中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030421

打電話--尋找最佳解

學校名稱：嘉義縣立朴子國民中學

作者：	指導老師：
國二 李泯蓁	蔡孟哲
國二 蔡佳紜	黃韵婷
國二 蔡譯嫻	

關鍵詞：指數、連線、2的次方

摘要

有 55 位同學，每人各得知一則與他人相異訊息。假設通話時，雙方皆能在同一分鐘內把自己所擁有的訊息傳達給對方，並得知對方所擁有的訊息，同一分鐘內，不限定通話的組數，但需兩兩通話，且通話的人不能重複，則至少需要幾分鐘才能使每個人都知道全部的訊息?

我們想要知道上述問題的答案，並推廣問題，所以將 55 人改成 n 個人，看能否說明如何配對可以得到最少的分鐘數。

壹、研究動機

『假設有 55 位同學，每人各得知一則與他人相異訊息。他們用通電話的方式兩兩互相告訴對方自己所得知的全部訊息。若每次通話皆使用 1 分鐘，則至少需要_____分鐘才能使每個人都知道全部的訊息。』上課時，老師告訴全班，有興趣想做數學科展的人，可以去找他討論。這個題目便是在那之後，我們去找老師，老師問我們有沒有興趣做的題目，若是有興趣我們三個可以一起想出答案。

乍看之下，敘述很簡單的題目在我們花費了一番心力後，還是沒有任何頭緒。我們去找老師討論，他說:『你們可以先把題目簡單化，例如只有 4 個人的時候是幾分鐘?』，我們了解後就開始想，4 個人很簡單，一下子就做出來了，之後再去找老師，老師就問了幾個問題：①你們怎麼知道找出來的答案就是最少的分鐘數呢?有辦法說明嗎?②如果把 4 個人改回 55 人或隨意改成 53、109 人答案又是什麼呢?他說『如果你們算出來了，我會再把人數隨便更改，看你們能不能找出一個較快又較好的算法來算出答案。要不要挑戰看看? 』

後來老師告訴我們這個問題是『2014 青少年數學國際城市邀請賽--參賽代表遴選複賽試題--填充第 4 題』。老師說:『我一開始純粹是要考考你們，也不知道你們能不能做出來』。事後才知道原來老師是覺得這個問題很有趣，所以才告訴我們，也才有先前對我們提出一連串的疑問，測試我們能否回答他所提出的問題。如果我們回答出來，那我們就參加科展比賽，將我們的成果告訴其他的數學愛好者，我們思考後決定試試看，想辦法在這之中做出一些結果。

貳、研究目的

想知道此問題(有 n 位同學每人各得知一則與他人相異的訊息。他們用通電話的方式兩兩互相告訴對方自己所得知的全部訊息。若每次通話皆使用 1 分鐘，則至少需要分鐘才能使每個人都知道全部的訊息?)**有沒有一般解及較適當的通話方法** ?

參、研究設備及器材

紙、筆、橡皮擦、立可帶。

肆、研究過程或方法

一開始我們先將最原始的 55 人的問題改成 n=4，也就是指『有 4 位同學每人各得知一則與他人相異的訊息。他們用通電話的方式兩兩互相告訴對方自己所得知的全部訊息。若每次通話皆使用 1 分鐘，則至少需要幾分鐘才能使每個人都知道全部的訊息？』這答案很簡單，只要兩分鐘就能打完。圖 1 中 a_1、a_2、a_3、a_4 分別代表擁有 1、2、3、4 號訊息的人;而雙箭頭符號 $\updownarrow$ 就表示 a_1 與 a_2 互相通話;符號 $\Rightarrow$ 代表進入下一步驟; $a_{1\sim2}$、$a_{3\sim4}$ 代表擁有 1~2 號訊息及 3~4 號訊息，但為了以後方便起見，若寫成 $a_{4\sim2}$ 代表擁有 4、1、2 號訊息，即從 4 號繞一圈再度數回到 2 號。由此圖可知只要兩分鐘所有人都會知道所有的訊息。可知所有人在每分鐘都有通話，且都跟擁有不同訊息的人通電話，沒有多餘的步驟，因此這是最少的分鐘數。

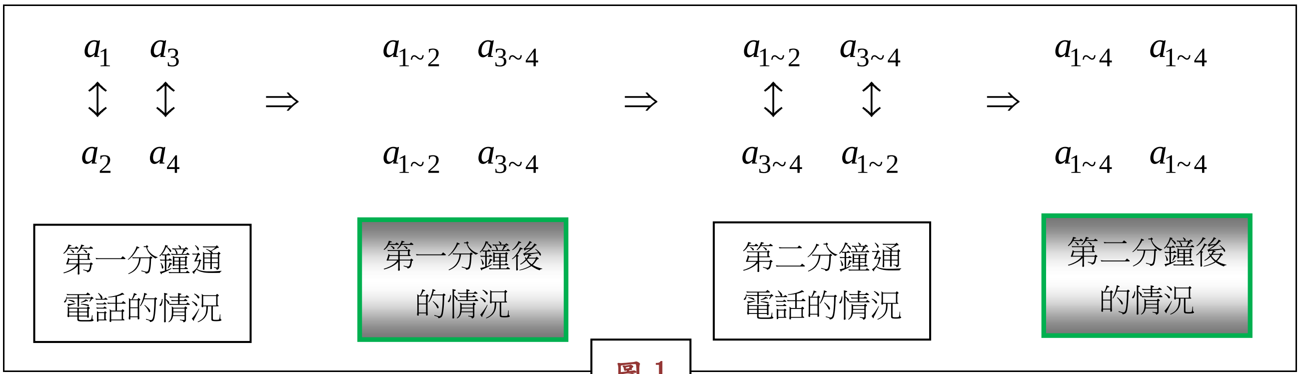
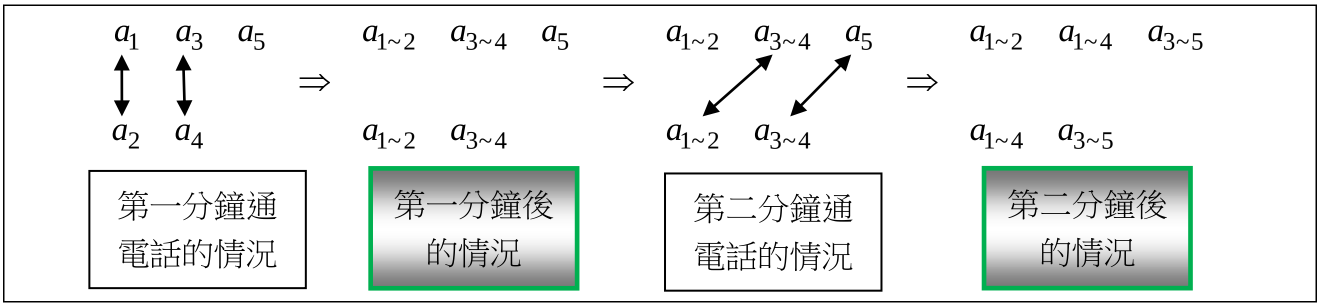


圖 1

接著我們研究 n=5 的情況，由圖 2 可知需要 4 分鐘。但有一個問題：『4 分鐘是 5 個人通電話的最少分鐘數嗎？』因為我們在這裡只提供一種 4 分鐘的連線(通話)方法，說不定有其他連線方法所需時間更少。所以我們針對這個問題嘗試了其他更多不同的連線方法，但無論如何總感覺答案最少都只需 4 分鐘。剛接觸題目的我們對於這點，還沒有辦法完整的說明原因，隱約感覺五個人不可能為 3 分鐘。



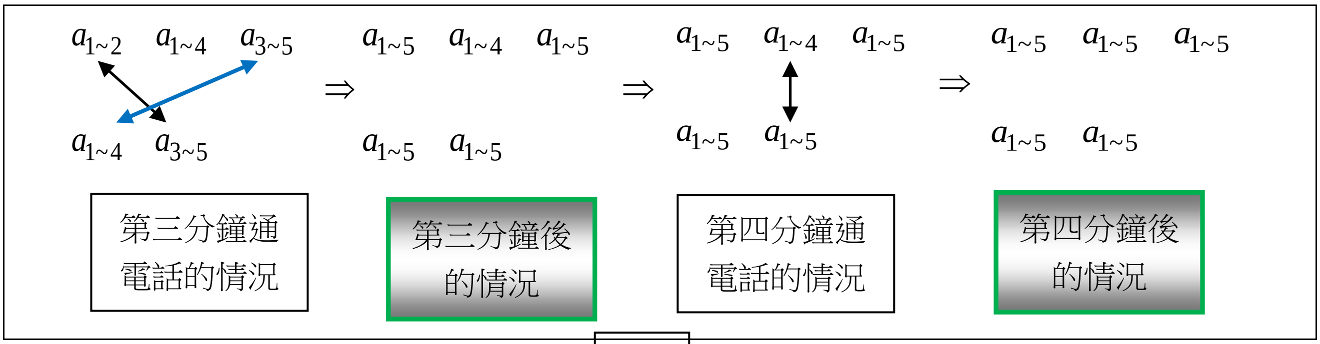


圖 2

接著我們研究 n=6，即 6 個人的情況。我們將連線方法列出，如圖 3，只需 3 分鐘，所以四個人需 2 分鐘、五個人需 4 分鐘、六個人需 3 分鐘。照理說人數越多，花費的時間應該越長，這直觀的猜測竟然不對。所以我們決定嘗試 n=7、8、9，看情況如何。

