中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030417

層層相映

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 鍾承成	張淑敏
國二 鄭育澧	林耀南
國一 鍾承佑	

關鍵詞：臨界值不等式、成功層

摘要

本文主要分為兩個部分：第一部分專注在一維直線上及二維平面上的各系統運算存活的最大層數公式探討，其中最有趣的是臨界值的角色，讓玩家能預判該遊戲的層數壽命。第二部分專注在應用上，分為幾何鏡射作圖印證，及三維空間上的四面體系統延伸，成果奧妙精彩。

壹、 研究動機

數學遊戲，是學習數學的好方法，在網路上，我們看見許多遊戲，發現「數字方塊」，這個遊戲很特別又有趣。這個遊戲有很多種玩法，有兩個角的差，並將差寫在其邊上；或者是兩個邊上的數字，等於其包夾的角……等，幾種玩法，我們比較喜歡上述第二種，並開始了我們的研究之路。但這種遊戲玩法只有玩四邊形，且每層數字的總和都相等，那三邊形、五邊形呢？又第二層的數字總和，是否能不和第一層的總和相同？在玩的過程中，發現有的題目很長命，也就是創造出很多層方塊，但有些很短命，方塊很快就結束了。我們希望能夠在遊戲前，就能預知方塊壽命的層數，藉以事先判定各年齡層較適合的玩法，並嘗試著推算出其公式，且證明它。

貳、 名詞定義

1. 系統第一層：初始所填的數字層；系統第二層：接續運算得出的數字層；…以此類推。
2. A_n、B_n、C_n、D_n…：指第 n 層的所有數字，其中 $A_n \le B_n \le C_n \le D_n$…。
3. S：原始任意給定的組合中 A_1、B_1、C_1、D_1…之數字總和。
4. ax+b：內層相鄰兩數和為外層對應數 x 的 a 倍多 b，其中 a 為>0 之常數；b 為常數。也就是數值 X 的放大縮小或平移。
5. 成功層：若第 n 層中的 A_n、B_n、C_n、D_n…皆大於 0，則該層稱為成功層。
6. 失敗層：若第 n 層中的 A_n、B_n、C_n、D_n……，其中任一數≤0，則該層稱為失敗層。
7. L：在給定的數字組合下，所能運算成功的最大層數。
8. T_2、T_3、T_4…：各表示兩數、三數、四數…等的數字系統。
9. $A_1(L=n)$：最大成功層數為 n 的某系統中所對應的 A_1 值。
10. D(k,k+1)：為一個介於 $A_1(L=k)$至 $A_1(L=k+1)$的臨界值，即當一系統中 A_1 值≤D(k,k+1)時，其 L 值=k；若 A_1 值>D(k,k+1)時，其 L 值=k+1。
11. D(k,k+2)：為一個介於 $A_1(L_k)$至 $A_1(L_{k+2})$的臨界值，即當一系統中 A_1 值≤D(k,k+2)時，其 L 值=k；若 A_1 值>D(k,k+2)時，其 L 值=k+2。

參、 研究目的

一、 在 T_2 系統中，對任意 S 的指定值，及初始的相異兩點，探討其運算層數及各層之間的臨界值。

二、 在 T_3、T_4 系統中，a=2、b=0、S 為定值時，探討其運算層數及臨界值。

三、 在 T_3、T_4 系統中，內層相鄰兩數為其外層對應數 X 之 a 倍多 b(a≠2，b 為常數)、各層 S 不一定為同值時，探討其運算層數的公式。

四、 在立體 T_4 系統中，將 A_1、B_1、C_1、D_1 排成正四面體狀，內層四面體的每一面上的三個數字和等於對應外層頂點數值的三倍、S 為定值時，探討其運算層數的公式。

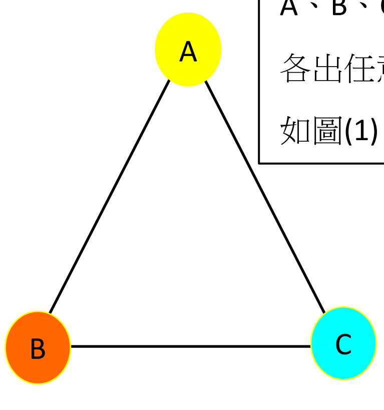
五、 取 S=180，a=2，利用幾何鏡射作圖印證 T_3 系統中的運算層數公式。

肆、 研究過程與方法

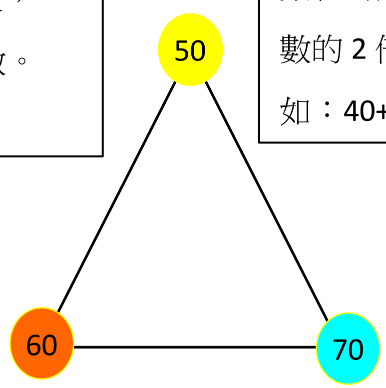
一、 實驗發想

平面系統的部分，我們設計一個遊戲，以 T=3(三個人)為例，其規則如下：現在總共有錢 S 元，在第一回合中，我們任意發給 A、B、C 三個玩家各 A_1、B_1、C_1元($A_1+B_1+C_1=S$)，而後開始進行遊戲。在第二回合當中，我們的遊戲必須達到以下的平衡：A 玩家與 B 玩家所持有錢的總數應為第一回合中 C 玩家的2倍；A 玩家與 C 玩家所持有錢的總數應為第一回合中 B 玩家的2倍; B 玩家與 C 玩家所持有錢的總數應為第一回合中 A 玩家的2倍。而第三回合以上遊戲的方法以此類推，直到其中有一人錢數歸零或是負債，遊戲就結束。此遊戲的目的在於探討一開始如何分配錢數而影響它所能玩的局數。由後文【實驗二】、【實驗三】的結果，我們可以很快的在一開始給定三者錢數後立即判斷此遊戲所能玩的局數。舉例如下，如圖(1)~(5)：

以 S=180，為例：
A、B、C 三人，
各出任意錢數。
如圖(1)、(2)：

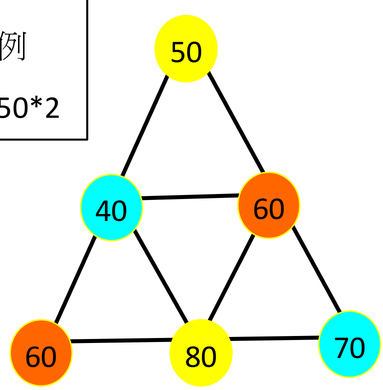


圖(1)



圖(2)

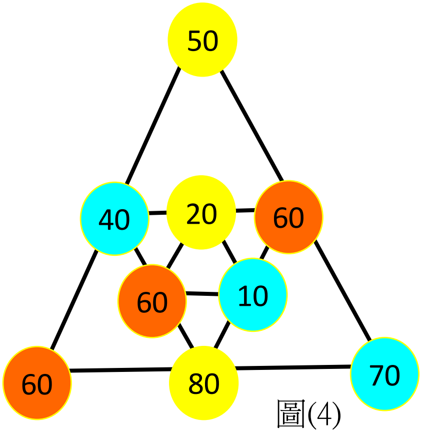
如圖(3)，內層兩
數和為對應外層
數的 2 倍，例
如：40+60=50*2



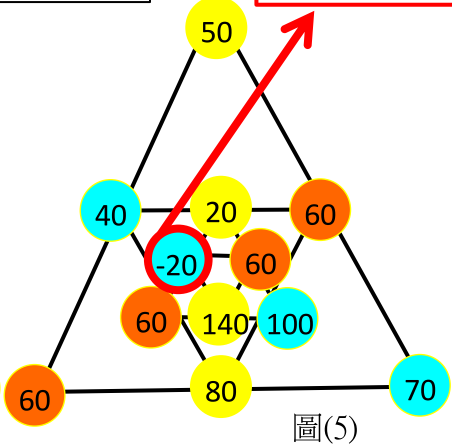
圖(3)

