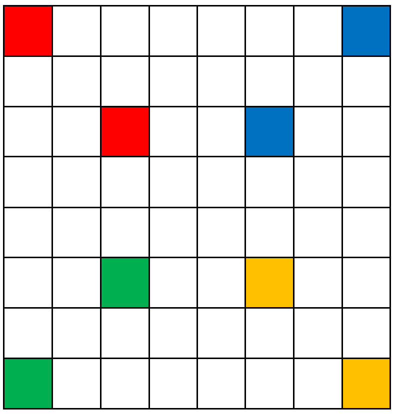


圖 5

三、移動最少步數路徑數量

探討完最少步數後，我們更進一步想要知道，任意起點移動至終點最少步數的路徑數量。

每一個最少移動步數的路徑都是由**倒、滾、立**三種移動方式向**前、後、左、右**方向移動組合而成。在發現三(4)中提到無論同時向左、右滾動幾次，必須介於一次向上、下倒、立之間；同理同時向上、下滾動，必須介於一次向左、右倒、立之間。

如同之前，我們令 $m \times n$ 矩形 $(m \geq 4, n \geq 4)$ 以(1 , 1)為起點，終點座標(x , y)，假設終點方格與起點方格的座標差為(3A+C，3B+D)，其中 A、B∈ {0,1,2,3‥‥}，C、D∈ {0,1,2}。

發現五：當 A≥1，B≥1，移動方式組合有(P_x+S_x)、$(P_x+R_y+S_x)$、$(P_x+R_y+R_y+S_x)$、(P_y+S_y)、$(P_y+R_x+S_y)$、$(P_y+R_x+R_x+S_y)$，六種可能組合。其中$(P_x+R_y+S_x)$、$(P_x+R_y+R_y+S_x)$不會同時存在；$(P_y+R_x+S_y)$、$(P_y+R_x+R_x+S_y)$不會同時存在。

說明：六種組合是顯而易見的，而$(P_x+R_y+S_x)$、$(P_x+R_y+R_y+S_x)$不會同時存在；$(P_y+R_x+S_y)$、$(P_y+R_x+R_x+S_y)$不會同時存在，是因為最少步數時同方向不可滾三次，甚至也可說$(P_x+R_y+S_x)$、$(P_y+R_x+S_y)$最多只可能兩組同時存在。

發現六：發現五中的移動方式組合若存在，則移動組合交換先後順序並不影響最少步數。

說明：在移動路徑中，我們可將路徑分為 $P_x+CR_y+S_x$, $P_y+DR_x+S_y$ 兩種組合，$P_x+CR_y+S_x$的移動步數為 2+C，$P_y+DR_x+S_y$的移動步數為 2+D，若是單一的組合，則其總步數為 4+C+D，交換組合先後順序不會影響最少步數。同理，更多組合也是相同。

由發現五、發現六可知**路徑是可交換**的，因此最少步數路徑數量可計算如下：

定理六：$m \times n$ 矩形 $(m \geq 4, n \geq 4)$ 以(1 , 1)為起點，終點座標(x , y)，假設終點方格與起點方格的座標差為(3A+C，3B+D)，其中 A、B∈{0,1,2,3⋯⋯}，C、D∈{0,1,2}。

當 A≥1，B≥1 最少步數路徑數量：

(一) $\frac{(A+B)!}{(A-D)!\,(B-C)!}$ if C=0,1、D=0,1

(二) $\frac{(A+B)!}{A!(B-1)!}+\frac{(A+B)!}{A!(B-2)!2!}$ if C=2、D=0

(三) $\frac{(A+B)!}{(A-1)!B!}+\frac{(A+B)!}{(A-2)!B!2!}$ if C=0、D=2

(四) $\sum_{i=1}^{C}\sum_{j=1}^{D}\frac{(A+B)!}{(A-j)!(B-i)!i!j!}$ if C=1,2、D=1,2

註：若$A-j<0$或$B-i<0$ 則令 $\frac{(A+B)!}{(A-j)!(B-i)!i!j!}=0$

證明：由定理三得知最少移動步數為 2(A+B)+C+D，也就是路徑中有 A 個(P_x+S_x)、B 個(P_y+S_y)、C 個R_x、D 個R_y

(一)當 C=0、D=0 則路徑由 A 個(P_x+S_x)及 B 個(P_y+S_y)組合，由發現六知道這 A+B 個組合可交換先後順序，因此最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{A!\,B!}$$