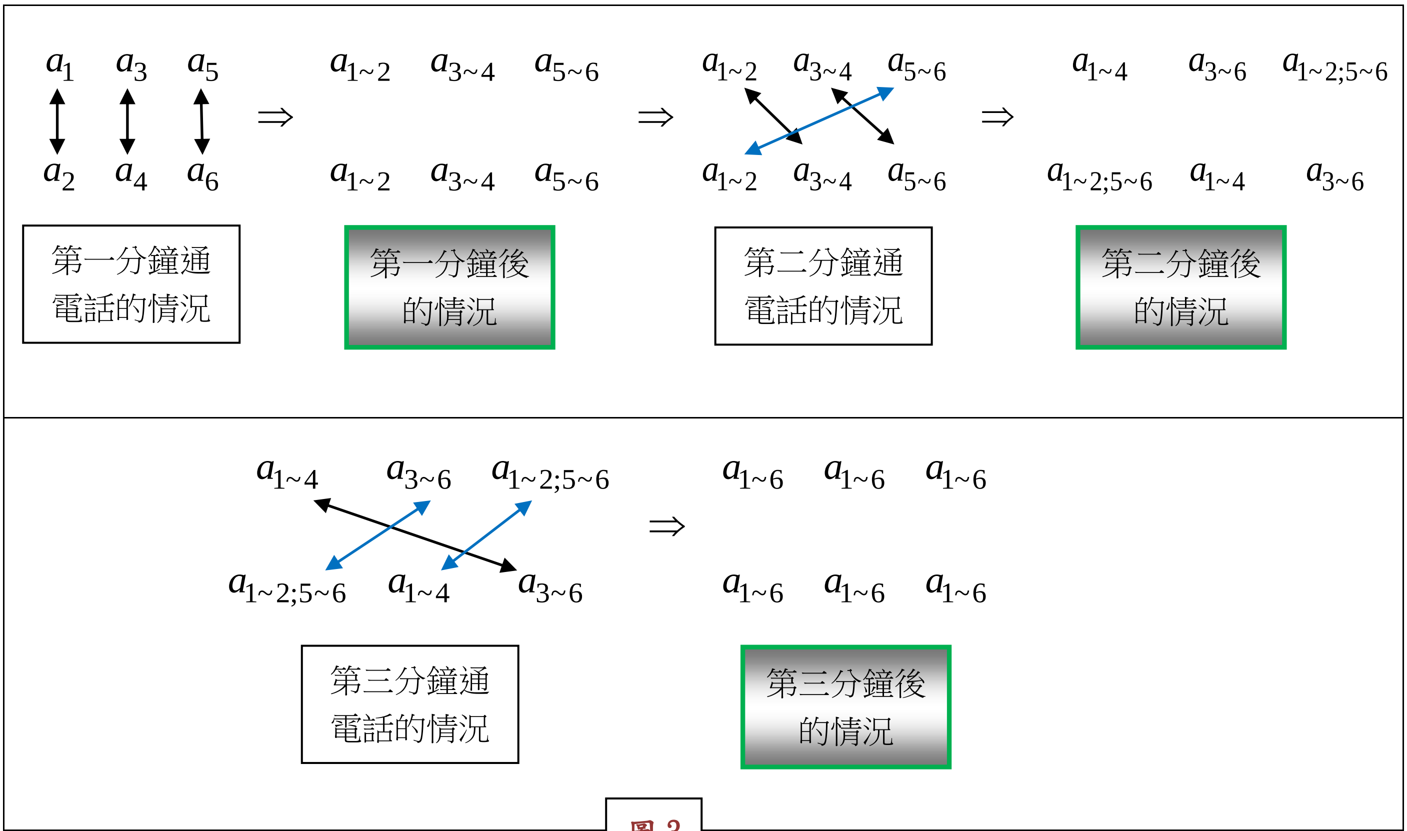
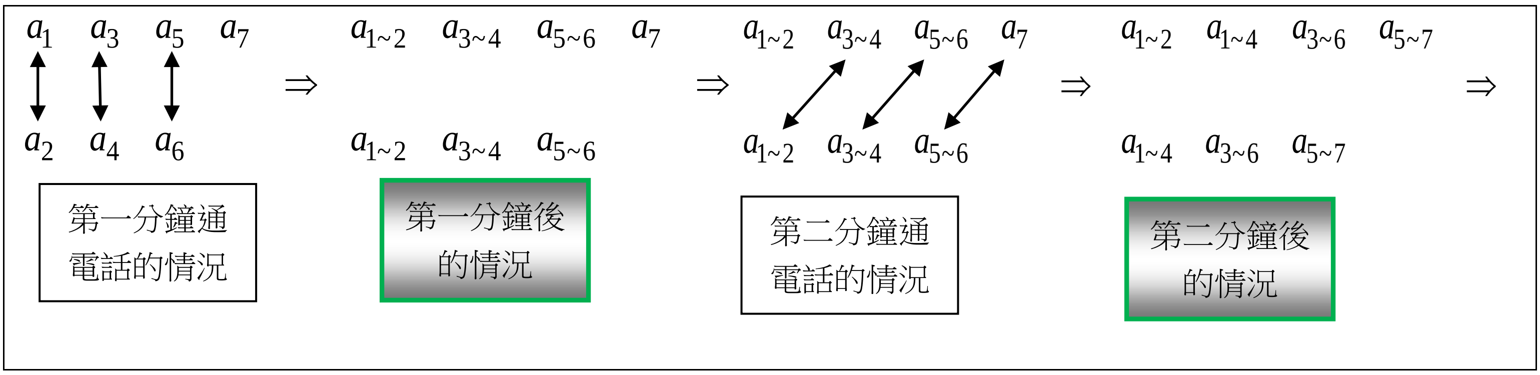