不斷重複第二層之規則。如圖(4)：

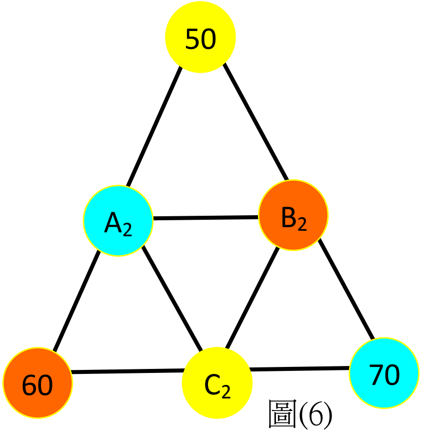
此數<0，因此第四層為失敗層。如圖(5)：



圖(4)



圖(5)



圖(6)

以下是我們一開始嘗試向內推演的方法，如圖(6)：

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 50 \times 2 \ldots\ldots ① \\ A_2 + C_2 = 60 \times 2 \ldots\ldots ② \\ B_2 + C_2 = 70 \times 2 \ldots\ldots ③ \end{cases}$$

將①+②+③：$2A_1+2B_1+2C_1=180$

得 $A_1+B_1+C_1=90$......④

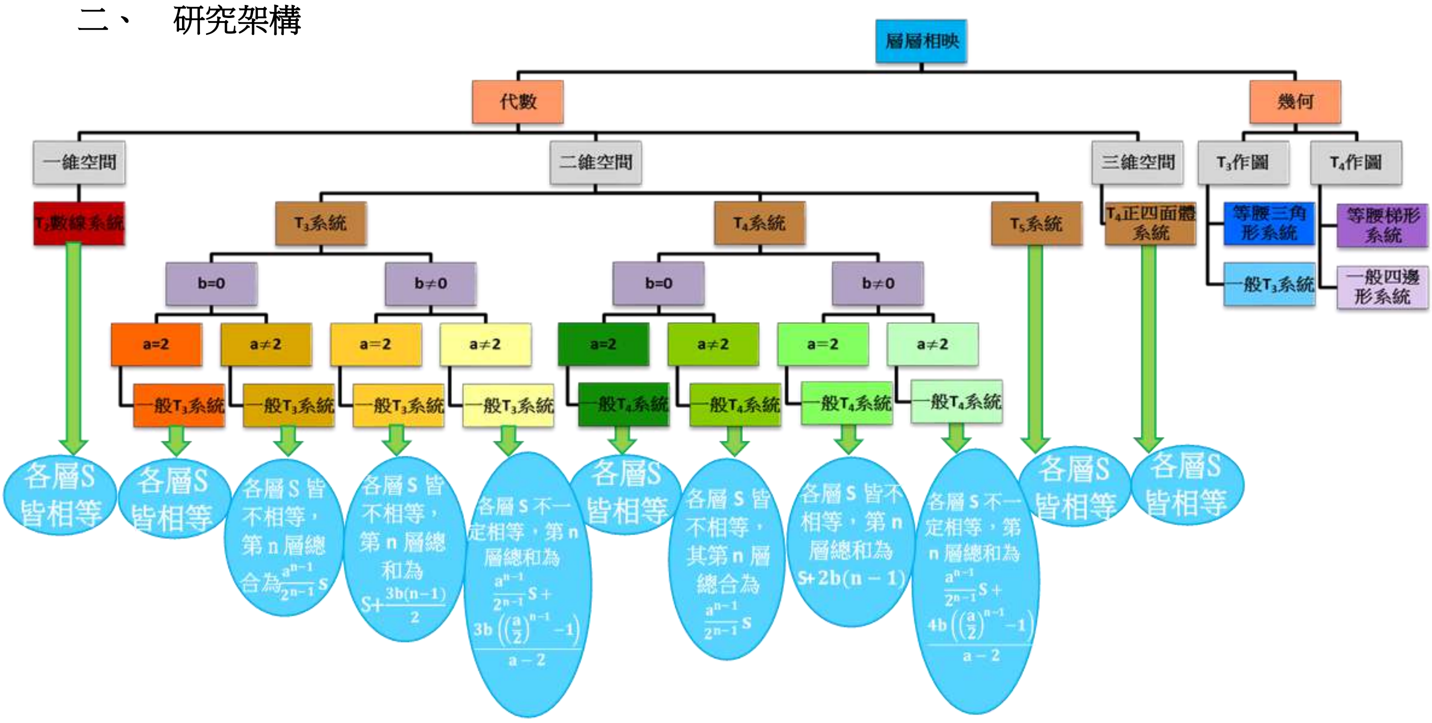
①代入④，得 $B_2=60$

②代入④，得 $A_2=40$

③代入④，得 $C_2=80$

我們可以如預期得出結果，但必須一層層往內算，很麻煩，最好能有個初始值與層數的關係式可以在一開始給定初始值時，就由此關係式推得可玩的最多層數。雖然在給初始值後可一層層的算下去，但當初始值改變時，我們就必須重新計算，非常不方便，我們想要找到那個範圍的臨界值，再藉由一開始的 A_1、B_1、C_1……落在那組臨界值不等式範圍內，而能正確的預判此組初始值可玩的最大層(局)數是多少層(局)。由於 T_3 牽涉三個數較麻煩，我們決定從較簡單的 T_2 系統開始嘗試。

二、 研究架構

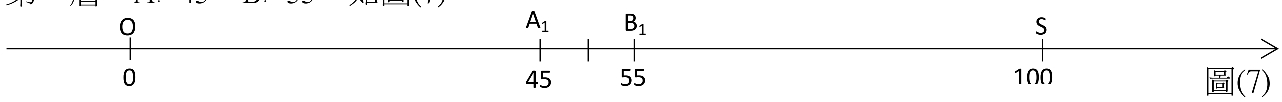


三、 在 T_2、T_3、T_4 系統中，S 是定值、a=2，的實驗與定理探討

(一)實驗一：在 T_2 系統上，對任意 S 的指定值，及初始的相異兩點，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

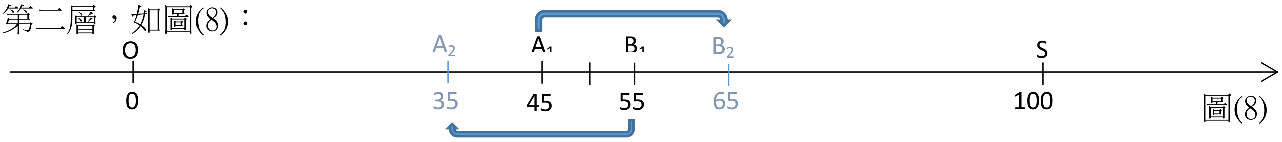
在 T_2 系統中，他不像 T_3 系統的規則「內層相鄰兩數和為外層對應數的兩倍」，而因 T_2 系統每層只有兩數，在不失規律的前提下 T_2 系統的規則是「內層數與外層的和為另一外層的兩倍」，例如，如圖(8)，$A_2+B_1=2A_1$，及 $B_2+A_1=2B_1$，其餘類推。此規則又恰好是數字內外的鏡射，例如，在數線上取 S=100，如圖(7)，第一層 $A_1=45$、$B_1=55$，第二層的取法為分別以 A_1、B_1 為對稱中心，取得對稱點為 $A_2=35$、$B_2=65$，如圖(8)，(對每一局我們都令 $A_m<B_m$)接下來如圖(9)，得 $A_3=5$、$B_3=95$，最後如圖(10)，第四層即為失敗層，因為 $A_4=-85<0$ 遊戲結束。設 T_2 系統中 S 等於 100，我們利用實驗的規則將其代數化(以 $A_1=45$、$B_1=55$ 為例)：