當 C=1、D=0 則路徑由 A 個(P_x+S_x)、1 個$(P_y+R_x+S_y)$、B−1個(P_y+S_y)組合，這 A+B 個組合可交換先後順序，因此最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{A!\ (B-1)!}$$

當 C=0、D=1，同理最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{(A-1)!\ B!}$$

同理，當 C=0,1、D=0,1，最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{(A-D)!\ (B-C)!}$$

(二)當 C=2、D=0，則路徑中有 A 個(P_x+S_x)、B 個(P_y+S_y)、2 個R_x，路徑組合有 A 個(P_x+S_x)、1 個($P_y+R_x+R_x+S_y$)、B−1個(P_y+S_y)或 A 個(P_x+S_x)、2 個($P_y+R_x+S_y$)、B−2個(P_y+S_y)，因此最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{A!\,(B-1)!}+\frac{(A+B)!}{A!\,(B-2)!\,2!}$$

(三)當 C=0、D=2，同理，最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{(A-1)!\,B!}+\frac{(A+B)!}{(A-2)!\,B!\,2!}$$

(四)當 C=2、D=1，則路徑中有 A 個(P_x+S_x)、B 個(P_y+S_y)、2 個R_x、1 個R_y，路徑組合有 1 個($P_x+R_y+S_x$)、A−1個(P_x+S_x)、1 個($P_y+R_x+R_x+S_y$)、B−1個(P_y+S_y)或 1 個($P_x+R_y+S_x$)、A−1個(P_x+S_x)、2 個($P_y+R_x+S_y$)、B−2個(P_y+S_y)，因此最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{(A-1)!\,(B-1)!}+\frac{(A+B)!}{(A-1)!\,(B-2)!\,2!}$$

當 C=1、D=2，同理，最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{(A-1)!\,(B-1)!}+\frac{(A+B)!}{(A-2)!\,(B-1)!\,2!}$$

當 C=2、D=2，則路徑中有 A 個(P_x+S_x)、B 個(P_y+S_y)、2 個R_x、2 個R_y，路徑組合有

($P_x+R_y+R_y+S_x$)+(A−1)(P_x+S_x)+($P_y+R_x+R_x+S_y$)+(B−1)(P_y+S_y) 或

($P_x+R_y+R_y+S_x$)+(A−1) (P_x+S_x)+2($P_y+R_x+S_y$)+(B−2)(P_y+S_y) 或

2($P_x+R_y+S_x$)+(A−2)(P_x+S_x)+($P_y+R_x+R_x+S_y$)+(B−1)(P_y+S_y) 或

2($P_x+R_y+S_x$)+(A−2)(P_x+S_x)+2($P_y+R_x+S_y$)+(B−2)(P_y+S_y)，

因此最少步數路徑數量為

$$\frac{(A+B)!}{(A-1)!\,(B-1)!}+\frac{(A+B)!}{(A-1)!\,(B-2)!\,2!}+\frac{(A+B)!}{(A-2)!\,(B-1)!\,2!}+\frac{(A+B)!}{(A-2)!\,(B-2)!\,2!\,2!}$$

因此我們可以將(四)合併為，當 C=1,2、D=1,2，最少步數路徑數量為

$$\sum_{i=1}^{C}\sum_{j=1}^{D}\frac{(A+B)!}{(A-j)!\,(B-i)!\,i!\,j!}$$

定理七：$m\times n$ 矩形 $(m\geq 4, n\geq 4)$ 以(1 , 1)為起點，終點座標(x , y)，假設終點方格與起點方格的座標差為(3A+C，3B+D)，其中 A、B∈ {0,1,2,3⋯⋯}，C、D∈ {0,1,2}。當 A=0 或 B=0 最少步數路徑數量：

