中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030419

內外有致

－類拿破崙多邊形性質及其有向面積定值

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 李允兆 國二 許崇淵 國二 王士豪	蕭偉智

關鍵詞：拿破崙定理、有向面積定值、平行四邊形

摘要

平面幾何學中，拿破崙三角形是著名定理，許多全國科展以此為研究議題，但中國大陸學者已將三角形推廣至封閉多邊形而得到一般性面積定值結論[1]。

拿破崙定理還能推廣嗎？我們創新「構造方式」，在封閉多邊形的邊上依序「向外、向內」交錯構造相似三角形而得「類拿破崙多邊形」，並研究其幾何性質、面積不變量與應用，主要發現有：

1、將三角形的類拿破崙三角形連結原三角形頂點，則為平行四邊形，具有面積不變量與對偶性質。

2、四邊形的類拿破崙多邊形恆為平行四邊形（比前人研究更具一般性），並發現其面積不變量與對偶性質。

3、封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形之面積不變量。

4、平面上任意點與類拿破崙多邊形頂點所構成的三角形之面積不變量。

壹、動機與文獻

關於拿破崙定理（Napoleon's Theorem），是以任意三角形邊上全部向外或向內做「正三角形」後，再取其外心，三個外心構成一正三角形（圖 1），並可推廣至以任意三角形的邊上向外或向內做「相似三角形」[7]。

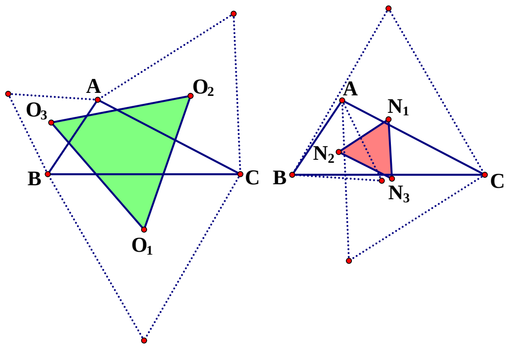


圖 1 外、內拿破崙三角形

全國科展有關拿破崙定理的研究如表 1。

表 1 拿破崙定理相關之全國科展作品

作者	年代	主要研究內容	研究限制
洪紹軒、張能傑、蔡秉洲[2]	2004	(1)對象：任意三角形。 (2)構造法：以原三角形三邊向外作正三角形，取其外心而得外拿破崙三角形。 (3)結果：外拿破崙三角形的邊長及面積、	僅限於由正三角形構造的外拿破崙三角形之幾何性質，大多發現皆為已知。

		外拿破崙三角形與費馬點的關係。	
陳致安、朱建威、陳揚叡[5]	2006	(1)對象：任意三角形。 (2)構造法：以原三角形三邊向外（內）作半圓，取特定圓心角，而得外切三角形。 (3)結果：某些特定圓心角所構成的外切三角形與原三角形相似。	未進行一般化角度構造的三角形進行探討。
鍾昀澔、薛兆原、李念竺[9]	2012	(1)對象：任意三角形。 (2)構造法：以原三角形三邊向外作三個正方形，正方形間若形成三角形，則繼續進行相同操作而得衍生形。 (3)結果：衍生形的重心與原三角形重心性質。	原多邊形僅限於三角形，且構造法也僅為外接正方形，較少一般化結果。
許翰翔[4]	2013	(1)對象：特定四邊形（平行四邊形、菱形、矩形、等腰梯形、鳶形）。 (2)構造法：原四邊形的邊全部向外或全部向內作相似三角形及特殊四邊形。 (3)結果：四邊形對偶規律、外接圓交點、對角線共點性質。	內、外結果四邊形面積差與原四邊形面積的比值沒有一般性的結果。
黃翊暢、張家誠、鍾承成[8]	2014	(1)對象：任意三角形。 (2)構造法：以三角形三邊向外（內）作半圓，取任意圓心角而得外切三角形。。 (3)結果：延伸陳致安等人的研究，一般化構成兩類結果三角形，其與原三角形相似。	未求出原三角形及外切三角形的面積差的一般化結果。

事實上，此五篇全國科展研究有共同的限制：(1) 原多邊形僅限於三角形或四邊形；(2) 構造方法沒有一般化；(3) 構造出的多邊形沒有找出「面積的一般性結果」。關於這些問題，事實上，中國大陸學者吳躍生（2007）的研究卻已給出一般性結論[1]。

然而，拿破崙定理是否能有新的突破及發現呢？我們閱讀張景中所著《數學家的眼光》

[3]中「佩多的鏽規作圖之引理」而獲得靈感。**我們創新「構造方式」，以封閉 n 邊形的邊依序向外、向內交錯構造任意相似三角形後，構造新的「類拿破崙多邊形」**。這樣的構造方式與傳統的拿破崙定理截然不同（兩者本質不同）！

具體來說，在這些多邊形邊上以「向外、向內（向內、向外）」方式構造相似三角形，取相似三角形的頂點連線而得到類拿破崙多邊形（圖 2）。

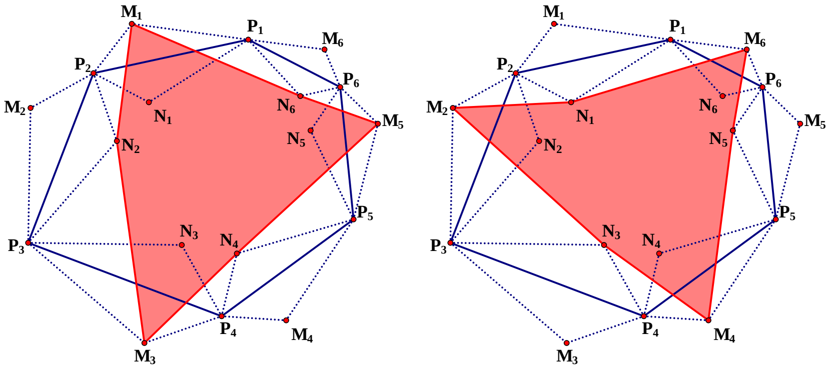


圖 2 外內交錯而成的類拿破崙多邊形

我們利用初等幾何（全等、相似、三角函數、行列式）為方法，以封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形為對象，主要研究方向有「**幾何性質**」、「**不變量（有向面積定值）**」、「**應用**」。

貳、名詞定義

1.同向/異向相似圖形：

「同向相似」的兩圖形為，可透過「平移、旋轉與縮放」而重合之圖形；「異向相似」為，一圖形需透過奇數次鏡射變換後，與另一圖形同向相似之圖形。

2.類拿破崙多邊形：

在多邊形$P_1P_2P_3\dots P_n$中，自$\overline{P_1P_2}$到$\overline{P_nP_1}$依序向外、向內（向內、向外）交錯作一組同向相似三角形，再依序連結不在$P_1P_2P_3\dots P_n$邊上的n個三角形之頂點而成封閉多邊形，稱作「類拿破崙多邊形」。如圖，$M_1N_2M_3N_4M_5N_6$（$N_1M_2N_3M_4N_5M_6$）即為類拿破崙六邊形。

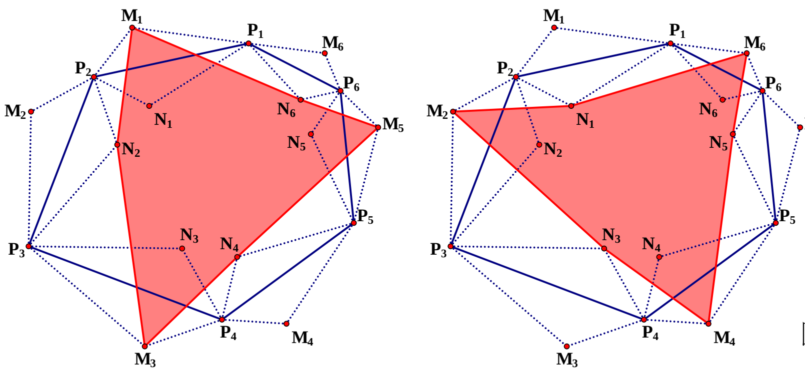


圖 3 類拿破崙六邊形

3.有向面積：

平面上封閉n邊形$P_1P_2P_3 \ldots P_n$的頂點（轉折點）坐標為$P_i(x_i, y_i)$，則有向面積$\bar{S}_{P_1P_2 \ldots P_n} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right)$。其中，若頂點繞行方式為逆時鐘時，則有向面積為正；若頂點繞行方式為順時鐘時，則有向面積為負。

4.8 字形：

若$\overline{AB}$、$\overline{CD}$相交於O點，連接$\overline{AD}$、$\overline{CB}$，則定義封閉圖形ABCD為「8」字形。

參、研究工具

紙筆、電腦、The Geometer's Sketchpad 5.0

肆、研究目的

一、原多邊形為任意三角形的類拿破崙多邊形研究

1.由正三角形構作的第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ型類拿破崙平行四邊形性質、對偶性與有向面積定值

2.由任意相似三角形所構作的類拿破崙平行四邊形有向面積定值

二、原多邊形為凸、凹四邊形及 8 字形的類拿破崙四邊形性質、對偶與有向面積定值

三、原多邊形為封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形的有向面積定值

四、平面上任意點與類拿破崙多邊形頂點所構成的三角形的有向面積定值

伍、研究過程與結果

1.三個正三角形構作的類拿破崙平行四邊形

1.1 第Ⅰ型類拿破崙平行四邊形：兩外一內正三角形

性質 1.1.1. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$分別向外作正三角形ΔABD、ΔACF，以邊$\overline{BC}$向內做正三角形ΔBCE，則四邊形ADEF為平行四邊形。

證明. 考慮$\angle ACE$為有向角，再證明 $\Delta ABC \cong \Delta FEC$ (SAS全等)，同理 $\Delta ABC \cong \Delta DBE$ (SAS 全等)，所以$\overline{EF} = \overline{DA}$、$\overline{DE} = \overline{AF}$。因此，四邊形ADEF為平行四邊形。 □

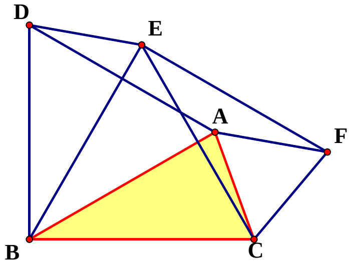


圖 4 第Ⅰ型類拿破崙四邊形

本文約定性質 1.1.1.所構作的平行四邊形稱作「第 I 形類拿破崙四邊形」。以下證明平行四邊形ADEF為特殊四邊形的充要條件－退化成一直線、菱形、矩形、正方形。

性質 1.1.2. 若四邊形ADEF退化成一直線，若且唯若A點在正三角形ΔBCE的外接圓上。

證明. 利用A、D、E、F四點共圓證明充分性。再以圓周角推論三點共線而證明必要性。

□

性質 1.1.3. 若平行四邊形ADEF為菱形，若且唯若A點在$\overline{BC}$的中垂線上且A、E不重合。

證明. 依據性質 1.1.1 可證明。

□

性質 1.1.4. 若四邊形ADEF為矩形，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$上，其中$\widehat{BC}=60°$。

證明. 利用圓周角即可證明。

□

性質 1.1.5. 若四邊形ADEF為正方形，若且唯若A點在在弧$\widehat{BC}$的中點上，其中$\widehat{BC}=60°$。

證明. 依據性質 1.1.3.與性質 1.1.4.即可得。

□

1.2.第 II 型類拿破崙平行四邊形：兩外一內正三角形外心

性質 1.2.1. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$分別向外作正三角形ΔABD、ΔACF，以邊$\overline{BC}$向內做正三角形ΔBCE，分別再作 ΔABD、ΔBCE、ACF的外心G、H、I，則四邊形AGHI為平行四邊形。

證明. 考慮∠ACE為有向角，注意到 $\overline{BC}:\overline{HC}=1:\frac{\sqrt{3}}{3}=\overline{AC}:\overline{IC}$，則可證明 $\Delta ABC\cong\sim\Delta IHC$ (SAS 相似)，所以 $\overline{IH}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}=\overline{GA}$。同理 $\overline{GH}=\overline{IA}$。因此，四邊形AGHI為平行四邊形。