第一層：$A_1=45$、$B_1=55$，如圖(7)：



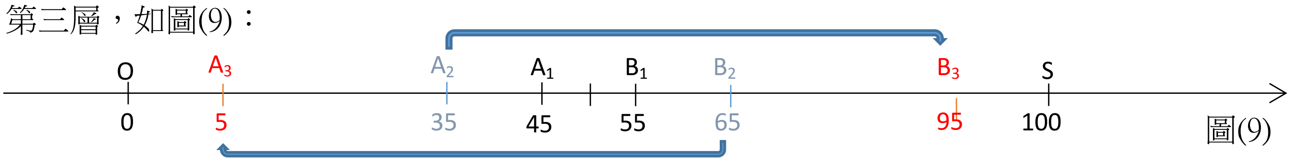
圖(7)

第二層，如圖(8)：



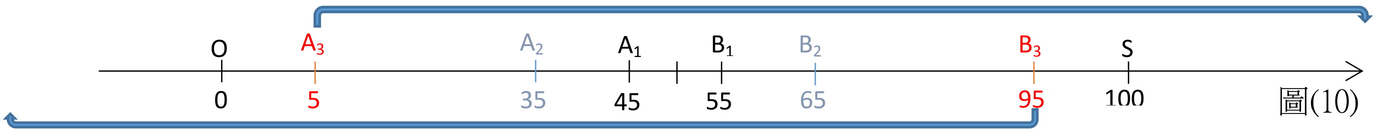
圖(8)

第三層，如圖(9)：



圖(9)

第四層，如圖(10)：失敗層



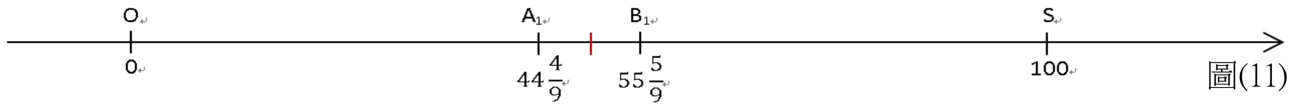
圖(10)

∵第四層中的 $A_4<0$，$B_4>100$，∴T_2 系統($A_1=45$，$B_1=55$)的 L 值為 3，簡稱 L_3。反過來說，在這 S=100 的 T_2 系統中，一定有很多不同的 A_1、B_1 可達到 L_3，也有很多不同的 A_1、B_1 可達到 L_4，又 $A_1 \le B_1$，當確定 A_1 後 B_1 即可確定，因此接下來我們要找尋的是 L_3 和 L_4 之間的臨界值 A_1，簡稱 D(3，4)，到此我們不禁要問，哪些範圍內的 A_1、B_1 遊戲到第四層必定會失敗呢？接下來我們要探討 T_2 系統的臨界值。以下是我們的發現：

發現一：在 T_2 系統中，當我們發現某兩連續層的臨界值 A_1 時，當下的每一成功層的 A_n 皆為前面連續層的臨界值。例如：在 S=100，從 0 到 100 的範圍中，假設存在一種組合其 L=5，且運算過程 $A_6=0$，$B_6=100$，則 D(5，6)=A_1，D(4，5)=A_2，D(3，4)=A_3，D(2，3)=A_4，D(1，2)=A_5……。

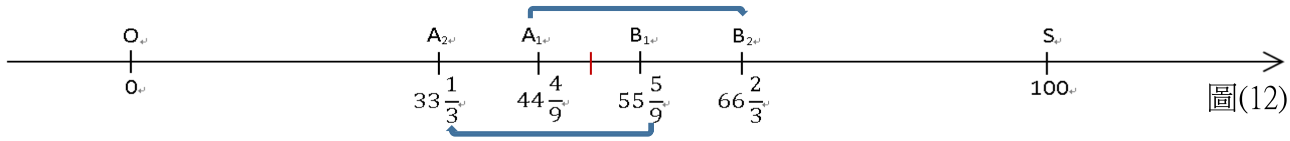
以 T_2 系統($A_1=44\frac{4}{9}$，$B_1=55\frac{5}{9}$)為例：

第一層：$A_1=44\frac{4}{9}$、$B_1=55\frac{5}{9}$，如圖(11)：



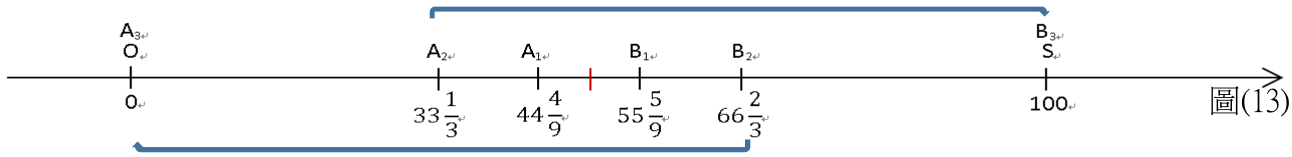
圖(11)

第二層：$A_2=A_1-(B_1-A_1)=2A_1-B_1=33\frac{1}{3}$、$B_2=B_1+(B_1-A_1)=2B_1-A_1=66\frac{2}{3}$ ，如圖(12)：



圖(12)

第三層：$A_3=A_2-(B_2-A_2)=2A_2-B_2=0$、$B_3=B_2+(B_2-A_2)=2B_2-A_2=100$...失敗層，如圖(13)：



圖(13)

$A_1=44\frac{4}{9}$為 D(2，3)的臨界值，因為在第三層中出現了 $A_3=0$、$B_3=100$，同時也印證 D(1，2)= $33\frac{1}{3}=A_2$，其餘以類似方法可推得。

以代數式計算出任意組合的 L 值後，我們嘗試推斷出 T_2 系統 S 等於 100 狀況下，關於任意 L 所對應 A_1 值與臨界值之公式。

我們先將 L<6 的臨界值列舉出來：

D(1，2)=$33\frac{1}{3}$　　D(2，3)=$44\frac{4}{9}$　　D(3，4)=$48\frac{4}{27}$　　D(4，5)=$49\frac{31}{81}$　　D(5，6)=$49\frac{193}{243}$

D(6，7)=$49\frac{629}{729}$　　D(7，8)=$49\frac{2137}{2187}$

觀察以上臨界值的列表，我們有以下的發現：

發現二：D(L-1，L)的臨界值與 D(L-2，L-1)的臨界值的差為 $33\frac{1}{3}$的$(\frac{1}{3^{L-2}})$倍，如表(1):

L	D(L-1，L)的臨界值	D(L-2，L-1)的臨界值	兩者之差	公式解
3	$44\frac{4}{9}$	$33\frac{1}{3}$	$\frac{100}{9}$	$33\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{3-2}})=\frac{100}{9}$
4	$48\frac{4}{27}$	$44\frac{4}{9}$	$\frac{100}{27}$	$33\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{4-2}})=\frac{100}{27}$
5	$49\frac{31}{81}$	$48\frac{4}{27}$	$\frac{100}{81}$	$33\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{5-2}})=\frac{100}{81}$
6	$49\frac{193}{243}$	$49\frac{31}{81}$	$\frac{100}{243}$	$33\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{6-2}})=\frac{100}{243}$
7	$49\frac{629}{729}$	$49\frac{193}{243}$	$\frac{100}{729}$	$33\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{7-2}})=\frac{100}{729}$
8	$49\frac{2137}{2187}$	$49\frac{629}{729}$	$\frac{100}{2187}$	$33\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{8-2}})=\frac{100}{2187}$

表(1)

根據《發現二》，我們發現相鄰兩臨界值的差為一等比數列，公比為$\frac{1}{3}$，我們利用這項規律，得出以下的定理：

定理一：若 L=n，在 T_2 系統中，取 S=100，a=2，並置放於數線上 0 至 100 之間，則 D(n-1，n)-D(n-2，n-1)為一公比為$\frac{1}{3}$，首項為 $33\frac{1}{3}$的等比數列，推得臨界值級數為 $33\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-2)}\right)$，n≥ 2，經過整理，得到 n(n 為任意指定的最大層數)所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：$50\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right)<A_1\leq 50\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$

接著，我們試著將公式推展到 S=任意正數，重複以上的實驗步驟，我們推理出了 S=任意正數的一般公式：

定理二：在 T_2 系統中，若 L=n，S=任意正數，a=2 時，則所對應 A_1 值與臨界值級數之不等式範圍為：$\frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right)<A_1\leq \frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$