(一) $\frac{(A+1)!}{(A-1)!2}$ if B=0，C=1,2，D=2

(二) $\frac{(A+1)!}{(A-D)!}$ If B=0，C=1,2，D=0,1

證明：(一) 當 B=0，C=1,2，D=2，則路徑中有 1 個($P_y + C R_x + S_y$)、1 個($P_x + R_y^- + S_x$)、A-1 個($P_x + S_x$)總共 A+1 個組合，且($P_y + C R_x + S_y$)一定要在($P_x + R_y^- + S_x$)之前，不然移動過程中會超出棋盤，因此最少步數路徑數量為$\frac{(A+1)!}{(A-1)!2}$

A=0，C=2，D=1,2 同理最少步數路徑數量為$\frac{(B+1)!}{(B-1)!2}$

(二) 當 B=0，C=1,2，D=0，則路徑中有 1 個($P_y + C R_x + S_y^-$)、A 個($P_x + S_x$)，和到 B=1，C=1,2，D=0 的格子差別只在($P_y + C R_x + S_y^-$)改成($P_y + C R_x + S_y$)，且不會影響路徑的數量，因此最少步數路徑數量為$\frac{(A+1)!}{A!}$

A=0，C=0，D=1,2 同理最少步數路徑數量為$\frac{(B+1)!}{B!}$

當 B=0，C=1,2，D=1，則路徑中有 1 個($P_y + C R_x + S_y^-$)、1 個($P_x + R_y + S_x$)、A-1 個($P_x + S_x$)，和到 B=1，C=1,2，D=1 的格子差別只在($P_y + C R_x + S_y^-$)改成($P_y + C R_x + S_y$)，且不會影響路徑的數量，因此最少步數路徑數量為$\frac{(A+1)!}{(A-D)!}$

A=0，C=1，D=1,2 同理最少步數路徑數量為$\frac{(B+1)!}{(B-1)!}$

合併上面二個式子變成$\frac{(A+1)!}{(A-D)!}$或$\frac{(B+1)!}{(B-C)!}$

整理定理六及定理七的結果如下方表格 7:

表格 7

1	3	6	4	12	24	10	30	60	20
3	6	3	3	6	9	18	36	54	60
3	6	3	3	6	9	12	24	36	30
1	2	3	3	6	9	6	12	18	10
2	2	1	2	2	2	9	9	9	24
2	2	1	2	2	2	6	6	6	12
1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
1	1	4	1	1	1	3	3	3	6
1	2	1	1	2	2	2	6	6	3
H	1	1	1	2	2	1	3	3	1