圖 3

圖 4為 n=7 的連線方法，如圖，只需 4 分鐘。



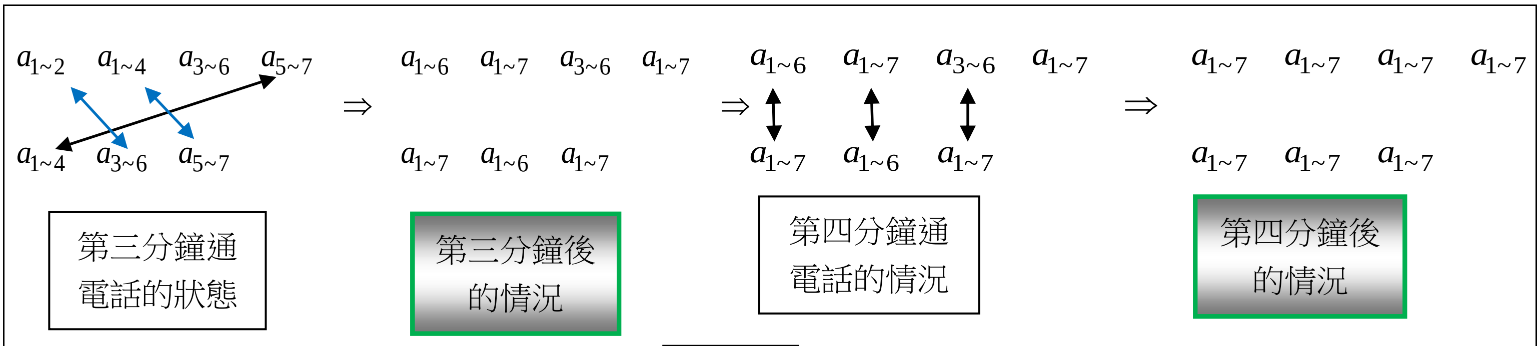


圖 4

圖 5 為 n=8 的連線方法，只需 3 分鐘。

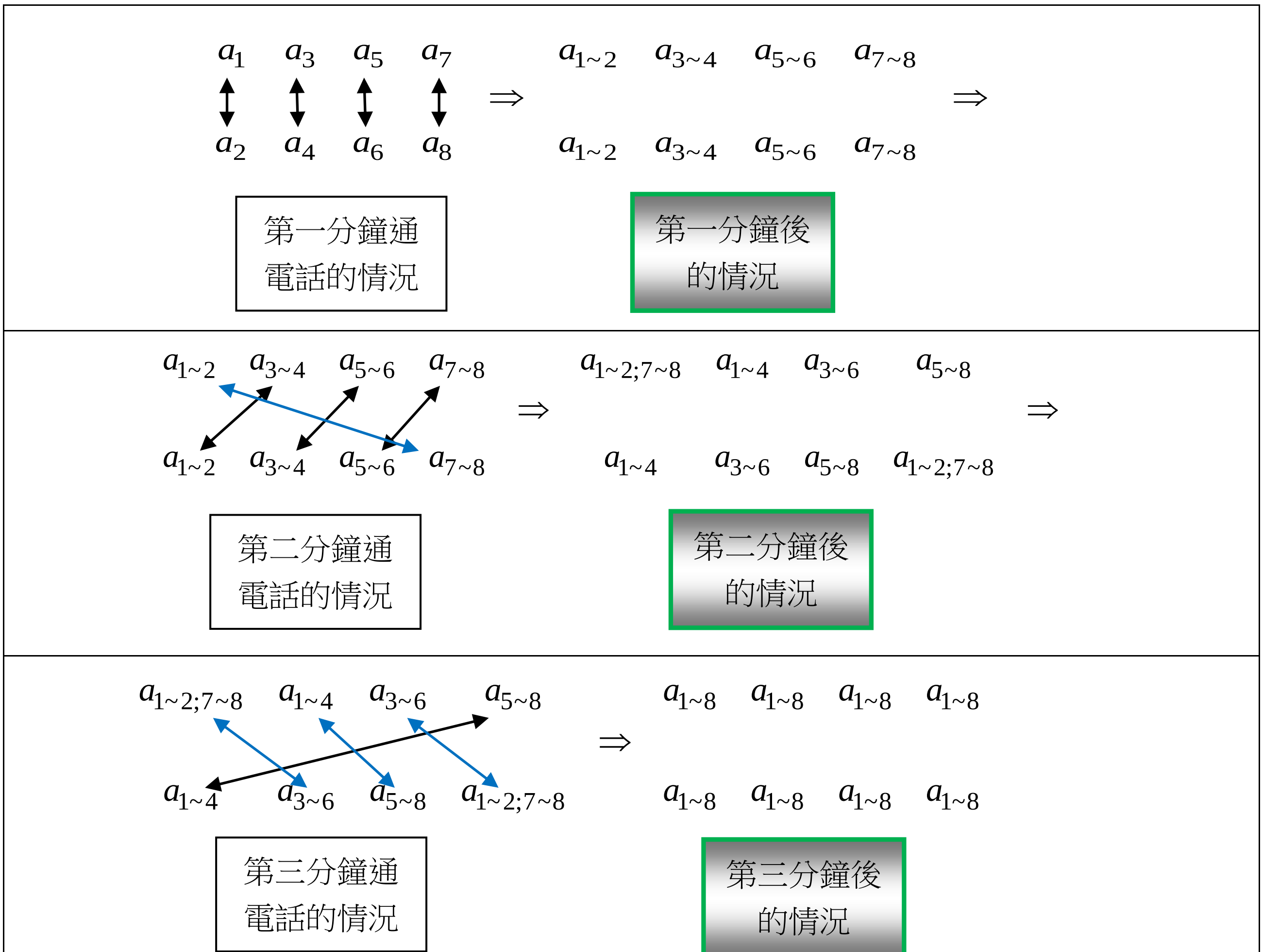


圖 5

圖 6 為 n=9 的連線方法，只需 5 分鐘。

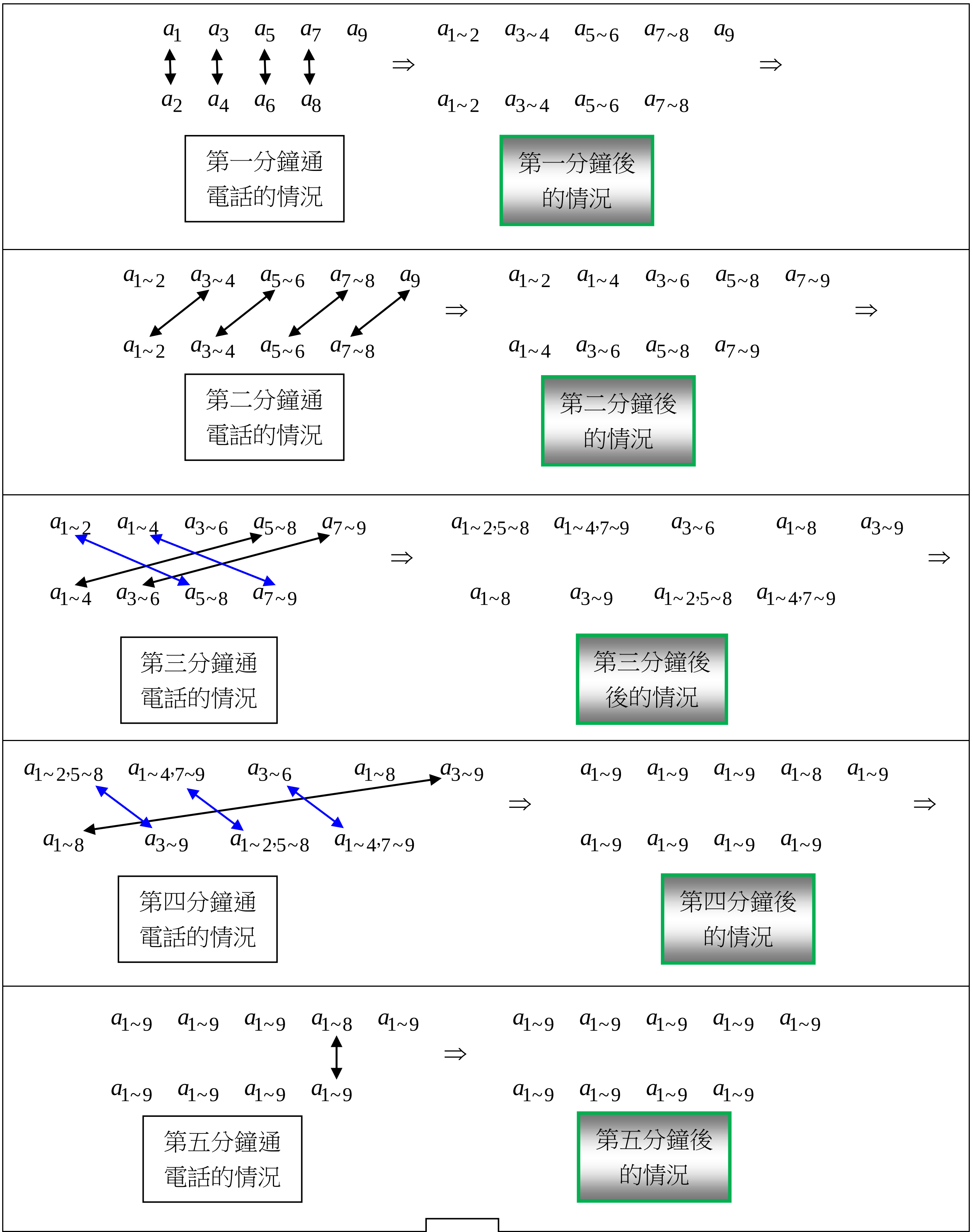


圖 6

因為實際將連線方法用電腦整齊的排列出來所佔的空間太多，所以我們在此只列出

n=4~9，實際畫在計算紙上，因為較不講求整齊，所以花的時間較少，不需多久就能畫到 n=20 了。但是當 n 越大，連線所耗費的精神就增加很多，而且連線方法有很多種，我們無法確定當下的連線方法為耗時最少的方法，首先我們想找出能流程化的方法。如果找到了，之後只要照著這套流程畫，就不必費太多精神去研究連線方法。若是不幸找不到，我們退而求其次，找出哪些準則能幫助我們判斷何謂好的連線方法。

首先我們考慮 n=5 的情況，發現若暫且將a_5擺在旁邊不與其他人連線，等其他人連完後再將a_5的訊息釋放出來與他人連線，這方法並非耗時最短的方法，請看下圖 7。可以發現在通完第 4 分鐘的電話後還有一個人未獲得所有訊息，所以依這方法 n=5 需花 5 分鐘。但對照前面的圖 2，連線只要 4 分鐘，可以知道將a_5暫且擺在旁邊，這方法不好。不好的原因歸納起來有兩點，第一點是a_5太慢與別人連線。至於第二點，請先看圖 7，第三分鐘打電話的狀態，只有兩個人互通電話，其餘人沒事，這也是造成分鐘數較高的原因之一。