推理出了一般式《定理二》後，我們嘗試著以代數式證明《定理二》，以下是我們的證明過程：

我們先推出 A_1 為任意數在任意層時 A_n 值的公式：

定理三：$A_n=A_1-(S-2A_1)-(3S-6A_1)-(9S-18A_1)\cdots\cdots=A_1-S+2A_1-3S+6A_1-9S+18A_1\cdots\cdots$

我們以等比和公式將其化簡：

$A_n=3^{(n-1)}A_1-\frac{S}{2}(3^{(n-1)}-1)$ 、 $B_n=3^{(n-1)}B_1-\frac{S}{2}(3^{(n-1)}-1)$

利用《發現一》與《定理三》，若《定理二》正確，則臨界值$\frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right)$在《定理三》中 L 層 A_L 為 0，其中 L=n。

《定理三》$A_n=3^{(n-1)}A_1-\frac{S}{2}(3^{(n-1)}-1)$中 A_1 以$\frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right)$代入：

$$A_n=3^{(n-1)}\left(\frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right)\right)-\frac{S}{2}(3^{(n-1)}-1)=\frac{S}{2}(3^{(n-1)}-1)-\frac{S}{2}(3^{(n-1)}-1)=0$$

$\therefore A_n=0$ 故《定理二》$\frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right)<A_1\leq \frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$成立。

(二)實驗二：在 T_3 系統中，當 A_1、B_1、C_1 皆為給定正數，a=2 時，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

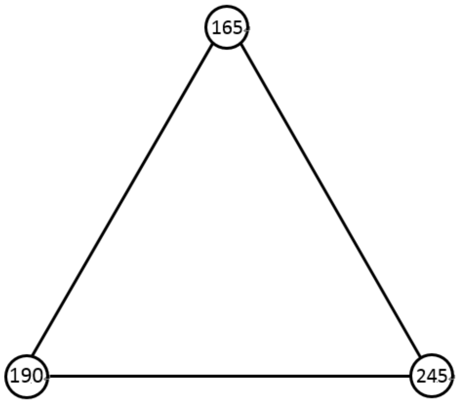
同上一個實驗，我們先將 S 設定為 600，並試著將系統以代數表示。

我們觀察系統的規律性，將其用代數式列出，以任意 T_3 系統

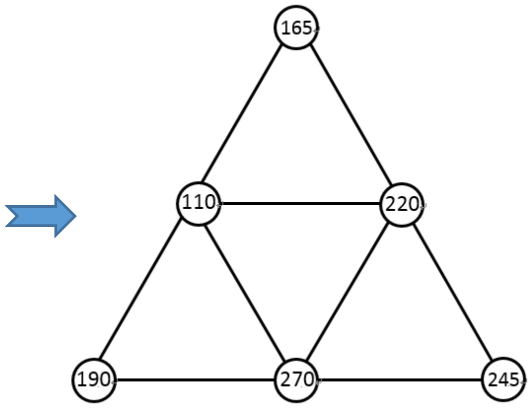
(A_1=165，B_1=190，C_1=245)為例：

第一層：$A_1=165$、$B_1=190$、$C_1=245$，如圖(14)：

第二層：$A_2=A_1+B_1-C_1=110$、$B_2=A_1+C_1-B_1=220$、$C_2=B_1+C_1-A_1=270$，如圖(15)：



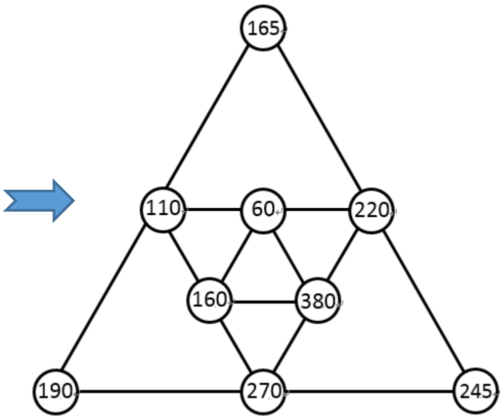
圖(14)



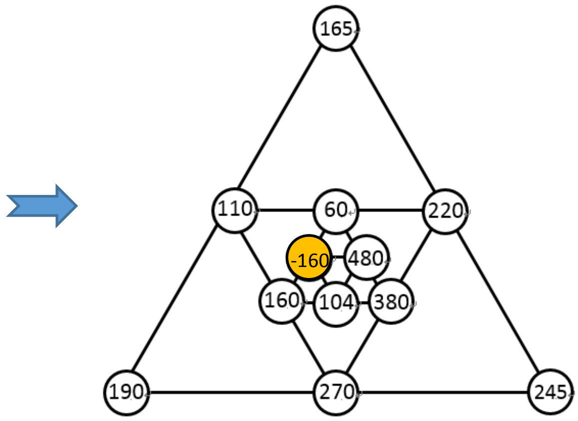
圖(15)

第三層：$A_3=A_2+B_2-C_2=60$、$B_3= A_2+C_2-B_2=160$、$C_3=B_2+C_2-A_2=380$，如圖(16)：

第四層：$A_4=A_3+B_3-C_3=-160$、$B_4= A_3+C_3-B_3=280$、$C_4=B_3+C_3-A_3=480$...**失敗層**，如圖(17)：



圖(16)



圖(17)

∵第四層中的 A_4 小於 0，∴T_3 系統($A_1=165$，$B_1=190$，$C_1=245$)的 L 值為 3。

我們利用上述的方法，試著求出此系統的臨界值，以下是我們的發現：

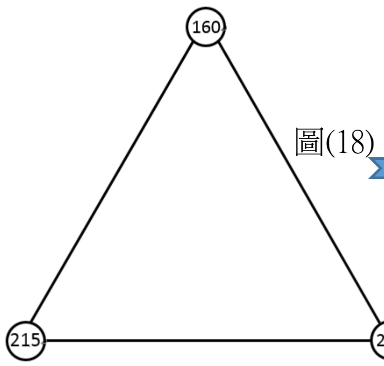
發現三：A_1、B_1、C_1 皆為任意正數的 T_3 系統中，若固定 B_1，改變 A_1 值時，偶數層之 C 值與奇數層之 A 值皆不變；若固定 A_1，改變 B_1 值時，任意層之 B 值皆不變。(見電子檔附件一)

發現四：A_1、B_1、C_1 皆為任意正數的 T_3 系統中，當 A_1 為臨界值時，(L+1)層之 $A_{(L+1)}$ 值為 0，$C_{(L+1)}$ 值為 $2B_L$。

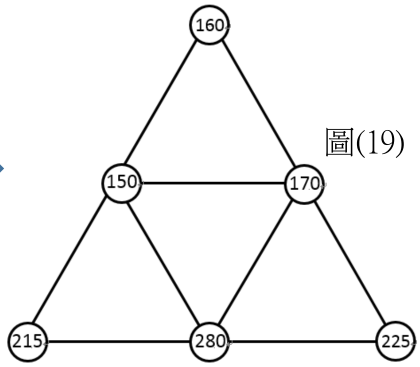
以 T_3 系統($A_1=160$，$B_1=215$，$C_1=225$)為例：

第一層：A_1=160、B_1=215、C_1=225，如圖(18)：

第二層：$A_2=A_1+B_1-C_1$=150、$B_2= A_1+C_1-B_1$=170、$C_2=B_1+C_1-A_1$=280，如圖(19)：



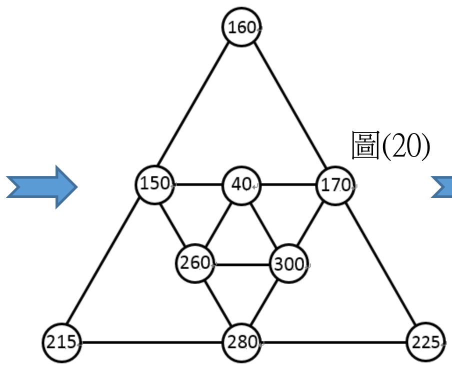
圖(18)