四、不規則形狀之棋盤

在我們玩的滾積木遊戲中，很多關卡都不是完整的矩形，已無法用我們當初的最少步數公式，因此要找到最少步數必須要有策略。

我們先歸納**簡易的不規則形**：兩個矩形由一列數格方格連接。如下圖 6-1~6-8

。

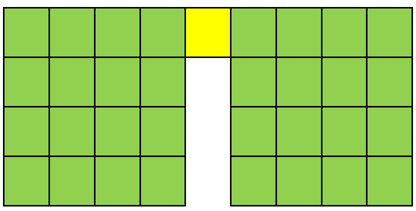


圖 6-1

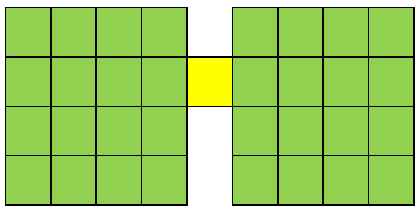


圖 6-2

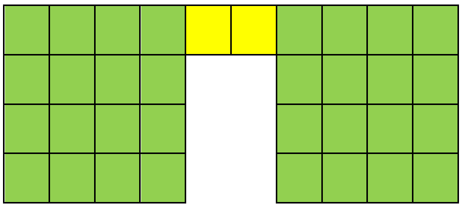


圖 6-3

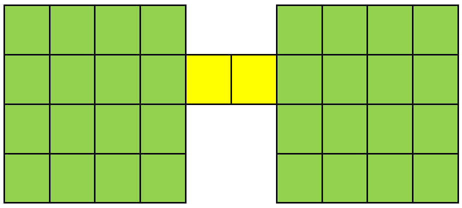


圖 6-4

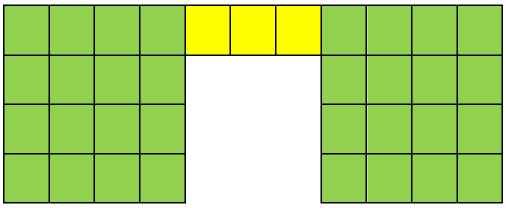


圖 6-5

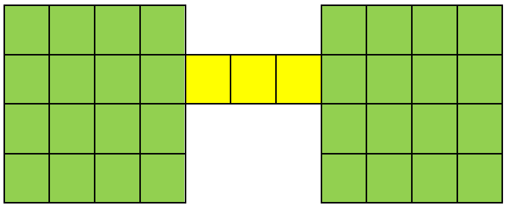


圖 6-6

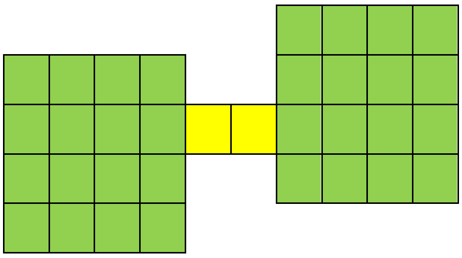


圖 6-7

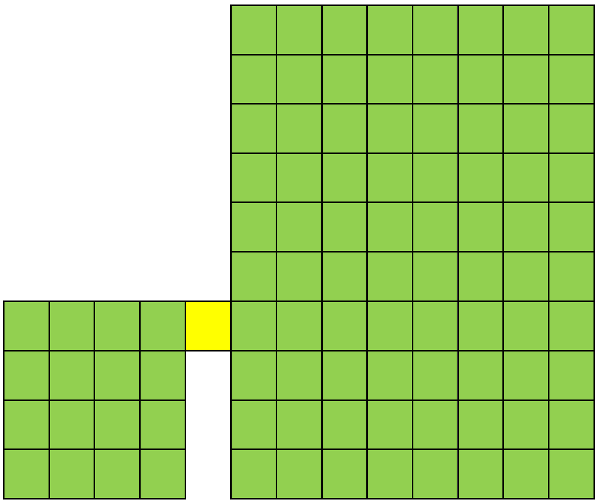


圖 6-8

再來由兩個矩形以多列橋梁連接，如下圖 7-1~7-6
:

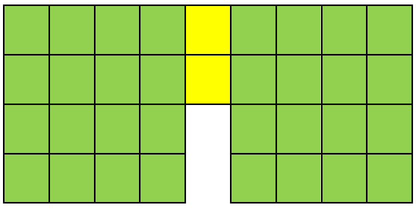


圖 7-1

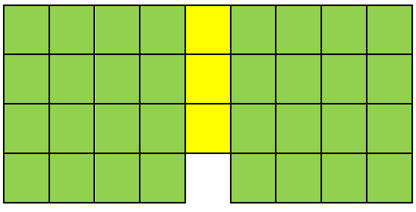


圖 7-2

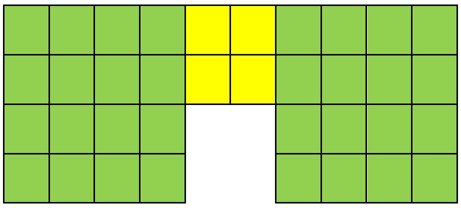


圖 7-3

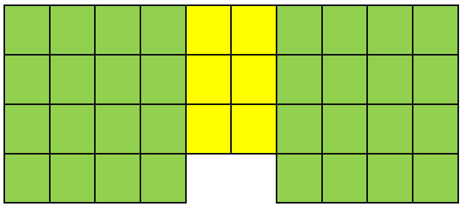


圖 7-4

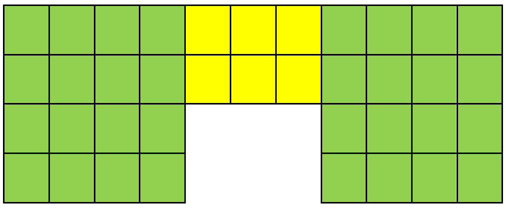


圖 7-5

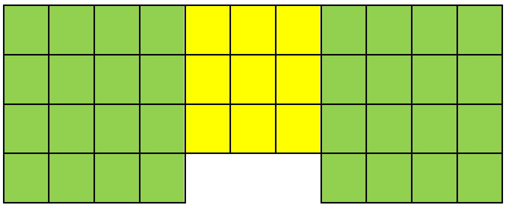


圖 7-6

我們發現，不規則棋盤的最少路經不能直接使用定理三，如下圖 8，使用定理三的最少步數路徑會超出棋盤(○處)，所以我們要探討不規則形的最少移動方式。

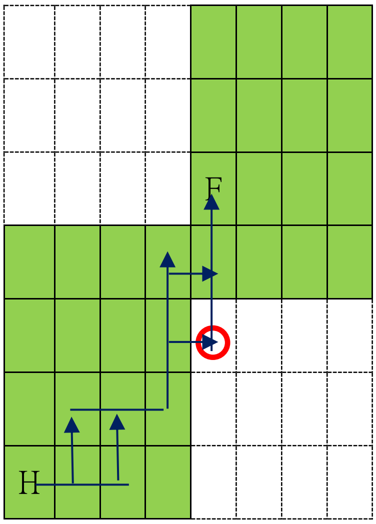


圖 8

在探討不規則形最少移動步數時，我們先定義不規則形專有名詞定義：

1. 橋：兩個矩形中的連接方格稱為橋。
2. 中繼點:在移動路經當中會被經過的點
3. 關鍵中繼點：起點移動到終點的路徑中，一定會經過的幾個中繼點，我們將它定義為關鍵點。

從以上不規則棋盤的圖形(圖 6、圖 7)，我們發現從左邊矩形到右邊矩形必須經過橋，也就是關鍵中繼點必在橋附近。

發現七：若 H 為起點，K 為中繼點，F 為終點，若 $H\rightarrow K$ 成立、$K\rightarrow F$ 成立，則

$$H\xrightarrow{\min}K+K\xrightarrow{\min}F\geq H\xrightarrow{\min}F$$

說明：當 K 點不在 $H\xrightarrow{\min}F$ 的任何一條最短路徑上，$H\xrightarrow{\min}K+K\xrightarrow{\min}F$ 會大於 $H\xrightarrow{\min}F$，像是三角形兩邊和大於第三邊一樣。另外，若 $H\xrightarrow{\min}K+K\xrightarrow{\min}F=H\xrightarrow{\min}F$ 則 K 點在 $H\xrightarrow{\min}F$ 的其中一條最短路徑上。

我們將 H 定義為起點，K 為中繼點，F 為終點

簡易的不規則形的橋若為一列，如下圖 9-1~9-3:

橋為一格者，關鍵中繼點三點可為

圖 9-1

註：黃色為橋

橋為二格者，關鍵中繼點三點可為

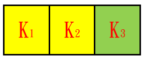


圖 9-2

橋為三格者，關鍵中繼點三點可為

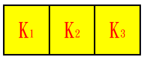


圖 9-3

下圖 9-4 K_2點當關鍵點或是 A、D 點當關鍵點是一樣的，因為從起點經過 K_2點要到終點前，必會先立在 A 點，經過 K_2後，必會立在 D 點。

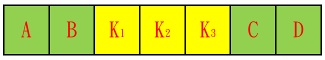
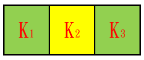