□

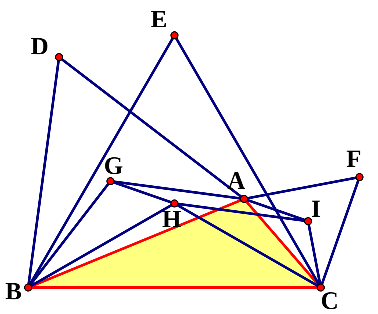


圖 5 第 II 型類拿破崙四邊形

同樣地，本文約定性質 1.2.1.所構作的平行四邊形稱作「第 II 形類拿破崙四邊形」。以下為平行四邊形AGHI為特殊四邊形的充要條件－退化成一直線、菱形、矩形、正方形，證明方法與前一節相同而省略。

性質 1.2.2. 平行四邊形 AGHI 為特殊四邊形之充要條件：

(1)若四邊形AGHI退化成一直線，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$上，其中$\widehat{BC} = 120°$。

(2)若四邊形AGHI為菱形，若且唯若A點在$\overline{BC}$的中垂線上且A、H不重合。

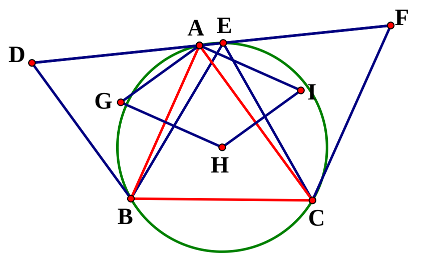
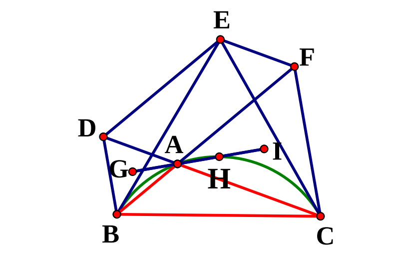
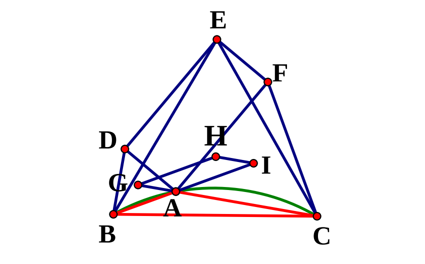
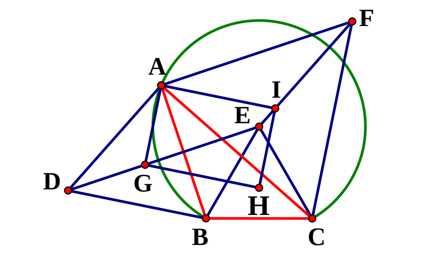
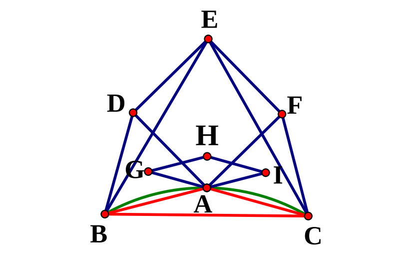
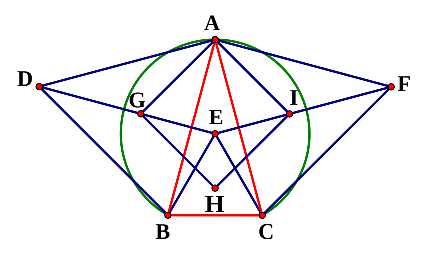
(3)若四邊形AGHI為矩形，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$上，其中$\widehat{BC} = 300°$。

(4)若四邊形AGHI為正方形，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$的中點上，其中$\widehat{BC} = 300°$。

1.3.第Ⅰ型與第Ⅱ型類拿破崙平行四邊形之比較

依據性質 1.1.1.到性質 1.2.2.，我們將第Ⅰ型與第Ⅱ型類拿破崙平行四邊形進行比較，討論兩者的圖形關係。

表 2 第Ⅰ型平行四邊形ADEF與第Ⅱ型平行四邊形AGHI的類拿破崙平行四邊形比較

		
ADEF退化一直線 AGHI為120°平行四邊形	ADEF為120°平行四邊形 AGHI退化一直線	ADEF為矩形 AGHI為150°平行四邊形
		
ADEF為150°平行四邊形 AGHI為矩形	ADEF為正方形 AGHI為150°菱形	ADEF為150°菱形 AGHI為正方形

1.4.第Ⅲ型類拿破崙平行四邊形：一外兩內正三角形

性質 1.4.1. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$分別向內作正三角形ΔABJ、ΔACL，以邊$\overline{BC}$向外做正三角形ΔBCK，則四邊形AJKL為平行四邊形。

證明. 證明方法與性質 1.1.1.相同。

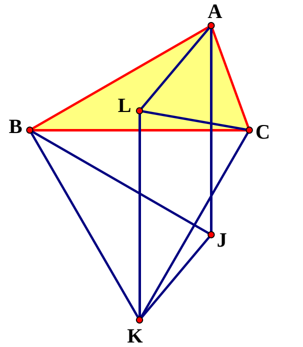


圖 6 第Ⅲ型類拿破崙四邊形

□

接著，關於第Ⅲ型類拿破崙平行四邊形的其餘特殊四邊形以及退化成一直線的定理如下，證明方法與第Ⅰ型拿破崙平行四邊形相同因而省略。

性質 1.4.2. 平行四邊形AJKL為特殊四邊形之充要條件：

(1)若四邊形AJKL退化成一直線，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$上，其中$\widehat{BC} = 120°$。

(2)若四邊形AJKL為菱形，若且唯若A點在$\overline{BC}$的中垂線上且A不在弧$\widehat{BC} = 120°$上。

(3)若四邊形AJKL為矩形，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$上，其中$\widehat{BC} = 300°$。

(4)若四邊形AJKL為正方形，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$的中點上，其中$\widehat{BC} = 300°$。

1.5.第Ⅳ型類拿破崙平行四邊形：一外兩內正三角形外心

性質 1.5.1. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$分別向內作正三角形ΔABJ、ΔACL，以邊$\overline{BC}$向外做正三角形ΔBCK，分別再作ΔABJ、ΔBCK、ACL的外心M、N、P，則四邊形AMNP為平行四邊形。

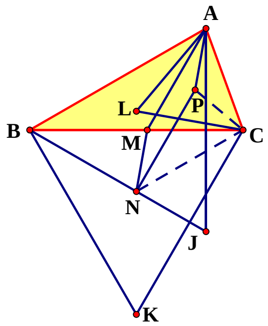


圖 7 第Ⅳ型類拿破崙四邊形

證明. 證明方法與性質 1.2.1.相同。

□

接著，關於第Ⅳ型類拿破崙平行四邊形的其餘特殊四邊形以及退化成一直線的定理如下，證明方法與第Ⅱ型拿破崙平行四邊形相同因而省略。

性質 1.5.2. 平行四邊形AMNP為特殊四邊形之充要條件

(1)若四邊形AMNP退化成一直線，若且唯若A點在正三角形ΔBCE的外接圓上，其中E點為K點關於$\overline{BC}$的對稱點。

(2)若四邊形AMNP為菱形，若且唯若A點在$\overline{BC}$的中垂線上且A、E不重合，其中E點為K點關於$\overline{BC}$的對稱點。

(3)若四邊形AMNP為矩形，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$上，其中$\widehat{BC} = 60°$。

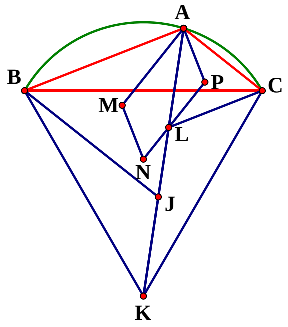
(4)若四邊形AMNP為正方形，若且唯若A點在弧$\widehat{BC}$的中點上，其中$\widehat{BC} = 60°$。

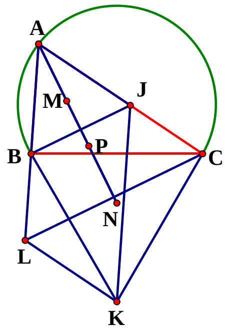
1.6.第Ⅲ型與第Ⅳ型類拿破崙平行四邊形之比較

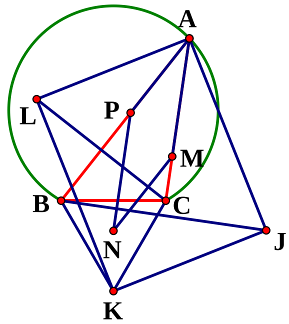
依據性質 1.4.1.到性質 1.5.2.，將第Ⅲ型與第Ⅳ型類拿破崙平行四邊形進行比較（表 3）。

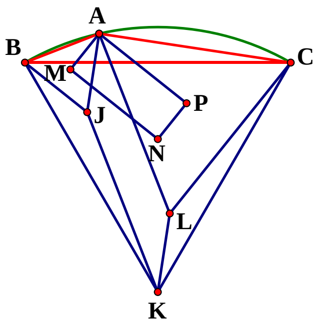
結果發現**第Ⅲ型與第Ⅳ型類拿破崙平行四邊形圖形組型與表 2 相同**。

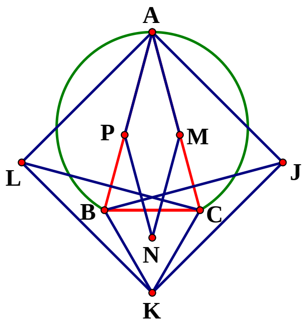
表 3 第Ⅲ型平行四邊形AJKL與第Ⅳ型平行四邊形AMNP的類拿破崙平行四邊形比較

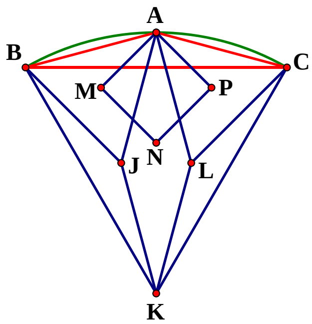
<table>
<tr>
<td>

AJKL退化一直線
AMNP為120°平行四邊形</td>
<td>

AJKL為120°平行四邊形
AMNP退化一直線</td>
<td>

AJKL為矩形
AGHI為150°平行四邊形</td>
</tr>
<tr>
<td>

AJKL為150°平行四邊形
AMNP為矩形</td>
<td>

AJKL為正方形
AMNP為150°菱形</td>
<td>

AJKL為150°菱形
AMNP為正方形</td>
</tr>
</table>

2.第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ型類拿破崙平行四邊形之對偶性及有向面積定值

前一節研究中，發現第Ⅰ型類拿破崙平行四邊形與第Ⅳ型類拿破崙平行四邊形的特殊四邊形充要條件相同。第Ⅱ型類拿破崙平行四邊形與第Ⅲ型類拿破崙平行四邊形亦同。

以下將證明類拿破崙平行四邊形的「**對偶性**」。**第Ⅰ型與第Ⅳ型類拿破崙平行四邊形相互對偶、第Ⅱ型與第Ⅲ型類拿破崙平行四邊形互對偶**，其中，向「外」與向「內」做正三角形互為對偶元素，同時「頂點」與「外心」互為對偶元素。

2.1.類拿破崙平行四邊形的對偶性

$\boxed{\textbf{性質 2.1.1.}}$ 第Ⅰ型平行四邊形ADEF與第Ⅳ型平行四邊形AMNP相似。

證明. 如圖 8-1，因為$\angle DAF+\angle MAP+\angle DAM+\angle FAP=\angle DAF+\angle MAP+180°=360°$，

所以$\angle DAF+\angle MAP=180°$。

同理，在圖 8-2 中，有$\angle DAF=\angle DAM+\angle FAP-\angle MAP$，所以$\angle DAF+\angle MAP=180°$。

又因為ADEF與AMNP為平行四邊形且$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AD}$、$\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AF}$。因此，平行四邊形ADEF~平行四邊形AMNP。

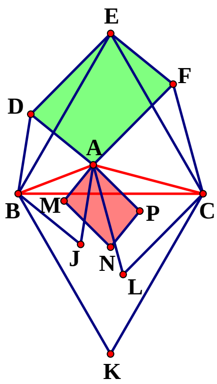


圖 8-1

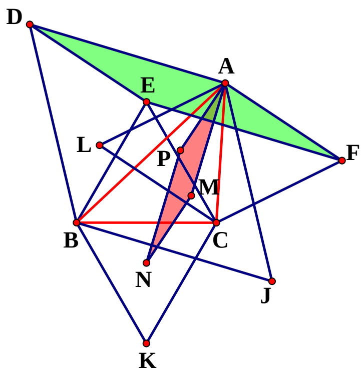


圖 8-2

□

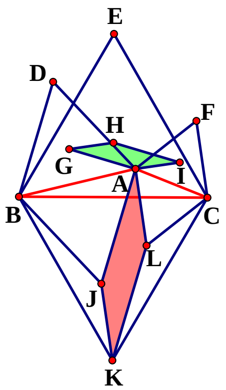
依據性質 2.1.1.，則有以下推論。

推論 2.1.1. 有向面積$\overline{S}_{ADEF}=3\overline{S}_{APNM}$。

接著討論第Ⅱ型平行四邊形AGHI與第Ⅲ型平行四邊形的對偶性。

性質 2.1.2. 第Ⅱ型平行四邊形AGHI與第Ⅲ型平行四邊形AJKL相似。

證明. 證明方法如性質 2.1.1.