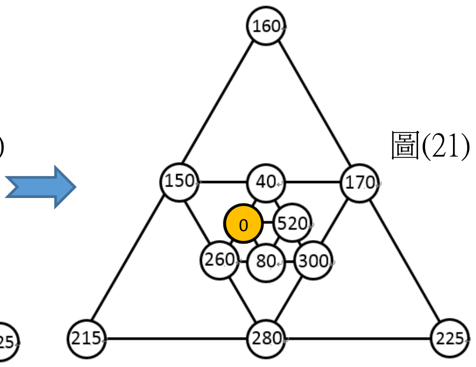
圖(19)

第三層：$A_3=A_2+B_2-C_2$=40、$B_3= A_2+C_2-B_2$=260、$C_3=B_2+C_2-A_2$=300，如圖(20)

第四層：$A_4=A_3+B_3-C_3$=0、$B_4= A_3+C_3-B_3$=80、$C_4=B_3+C_3-A_3$=520...失敗層，如圖(21)：



圖(20)



圖(21)

A_1=160 為 L=3 與 L=4 間的臨界值，在第四層中出現了 A_4=0。

利用上文的《發現四》，我們將 L<6 的臨界值列舉出來：

D(1，2)=300-B_1　D(2，3)=150　D(3，4)=375-B_1　D(4，5)=187.5　D(5，6)=393.75-B_1

D(6，7)=196.875　D(7，8)=398.4375-B_1　D(8，9)=199.21875

觀察以上臨界值並列表，我們得到以下的發現：

發現五：D(L-1，L)的臨界值當 L 為奇數時，不受 B_1 影響；D(L-1，L)的臨界值當 L 為偶數時，則會受 B_1 影響(見電子檔附件二)

發現六：D(L-1，L)的臨界值與 D(L-3，L-2)的臨界值的差在 B_1 為定值時(L=偶數)，(或 L=奇數，B_1 為任意數)均為 150 的($\frac{1}{2^{(L-3)}}$)倍，如表(2)、表(3):

L	D(L-1，L)的臨界值	D(L-3，L-2)的臨界值	兩者之差	公式解
4	375-B_1	300-B_1	75	150($\frac{1}{2^{4-3}}$)=75
6	393.75-B_1	375-B_1	18.75	150($\frac{1}{2^{6-3}}$)=18.75
8	398.4375-B_1	393.75-B_1	4.6875	150($\frac{1}{2^{8-3}}$)=4.6875

表(2)

L	D(L-1，L)的臨界值	D(L-3，L-2)的臨界值	兩者之差	公式解
5	187.5	150	37.5	$150(\frac{1}{2^{5-3}})=37.5$
7	196.875	187.5	9.375	$150(\frac{1}{2^{7-3}})=9.375$
9	199.21875	196.875	2.34375	$150(\frac{1}{2^{9-3}})=2.34375$

表(3)

根據《發現六》，我們發現任意臨界值皆為一等比數列的和，我們利用這項規律，得出以下的定理：

定理四：在 T_3 系統中，S=600，a=2，L=n，當 n 為奇數的臨界值級數 $150(\left(\frac{1}{4}\right)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{(\frac{n-3}{2})})$，經過整理，得到 A_1 值與臨界值之不等式為：

$$200(1-(\frac{1}{2})^{(n-1)})<A_1\le 200(2-\left(\frac{1^n}{2}\right))-B_1$$

而 n 為偶數的臨界值級數為 $300(\left(\frac{1}{4}\right)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{(\frac{n-2}{2})})$- B_1，經過整理，得到 A_1 值與臨界值之不等式為：

$$200(2-(\frac{1}{2})^{(n-1)})-B_1<A_1\le 200(1-\left(\frac{1^n}{2}\right))$$

接下來，我們試著將公式推展到 S=任意正數，重複以上的實驗步驟，我們推理出了 S=任意正數的一般公式：

定理五：在 T_3 系統中， S=任意正數，a=2 時，L=n，當 n 為奇數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：$\frac{S}{3}(1-(\frac{1}{2})^{(n-1)})<A_1\le\frac{S}{3}(2-\left(\frac{1^n}{2}\right))-B_1$

而 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{3}(2-(\frac{1}{2})^{(n-1)})-B_1<A_1\le\frac{S}{3}(1-\left(\frac{1^n}{2}\right))$$

將一般式《定理五》推理出來後，我們嘗試以代數式證明《定理五》，以下是我們的證明過程：

當 L=n，我們先推出 A_1 為任意正數在任意層時 A_n、B_n、C_n 值的公式：

定理六：$A_2=A_1+B_1-S$、$B_2=S-2B_1$ ；$A_3=A_2+B_2-S$、$B_3=S-2B_2$……，則 $A_2=A_1+B_1-S$、$B_2=S-2B_1$；$A_3=4A_1-S$、$B_3=-S+4B_1$；$A_4=8A_1+8B_1-5S$、$B_4=3S-8B_1$；$A_5=16A_1-5S$、$B_5=-5S+16B_1$……，我們以等比和公式將其化簡，得到以下六式：

當 n 為奇數時，$A_n=2^{(n-1)}A_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)$ 、 $B_n=2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)$

$C_n=2^{(n-1)}C_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)$

當 n 為偶數時，$A_n=2^{(n-1)}A_1+2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^n-1)$、$B_n=2^{(n-1)}A_1+2^{(n-1)}C_1-\frac{S}{3}(2^n-1)$

$C_n=2^{(n-1)}B_1+2^{(n-1)}C_1-\frac{S}{3}(2^n-1)$

利用《發現四》與《定理六》，若《定理五》正確，則 n=奇數之臨界值$\frac{S}{3}(1-(\frac{1}{2})^{(n-1)})$在《定理五》中第 n 層 A_n 為 0；L=偶數之臨界值$\frac{S}{3}(2-(\frac{1}{2})^{(n-1)})-B_1$在《定理五》中第 n 層 A_n 為 0。

以下為 L=n=奇數之證明：

《定理六》：$A_n=2^{(n-1)}A_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)$中 A_1 以$\frac{S}{3}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)})$代入：

$A_L=2^{(N-1)}(\frac{S}{3}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}))-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)$

$$=\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-2^{(n-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)})-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)$$

$$=\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-2^{(n-1)}2^{(-n+1)})-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)$$

$$=\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-2^{(n-1)}-1+1)=0$$

∴$A_n=0$　故當 n=奇數時《定理五》$\frac{S}{3}(1-(\frac{1}{2})^{(n-1)})<A_1\leq\frac{S}{3}(2-\left(\frac{1}{2}^{n}\right))-B_1$成立。

接下來為 L=n=偶數之證明：

《定理六》：$A_L=2^{(n-1)}A_1+2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^n-1)$中 A_1 以$\frac{S}{3}(2-(\frac{1}{2})^{(n-1)})-B_1$代入：

$A_L=2^{(n-1)}(\frac{S}{3}(2-(\frac{1}{2})^{(n-1)})-B_1)+2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^n-1)$

$$=\frac{S}{3}(2^{(n-1)}2-2^{(n-1)}2^{(-n+1)})-2^{(n-1)}B_1+2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^n-1)$$

$$=\frac{S}{3}(2^n-1)-\frac{S}{3}(2^n-1)=0$$

∴$A_n=0$　故當 n=偶數時《定理五》$\frac{S}{3}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2})<A_1\leq\frac{S}{3}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n})$亦成立。

(三)實驗三：在 T_4 系統中，當 A_1、B_1、C_1、D_1 皆為任意正數且 a=2 時，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

同上一個實驗，我們先將 S 設定為 600，並試著將系統以代數表示。

一開始，我們始終無法找出解答，經過一段時間的嘗試，我們得到以下的發現：

發現七：任意 T_4 系統中，兩不相鄰之值的和必須為 300(600 的一半)，L 值才可能大於 1。(見電子檔附件三)