圖 9-4

因為**倒加立移動了 3 格**，所以當橋只



有一橫列的時候，不管橋多長，我們都只須討論 3 個關鍵中繼點。如下圖 10 所示，顏色相同的方格設為中繼點時，移動步數會相同。

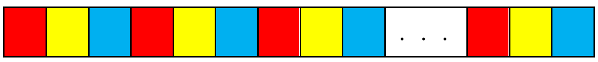


圖 10

同樣的，因為倒加立移動了 3 格，所以當橋只有一直行的時候，不管橋多寬，我們都只須討論 3 個關鍵中繼點。

發現八: 當橋為 $m \times n$ 矩形，當 $n<3$ 時，需要設 $3n$ 個關鍵點，當 $n \geq 3$ 時，只需要設立 9 個關鍵點。

說明：同樣的，因為倒加立移動三格，因此當橋為 $m \times n$ 矩形如下圖 11，相同顏色的區塊設為中繼點時其步數會相同，所以無論橋多大，關鍵點最多只需要設立 9 個。

7	8	9	7	8	9
4	5	6	4	5	6
1	2	3	1	2	3
7	8	9	7	8	9
4	5	6	4	5	6
1	2	3	1	2	3

圖 11

當我們確定了關鍵鍵中繼點，我們即可以來求最少步數了。為了表示方便，令 T_{K_i} 為起點經過中繼點 K_i 到終點的的最少步數。若橋只有一座時：

定理八：令 $T_{Ki} = H \xrightarrow{\min} K_i + K_i \xrightarrow{\min} F$

則不規則棋盤最少步數 ： $T_{\min} = \min(T_{K_1}, T_{K_2}, T_{K_3}, \ldots, T_{K_i})$ 其中 $1 \leq i \leq 9$

當不規則棋盤只有一座橋，只有九個關鍵中繼點需考慮，再分別用定理八的公式進行比較最少步數

例如在下圖 12 中我們可設立了 9 個中繼點($K_1 \sim K_9$)。

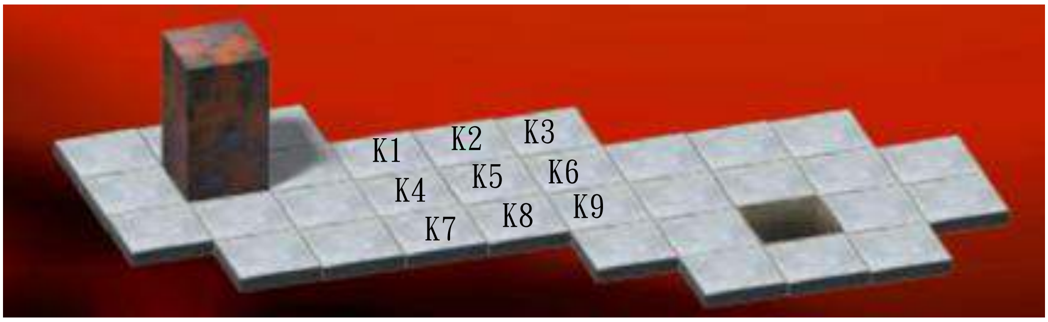


圖 12

我們使用定理八用 $T_{K_i} = H \xrightarrow{\min} K_i + K_i \xrightarrow{\min} F$ 表示不規則形棋盤的最少步數。

以下是圖 12 由起點經過各個中繼點到達終點的步數表示：

T_{K_1} =4+6=10　　T_{K_2} =2+5=7　　T_{K_3} =5+4=9

T_{K_4} =7+9=16　　T_{K_2} =3+4=7　　T_{K_5} =6+7=13

T_{K_7} =7+6=13　　T_{K_8} =4+3=7　　T_{K_9} =7+6=13

以上可知道，最少移動步數為 7，而必須經過的關鍵中繼點為T_{K_2}、T_{K5}、T_{K8}。

而當不規則棋盤的圖形更複雜，有多座橋，若第一座橋關鍵點有i_1個、第二座橋關鍵點有i_2個、……、第 j 座橋關鍵點有i_j個，那麼會有$i_1 \times i_2 \times \cdots \times i_j$種組合，這時我們需要利用電腦來幫我們計算$T_{K_i}$並進行比較。