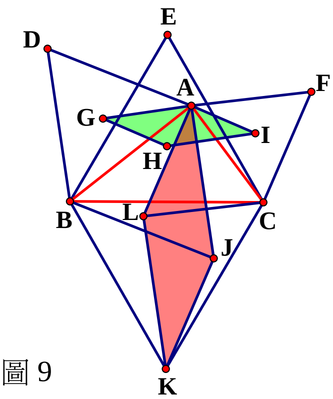


圖 9

□

同樣的，依據性質 2.1.2.，則有以下推論。

推論 2.1.2. 有向面積$3S_{AGHI}=S_{ALKJ}$。

2.2.類拿破崙平行四邊形的有向面積定值

拿破崙定理中，有「任意三角形的外拿破崙三角形與內拿破崙三角形的面積之差等於原三角形面積」之性質[7]。同樣的，我們研究發現自創的「類拿破崙結果平行四邊形」與原三角形間一樣具有不變量－有向面積定值！

$\boxed{\text{性質 2.2.1.}}$ 有向面積$\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL}=-2\bar{S}_{\Delta ABC}$。

證明.

1.如圖 10-1 及圖 10-2，考慮有向角∠BAC、∠DAF、∠JAL

$$\bar{S}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\angle BAC$$

$$\bar{S}_{ADEF}=\overline{AD}\times\overline{AF}\times\sin\angle DAF=\overline{AD}\times\overline{AF}\times\sin(\angle BAC-240°)$$

$$\bar{S}_{AJKL}=\overline{AJ}\times\overline{AL}\times\sin\angle JAL=\overline{AJ}\times\overline{AL}\times\sin(\angle BAC-120°)$$

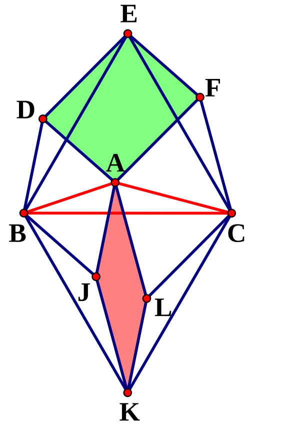


圖 10-1

所以

$$\frac{\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL}}{\bar{S}_{\Delta ABC}}$$

$$=\frac{\overline{AD}\times\overline{AF}\times\sin(\angle BAC-240°)+\overline{AJ}\times\overline{AL}\times\sin(\angle BAC-120°)}{\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\angle BAC}$$

$$=\frac{2(\sin(\angle BAC-240°)+\sin(\angle BAC-120°))}{\sin\angle BAC}$$

$$=\frac{2(-\sin(\angle BAC-60°)-\sin(\angle BAC+60°))}{\sin\angle BAC}$$

$$=\frac{-2\sin\angle BAC}{\sin\angle BAC}=-2$$

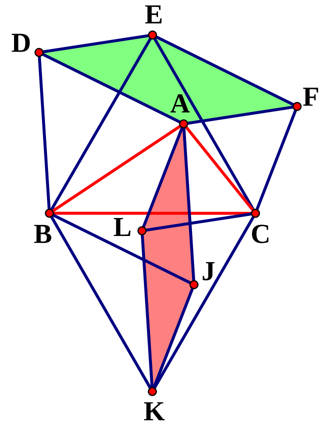


圖 10-2

2.同理，如圖 10-3

$$\bar{S}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\angle BAC$$

$$\bar{S}_{ADEF}=\overline{AD}\times\overline{AF}\times\sin\angle DAF=\overline{AD}\times\overline{AF}\times\sin(\angle BAC+120°)$$

$$\bar{S}_{AJKL}=\overline{AJ}\times\overline{AL}\times\sin\angle JAL=\overline{AJ}\times\overline{AL}\times\sin(\angle BAC-120°)$$

所以

$$\frac{\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL}}{\bar{S}_{\Delta ABC}}=\frac{2(\sin(\angle BAC+120°)+\sin(\angle BAC-120°))}{\sin\angle BAC}=-2$$

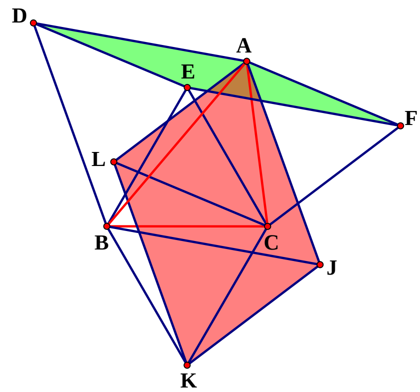


圖 10-3

□

性質 2.2.2. 有向面積$\bar{S}_{AMNP}+\bar{S}_{AGHI}=-\frac{2}{3}\bar{S}_{\Delta ABC}$。

證明. 由性質 2.2.1.可知 $\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL}=-2\bar{S}_{\Delta ABC}$，再依據性質 2.1.1.及性質 2.1.2.可知四邊形AMNP與ADEF對偶、四邊形AGHI與AJKL對偶，所以

$$\bar{S}_{AMNP}+\bar{S}_{AIHG}=\frac{1}{3}\left(-\bar{S}_{ADEF}-\bar{S}_{AJKL}\right)=-\frac{2}{3}\bar{S}_{\Delta ABC}$$

□

接下來，將類拿破崙平行四邊形換回「類拿破崙三角形」而有以下推論。

推論 2.2.1. $\Delta DEF\sim\Delta JKL$。

推論 2.2.2. 有向面積$\bar{S}_{\Delta DEF}+\bar{S}_{\Delta JKL}=-\bar{S}_{\Delta ABC}$。

證明. 因為$2\bar{S}_{\Delta DEF}=\bar{S}_{ADEF}$且$2\bar{S}_{\Delta JKL}=\bar{S}_{AJKL}$，再依據性質 2.2.1 即可得

□

推論 2.2.3. $\Delta MNP\sim\Delta GHI$。

推論 2.2.4. 有向面積$\bar{S}_{\Delta MNP}+\bar{S}_{\Delta GHI}=-\frac{1}{3}\bar{S}_{\Delta ABC}$。

3.一般化：原多邊形為任意三角形的類拿破崙平行四邊形

3.1.同向相似三角形所構造

性質 3.1.1. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$向外以及$\overline{BC}$向內，分別作同向相似三角形ΔABD、ΔACF、ΔBCE，則四邊形ADEF為平行四邊形。

證明. 如圖 11，因為$\Delta DBE\sim\Delta ABC\sim\Delta EFC$ (SAS 相似)，又已知$\Delta DBA\sim\Delta EBC\sim\Delta FAC$，所以$\overline{EF}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{BC}=\overline{DA}:\overline{BA}$，可推得$\overline{EF}=\overline{DA}$。同理，也可得出$\overline{DE}=\overline{AF}$，因此ADEF為平行四邊形

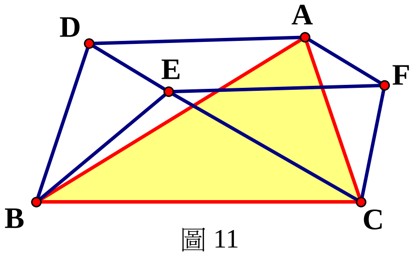


圖 11

□

利用性質 3.1.1.，我們可將其推廣為一般化三角形的心所構造的平行四邊形。

性質 3.1.2. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$向外以及邊$\overline{BC}$向內，分別作同向相似三角形ΔABD、ΔACF、ΔBCE，分別再作 ΔABD、ΔBCE、ΔACF的「心」G、H、I，則四邊形AGHI為平行

四邊形。其中，三角形的心由邊長或角度之函數所構作。

還可以推論出由任意相似 n 邊形所構造的平行四邊形。

推論 3.1.1. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$向外且以$\overline{BC}$向內，分別作同向相似 n 邊形，再作這些相似 n 邊形的心M_1、M_3、M_2（例如：對應邊上的給定比例分點、對應的對角線交點、外心、內心、頂點等），則四邊形$AM_1M_2M_3$為平行四邊形。

利用性質 3.1.1.的方法，我們也可以得到性質 3.1.3.。

性質 3.1.3. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$向內以及$\overline{BC}$向外，分別作同向相似三角形ΔBAJ、 ΔACL、ΔBCK，則四邊形$AJKL$為平行四邊形。

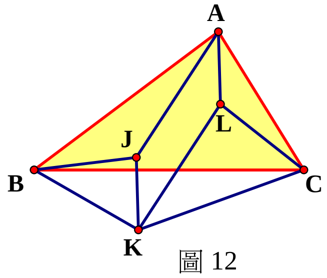


圖 12

推論 3.1.2. 若以ΔABC的邊$\overline{AB}$及$\overline{AC}$向內且以邊$\overline{BC}$向外，分別作同向相似n邊形，再作這些相似n邊形的心N_1、N_3、N_2（例如：對應邊上的給定比例分點、對應的對角線交點、外心、內心、頂點等），則四邊形$AN_1N_2N_3$為平行四邊形。

3.2.同向相似三角形所構造類拿破崙平行四邊形的有向面積定值

性質 3.2.1. 若四邊形$AFED$為三角形邊上依序向外、向內，作三個同向相似三角形所構造之類拿破崙平行四邊形；四邊形$AJKL$為三角形邊上依序向內、向外，作三個同向相似三角形所構造之類拿破崙平行四邊形，此六個三角形皆相似，則有向面積定值

$$\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL} = 4mn\cos(\alpha+\beta)\,\bar{S}_{\Delta ABC}$$

其中，$\overline{AB}:\overline{BD}:\overline{DA} = 1:m:n$、有向角$\angle DAB = \alpha > 0$且$\angle ABD = \beta > 0$。

證明.