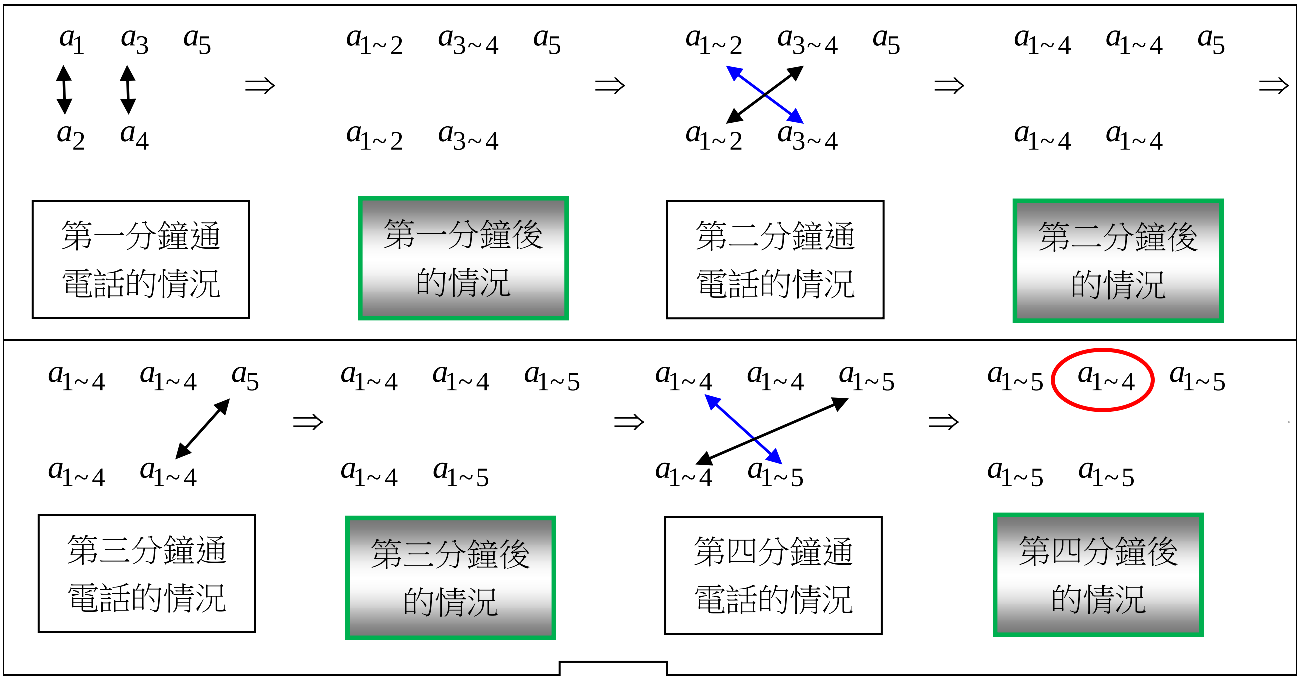


圖 7

因此我們歸納出以下準則：

①每個人須盡快將自己所知道的訊息傳出。

②每分鐘，越多人通話越好。

③在通電話時，通話的雙方，重複的訊息越少越好，即想辦法與擁有越多相異訊息的人通話。

我們實驗了很多組後，發現有一套流程可以遵循以及得知至少需耗時多久才能讓全部的人皆知道所有訊息。舉例來說 n=5 的情況，請看下圖 8。我們先將 5 個人中擁有奇數號訊息的人由左至右依序排在上方，偶數號訊息的人由左至右依序排在下方，但因為 n=5，所以上方一定比下方多一個人。第一分鐘時，上下互相連線，上方的最後一個數一定沒有人跟它連，連線符合準則的第 2 點及第 3 點。第二分鐘時，連右上方，在此我們要特別說明，我們這時需趕緊把訊息 5 傳遞出去，這符合準則的第 1 點，這時連線皆符合準則。第三分鐘時，再連線，但這時每個人知道的訊息量較多，所以互通電話的雙方皆會有重複的訊息，但秉持著準則，我們盡量嘗試連線。第三分鐘結束，只剩一個人不知道全部的訊息，因此四分鐘後，所有人知道所有的訊息。至於不可能為三分鐘的原因是，第二分鐘結束時，只有 2 個人知道 5 號訊息，再經過一分鐘(即第三分鐘結束)，最多 4 個人知道 5 號訊息，但全部 5 個人，所以一定有一個人不知道 5 號訊息，因此不可能三分鐘就結束連線。

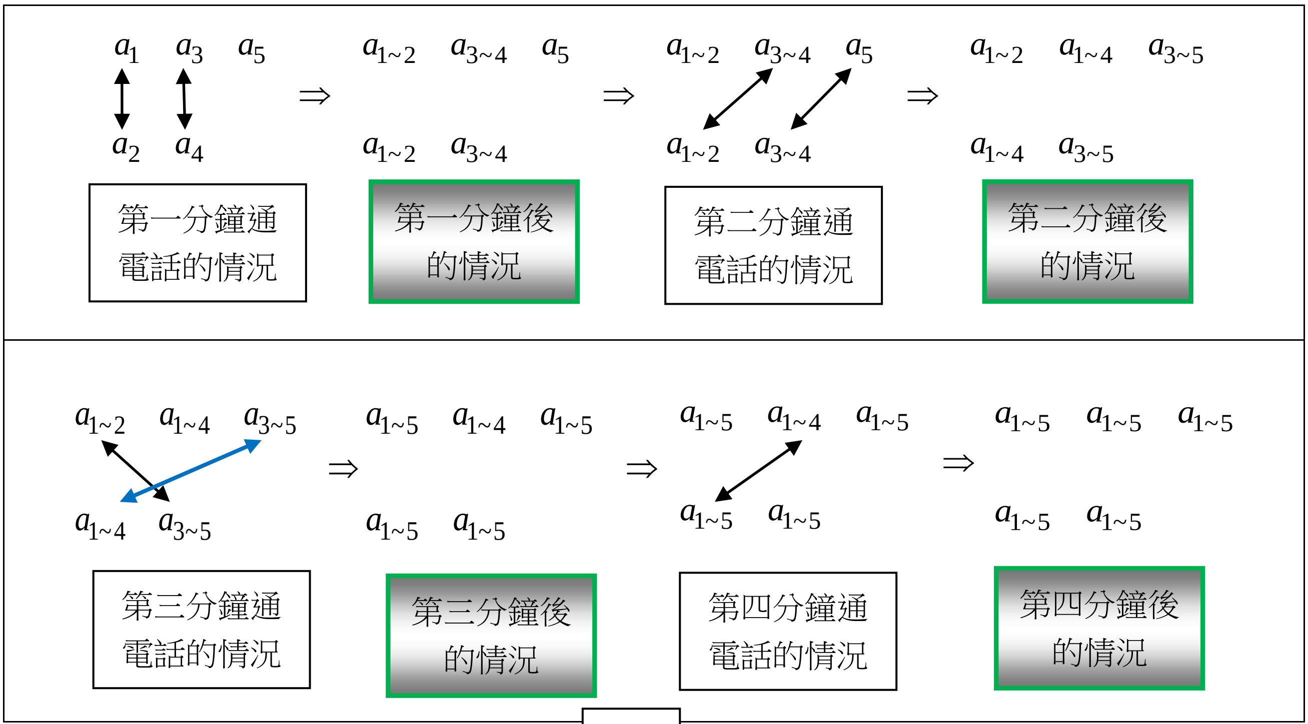


圖 8

至於 6 個人不可能為 2 分鐘的原因是，不管哪一號訊息，經過一分鐘最多 2 個人知道，再過一分鐘，最多 4 個人知道，但全部有 6 個人，所以並非所有人皆知道全部的訊息。依此類推，我們很容易知道為什麼 7 個人最少需要 4 分鐘，8 個人最少需要 3 分鐘，9 個人最少需要 5 分鐘了。

根據歸納出的準則，目前為止我們可以解釋，為什麼 5 個人最少需要 4 分鐘，6 個人最少

需要 3 分鐘，7 個人最少需要 4 分鐘，8 個人最少需要 3 分鐘，9 個人最少需要 5 分鐘的原因，因此我們可以給出以下的定理。

定理 1：設 n 為奇數，若 k 為滿足 $2^k < n$ 的最大的正整數，則通電話的最少分鐘數不可能小於 $k+2$。

證明：因為 n 為奇數，所以在第一分鐘通電話時，一定存在著一則沒有被傳遞出去的訊息，我們稱這則特殊的訊息為 x。第一分鐘後，只有原先的人知道 x；第二分鐘後，最多 2 人知道 x；第三分鐘後，最多 4 人知道 x；依此類推，第 $(k+1)$ 分鐘後，最多 2^k 個人知道 x，但 $2^k < n$，所以代表並非所有人都知道 x。因此我們可得知，第 $(k+1)$ 分鐘後，不是全部人皆知道所有訊息，因此通話的最少分鐘數不可能小於 $k+2$。

定理 2：設 n 為偶數且並非 2 的次方，若 k 為滿足 $2^k < n$ 的最大的正整數，則通電話的最少分鐘數不可能小於 $k+1$。

證明：任取一則訊息，在第一分鐘結束後，這個訊息最多 2 人知道；第二分鐘結束後，最多 4 人知道；在第三分鐘結束後，最多 8 人知道；依此類推，在第 k 分鐘結束後，最多 2^k 人知道，但是 $2^k < n$，這表示並非所有人都知道這則訊息，及不是所有人皆知道所有訊息，因此打電話的最少分鐘數不可能是 k 分鐘，最少分鐘數一定要比 k 分鐘還多。

為了更加確認我們觀察出的連線流程及準則，我們做了 n=3~40 的情況，其中發現了某些規律，並更加確認了我們的觀察，將觀察做成表格 1，請看下一頁。我們發現以下幾點：

I. **當人數為 2 的次方時，最短的時間就剛好是這個次方的指數。例如：$2 = 2^1$，需 1 分鐘。$4 = 2^2$，需 2 分鐘。$8 = 2^3$，需 3 分鐘。$16 = 2^4$，需 4 分鐘。$32 = 2^5$，需 5 分鐘。**

II. **可依人數分成若干個區間。n=2~3 一個區間，n=4~7 一個區間，n=8~15 一個區間，……，n= $2^k \sim 2^{k+1}-1$ 為另一個區間，依此類推。**

III. **在同一個區間中，當人數為奇數時，最少分鐘數比非 2 的次方的偶數多 1 分鐘。例如:7 個人為 4 分鐘，比 6 個人的 3 分鐘多 1 分鐘。15 個人比 14 個人的時間多 1 分鐘。**

IV. **在同一個區間中，當人數為奇數時，最少分鐘數比 2 的次方的偶數多 2 分鐘。例如:7 個人為 4 分鐘比 4 個人的 2 分鐘多 2 分鐘。15 個人比 8 個人的時間多 2 分鐘。**

V. **在同一個區間中，當人數是奇數時，不管是幾個人所需的最少分鐘數皆相同。在同一個區間中，當人數是非 2 的次方的偶數時，不管是幾個人所需的最少分鐘數也同樣相同。**

人數 n	最短時間	人數 n	最短時間	人數 n	最短時間	人數 n	最短時間
		11	5	21	6	31	6
2	1 +2	12	4	22	5	32	5 +2
3	3	13	5 −1	23	6 +1	33	7
4	2	14	4	24	5	34	6
5	4	15	5	25	6	35	7
6	3	16	4 +2	26	5	36	6
7	4	17	6	27	6 +1	37	7 −1
8	3 +2	18	5	28	5	38	6
9	5	19	6	29	6	39	7
10	4	20	5	30	5	40	6