最後我們整理出不規則棋盤移動最少步數策略：

1.將不規則棋盤切割成多個矩形及多座橋梁

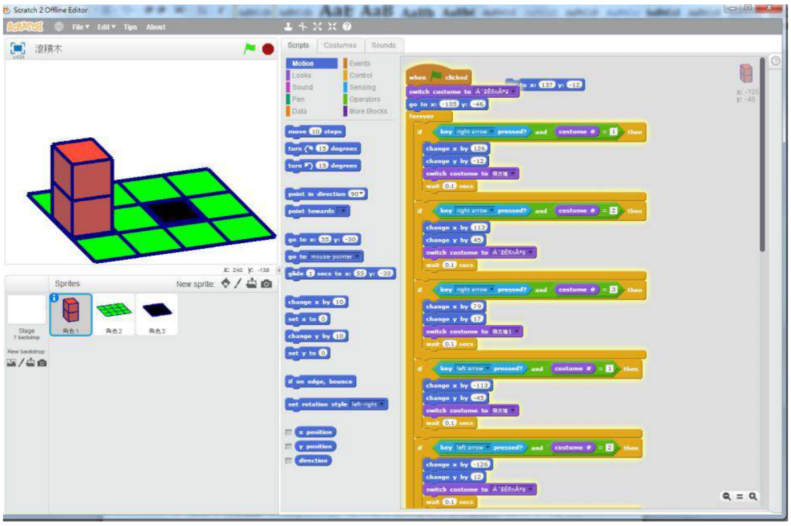
2.設立關鍵中繼點

3.計算起點到各個關鍵點的步數加上各個關鍵點到終點的步數

4.比較出步數的最小值，即為所求

五、利用電腦軟體 Scratch 製作滾積木遊戲

由定理三最少步數的的公式，定理五最少移動步數無論起點在何處，起點座標與終點座標差相同時，最小移動步數也相同(除了四點座標外)及形狀不規則之棋盤最少移動步數策略，我們利用電腦軟體 Scratch 製作出滾積木遊戲，將資訊與數學結合。



肆、結論

一、4×3 矩形為每一方格皆有解的最小矩形。

二、任意 $m \times n$ 矩形，若 $m \times n$ 大於 4×3 則必定每個方格皆有解。

三、 最少步數移動策略

(一) 無論向左右滾動滾動幾次必須介於一次的向上、下倒、立之間。同理，向上、下滾動滾動必須介於一次的左右倒、立之間。

(二) 任意 $m \times n$ 矩形有解的方格中，若移動步數為最少步數，則不會有同方向滾動三次。

四、**最少步數**：$m \times n$ 矩形 $(m \geq 4, n \geq 4)$

(一)以**(1 , 1)為起點**，終點座標(x , y)，若終點方格與起點方格的座標差為(3A+C，3B+D)，其中 A、B∈ {0,1,2,3⋯⋯}，C、D∈ {0,1,2}，則最少步數為：

(1) 2(A+B)+C+D　　if　A≥1，B≥1

(2) 2(A+B)+C+D　　if　A=0，B≥1，D=0 或 B=0，A≥1，C=0

(3) 2(A+B)+C+D+1　　if　A=0，B≥1，C=2，D=1,2 或 B=0，A≥1，D=2，C=1,2

(4) 2(A+B)+C+D+2 if A=0，B≥1，C=0,1，D=1,2 或

B=0，A≥1，D=0,1，C=1,2

(5) 2(A+B)+C+D+2 if A=0，B=0 且 C=0，D=1,2 或 D=0，C=1,2

(6) 其他特殊座標$(1,1)\xrightarrow{\min}(2,2)=6$、$(1,1)\xrightarrow{\min}(2,3)=6$、$(1,1)\xrightarrow{\min}(3,2)=6$、

$(1,1)\xrightarrow{\min}(3,3)=7$

(二)以任意(a , b)當起點：若$(a_1, b_1)\to(x_1, y_1)$的座標差與$(a_2, b_2)\to(x_2, y_2)$的座標差相同，則$(a_1, b_1)\xrightarrow{\min}(x_1, y_1)=(a_2, b_2)\xrightarrow{\min}(x_2, y_2)$，除了底下四種狀況：$(1,1)\to(3,3)$、$(m,1)\to(m-2,3)$、$(1,n)\to(3,n-2)$、$(m,n)\to(m-2,n-2)$