1.如圖 13-1，先討論兩組三角形為異向相似之情形

設$\overline{BC} = a$、$\overline{AC} = b$、$\overline{AB} = c$、$\overline{AD} = \overline{AJ} = cn$、$\overline{AF} = \overline{AL} = bm$

考慮有向角$\angle DAF = (\angle BAC+\alpha+\beta)-360°$、$\angle JAL = \angle BAC-(\alpha+\beta)$

依據性質 3.1.1.與 3.1.3.可得有向面積

$$\frac{\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL}}{\bar{S}_{\Delta ABC}}$$

$$= \frac{cn\times bm\left[\sin\left((\angle BAC+\alpha+\beta)-360^{\circ}\right)+\sin\left(\angle BAC-(\alpha+\beta)\right)\right]}{\frac{1}{2}bc\times \sin\angle BAC}$$

$$=\frac{2mn[\sin(\angle BAC+\alpha+\beta)+\sin(\angle BAC-(\alpha+\beta))]}{\sin\angle BAC}$$

$$=\frac{2mn[\sin(\angle BAC+(\alpha+\beta))+\sin(\angle BAC-(\alpha+\beta))]}{\sin\angle BAC}$$

$$=\frac{2mn(2\sin\angle BAC\cos(\alpha+\beta))}{\sin\angle BAC}$$

$$=4mn\cos(\alpha+\beta)$$

2.如圖 13-2，考慮有向角$\angle DAF=\angle BAC+\alpha+\beta$、$\angle JAL=\angle BAC-(\alpha+\beta)$同上可證。

3.如圖 13-3，考慮ΔADB與ΔBJA同向相似的情形，同理可證。

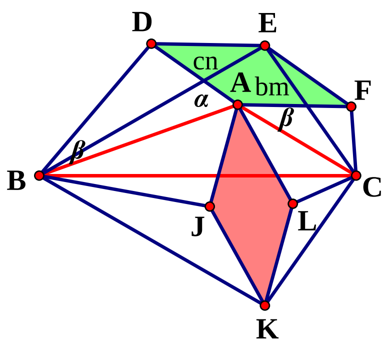


圖 13-1

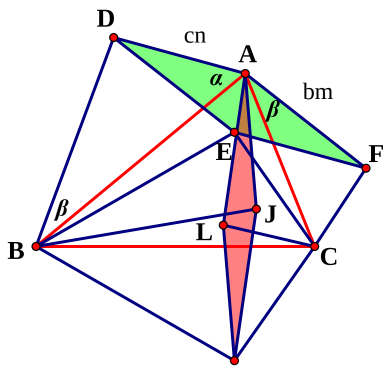


圖 13-2 K

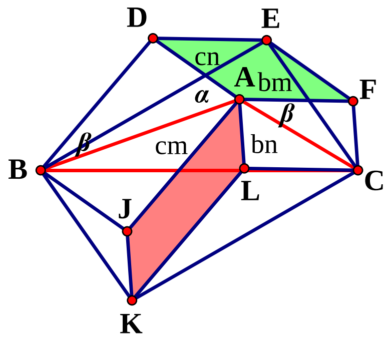


圖 13-3

□

以相似三角形所構造的類拿破崙平行四邊形的「**對偶性**」。

推論 3.2.1. 若$\alpha+\beta=90°$，則平行四邊形ADEF $\cong$平行四邊形JKLA。

證明. 依據性質 3.2.1.可得。

□

將類拿破崙平行四邊形轉換回「類拿破崙三角形」亦有以下推論 3.2.2.。

推論 3.2.2. $\bar{S}_{DEF}+\bar{S}_{JKL}=2mn\cos(\alpha+\beta)\bar{S}_{\Delta ABC}$。

4.一般化：原多邊形為任意四邊形的類拿破崙平行四邊形

4.1.類拿破崙平行四邊形的有向面積定值

許翰翔（2013）的研究以拿破崙定理為架構，討論原四邊形全部向內或全部向外作相似三角形及四邊形，之後所構作結果四邊形並「不具一般性」，例如：原四邊形為平行四邊形，分別向內做正方形取其中心，則結果四邊形為正方形，若原四邊形為等腰梯形，則結果四邊形為鳶形，該研究並沒有解決此問題[4]。

然而，本研究改變「全部向內」或「全部向外」的方式，並將原四邊形推廣至「**凸四邊形、凹四邊形與 8 字形**」，再分別討論三種構造情形所得的兩類結果四邊形：

（1）外－外－外－內（等價於「內－內－內－外」）

（2）外－外－內－內

（3）外－內－外－內。

結果發現**僅有「外－內－外－內」的組合所構作的結果四邊形具有一般性，它們皆為平行四邊形！**顯示這樣的構造方式比起許翰翔的研究更具突破性與價值性。

性質 4.1.1. 若在任意凸四邊形、凹四邊形與 8 字形ABCD各邊上依次輪流向外及向內做同向相似三角形ΔABE、ΔBFC、ΔCDG、ΔDHA，則四邊形EFGH為平行四邊形。

證明. 因為$\Delta AHE \sim \Delta ADB$ (SAS 相似)，可得$\overline{HE}:\overline{DB}=\overline{AH}:\overline{AD}$。$\Delta GFC \sim \Delta DBC$，再得$\overline{GF}:\overline{DB}=\overline{GC}:\overline{DC}$。但又已知$\overline{AH}:\overline{AD}=\overline{GC}:\overline{DC}$，所以$\overline{HE}=\overline{GF}$。同理，$\overline{HG}=\overline{EF}$，因此EFGH為平行四邊形。

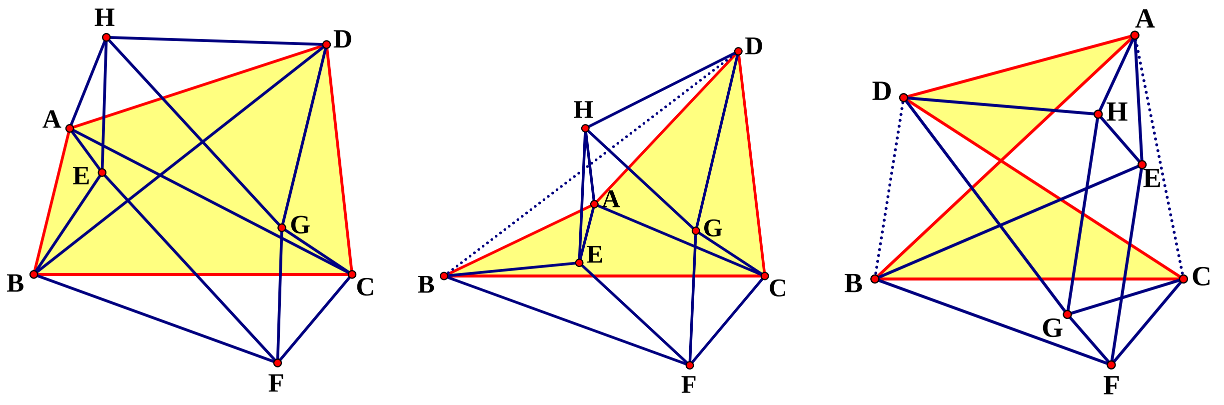


圖 14

□

在性質 4.1.1.中，我們證明任意凸、凹四邊形與 8 字形，以四個邊依序輪流向外及向內做同向相似三角形，所構造的結果四邊形的一般性結果，皆為平行四邊形，同時也可一般化至推廣 4.1.1.。

推廣 4.1.1. 若在任意凸、凹四邊形及 8 字形ABCD各邊上依次輪流向外及向內分別作同向相似n邊形，再作這些相似n邊形的心N_1、N_3、N_2(例如：對應邊上的給定比例分點、對應的對角線交點、心、頂點等)，則四邊形$AN_1N_2N_3$為平行四邊形。

接下來，繼續進行四邊形的類拿破崙平行四邊形有向面積定值證明。

引理 4.1.1. 凸四邊形、凹四邊形及 8 字形的有向面積公式

(1)在凸四邊形與ABCD中，若$\overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{BD}$交於O點，則有向面積

$$\bar{S}_{ABCD}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\angle AOB$$

其中，$\angle AOB$為有向角。

(2)在凹四邊形與 8 字形ABCD中，若$\overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{BD}$交於O點，則有向面積

$$\bar{S}_{ABCD}=-\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\angle AOB$$

其中，$\angle AOB$為有向角。

證明.

1.考慮有向面積$\bar{S}_{ABCD}=\bar{S}_{\Delta ABO}+\bar{S}_{\Delta BCO}+\bar{S}_{\Delta CDO}+\bar{S}_{\Delta DAO}=\bar{S}_{\Delta ABC}+\bar{S}_{\Delta CDA}$

2.分組討論

Case1 如圖 15-1，在凸四邊形中，考慮有向角$\angle AOB=\alpha>0$

$$\bar{S}_{\Delta ABC}+\bar{S}_{\Delta CDA}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BE}\times\sin\alpha+\overline{AC}\times\overline{DE}\times\sin(180^\circ-\alpha)}{2}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\alpha}{2}$$

Case2 如圖 15-2、圖 15-3，在凹四邊形及 8 字形中，考慮有向角$\angle AOB=\beta<0$

$$\bar{S}_{\Delta ABC}+\bar{S}_{\Delta CDA}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BE}\times\sin(-\beta)+\overline{AC}\times\overline{DE}\times\sin(180^\circ+\beta)}{2}=\frac{-\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\beta}{2}$$

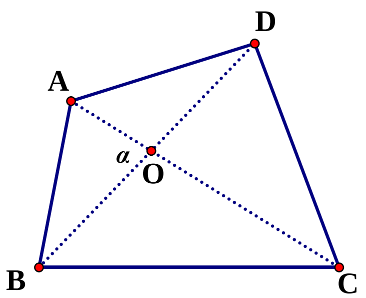


圖 15-1

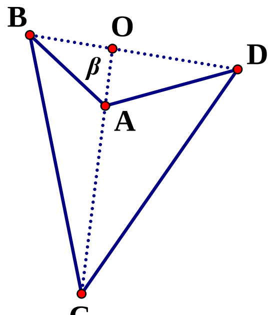


圖 15-2

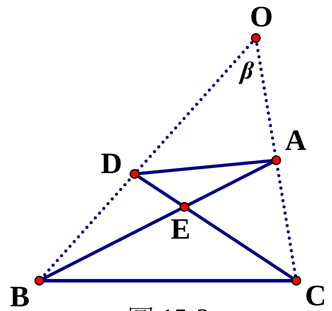


圖 15-3

□

性質 4.1.2. 若在凸四邊形、凹四邊形與 8 字形ABCD中，四邊形EFGH為其邊上依序向內、外、內、外，作四個同向相似三角形所構造之類拿破崙平行四邊形；四邊形IJKL為其邊上依序向外、內、外、內，作四個同向相似三角形所構造之類拿破崙平行四邊形，此八個三角形皆相似，則有向面積定值

$$\bar{S}_{EFGH}+\bar{S}_{IJKL}=4mn\cos(\alpha+\beta)\bar{S}_{ABCD}$$

其中，$\overline{AD}:\overline{AH}:\overline{HD}=1:m:n$、有向角$\angle HDA=\alpha>0$且$\angle DAH=\beta>0$。

證明.