表格 1

我們發現人數為 2 的次方時，通電話的結論非常有規律，都和 2 的次方有關。經過討論後，我們給出下面這個定理。

定理 3：當 $n = 2^k$，k 為正整數時，通電話的最少分鐘數為 k。

證明：2 個人很簡單就可想到只需 1 分鐘。現在說明 4 個人只需 2 分鐘的情況:我們先將 4 個人的訊息編號，再依號碼的大小分成兩組，每一組 2 個人，這兩組在第一分鐘後，達成每組中的所有人皆知道該組內的所有訊息，接下來再將相異兩組互相連線，因為兩組的人數相同，所以我們不須擔心有人沒辦法連線;第二分鐘後，全部人皆知道所有訊息。接下來 8 個人只需 3 分鐘的說明如下:我們先將 8 個人的訊息編號，再依號碼的大小分成兩組，每一組 4 個人，這兩組在第二分鐘後，達成每組中的所有人皆知道該組內的所有訊息，接下來再將相異兩組互相連線，因為兩組的人數相同，所以我們不須擔心有人沒辦法連線;第三分鐘後，全部人皆知道所有訊息。依此類推，我們可以得知當有 2^k 個人時，只需 k 分鐘。

經過我們的實驗後，我們發現了一套流程，我們將這套流程套用到 n=3~40 皆正確，所以我們猜測不管 n 為多少，只要依照這個流程，就能做出最少分鐘數。

流程：n 為偶數(即 $n=2m$，m 為正整數)。

我們先將 2m 個人中擁有奇數號訊息的人由左至右依序排在上方，偶數號訊息的人由左至右依序排在下方，因為 n 為偶數，所以上方和下方的人一樣多。

第一步:第一分鐘時，上下互相連線。

第二步:第二分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方的第 2 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第 2+1=3 個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第 2+2=4 個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第 2+t 個數，$0 \le t \le m-1$，t 為整數。因上方沒有第 2+(m-1)=m+1 個數，所以重頭回到第一個數繼續數即可。

第三步:第三分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方由左而右的第 $2^2=4$ 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第 $2^2+1=5$ 個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第 $2^2+2=6$ 個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第 2^2+t 個數，$0 \le t \le m-1$，t 為整數。

第四步:第四分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方由左而右的第 $2^3=8$ 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第 $2^3+1=9$ 個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第 $2^3+2=10$ 個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第 2^3+t 個數，$0 \le t \le m-1$，t 為整數。

⋮

第 S 步:第 s 分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方由左而右的第 2^{s-1} 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第($2^{s-1}+1$)個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第($2^{s-1}+2$)個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第($2^{s-1}+t$)個數，$0 \le t \le m-1$，t 為整數。

最後 1 步:將下方第 1 個數連到上方最後一個數，下方第 2 個數連到上方第一個數，依此類推。那如何判斷何時是最後 1 步呢?如果下方第 1 個數，在第一輪還連不到上方的第 2^s 個數，那麼此時就是最後一步。

依照這個方法做到全部人都知道所有訊息，那麼所花的分鐘數配合定理 2 後，可得知此分鐘數為最少分鐘數。

流程：n 為奇數(即 $n=2m+1$，m 為正整數)。

因為奇數連線比較複雜，所以流程上要比偶數再多 1 步。我們先將 $2m+1$ 個人中擁有奇數號訊息的人由左至右依序排在上方，偶數號訊息的人由左至右依序排在下方，因為 n 為奇數，所以上方比下方多一個人。

第一步:第一分鐘時，上下互相連線，先不理會擁有第 $2m+1$ 號訊息的人。

第二步:第二分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方的第 2 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第 2+1=3 個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第 2+2=4 個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第 2+t 個數，$0 \le t \le m-1$，t 為整數。當下方算到第 m 個數時，上方有第 m+1 個數，可以相連，不需重回到上方第一個數。

第三步:第三分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方由左而右的第 $2^2=4$ 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第 2^2+1=5 個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第 2^2+2=6 個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第 2^2+t 個數，$0 \le t \le m-1$，t 為整數。

第四步:第四分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方由左而右的第 $2^3=8$ 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第 2^3+1=9 個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第 2^3+2=10 個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第 2^3+t 個數，$0 \le t \le m-1$，t 為整數。

⋮

第 S 步:第 s 分鐘時，下方由左而右的第 1 個數，連至上方由左而右的第 2^{s-1} 個數。下方的第 1+1=2 個數，連至上方的第(2^{s-1}+1)個數。下方的第 1+2=3 個數，連至上方的第(2^{s-1}+2)個數，依此類推。因此下方的第 1+t 個數，連至上方的第(2^{s-1}+t)個數，$0 \le t \le m-1$，t 是整數，(若(s+1)步正好為倒數第二步，則例外)。

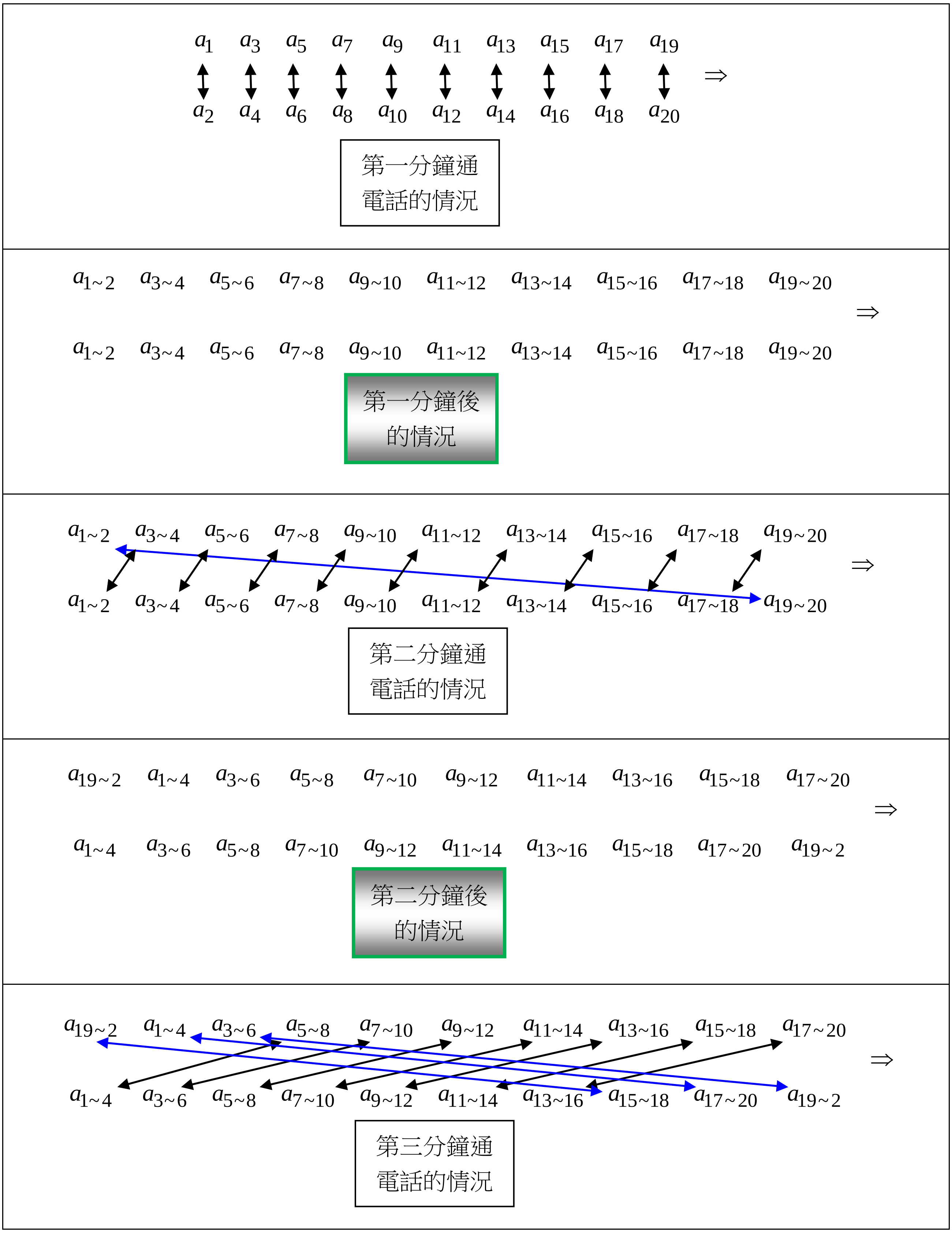
⋮

倒數第二步:如何判斷何時是倒數第二步呢?如果下方第 1 個數，在第一輪還連不到上方的第 2^s 個數，那麼此時就是倒數第二步。連法是將下方由左而右的第 1 個數，連到上方最後一個數，依此類推。

最後一步:上下互相連線。

依照這個方法做到全部人皆知道所有訊息，那麼所花的分鐘數配合定理 1，可以得到此分鐘數為最少分鐘數。

我們各舉一個奇數和偶數的例子。先舉偶數例子，當 n=20，為避免連線太複雜影響觀看，在第四和第五分鐘通電話時，若我們只連兩條線，黑色線代表連至斜右上方，從黑色雙箭頭的位置往後開始，而連至斜左上方的藍色線，從上方由左而右的藍色雙箭頭的位置往後開始。