五、**移動最少步數路徑數量**

$m\times n$ 矩形 $(m\geq 4, n\geq 4)$ 以(1 , 1)為起點，終點座標(x , y)，假設終點方格與起點方格的座標差為(3A+C，3B+D)，其中 A、B∈{0,1,2,3⋯⋯}，C、D∈{0,1,2}。當 A≥1，B≥1 最少步數路徑數量：

(一) $\frac{(A+B)!}{(A-D)!\,(B-C)!}$ if C=0,1、D=0,1

(二) $\frac{(A+B)!}{(A-1)!B!}+\frac{(A+B)!}{(A-2)!B!2!}$ if C=2、D=0

(三) $\frac{(A+B)!}{A!(B-1)!}+\frac{(A+B)!}{A!(B-2)!2!}$ if C=0、D=2

(四) $\sum_{i=1}^{C}\sum_{j=1}^{D}\frac{(A+B)!}{(A-j)!(B-i)!i!j!}$ if C=1,2、D=1,2

註：若$A-i<0$或$B-j<0$ 則令 $\frac{(A+B)!}{(A-j)!(B-i)!i!j!}=0$

$m\times n$ 矩形 $(m\geq 4, n\geq 4)$ 以(1 , 1)為起點，終點座標(x , y)，假設終點方格與起點方格的座標差為(3A+C，3B+D)，其中 A、B∈{0,1,2,3⋯⋯}，C、D∈{0,1,2}。當 A=0 或 B=0 最少步數路徑數量：

(一) $\frac{(A+1)!}{(A-1)!2!}$ if B=0，C=1,2，D=2

(二) $\frac{(A+1)!}{(A-D)!}$ If B=0，C=1,2，D=0,1

六、形狀不規則之棋盤過關策略

1.將不規則棋盤切割成多個矩形及多座橋梁

2.設立關鍵中繼點

3.計算起點到各個關鍵點的步數加上各個關鍵點到終點的步數

4.比較出步數的最小值，即為所求

當橋=m*n(其中 m 是長，n 是寬)，當 n<3 時，需要設 3n 個關鍵點，當 n≥3 時，需要設立 9 個關鍵點。

T_{Kn} 為起點經過中繼點 K_n 到終點的步數

令 $T_{Ki} = H \xrightarrow{min} K_i + K_i \xrightarrow{min} F$

不規則棋盤最少步數 ： $T_{min} = \min(T_{K_1}, T_{K_2}, T_{K_3}, ..., T_{K_i})$

其中 $1 \le i \le 9$

伍、未來展望

我們目前研究出矩形棋盤中最少步數的公式、路徑數量的計算方式，以及不規則棋盤的過關策略。但當不規則的棋盤圖形複雜時，需要利用電腦程式語言來協助計算。未來，我們想利用 Python 程式語言結合我們的研究結果，更有效率的找出不規則棋盤的最少步數解。

此外，我們將在未來改變長方體積木形狀，或 $1\times1\times n$，或 $1\times2\times n$ 也或 $k\times m\times n$，看是否也有最少移動步數的策略。

陸 、參考資料

1.棋盤上的數學 P.29~P.35 作者：單墫 九章出版社

2.高中數學 第二冊 2-2 排列與組合 P.78~P.102 南一書局

【評語】030422

考慮在棋盤上依據倒下、滾動、站立三個簡單的規則移動，最後能否移到終點的一個有趣的小的遊戲。針對的格點圖的最少移動步數，和在移動數最少的的情況下，可能的不同移動方式的個數作了完整的討論。針對不規則圖形的最少移動步數，也給出了一些化簡的規則。作者針對解的最小值以及達到最小值的解的分析論述的非常詳盡，頗為難得。對於更一般化的狀況（如：積木的長、寬、高不限於的情形），應該有類似的結果。如果能針對一般化的情形給出完整的答案，應該會更為有趣。另一方面，針對非格點圖的分析部分稍嫌少了些。是否能給出更多化簡的想法？如果能有一些更好的化約方式，會是很棒的結果。