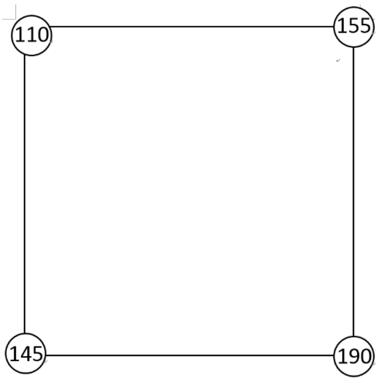
我們利用《發現七》，並觀察系統的規律性，將其用代數式列出，以任意 T_4 系統(A_1=110，B_1=145，C_1=155，D_1=190)為例，∵系統中兩不相鄰之值 A_1、D_1 的和 A_1+D_1=180，另外一組數 B_1、C_1 的

和 B_1+C_1 亦為 180∴我們推論其 L>1。以下是我們的計算過程

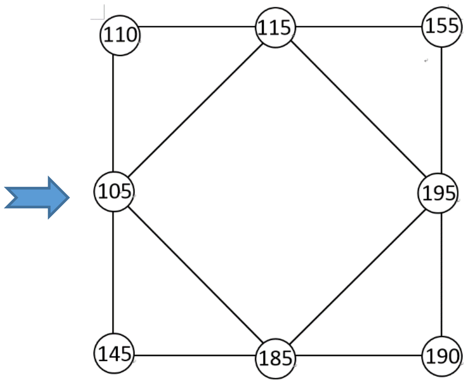
第一層：$A_1=110$、$B_1=145$、$C_1=155$、$D_1=190$，如圖(22)：

第二層：$A_2=A_1+B_1-90=105$、$B_2=2C_1-D_2=115$、$C_2=2B_1-A_2=185$、$D_2=C_1+D_1-90=195$，如圖(23)：

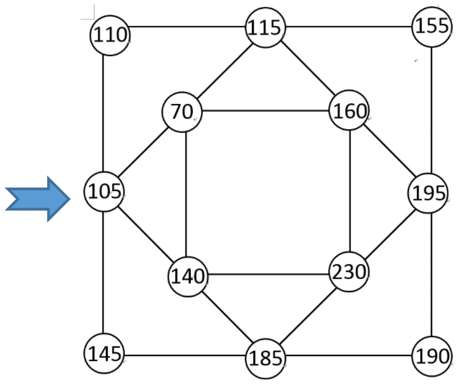
第三層：$A_3=2A_1-90=70$、$B_3=2A_2-A_3=140$、$C_3=2D_2-D_3=160$、$D_3=2D_1-90=230$，如圖(24)：



圖(22)



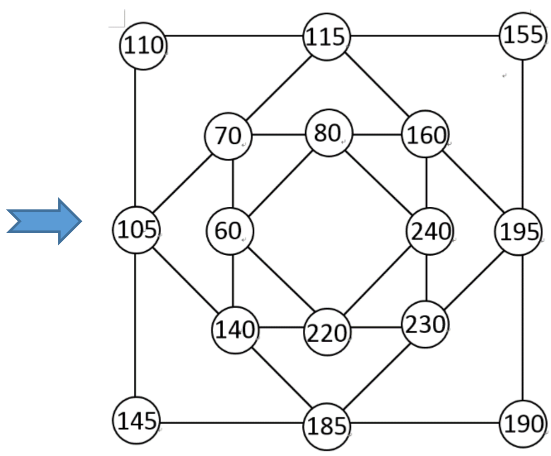
圖(23)



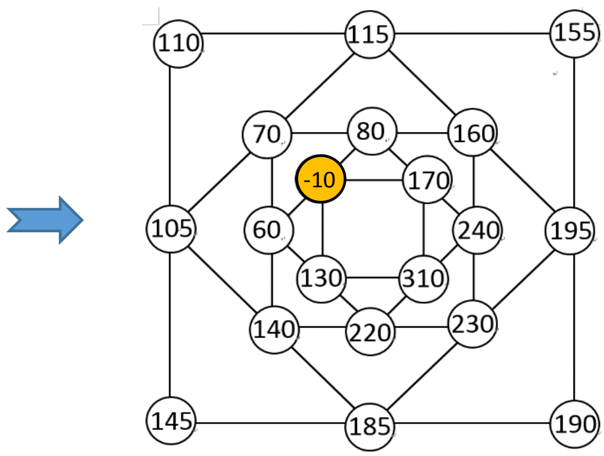
圖(24)

第四層：$A_4=A_3+B_3-90=60$、$B_4=2C_3-D_4=80$、$C_4=2B_3-A_4=220$、$D_4=C_3+D_3-90=240$，如圖(25)：

第五層：$A_5=2A_3-90=-10$、$B_5=2A_4-A_5=130$、$C_5=2D_4-D_5=170$、$D_5=2D_3-90=310$...失敗層，如圖(26)：



圖(25)



圖(26)

∵第五層中的 A_5 小於 0，∴T_4 系統($A_1=110$，$B_1=145$，$C_1=155$，$D_1=190$)的 L 值為 4。

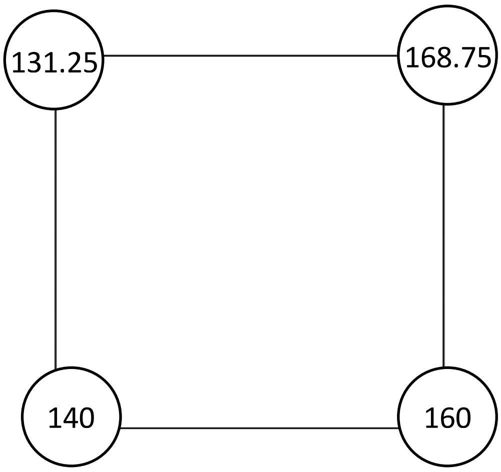
我們利用上述的方法，試著求出此系統的臨界值，以下是我們的發現：

發現八：在 S=600 的，T_4 系統中，當 A_1 為臨界值時，其(L+1)層之 $A_{(L+1)}$ 為 0，$B_{(L+1)}$ 與 $C_{(L+1)}$ 為 150，$D_{(L+1)}$ 為 300。

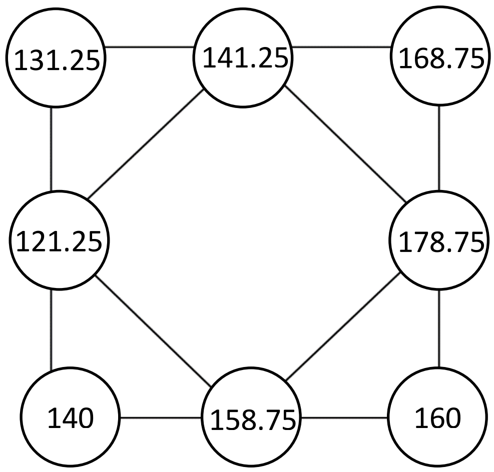
以 T_4 系統($A_1=131.25$，$B_1=140$，$C_1=168.75$，$D_1=160$)為例：

第一層：$A_1=131.25$、$B_1=140$、$C_1=168.75$、$D_1=160$，如圖(27)：

第二層：$A_2=A_1+B_1-150=121.25$、$B_2=2C_1-D_2=141.25$、$C_2=2B_1-A_2=158.75$、$D_2=C_1+D_1-150=178.75$，如圖(28)：



圖(27)

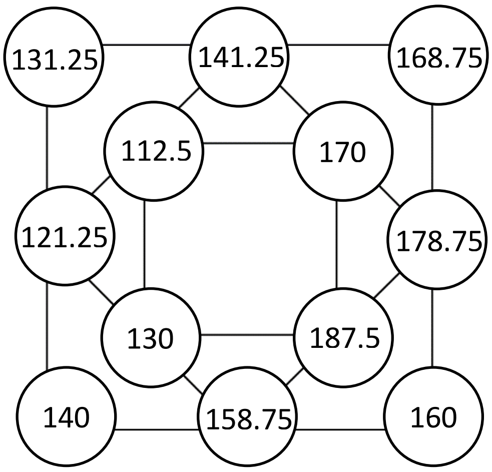


圖(28)