1.如圖 16-1，先討論凸四邊形兩組三角形為異向相似之情形

考慮有向角，令$\angle AHE = x$、$\angle GHD = y$

又因為$\Delta AEH \cong \Delta AIL$、$\Delta DHG \cong \Delta DLK$且$\Delta AEH \sim \Delta ABD$、$\Delta DHG \sim \Delta DAC$

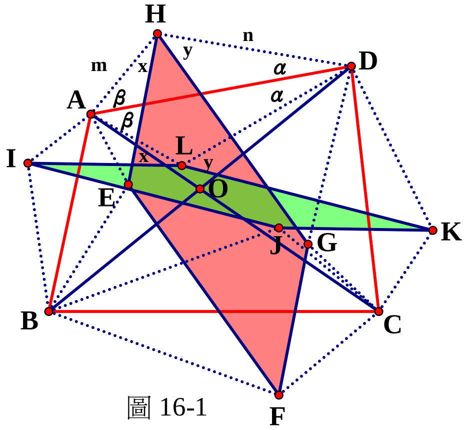


圖 16-1

可得 $\angle EHG = (180° - \alpha - \beta) - x - y$

$\angle ILK = 360° - (180° - \alpha - \beta) - x - y = 180° - x - y + \alpha + \beta$

$\angle ADB = \angle AHE = x$且$\angle CAD = \angle DHG = y$

從而$\angle AOB = \angle ADB + \angle CAD = x + y$

再得 $\overline{EH}:\overline{BD} = \overline{AH}:\overline{AD} = m:1$、$\overline{HG}:\overline{AC} = \overline{HD}:\overline{AD} = n:1$

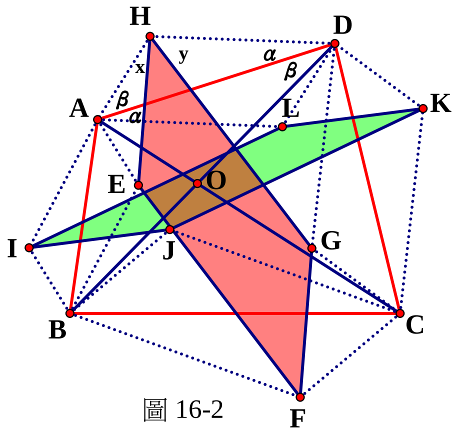


圖 16-2

2.依據性質 4.1.1.與引理 4.1.1.有

$$\frac{\bar{S}_{EFGH}+\bar{S}_{IJKL}}{\bar{S}_{ABCD}}$$

$$= \frac{\overline{EH}\times\overline{HG}[\sin(180°-x-y-\alpha-\beta)+\sin(180°-x-y+\alpha+\beta)]}{\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin(x+y)}$$

$$= \frac{2mn[\sin(x+y+\alpha+\beta)+\sin(x+y-\alpha-\beta)]}{\sin(x+y)}$$

$$= \frac{2mn[\sin(x+y+(\alpha+\beta))+\sin(x+y-(\alpha+\beta))]}{\sin(x+y)}$$

$$= \frac{2mn(2\sin(x+y)\cos(\alpha+\beta))}{\sin(x+y)}$$

$$= 4mn\cos(\alpha+\beta)$$

3.如圖 16-2，考慮凸四邊形兩組同向相似的情形，利用同方法可證明。

4.再討論凹四邊形兩組三角形為異向及同向相似之情形

如圖 16-3 與圖 16-4，令有向角$\angle AHE = x < 0$、$\angle GHD = y > 0$、$\angle HDA = \alpha$、$\angle DAH = \beta$，則

$\angle AOB = 180° - (x + y) < 0$

$\angle EHG = (180° - \alpha - \beta) - x - y$

$\angle ILK = 180° - x - y + \alpha + \beta$

即為凹四邊形的情形，同方法可證。

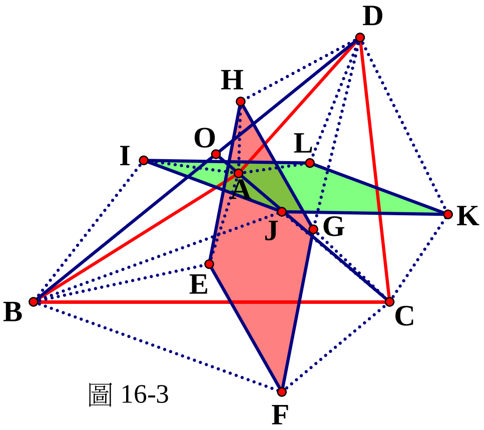


圖 16-3

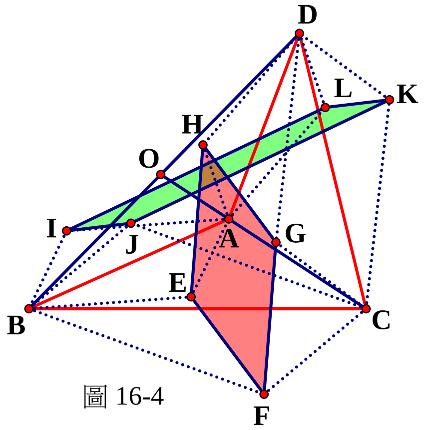


圖 16-4

5.討論八字形兩組三角形為異向及同向相似之情形

如圖 16-5 與圖 16-6，令有向角$\angle AHE = x < 0$、$\angle GHD = y < 0$、$\angle HDA = \alpha$、$\angle DAH = \beta$

又因為$\Delta CAD \sim \Delta GHD$且$\Delta ADB \sim \Delta AHE$

在ΔAOD中，依據外角定理有

$$|\angle AOB| + 180° = |\angle CAD| + |\angle ADB| = |\angle GHD| + |\angle AHE| = |x| + |y|$$

$$\angle AOB = x + y + 180° < 0$$

而且

$$\angle EHG = -(360° + \angle AHE + \angle EHD - \angle AHD) = -180° - \alpha - \beta - x - y$$

$$\angle ILK = \angle KJI = 360° - (\angle IJB + CIK) - \angle BJC = -180° + \alpha + \beta - x - y$$

即為 8 字形的情形，同方法可證。

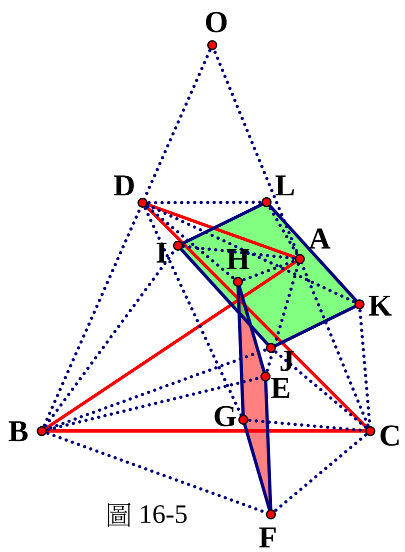


圖 16-5

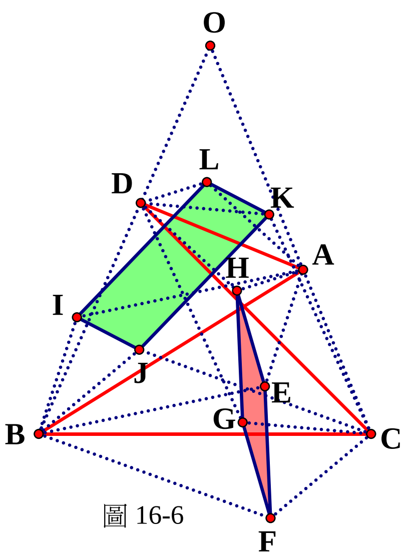


圖 16-6

□

以相似三角形所構造的類拿破崙平行四邊形的「**對偶性**」。

推論 4.1.1. 若$\alpha+\beta=90°$，則平行四邊形EFGH ≅平行四邊形IJKL。

證明. 依據性質 4.1.3.可得。

□

4.2.類拿破崙平行四邊形的有向面積的極值

原多邊形為任意三角形、任意四邊形（凸四邊形、凹四邊形、八字形）所構造的類拿破崙平行四邊形有向面積比值為 $4\mathrm{mn}\cos(\alpha+\beta)$。

先將m, n兩變數做代換

依據正弦定理有

$$\frac{\sin\beta}{\mathrm{m}}=\frac{\sin\alpha}{\mathrm{n}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{1}$$

所以

$$4\mathrm{mn}\cos(\alpha+\beta)=\frac{4\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

利用 WolframAlpha 網站[10]計算描繪$\frac{4\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$之立體圖形與計算極值（圖 17）將α換成x，β換成y，輸入「maximize (4 sin(x) sin(y) cos(x+y))/(sin^2(x+y))」得出結論：

$$\mathbf{4mn\cos(\alpha+\beta)\leq 1}$$

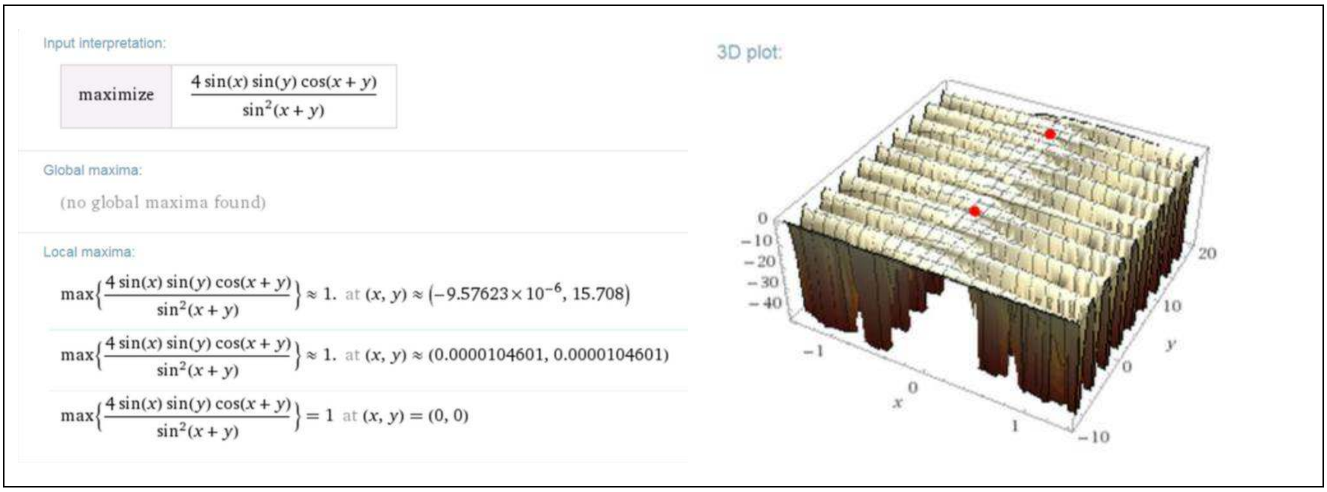


圖 17 $4\mathrm{mn}\cos(\alpha+\beta)$極值

再討論$(\alpha,\beta)=(0°,0°)$的幾何意義，也就是向外或向內做的相似三角形即為「**底角為 0 度的等腰相似三角形**」，退化為原多邊形**各邊的中點**。

圖 18，在任意ΔABC中，D與J為$\overline{AB}$中點、E與K為$\overline{BC}$中點、F與L為$\overline{AC}$中點，所以有向面積：

$$\frac{\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL}}{\bar{S}_{\Delta ABC}}=1\text{、}\ \frac{\bar{S}_{\Delta DEF}+\bar{S}_{\Delta JKL}}{\bar{S}_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2}$$

同理，對於任意四邊形ABCD有

$$\frac{\bar{S}_{EFGH}+\bar{S}_{IJKL}}{\bar{S}_{ABCD}}=\frac{\frac{\bar{S}_{ABCD}}{2}+\frac{\bar{S}_{ABCD}}{2}}{\bar{S}_{ABCD}}=1$$

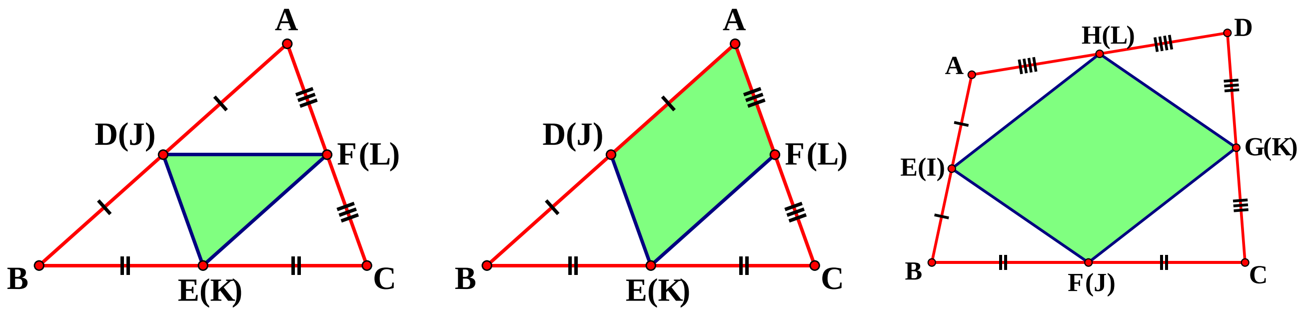


圖 18

5.一般化：任意封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形有向面積定值

關於任意多邊形$P_1P_2 \dots P_n$的類拿破崙多邊形有向面積定值，計算角度及長度太過複雜，所以我們採用喻德生研究中的 (λ,μ) 來定義$\overline{P_iP_{i+1}}$邊上所作的相似三角形[6]，再利用測量師公式進行有向面積計算。