$a_{15\sim2}$ $a_{17\sim4}$ $a_{19\sim6}$ $a_{1\sim8}$ $a_{3\sim10}$ $a_{5\sim12}$ $a_{7\sim14}$ $a_{9\sim16}$ $a_{11\sim18}$ $a_{13\sim20}$ $\Rightarrow$

$a_{1\sim8}$ $a_{3\sim10}$ $a_{5\sim12}$ $a_{7\sim14}$ $a_{9\sim16}$ $a_{11\sim18}$ $a_{13\sim20}$ $a_{15\sim2}$ $a_{17\sim4}$ $a_{19\sim6}$

第三分鐘後的情況

$a_{15\sim2}$ $a_{17\sim4}$ $a_{19\sim6}$ $a_{1\sim8}$ $a_{3\sim10}$ $a_{5\sim12}$ $a_{7\sim14}$ $a_{9\sim16}$ $a_{11\sim18}$ $a_{13\sim20}$ $\Rightarrow$

$a_{1\sim8}$ $a_{3\sim10}$ $a_{5\sim12}$ $a_{7\sim14}$ $a_{9\sim16}$ $a_{11\sim18}$ $a_{13\sim20}$ $a_{15\sim2}$ $a_{17\sim4}$ $a_{19\sim6}$

第四分鐘通電話的情況

$a_{7\sim2}$ $a_{9\sim4}$ $a_{11\sim6}$ $a_{13\sim8}$ $a_{15\sim10}$ $a_{17\sim12}$ $a_{19\sim14}$ $a_{1\sim16}$ $a_{3\sim18}$ $a_{5\sim20}$ $\Rightarrow$

$a_{1\sim16}$ $a_{3\sim18}$ $a_{5\sim20}$ $a_{7\sim2}$ $a_{9\sim4}$ $a_{11\sim6}$ $a_{13\sim8}$ $a_{15\sim10}$ $a_{17\sim12}$ $a_{19\sim14}$

第四分鐘後的情況

$a_{7\sim2}$ $a_{9\sim4}$ $a_{11\sim6}$ $a_{13\sim8}$ $a_{15\sim10}$ $a_{17\sim12}$ $a_{19\sim14}$ $a_{1\sim16}$ $a_{3\sim18}$ $a_{5\sim20}$ $\Rightarrow$

$a_{1\sim16}$ $a_{3\sim18}$ $a_{5\sim20}$ $a_{7\sim2}$ $a_{9\sim4}$ $a_{11\sim6}$ $a_{13\sim8}$ $a_{15\sim10}$ $a_{17\sim12}$ $a_{19\sim14}$

第五分鐘通電話的情況

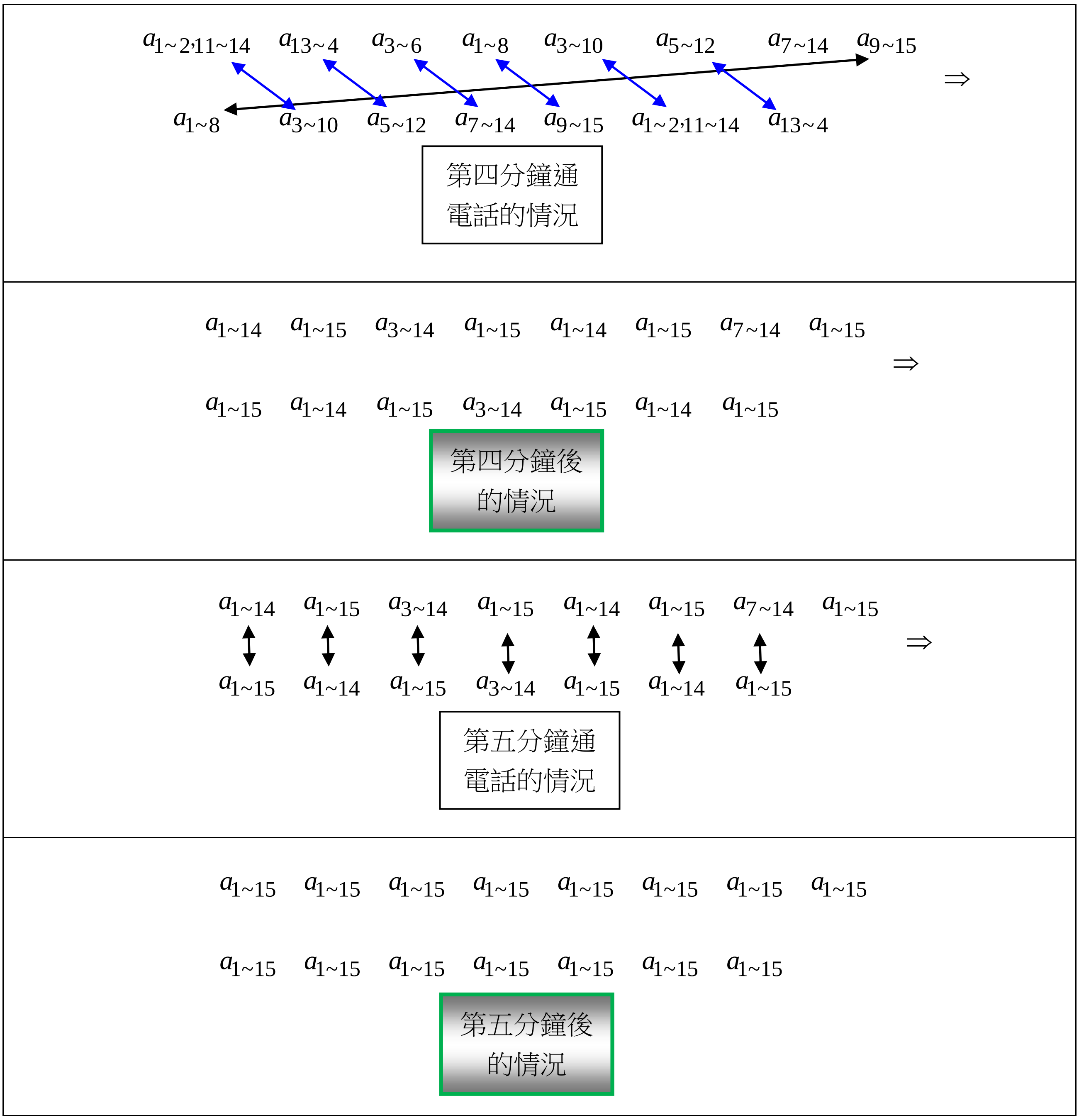
$a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$

$a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$ $a_{1\sim20}$

第五分鐘後的情況

舉奇數的例子，n=15。

a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 a_{11} a_{13} a_{15} $\Rightarrow$ a_2 a_4 a_6 a_8 a_{10} a_{12} a_{14} 第一分鐘通 電話的情況
$a_{1\sim2}$ $a_{3\sim4}$ $a_{5\sim6}$ $a_{7\sim8}$ $a_{9\sim10}$ $a_{11\sim12}$ $a_{13\sim14}$ a_{15} $\Rightarrow$ $a_{1\sim2}$ $a_{3\sim4}$ $a_{5\sim6}$ $a_{7\sim8}$ $a_{9\sim10}$ $a_{11\sim12}$ $a_{13\sim14}$ 第一分鐘後 的情況
$a_{1\sim2}$ $a_{3\sim4}$ $a_{5\sim6}$ $a_{7\sim8}$ $a_{9\sim10}$ $a_{11\sim12}$ $a_{13\sim14}$ a_{15} $\Rightarrow$ $a_{1\sim2}$ $a_{3\sim4}$ $a_{5\sim6}$ $a_{7\sim8}$ $a_{9\sim10}$ $a_{11\sim12}$ $a_{13\sim14}$ 第二分鐘通 電話的情況
$a_{1\sim2}$ $a_{1\sim4}$ $a_{3\sim6}$ $a_{5\sim8}$ $a_{7\sim10}$ $a_{9\sim12}$ $a_{11\sim14}$ $a_{13\sim15}$ $\Rightarrow$ $a_{1\sim4}$ $a_{3\sim6}$ $a_{5\sim8}$ $a_{7\sim10}$ $a_{9\sim12}$ $a_{11\sim14}$ $a_{13\sim15}$ 第二分鐘後 的情況
$a_{1\sim2}$ $a_{1\sim4}$ $a_{3\sim6}$ $a_{5\sim8}$ $a_{7\sim10}$ $a_{9\sim12}$ $a_{11\sim14}$ $a_{13\sim15}$ $\Rightarrow$ $a_{1\sim4}$ $a_{3\sim6}$ $a_{5\sim8}$ $a_{7\sim10}$ $a_{9\sim12}$ $a_{11\sim14}$ $a_{13\sim15}$ 第三分鐘通 電話的情況
$a_{1\sim2,11\sim14}$ $a_{13\sim4}$ $a_{3\sim6}$ $a_{1\sim8}$ $a_{3\sim10}$ $a_{5\sim12}$ $a_{7\sim14}$ $a_{9\sim15}$ $\Rightarrow$ $a_{1\sim8}$ $a_{3\sim10}$ $a_{5\sim12}$ $a_{7\sim14}$ $a_{9\sim15}$ $a_{1\sim2,11\sim14}$ $a_{13\sim4}$ 第三分鐘後 的情況