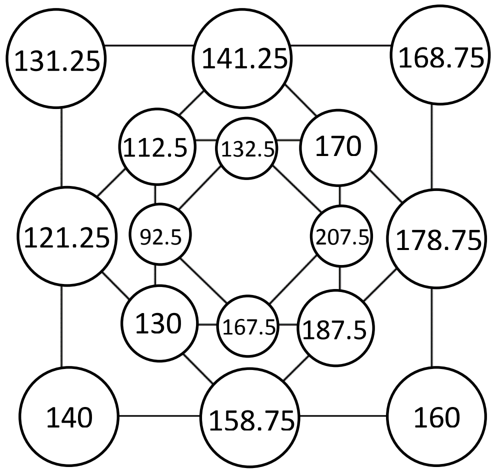
第三層：$A_3=2A_1-150=112.5$、$B_3=2A_2-A_3=130$、$C_3=2D_2-D_3=170$、$D_3=2D_1-150=187.5$，如圖(29)：

第四層：$A_4=A_3+B_3-150=92.5$、$B_{4+}=2C_3-D_4=132.5$、$C_4=2B_3-A_4=167.5$、

$D_4=C_3+D_3-150=207.5$，如圖(30)：



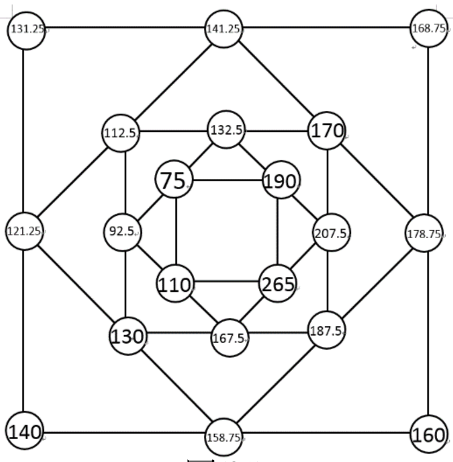
圖(29)



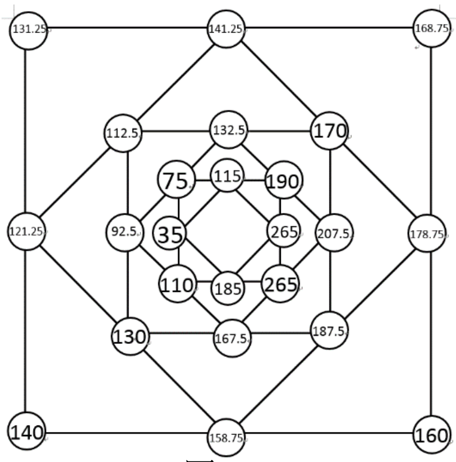
圖(30)

第五層：$A_5=2A_3-150=75$、$B_5=2A_4-A_5=110$、$C_5=2D_4-D_5=190$、$D_5=2D_3-150=225$，如圖(31)：

第六層：$A_6=A_5+B_5-150=35$、$B_6=2C_5-D_6=115$、$C_6=2B_5-A_6=185$、$D_6=C_5+D_5-150=265$，如圖(32)：

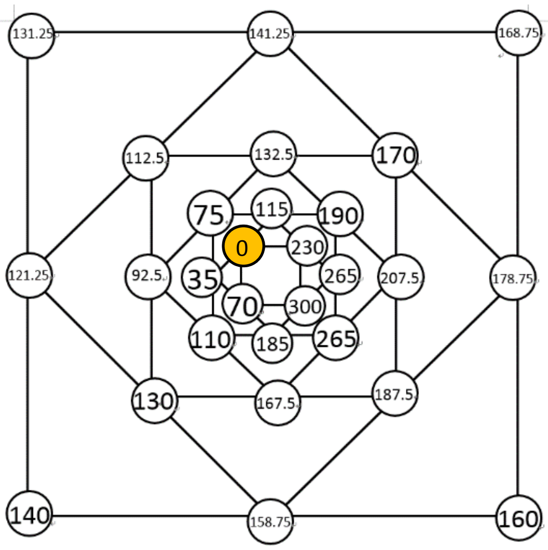


圖(31)



圖(32)

第七層：$A_7=2A_5-90=0$、$B_7=2A_6-A_7=70$、$C_7=2D_6-D_7=230$、$D_7=2D_5-90=300$...**失敗層**，如圖(33)：



圖(33)

$A_1=131.25$ 為 L=6 與 L=7 間的臨界值，在第七層中出現了 $A_7=0$。

利用以上的《發現八》，我們將 L<10 的臨界值列舉出來：

$D(1，2)=150-B_1$　　$D(2，3)=75$　　$D(3，4)=225-B_1$　　$D(4，5)=112.5$

$D(5，6)=262.5-B_1$　　$D(6，7)=131.25$　　$D(7，8)=81.25-B_1$　　$D(8，9)=131.25$

觀察以上臨界值的列表，我們得到以下的發現：

發現九：D(L-1，L)(L 為奇數)的臨界值與 D(L-3，L-2)的臨界值的差為 150 的$(\frac{1}{2^{(\frac{L-1}{2})}})$倍，如表(4)；

D(L-1，L)(L 為偶數)的臨界值與 D(L-3，L-2)的臨界值的差為 150 的$(\frac{1}{2^{(\frac{L-2}{2})}})$倍，如表(5):

L	D(L-1，L)的臨界值	D(L-3，L-2)的臨界值	兩者之差	公式解
5	112.5	75	37.5	$150(\frac{1}{2^{\frac{(5-1)}{2}}})=37.5$
7	131.25	112.5	18.75	$150(\frac{1}{2^{\frac{(7-1)}{2}}})=18.75$
9	140.625	131.25	9.375	$150(\frac{1}{2^{\frac{(9-1)}{2}}})=9.375$

表(4)

L	D(L-1，L)的臨界值	D(L-3，L-2)的臨界值	兩者之差	公式解
4	$225-B_1$	$150-B_1$	75	$150(\frac{1}{2^{\frac{(4-2)}{2}}})=75$
6	$262.5-B_1$	$225-B_1$	37.5	$150(\frac{1}{2^{\frac{(6-2)}{2}}})=37.5$
8	$281.25-B_1$	$262.5-B_1$	18.75	$150(\frac{1}{2^{\frac{(8-2)}{2}}})=18.75$

表(5)

根據《發現九》，我們發現任意臨界值皆為一等比數列的和，我們利用這項規律，得出以下的

定理：

定理七：在 T_4 系統中，S=600，a=2，L=n，當 n 為奇數的臨界值級數為 $75(\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{L-3}{2})})$，經過整理，得到 A_1 值與臨界值之不等式為：

$$150(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})<A_1\le 150(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})-B_1$$

當 n 為偶數的臨界值級數為 $150(\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{L-2}{2})})$，經過整理，得到 A_1 值與臨界值之不等式為：

$$150(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-B_1<A_1\le 150(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n}{2})})$$

接下來，我們試著將公式推展到 S=任意正數，重複以上的實驗步驟，我們推理出了 S=任意正數的一般公式：

定理八：在 T_4 系統中， S=任意正數，a=2，L=n 時，當 n 為奇數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})<A_1\le\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})-B_1$$

當 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-B_1<A_1\le\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n}{2})})$$

將一般式《定理八》推理出來後，我們嘗試以代數的方式證明《定理八》，以下是我們的證明過程：

我們先推出 A_1 為任意正數在任意層時 A 值的公式：

定理九：當 n 為奇數時，$A_n=2^{(\frac{n-1}{2})}A_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-1)$ 、 $B_n=2^{(\frac{n-1}{2})}B_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-1)$

$C_n=2^{(\frac{n-1}{2})}C_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-1)$ 、 $D_n=2^{(\frac{n-1}{2})}D_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-1)$