5.1.類拿破崙多邊形頂點坐標

性質 5.1.1. 平面上有相異兩點$P_i(x_i,y_i),P_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$，$M_i(x_{M_i},y_{M_i})$與$N_i(x_{N_i},y_{N_i})$為關於$\overleftrightarrow{P_iP_{i+1}}$的對稱點，$\overline{M_iN_i}$與$\overleftrightarrow{P_iP_{i+1}}$交於$Q_i$。若$\overline{P_iQ_i}=\lambda\overline{Q_iP_{i+1}}$且$\overline{M_iQ_i}=\mu\overline{P_iP_{i+1}}$，則$M_i$與$N_i$的坐標

$$X_{M_i}=\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_I),\ y_{M_i}=\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)$$

$$x_{N_i}=\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(y_{i+1}-y_i),\ y_{N_i}=\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(x_{i+1}-x_i)$$

證明. 利用分點公式與相似三角形即可證明（見[6]）。

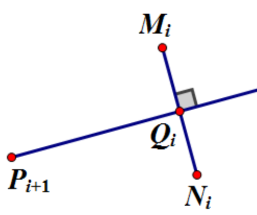


圖 19

□

5.2.任意封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形有向面積定值

先證明偶多邊形，在性質 5.2.1.中可發現封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形存在有向面積不變量，由「奇數頂點所構成多邊形」、「偶數頂點所構成多邊形」、「原多邊形」所組成。

性質 5.2.1. 在偶多邊形$P_1P_2\dots P_{2k}$中（$k\in\mathbb{N}; P_{2k+j}=P_j$），自$\overline{P_1P_2}$邊上起依序向外、內，作$2k$個一組同向相似三角形$\Delta P_1P_2M_1 \sim \Delta P_3P_2N_2 \sim \dots \sim \Delta P_{2k-1}P_{2k}M_{2k-1} \sim \Delta P_1P_{2k}N_{2k}$，再向內、外，作$2k$個一組同向相似三角形$\Delta P_1P_2N_1 \sim \Delta P_3P_2M_2 \sim \dots \sim \Delta P_{2k-1}P_{2k}N_{2k-1} \sim \Delta P_1P_{2k}M_{2k}$。其中，$\overline{M_1Q_1}\perp\overline{P_1P_2}$，$\overline{P_1Q_1}=\lambda\overline{Q_1P_2}$且$\overline{M_1Q_1}=\mu\overline{P_1P_2}$，則

(1)若兩組異向相似，則$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}}$

$$=2\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_2P_4\dots P_{2k}}+2\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_3\dots P_{2k-1}}+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_{2k}}$$

(2)若兩組同向相似，則$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}}$

$$=2\left(\frac{\lambda^2+1}{2(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\left(\bar{S}_{P_2P_4\dots P_{2k}}+\bar{S}_{P_1P_3\dots P_{2k-1}}\right)+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_{2k}}$$

證明.

1.先證明兩組異向相似之情形。如圖 20，依據性質 5.1.1.可得坐標

$$M_{2i-1}\left(\frac{x_{2i-1}+\lambda x_{2i}}{1+\lambda}+\mu(y_{2i}-y_{2i-1}),\ \frac{y_{2i-1}+\lambda y_{2i}}{1+\lambda}-\mu(x_{2i}-x_{2i-1})\right)$$

$$N_{2i-1}\left(\frac{x_{2i-1}+\lambda x_{2i}}{1+\lambda}-\mu(y_{2i}-y_{2i-1}),\ \frac{y_{2i-1}+\lambda y_{2i}}{1+\lambda}+\mu(x_{2i}-x_{2i-1})\right)$$

$$M_{2i}\left(\frac{x_{2i+1}+\lambda x_{2i}}{1+\lambda}+\mu(y_{2i+1}-y_{2i}),\ \frac{y_{2i+1}+\lambda y_{2i}}{1+\lambda}-\mu(x_{2i+1}-x_{2i})\right)$$

$$N_{2i}\left(\frac{x_{2i+1}+\lambda x_{2i}}{1+\lambda}-\mu(y_{2i+1}-y_{2i}),\ \frac{y_{2i+1}+\lambda y_{2i}}{1+\lambda}+\mu(x_{2i+1}-x_{2i})\right)$$

其中，$i=1,2,\dots,k$

再將坐標代入下式

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2n-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2n-1}M_{2k}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix}x_{M_{2i-1}} & x_{N_{2i}}\\ y_{M_{2i-1}} & y_{N_{2i}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{N_{2i}} & x_{M_{2i+1}}\\ y_{N_{2i}} & y_{M_{2i+1}}\end{vmatrix}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix}x_{N_{2i-1}} & x_{M_{2i}}\\ y_{N_{2i-1}} & y_{M_{2i}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{M_{2i}} & x_{N_{2i+1}}\\ y_{M_{2i}} & y_{N_{2i+1}}\end{vmatrix}\right)$$

化簡後可得

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left\{\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2\left[\lambda^2\left(\begin{vmatrix}x_{2i} & x_{2i+2}\\ y_{2i} & y_{2i+2}\end{vmatrix}\right)+\lambda\left(\begin{vmatrix}x_{2i-1} & x_{2i}\\ y_{2i-1} & y_{2i}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}x_{2i} & x_{2i+1}\\ y_{2i} & y_{2i+1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{2i+1} & x_{2i+2}\\ y_{2i+1} & y_{2i+2}\end{vmatrix}\right)+\left(\begin{vmatrix}x_{2i-1} & x_{2i+1}\\ y_{2i-1} & y_{2i+1}\end{vmatrix}\right)\right]\right\}+$$

$\sum_{i=1}^{k}\mu^2(\begin{vmatrix}x_{2i} & x_{2i+2}\\ y_{2i} & y_{2i+2}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_{2i-1} & x_{2i}\\ y_{2i-1} & y_{2i}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}x_{2i} & x_{2i+1}\\ y_{2i} & y_{2i+1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{2i+1} & x_{2i+2}\\ y_{2i+1} & y_{2i+2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{2i-1} & x_{2i+1}\\ y_{2i-1} & y_{2i+1}\end{vmatrix})$

$$=\left[\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2+\mu^2\right]\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix}x_{2i} & x_{2i+2}\\ y_{2i} & y_{2i+2}\end{vmatrix}\right)+\left[\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2+\mu^2\right]\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix}x_{2i-1} & x_{2i+1}\\ y_{2i-1} & y_{2i+1}\end{vmatrix}\right)$$

$$+\left[\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right]\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix}x_{2i-1} & x_{2i}\\ y_{2i-1} & y_{2i}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}x_{2i} & x_{2i+1}\\ y_{2i} & y_{2i+1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{2i+1} & x_{2i+2}\\ y_{2i+1} & y_{2i+2}\end{vmatrix}\right)$$

$$=2\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_2P_4\dots P_{2k}}+2\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_3\dots P_{2k-1}}+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_{2k}}$$

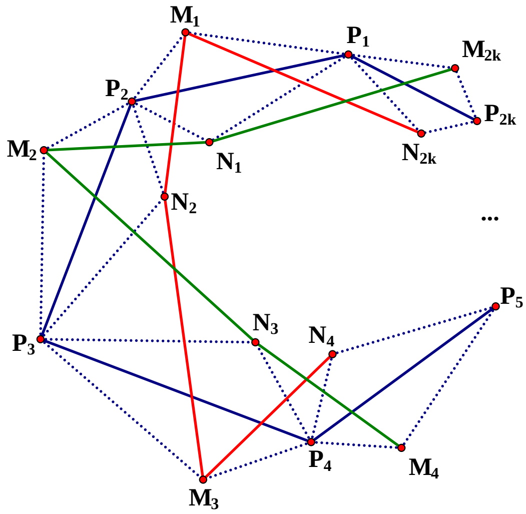


圖 20 偶多邊形異向相似

2.再證明兩組同向相似之情形

如圖 21，分別作M_i與N_i關於$\overline{P_iP_{i+1}}$的對稱點T_i與S_i

依據前項證明可得

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{T_1S_2T_3S_4\dots T_{2k-1}S_{2k}}$$

$$=2\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_2P_4\dots P_{2k}}+2\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_3\dots P_{2k-1}}+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_{2k}}$$

$$\bar{S}_{S_1T_2S_3T_4\dots S_{2k-1}T_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}}$$

$$=2\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_2P_4\dots P_{2k}}+2\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_3\dots P_{2k-1}}+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_{2k}}$$

注意到：因對稱性所以

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}}=\bar{S}_{T_1S_2T_3S_4\dots T_{2k-1}S_{2k}}+\bar{S}_{S_1T_2S_3T_4\dots S_{2k-1}T_{2k}}$$

因此

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{T_1S_2T_3S_4\dots T_{2k-1}S_{2k}}+\bar{S}_{S_1T_2S_3T_4\dots S_{2k-1}T_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\lambda^2+1}{2(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\left(\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}}+\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k-1}}\right)+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k}}$$

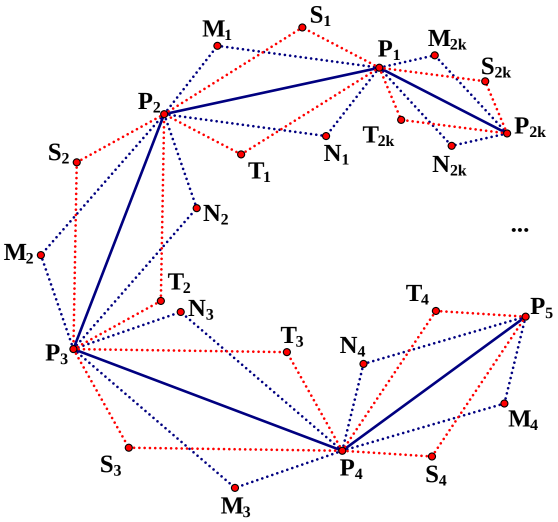


圖 21 偶多邊形同向相似

□

再證明奇多邊形，在性質 5.2.2.中可發現封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形存在有向面積不變量。相較偶多邊形，奇多邊形的有向面積定值由「奇數頂點所構成多邊形」、「偶數頂點所構成多邊形」、「原多邊形」以及一個校正項「$\Delta P_1P_2P_{2k+1}$」所組成。

性質 5.2.2. 在奇多邊形$P_1P_2\ldots P_{2k+1}$中（$k\in\mathbb{N}; P_{(2k+1)+j}=P_j$），自$\overline{P_1P_2}$邊上起依序向外、內，作$2k+1$個一組同向相似三角形$\Delta P_1P_2M_1\sim\Delta P_3P_2N_2\sim\ldots\sim\Delta P_{2k+1}P_{2k}N_{2k}\sim\Delta P_{2k+1}P_1M_{2k+1}$，再向內、外，作$2k+1$個一組同向相似三角形$\Delta P_1P_2N_1\sim\Delta P_3P_2M_2\sim\ldots\sim\Delta P_{2k+1}P_{2k}M_{2k}\sim\Delta P_{2k+1}P_1N_{2k+1}$。其中，$\overline{M_1Q_1}\perp\overline{P_1P_2}$，$\overline{P_1Q_1}=\lambda\overline{Q_1P_2}$且$\overline{M_1Q_1}=\mu\overline{P_1P_2}$，則

(1)若兩組異向相似，則$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2n-1}N_{2k}M_{2k+1}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2n-1}M_{2k}N_{2k+1}}$

$$= 2\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}P_1}+2\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k+1}}+2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\left(2\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k+1}}-\bar{S}_{P_1P_2P_{2k+1}}\right)$$

(2)若兩組同向相似，則$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2n-1}N_{2k}M_{2k+1}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2n-1}M_{2k}N_{2k+1}}$

$$= 2\left(\frac{\lambda^2+1}{2(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\left(\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}P_1}+\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k+1}}\right)+2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\left(2\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k+1}}-\bar{S}_{P_1P_2P_{2k+1}}\right)$$

證明.