在縣市的科展比賽時，我們還沒想出流程的證明。經過了一個月的苦思後，我們能證明當人數為偶數時(即 $n=2m$ ，m 為正整數)，我們給的連線方法保證是最少分鐘數；人數為奇數時，連線沒有顯著規律，因此我們無法證明，但看出難以解釋的美妙規律，真的很神奇。

定理 4：如果 $n=2m$ ，n 不是 2 的次方且 $n>2^k$ ，其中 m 為正整數、k 為滿足 $n>2^k$ 的最大正整數，則通電話的最少分鐘數為 $k+1$ 。

證明：將 $2m$ 個人中擁有奇數號訊息的人由左至右依序排在上方，偶數號訊息的人由左至右依序排在下方，因為 n 為偶數，所以上方和下方的人一樣多。首先觀察特定的奇數號訊息連線方法，看第 $2j+1$ 號訊息(即 a_{2j+1})，其中 $0\le j\le m-1$，在第一分鐘時 a_{2j+1} 會與 a_{2j+2} 連線變成 $a_{2j+1\sim2j+2}$ ，觀察得知 a_{2j+1} 與 a_{2j+2} 各自擁有的訊息皆相異，

在第二分鐘時$a_{2j+1\sim 2j+2}$會與$a_{2j-1\sim 2j}$連線，變成$a_{2j-1\sim 2j+2}$，且觀察$a_{2j+1\sim 2j+2}$與$a_{2j-1\sim 2j}$各自擁有的訊息皆相異，且$a_{2j+1\sim 2j+2}$與$a_{2j-1\sim 2j}$擁有的訊息數為2^1。而第三分鐘$a_{2j-1\sim 2j+2}$會與$a_{2j-5\sim 2j-2}$連線，變成$a_{2j-5\sim 2j+2}$，且觀察$a_{2j-1\sim 2j+2}$與$a_{2j-5\sim 2j-2}$中，各自擁有的訊息皆相異且$a_{2j+1\sim 2j+2}$與$a_{2j-1\sim 2j}$擁有的訊息數為2^2，……，依此類推。我們利用等比級數公式能推導出第k分鐘後，原本的a_{2j+1}會變成$a_{2j+3-2^k\sim 2j+2}$，仔細去數$a_{2j+3-2^k\sim 2j+2}$中共包含2^k個數。

觀察特定的偶數號訊息，看第$2j+4$號訊息(即a_{2j+4})，我們用相同方法觀察偶數號訊息，第一分鐘時a_{2j+4}會與a_{2j+3}連線變成$a_{2j+3\sim 2j+4}$，觀察得知a_{2j+4}與a_{2j+3}各有不同訊息，第二分鐘時$a_{2j+3\sim 2j+4}$會與$a_{2j+5\sim 2j+6}$連線，變成$a_{2j+3\sim 2j+6}$，且觀察$a_{2j+3\sim 2j+4}$與$a_{2j+5\sim 2j+6}$各擁有不同訊息，且$a_{2j+3\sim 2j+4}$與$a_{2j+5\sim 2j+6}$擁有的訊息數各為2^1。而第三分鐘$a_{2j+3\sim 2j+6}$會與$a_{2j+7\sim 2j+10}$連線，變成$a_{2j+3\sim 2j+10}$，且觀察$a_{2j+3\sim 2j+6}$與$a_{2j+7\sim 2j+10}$中，各自擁有的訊息皆相異且各自擁有的訊息數為2^2，……，依此類推，由等比級數公式能導出第k分鐘後，原本的a_{2j+4}會變成$a_{(2j+3)\sim(2j+3)+(2^k-1)}$，仔細去數$a_{(2j+3)\sim(2j+3)+(2^k-1)}$中共包含$2^k$個數。

因為$2^k<n=2m<2^{k+1}$，所以$2^{k-1}<m<2^k$，再加上連線流程，可知第k分鐘為倒數第二步，因為連線方法的最後1步與其他步不相同，因此前兩段的討論皆不包含最後1步，現在我們來探討最後1步，最後1步是將第$2j+1$號訊息與第$2j+4$號訊息相連，因此$a_{2j+3-2^k\sim 2j+2}$與$a_{(2j+3)\sim(2j+3)+(2^k-1)}$相連後，變成$a_{(2j+3)-2^k\sim(2j+3)+(2^k-1)}$。因為$a_{(2j+3)-2^k\sim(2j+3)+(2^k-1)}$擁有$2^{k+1}$個訊息，但$k$為滿足$n>2^k$的最大正整數，所以$n<2^{k+1}$，因此第$2j+1$號訊息與第$2j+4$號訊息相連後，會得知所有訊息且$j$可任意變動，因此我們的到結論只要$k+1$分鐘所有人都知道彼此的訊息。再配合定理 2可知道通電話的最少分鐘數為$k+1$。

對於人數為奇數，我們看出些許規律，但沒辦法證明，我們將規律寫出，方便以後有興趣的讀者繼續研究。

規律 5：如果$n=2m+1$，m為大於1的正奇數，且倒數第二步連線後，則$a_{1\sim 2m+1}$會上下交錯出現。

說明：為節省版面，在此只呈現一個例子：人數7人，此時m=3，其餘請參閱附件。

1. 綠色代表倒數第二步擁有 a_{2m+1}
2. 黃色代表前一分鐘時，沒有對外連線
3. 紅色代表最後一分鐘前，擁有全部訊息

奇數(原始狀態)	a_1	a_3	a_5	a_7	
偶數(原始狀態)	a_2	a_4	a_6		
奇數	1~2	3~4	5~6	7	1 分鐘後
偶數	1~2	3~4	5~6		1 分鐘後
奇數	1~2	1~4	3~6	5~7	2 分鐘後
偶數	1~4	3~6	5~7		2 分鐘後
奇數	1~6	1~7	3~6	1~7	3 分鐘後
偶數	1~7	1~6	1~7		3 分鐘後

請看第三分鐘後奇數與偶數的狀態，1~7 上、下交錯出現。當 m 為奇數，這都會出現，但是 m 為偶數則不一定，我們不知如何解釋這種規律。

伍、研究結果

【結論一】設 n 為奇數，若 k 為最大的整數且滿足 $2^k < n$，則通電話的最少分鐘數不可能小於 $k+2$。

【結論二】設 n 為偶數且並非 2 的次方，若 k 為最大的整數且滿足 $2^k < n$，則通電話的最少分鐘數不可能小於 $k+1$。

【結論三】當 $n = 2^k$，k 為正整數時，通電話的最少分鐘數為 k。

【結論四】我們給出一套流程，依照這流程，實際連線的人數從 3 到 40 人，都能做出最少分鐘數。因此我們猜測無論人數多少，這套流程都適用。

【結論五】如果 $n = 2m$，n 不是 2 的次方且 $n > 2^k$，其中 m 為正整數、k 為滿足 $n > 2^k$ 的最大正整數，則依照流程，通電話的最少分鐘數為 $k+1$。

【結論六】我們觀察出：如果 $n = 2m+1$，m 為大於 1 的正奇數，且倒數第二步連線後，則 $a_{1\sim 2m+1}$ 會上下交錯出現。

陸、討論

我們給出整套流程中偶數人數的證明，但奇數人數尚未證明，對此有興趣的同學可以嘗試花時間說明。另外如果證明了這整套流程對所有人數都能成立，那麼我們可以馬上知道，表格 1 的人數可以推廣到更大的數。

柒、結論

【結論一】設 n 為奇數，若 k 為最大的整數且滿足 $2^k < n$，則通電話的最少分鐘數不可能小於 $k+2$。

【結論二】設 n 為偶數且並非 2 的次方，若 k 為最大的整數且滿足 $2^k < n$，則通電話的最少分鐘數不可能小於 $k+1$。

【結論三】當 $n = 2^k$，k 為正整數時，通電話的最少分鐘數為 k。

【結論四】我們給出一套流程，依照這流程，實際連線的人數從 3 到 40 人，都能做出最少分鐘數。因此我們猜測無論人數多少，這套流程都適用。

【結論五】如果 $n = 2m$，n 不是 2 的次方且 $n > 2^k$，其中 m 為正整數、k 為滿足 $n > 2^k$ 的最大正整數，則依照流程，通電話的最少分鐘數為 $k+1$。

【結論六】我們觀察出：如果 $n = 2m+1$，m 為大於 1 的正奇數，且倒數第二步連線後，則 $a_{1\sim 2m+1}$ 會上下交錯出現。

捌、參考資料及其他

一、國中數學課本，第一冊，翰林文教事業。

二、2014 年青少年數學國際城市邀請賽—參賽代表遴選複賽試題第 4 題。

三、高中數學課本，第二冊。

玖、附件

1. 為了節省版面，省略奇、偶數與分鐘數
2. 綠色代表倒數第二步擁有 a_{2m+1}
3. 黃色代表上一分鐘沒有對外連線
4. 紅色代表擁有全部訊息

奇數	1~2	3~4	5			1 分鐘後
偶數	1~2	3~4				1 分鐘後
奇數	1~2	1~4	3~5			2 分鐘後
偶數	1~4	3~5				2 分鐘後
奇數	1~5	1~4	1~5			3 分鐘後
偶數	1~5	1~5				3 分鐘後
	1~2	3~4	5~6	7~8	9	
	1~2	3~4	5~6	7~8		
	1~2	1~4	3~6	5~8	7~9	
	1~4	3~6	5~8	7~9		
	1~2，5~8	7~9~4	3~6	1~8	3~9	
	1~8	3~9	1~2，5~8	7~9~4		
	1~9	1~9	1~9	1~8	1~9	
	1~9	1~9	1~9	1~9		