1.先證明兩組異向相似之情形。如圖 22-1，依據性質 5.2.1.有

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2k-1}N_{2k}M_{2k+1}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2k-1}M_{2k}N_{2k+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix} x_{M_{2i-1}} & x_{N_{2i}} \\ y_{M_{2i-1}} & y_{N_{2i}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{N_{2i}} & x_{M_{2i+1}} \\ y_{N_{2i}} & y_{M_{2i+1}} \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} x_{M_{2i+1}} & x_{M_1} \\ y_{M_{2i+1}} & y_{M_1} \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix} x_{N_{2i-1}} & x_{M_{2i}} \\ y_{N_{2i-1}} & y_{M_{2i}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{M_{2i}} & x_{N_{2i+1}} \\ y_{M_{2i}} & y_{N_{2i+1}} \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} x_{N_{2i+1}} & x_{N_1} \\ y_{N_{2i+1}} & y_{N_1} \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \left[\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + \mu^2\right]\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix} x_{2i} & x_{2i+2} \\ y_{2i} & y_{2i+2} \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 + \mu^2\right]\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix} x_{2i-1} & x_{2i+1} \\ y_{2i-1} & y_{2i+1} \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} x_{2i+1} & x_1 \\ y_{2i+1} & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ \left[\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right]\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{vmatrix} x_{2i-1} & x_{2i} \\ y_{2i-1} & y_{2i} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x_{2i} & x_{2i+1} \\ y_{2i} & y_{2i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2i+1} & x_{2i+2} \\ y_{2i+1} & y_{2i+2} \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} x_2 & x_{2i+1} \\ y_2 & y_{2i+1} \end{vmatrix}\right\}$$

化簡後可得

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2k-1}N_{2k}M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2k-1}M_{2k}N_{2k+1}}$$

$$= 2\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + \mu^2\right)\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}P_1} + 2\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k+1}} + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right)\left(2\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k+1}} - \bar{S}_{P_1P_2P_{2k+1}}\right)$$

2.證明方法與性質 5.2.1.相同，可得兩組同向相似之情形（圖 22-2）

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2k-1}N_{2k}M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2k-1}M_{2k}N_{2k+1}}$$

$$= 2\left(\frac{\lambda^2+1}{2(1+\lambda)^2} + \mu^2\right)\left(\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}P_1} + \bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k+1}}\right) + 2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} - \mu^2\right)\left(2\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k+1}} - \bar{S}_{P_1P_2P_{2k+1}}\right)$$

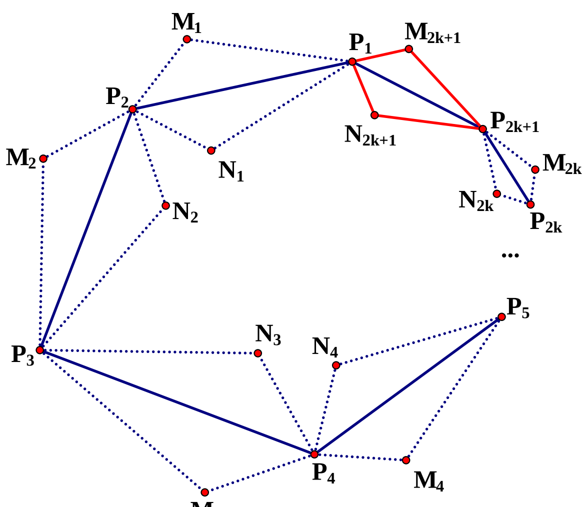


圖 22-1

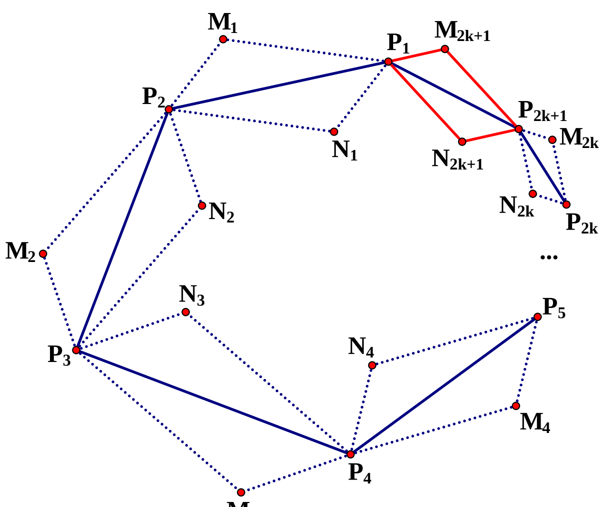


圖 22-2

□

應用性質 5.2.1.與性質 5.2.2.可以推得各邊構造特殊三角形的情形。

推論 5.2.1. 在多邊形$P_1P_2\ldots P_n$中，若依序取各邊中點D_1，再依序連接而成的中點多邊形$D_1D_2\ldots D_n$，則其有向面積

(1)若$P_1P_2\ldots P_n$為偶邊形，則$\bar{S}_{D_1D_2\ldots D_n} = \frac{1}{4}\left(\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_n} + \bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{n-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_n}\right)$

(2)若$P_1P_2 \dots P_n$為奇邊形，則$\bar{S}_{D_1D_2\dots D_n} = \frac{1}{4}\left(\bar{S}_{P_2P_4\dots P_{n-1}P_1} + \bar{S}_{P_1P_3\dots P_n} - \bar{S}_{P_1P_2P_n}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_n}\right)$

證明. 令$(\lambda,\mu) = (1,0)$代入性質 5.2.1.與性質 5.2.2.即可證明。

□

依據推論 5.2.1.有，在凸n邊形中，各邊中點連線所形成的中點多邊形面積公式

$$\frac{1}{2}\left(\textbf{原n 邊形面積}\right) + \frac{1}{4}\left(\textbf{n 角星面積} + \textbf{n 角星形狀內部所圍n邊形面積}\right)$$

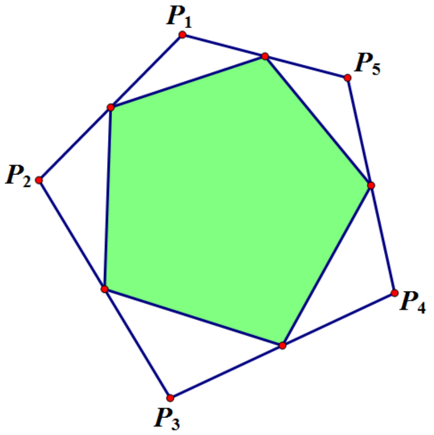


圖 23-1

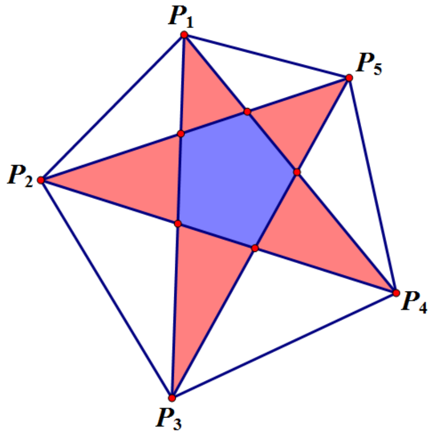


圖 23-2

推論 5.2.2. 若$(\lambda,\mu) = (1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，則可得在多邊形$P_1P_2 \dots P_n$中，依序在各邊向外、向內做正三角形的類拿破崙多邊形，則其有向面積定值

(1)若$P_1P_2 \dots P_n$為偶邊形，則

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2k-1}N_{2k}} + \bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2k-1}M_{2k}} = 2\left(\bar{S}_{P_2P_4\dots P_n} + \bar{S}_{P_1P_3\dots P_{n-1}} - \bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_n}\right)$$

(2)若$P_1P_2 \dots P_n$為奇邊形，則$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\dots M_{2n-1}N_{2k}M_{2k+1}} + \bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\dots N_{2n-1}M_{2k}N_{2k+1}}$

$$= 2\left(\bar{S}_{P_2P_4\dots P_{n-1}P_1} + \bar{S}_{P_1P_3\dots P_n} - \bar{S}_{P_1P_2P_3\dots P_n}\right) + \bar{S}_{P_1P_2P_n}$$

推論 5.2.3. 若$(\lambda,\mu) = (\lambda,\sqrt{\lambda})$，則可得在多邊形$P_1P_2 \dots P_n$中，依序在各邊向外、向內做直角三角形（等同以各邊為箏形或矩形的對角線依序作同向相似形）的類拿破崙多邊形，則其有向面積定值。

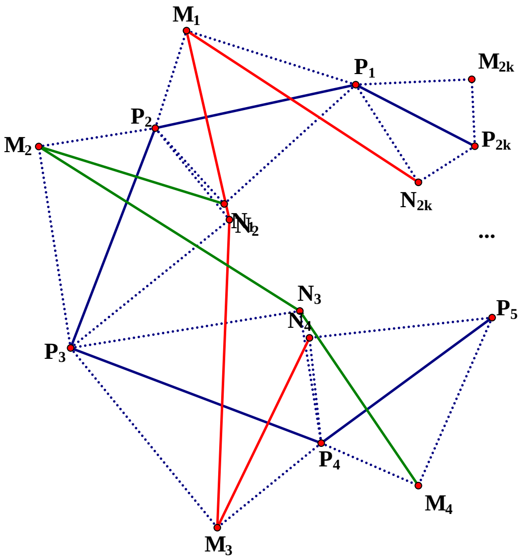


圖 24-1 以各邊為對角線的箏形

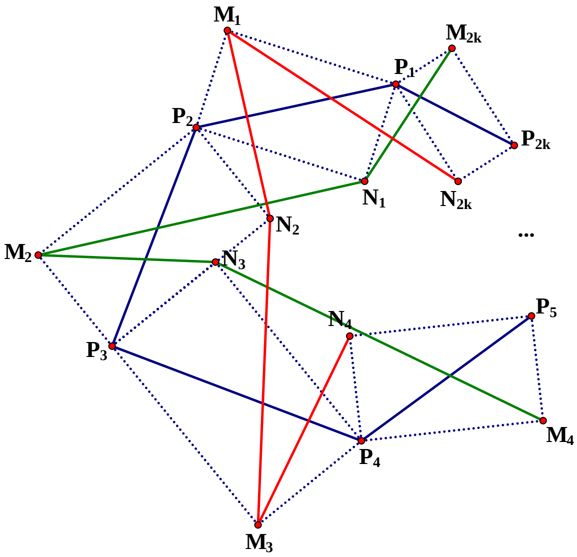


圖 24-2 以各邊為對角線的矩形

□

6.平面上任意點與類拿破崙多邊形頂點所構成的三角形的有向面積定值

前一節，我們證明了任意封閉 n 邊形的兩個類拿破崙多邊形的有向面積不變量。我們觀察到坐標$M_i(x_{M_i}, y_{M_i})$與$N_i(x_{N_i}, y_{N_i})$具有對稱性，所以我們嘗試討論是否還有其他的有向面積定值？於是，我們在平面上任意取 Q 點（圖形內部、邊上、外部），討論每一個三角形的有向面積和$\sum_{i=1}^{n} \bar{S}_{\Delta QM_iN_i}$，最後發現僅在同向相似時，其有向面積為不變量。

性質 6.1.1. 在n邊形$P_1P_2 \ldots P_n$中（$n \in \mathbb{N}; P_{n+j} = P_j$），自$\overline{P_1P_2}$邊上起依序向外、內，作n個一組同向相似三角形$\Delta P_1P_2M_1 \sim \Delta P_3P_2N_2 \sim \ldots \sim \Delta P_{2k+1}P_{2k}N_{2k} \sim \Delta P_{2k+1}P_1M_{2k+1}$，再向內、外，作n個一組同向相似三角形$\Delta P_1P_2N_1 \sim \Delta P_3P_2M_2 \sim \ldots \sim \Delta P_{2k+1}P_{2k}M_{2k} \sim \Delta P_{2k+1}P_1N_{2k+1}$。其中，$\overline{M_1Q_1} \perp \overline{P_1P_2}$，$\overline{P_1Q_1} = \lambda\overline{Q_1P_2}$且$\overline{M_1Q_1} = \mu\overline{P_1P_2}$。若在平面上任取一點Q，則有向面積

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{S}_{\Delta QM_iN_i} = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\bar{S}_{P_1P_2\ldots P_n}$$

證明.

如圖 25，依據性質 5.1.1.有

$\sum_{i=1}^{n} \bar{S}_{\Delta QM_iN_i}$

$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x & x_{m_i} & x_{n_i} & x \\ y & y_{m_i} & y_{n_i} & y \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{x\left[\frac{(1-\lambda)(y_i-y_{i+1})}{1+\lambda}-2\mu(x_{i+1}-x_i)\right]+y\left[\frac{(1-\lambda)(x_{i+1}-x_i)}{1+\lambda}-2\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(1+\lambda)^2}[(x_i+\lambda x_{i+1})(y_{i+1}+\lambda y_i)-(x_{i+1}+\lambda x_i)(y_i+\lambda y_{i+1})]\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{\mu^2[(y_{i+1}-y_i)(x_{i+1}-x_i)-(y_{i+1}-y_i)(x_{i+1}-x_i)]\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\mu}{1+\lambda}[(x_i+\lambda x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)+(y_{i+1}+\lambda y_i)(y_{i+1}-y_i)+(x_{i+1}+\lambda x_i)(x_{i+1}-x_i)+(y_i+\lambda y_{i+1})(y_{i+1}-y_i)]\right\}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)=0$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{S}_{\Delta QM_iN_i}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\lambda^2)}{(1+\lambda)^2}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)$$

$$=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\times\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}x_i & x_{i+1}\\ y_i & y_{i+1}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\bar{S}_{P_1P_2\ldots P_n}$$

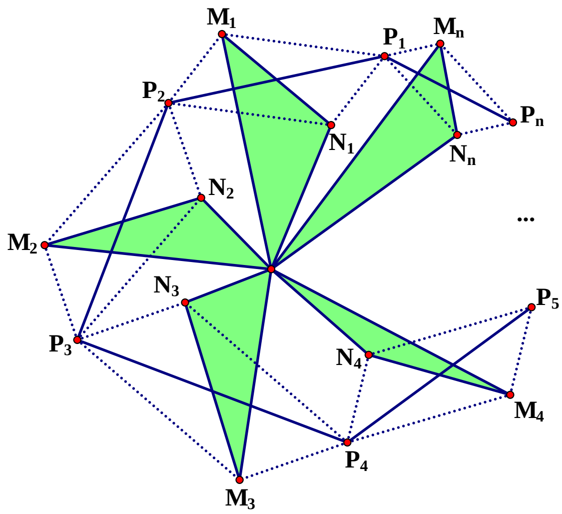


圖 25

□

推論 6.1.1. 在n邊形$P_1P_2\ldots P_n$中，若各邊上的中垂線有$n-1$條交於一點O，則n條中垂線交於一點。

證明. 依據性質6.1.1.得$\sum_{i=1}^{n}\bar{S}_{\Delta OM_iN_i}=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\bar{S}_{P_1P_2\ldots P_n}=0$，又因為已知$\sum_{i=1}^{n-1}\bar{S}_{\Delta OM_iN_i}=0$，所以$\Delta OM_nN_n=0$。因此，第 n 個邊的中垂線必通過O點。

□

陸、討論

本研究與過去全國科展作品或學者研究的主要差異在於：

（1）構造法的不同：我們採用外內（內外）交錯的方式操作構成類拿破崙多邊形，這樣的多邊形與傳統拿破崙多邊形完全不同，因此本文發現的性質皆為新的研究成果。

（2）類拿破崙四邊形具有一般性：許翰翔（2013）研究以傳統構作方式（全部向外或全

部向內）所構作拿破崙四邊形並「不具一般性」，例如：原四邊形為等腰梯形，則結果四邊形為鳶形[4]。然而，本研究的類拿破崙四邊形皆為「平行四邊形」，此外我們也將原多邊形推廣至任意凸四邊形、凹四邊形、8 字形，甚至是任意 n 邊形。

（3）有向面積不變量：關於傳統拿破崙多邊形面積不變量在吳躍生（2007）的研究已經給出一般化結果[1]（注意到：該研究的拿破崙多邊形與本研究的類拿破崙多邊形本質不同），但吳躍生的研究僅討論兩組異向相似的情形。本研究的類拿破崙多邊形則同時討論「異向相似」與「同向相似」的有向面積不變量。

柒、結論

一、三角形的類拿破崙多邊形有向面積定值與性質

（一）多邊形性質與有向面積不變量

我們發現任意ΔABC邊上依序向外、向內、向外（向內、向外、向內）作同向相似三角形所形成的兩個類拿破崙三角形，其有向面積定值為「不變量」：

$$\bar{S}_{\Delta DEF}+\bar{S}_{\Delta JKL}=2mn\cos(\alpha+\beta)\,\bar{S}_{\Delta ABC}=2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{\Delta ABC}$$

此兩個類拿破崙三角形與ΔABC頂點A可形成「平行四邊形」，定義為類拿破崙平行四邊形，其有向面積定值為：

$$\bar{S}_{ADEF}+\bar{S}_{AJKL}=4mn\cos(\alpha+\beta)\bar{S}_{\Delta ABC}=4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{\Delta ABC}$$

再討論特殊化，由正三角形構造的類拿破崙三角形，也就是取值

$(m,n,\alpha,\beta)=(1,1,60°,60°)$／$(\lambda,\mu)=(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的情形，可得到

$$\bar{S}_{\Delta DEF}+\bar{S}_{\Delta JKL}=-\bar{S}_{\Delta ABC}$$

同時再取正三角形的外心形成另外兩個類拿破崙三角形，同樣有面積不變量

$$\bar{S}_{\Delta MNP}+\bar{S}_{\Delta GHI}=-\frac{1}{3}\bar{S}_{\Delta ABC}$$

（二）對偶性

分別將前面四個類拿破崙三角形的頂點與原ΔABC的頂點 A 可形成四個平行四邊形，定義平行四邊形ADEF為第Ⅰ型、平行四邊形AGHI為第Ⅱ型、平行四邊形AJKL為第Ⅲ型、平行四邊形AMNP為第Ⅳ型。

我們發現第Ⅰ型與第Ⅳ型相互對偶、第Ⅱ型與第Ⅲ型相互對偶，其中向「外」與向「內」為對偶元素，「頂點」與「外心」互為對偶元素。

在本研究中，還可以推廣對偶到由任意相似三角形所構造的類拿破崙多邊形之情形，當$\alpha+\beta=90°$，則平行四邊形$ADEF\cong$平行四邊形$JKLA$。

二、四邊形的類拿破崙多邊形有向面積定值與性質

許翰翔（2013）研究所構作拿破崙結果四邊形並「不具一般性」[4]，然而，**本研究改變構造方式得到「類拿破崙四邊形」則具有一般性**，無論原多邊形為凸四邊形、凹四邊形或 8 字形，由同向相似三角形所構作的類拿破崙四邊形**皆為平行四邊形**！

類拿破崙平行四邊形有向面積定值為

$$\bar{S}_{EFGH}+\bar{S}_{IJKL}=4mn\cos(\alpha+\beta)\bar{S}_{ABCD}=4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{ABCD}$$

同樣的，我們也發現對偶條件，若$\alpha+\beta=90°$，則平行四邊形$EFGH\cong$平行四邊形$IJKL$。

同時，我們發現存在極值

$$4mn\cos(\alpha+\beta)\le 1$$

其中，等號成立時，若且唯若$(\alpha,\beta)=(0°,0°)$／$(\lambda,\mu)=(1,0)$，其幾何意義就是退化為各邊的中點。

三、封閉 n 邊形的類拿破崙多邊形

（一）有向面積不變量

在封閉的 n 邊形$P_1P_2\ldots P_n$的邊上$\overline{P_iP_{i+1}}$，依據本研究的定義構造類拿破崙多邊形，其中我們將以喻德生的研究使用(λ,μ)來定義相似三角形[6]，並求出兩個類拿破崙多邊形之頂點坐標，結果依舊存在「**有向面積不變量**」:

1.若$P_1P_2\ldots P_n$為偶邊形且兩組三角形異向相似，則

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2k-1}M_{2k}}$$

$$=2\left(\frac{\lambda^2+1}{2(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\left(\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}}+\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k-1}}\right)+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k}}$$

利用對稱性，可再得兩組三角形同向相似之結果

2.若$P_1P_2\ldots P_n$為偶邊形且兩組三角形同向相似，則

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2k-1}N_{2k}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2k-1}M_{2k}}$$

$$=2\left(\frac{\lambda^2+1}{2(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\left(\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}}+\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k-1}}\right)+4\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k}}$$

3.若$P_1P_2\ldots P_n$為奇邊形且兩組三角形異向相似，則

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2n-1}N_{2k}M_{2k+1}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2n-1}M_{2k}N_{2k+1}}$$

$$=2\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}P_1}+2\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k+1}}+2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\left(2\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k+1}}-\bar{S}_{P_1P_2P_{2k+1}}\right)$$

4.若$P_1P_2\ldots P_n$為奇邊形且兩組三角形同向相似，則

$$\bar{S}_{M_1N_2M_3N_4\ldots M_{2n-1}N_{2k}M_{2k+1}}+\bar{S}_{N_1M_2N_3M_4\ldots N_{2n-1}M_{2k}N_{2k+1}}$$

$$=2\left(\frac{\lambda^2+1}{2(1+\lambda)^2}+\mu^2\right)\left(\bar{S}_{P_2P_4\ldots P_{2k}P_1}+\bar{S}_{P_1P_3\ldots P_{2k+1}}\right)+2\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}-\mu^2\right)\left(2\bar{S}_{P_1P_2P_3\ldots P_{2k+1}}-\bar{S}_{P_1P_2P_{2k+1}}\right)$$

（二）應用

考慮(λ,μ)不同取值時，可以得到特殊情形，例如：$(\lambda,\mu)=(1,0)$，則可得中點多邊形面積公式；$(\lambda,\ \mu)=(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，則可得由正三角形構造的類拿破崙多邊形有向面積定值；$(\lambda,\ \mu)=(\lambda,\sqrt{\lambda})$，則可得由直角三角形構造的類拿破崙多邊形有向面積定值。

四、平面任意點與類拿破崙多邊形頂點形成的三角形

在平面上任意取 Q 點，討論每一個三角形的有向面積和$\sum_{i=1}^{n}\bar{S}_{\Delta QM_iN_i}$，研究發現僅在同向相似時，其有向面積為不變量：

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{S}_{\Delta QM_iN_i}=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\bar{S}_{P_1P_2\ldots P_n}$$

應用前式可推得n邊形的外心定理，也就是「若各邊上的中垂線有$n-1$條交於一點，則n條中垂線必交於一點」。

捌、參考資料

[1]吳躍生（2007）。關於平面閉折線有向面積的一個定理及其推論。**贛南師範學院報**，2007（3），48-51。

[2]洪紹軒、張能傑、蔡秉洲（2004）。**面具下的拿破崙三角形**。第 44 屆全國中小學科展國中數學科作品。

[3]張景中（1999）。**數學家的眼光**。臺北市：九章出版社。

[4]許翰翔（2013）。**拿破崙的四角戀－將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討**。第 53 屆全國中小學科展國中數學科作品。

[5]陳致安、朱建威、陳揚叡（2006）。**拿破崙三角形與畢氏定理的聯想**。第 46 屆全國中小學科展國中數學科作品。

[6]喻德生（2004）。關於外、內三角形有向面積的兩個定理及其推論。**宜春學院學報(自然科學)**，**26**（6），19-21。

[7]黃家禮（2000）。**幾何明珠**。臺北市：九章出版社。

[8]黃翊暢、張家誠、鍾承成（2014）。**活化△的邊**。第 54 屆全國中小學科展國中數學科作品。

[9]鍾昀澔、薛兆原、李念竺（2012）。**任意三角形衍生形的幾何性質研究**。第 52 屆全國中小學科展高中組數學科作品。

[10]WolframAlpha. http://www.wolframalpha.com/

【評語】030419

拿破崙多邊形為常見之科展研究題材。本作品考慮沿多邊形取一內一外(或一外一內)之多邊形，所得之兩個多邊形之面積的定量關係。此設定有創意，然發展性有限。未來可考慮取 mod r 之內外，看是否能走出此類研究的新路。