奇數	1~2	3~4	5~6	7			1 分鐘後
偶數	1~2	3~4	5~6				1 分鐘後
奇數	1~2	1~4	3~6	5~7			2 分鐘後
偶數	1~4	3~6	5~7				2 分鐘後
奇數	1~6	1~7	3~6	1~7			3 分鐘後
偶數	1~7	1~6	1~7				3 分鐘後
	1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11	
	1~2	3~4	5~6	7~8	9~10		
	1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~11	
	1~4	3~6	5~8	7~10	9~11		
	1~2，7~10	9~11~4	3~6	1~8	3~10	5~11	
	1~8	3~10	5~11	1~2，7~10	9~11~4		
	1~10	1~11	1~10	1~11	3~10	1~11	
	1~11	1~10	1~11	1~10	1~11		

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13	1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12		1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~13	1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~15
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~13		1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~15	
1~2， 9~12	11~13~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~13	1~2， 11~14	13~15~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~15
1~8	3~10	5~12	7~13	1~2， 9~12	11~13~4		1~8	3~10	5~12	7~14	9~15	1~2， 11~14	13~15~4	
1~12	1~13	3~13	1~12	1~13	5~12	1~13	1~14	1~15	3~14	1~15	1~14	1~15	7~14	1~15
1~13	1~12	1~13	3~13	1~12	1~13		1~15	1~14	1~15	3~14	1~15	1~14	1~15	

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17						
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16							
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~17						
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~17							
1~2，13~16	15~17~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~17						
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~17	1~2，13~16	15~17~4							
1~2，5~16	7~17~4	3~6，9~16	11~17~8	1~10，13~16	15~17~12	7~14	1~16	3~17						
1~16	3~17	1~2，5~16	7~17~4	3~6，9~16	11~17~8	1~10，13~16	15~17~12							
1~17	1~17	1~17	1~17	1~17	1~17	1~17	1~16	1~17						
1~17	1~17	1~17	1~17	1~17	1~17	1~17	1~17							

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19					
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18						
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~19					
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~19						
1~2，15~18	17~19~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~19					
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~19	1~2，15~18	17~19~4						
1~2，7~18	9~19~4	3~6，11~18	13~19~8	1~10，15~18	17~4~12	7~14	1~16	3~18	5~19					
1~16	3~18	5~19	1~2，7~18	9~19~4	3~6，11~18	13~19~8	1~10，15~18	17~4~12						
1~18	1~19	1~18	1~19	1~18	1~19	1~18	1~19	3~18	1~19					
1~19	1~18	1~19	1~18	1~19	1~18	1~19	1~18	1~19						

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21				
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20					
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~21				
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~21					
1~2，17~20	19~21~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~21				
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~21	1~2，17~20	19~21~4					
1~2，9~20	11~21~4	3~6，13~20	15~21~8	1~10，17~20	19~4~12	7~14	1~16	3~18	5~20	7~21				
1~16	3~18	5~20	7~21	1~2，9~20	11~21~4	3~6，13~20	15~21~8	1~10，17~20	19~4~12					
1~20	1~21	3~21	1~21	1~21	1~21	1~21	1~20	1~21	5~20	1~21				
1~21	1~20	1~21	3~21	1~21	1~21	1~21	1~21	1~20	1~21					

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23			
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22				
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~23			
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~23				
1~2 ， 19~2 2	21~23~ 4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~23			
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~23	1~2， 19~22	21~23~ 4				
1~2 ， 11~2 2	13~23~ 4	3~6 ， 15~2 2	17~23~ 8	1~10 ， 19~22	21~4~12	7~14	1~16	3~18	5~20	7~22	9~23			
1~16	3~18	5~20	7~22	9~23	1~2， 11~22	13~23~ 4	3~6， 15~22	17~23~ 8	1~10， 19~22	21~4~1 2				
1~22	1~23	3~22	1~23	1~22	1~23	3~22	1~23	1~22	1~23	7~22	1~23			
1~23	1~22	1~23	3~22	1~23	1~22	1~23	3~22	1~23	1~22	1~23				

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25		
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24			
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~25		
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~25			
1~2 ， 21~2 4	23~25~ 4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~25		
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~25	1~2， 21~24	23~25~ 4			
1~2 ， 13~2 4	13~25~ 4	3~6 ， 17~2 4	19~25~ 8	1~10 ， 21~24	23~4~12	7~14	1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~25		
1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~25	1~2， 13~24	13~25~4	3~6， 17~24	19~25~ 8	1~10， 21~24	23~4~1 2			
1~24	1~25	3~24	1~25	1~25	1~25	7~25~4	1~24	1~25	1~24	1~25	9~24	1~25		
1~25	1~24	1~25	3~24	1~25	1~25	1~25	7~25~4	1~24	1~25	1~24	1~25			

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26	27	
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26		
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~27	
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~27		
1~2，23~26	25~27~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~27	
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~27	1~2，23~26	25~27~4		
1~2，15~26	17~27~4	3~6，19~26	21~27~8	1~10，23~26	25~4~12	7~14	1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~27	
1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~27	1~2，15~26	17~27~4	3~6，19~26	21~27~8	1~10，23~26	25~4~12		
1~26	1~27	3~26	1~27	1~26	1~27	1~2，7~26	1~27	3~26	1~27	1~26	1~27	11~26	1~27	
1~27	1~26	1~27	3~26	1~27	1~26	1~27	1~2，7~26	1~27	3~26	1~27	1~26	1~27		

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26	27~28	29
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26	27~28	
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~28	27~29
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~28	27~29	
1~2，25~28	27~29~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~28	23~29
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~28	23~29	1~2，25~28	27~29~4	
1~2，17~28	19~27~4	3~6，21~28	23~29~8	1~10，25~28	27~4~12	7~14	1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~28	15~29
1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~28	15~29	1~2，17~28	19~27~4	3~6，21~28	23~29~8	1~10，25~28	27~4~12	
1~28	1~29	3~28	1~29	1~28	1~29	7~29	1~28	1~29	3~28	1~29	1~28	1~29	13~28	1~29
1~29	1~28	1~29	3~28	1~29	1~28	1~29	7~29	1~28	1~29	3~28	1~29	1~28	1~29	

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26	27~28	29~30	31	
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26	27~28	29~30		
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~28	27~30	29~31	
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~28	27~30	29~31		
1~2，27~30	29~31~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~28	23~30	25~31	
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~28	23~30	25~31	1~2，27~30	29~31~4		
1~2，19~30	21~31~4	3~6，23~30	25~31~8	1~10，27~30	29~31~12	7~14	1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~28	15~30	17~31	
1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~28	15~30	17~31	1~2，19~30	21~31~4	3~6，23~30	25~31~8	1~10，27~30	29~31~12		
1~30	1~31	3~30	1~31	1~30	1~31	7~30	1~31	1~30	1~31	3~30	1~31	1~30	1~31	15~30	1~31	
1~31	1~30	1~31	3~30	1~31	1~30	1~31	7~30	1~31	1~30	1~31	3~30	1~31	1~30	1~31		

1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26	27~28	29~30	31~32	33
1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11~12	13~14	15~16	17~18	19~20	21~22	23~24	25~26	27~28	29~30	31~32	
1~2	1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~28	27~30	29~32	31~33
1~4	3~6	5~8	7~10	9~12	11~14	13~16	15~18	17~20	19~22	21~24	23~26	25~28	27~30	29~32	31~33	
1~2，29~32	31~33~4	3~6	1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~28	23~30	25~32	27~33
1~8	3~10	5~12	7~14	9~16	11~18	13~20	15~22	17~24	19~26	21~28	23~30	25~32	27~33	1~2，29~32	31~33~4	
1~2，21~32	23~33~4	3~6，25~32	27~33~8	1~10，29~32	31~33~12	7~14	1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~28	15~30	17~32	19~33
1~16	3~18	5~20	7~22	9~24	11~26	13~28	15~30	17~32	19~33	1~2，21~32	23~33~4	3~6，25~32	27~33~8	1~10，29~32	31~33~12	
1~2，5~32	7~33~4	3~6，9~32	11~33~8	1~10，13~32	15~33~12	7~14，17~32	19~33~16	1~18，21~32	23~33~20	3~22，25~32	27~33~24	1~26，29~32	31~33~28	15~30	1~32	3~33
1~32	3~33	1~2，5~32	7~33~4	3~6，9~32	11~33~8	1~10，13~32	15~33~12	7~14，17~32	19~33~16	1~18，21~32	23~33~20	3~22，25~32	27~33~24	1~26，29~32	31~33~28	
1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~32	1~33
1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	1~33	

【評語】030421

作者們所討論的其實是完全圖的 gossip 問題。這是一個古老的問題。關於這個問題的答案早在 1950 年就已經有了。作者們所考慮的其實並非完全圖，而是完全二部圖。這使得求這個問題的解難度因此而提高了。作者們應該不熟習對數，也不是很清楚該如何表示才能讓結果變的更好，有點可惜。解決此問題的關鍵是看出結果在 n 變為兩倍時，時間會多一（單位時間），所以最好的簡化方式是將點拆成兩半，透過強數學歸納法的想法來簡化討論。作者們確實完成了一些不簡單的工作，但如果能事先多花一點時間蒐集資料，應該可以把討論的重心放在一些前人不曾討論過的更有趣的內容上，也應該會有一些更有趣的結果。