當 n 為偶數時，$A_n=2^{(\frac{n-2}{2})}A_1+2^{(\frac{n-2}{2})}B_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)$、$B_n=2^{(\frac{n-2}{2})}A_1+2^{(\frac{n-2}{2})}C_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)$

$C_n=2^{(\frac{n-2}{2})}B_1+2^{(\frac{n-2}{2})}D_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)$、$D_n=2^{(\frac{n-2}{2})}C_1+2^{(\frac{n-2}{2})}D_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)$

利用《發現八》與《定理九》，若《定理八》正確，則 n=L=奇數之臨界值$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})$在《定理八》中第 n 層 A_n 為 0；n=L=偶數之臨界值$\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-B_1$在《定理九》中第 n 層 A_n 為 0。

以下為 L=n=奇數之證明：

《定理九》：$A_n=2^{(\frac{n-1}{2})}A_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-1)$中 A_1 以$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})$代入：

$A_n = 2^{(\frac{n-1}{2})}(\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})}))-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-1)$

$= \frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-2^{(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{n-1}{2})})-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-1)$

$= \frac{S}{4}(2^{(\frac{n-1}{2})}-2^{(\frac{n-1}{2})}-1+1)=0$

∴$A_n=0$　故 n=奇數時《定理八》$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})}) < A_1 \le \frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})-B_1$成立。

接下來為 L=n=偶數之證明：

《定理九》：$A_n = 2^{(\frac{n-2}{2})}A_1+2^{(\frac{n-2}{2})}B_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)$中 A_1 以$\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-B_1$代入：

$A_n = 2^{(\frac{n-2}{2})}(\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-B_1)+2^{(\frac{n-2}{2})}B_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)$

$= \frac{S}{4}(2^{(\frac{n-2}{2})}2-2^{(\frac{n-2}{2})}(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-2^{(\frac{n-2}{2})}B_1+2^{(\frac{n-2}{2})}B_1-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)$

$= \frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)-\frac{S}{4}(2^{(\frac{n}{2})}-1)=0$

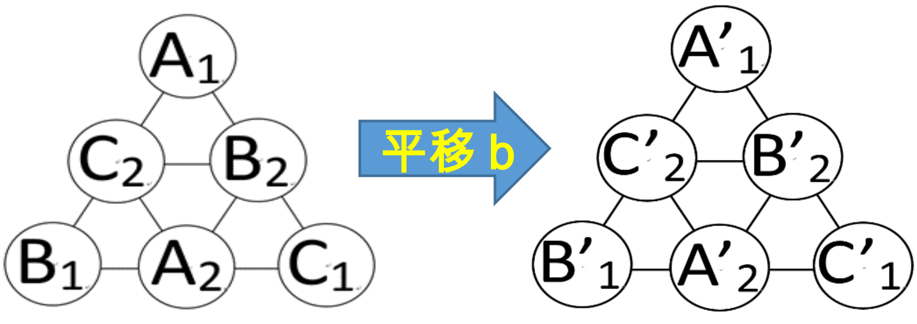
∴$A_n=0$　故 n=偶數時《定理八》$\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-B_1 < A_1 \le \frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n}{2})})$亦成立。

四、　在 T_3、T_4系統中，a=2，再將系統平移 b 單位的實驗與定理探討

(一)實驗四：在 T_3系統中，當內層相鄰兩數為其外層對應數 X 之 2 倍多 b(b 為常數)時，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

完成了以上的實驗與定理後，我們突發奇想，若將 T_3系統中內層相鄰兩數為其外層對應數 X 之 2 倍再多 b(b 為常數)時，其臨界值與 A_1 值的不等式為何？

我們欲將圖(甲)的配置平移 b 單位，而成圖(乙)配置：



圖(甲)　　圖(乙)

已知 $A_1=A'_1$、$B_1=B'_1$、$C_1=C'_1$，$S= A_1+B_1+C_1=A'_1+B'_1+C'_1$，a=2、b≠0，試求 A'_2、B'_2、C'_2，計算如下：

$$\begin{cases} B_2+C_2=2A_1+b=2A'_1+b \ldots\ldots ① \\ A_2+C_2=2B_1+b=2B'_1+b \ldots\ldots ② \\ A_2+B_2=2C_1+b=2C'_1+b \ldots\ldots ③ \end{cases}$$

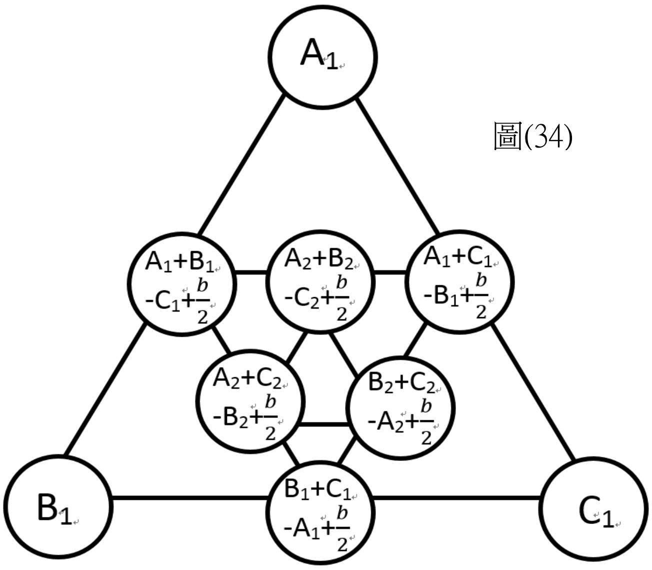
① +② + ③：$2(A_2 + B_2 + C_2) = 2A'_1 + 2B'_1 + 2C'_1 + 3b$

$$A_2 + B_2 + C_2 = A'_1 + B'_1 + C'_1 + \frac{3}{2}b \ldots\ldots ④$$

① 代入④：$A_2 + 2A'_1 + b = A'_1 + B'_1 + C'_1 + \frac{3}{2}b$

$A_2 = B'_1 + C'_1 - A'_1 + \frac{1}{2}b$ 即 $A'_2 = B'_1 + C'_1 - A'_1 + \frac{1}{2}b$

同理 $B'_2 = A'_1 + C'_1 - B'_1 + \frac{1}{2}b$ $C'_2 = A'_1 + B'_1 - C'_1 + \frac{1}{2}b$



圖(34)

再重複前述步驟，可得 A'_i、B'_i、C'_i，……，其中 i=3、4……n，如圖(34)：

我們利用上述的方法，以 S=180 為例，試著算出此系統的臨界值，以下是我們求出的臨界值，如表(6)，並注意在平移的條件下，各層的總和都不相同，內層比外層多出$\frac{3}{2}$b：

D(1，2)=89.75-B_1 D(2，3)=44.75

D(3，4)= 112.3125-B_1 D(4，5)=56.125

D(5，6)=118.046875-B_1 D(6，7)=59.015625

D(7，8)=119.50390625-B_1

L	D(L-1，L)的臨界值	D(L-3，L-2)的臨界值	兩者之差
4	112.3125-B_1	89.75-B_1	22.5625
5	56.125	44.75	11.375
6	118.046875-B_1	112.3125-B_1	5.734375
7	59.015625	56.125	2.890625
8	119.50390625-B_1	118.046875-B_1	1.45703125

表(6)

觀察以上的臨界值，我們發現此系統之臨界值不成等比級數，但各奇偶數項有等比關係我們試著以前面實驗證明的方式試推算出其公式。

以下是我們的過程：

利用前文所推出來的公式，我們得到：

$A_2=2A_1+2B_1-S+\frac{b}{2}$、$B_2=S-2B_1+\frac{b}{2}$ $A_3=4A_1-S+b$、$B_3=-S+4B_1+b$

$A_4=8A_1+8B_1-5S+\frac{3b}{2}$、$B_4=3S-8B_1+\frac{3b}{2}$ $A_5=16A_1-5S+2b$、$B_5=-5S+16B_1+2b$……

我們以等比和公式將其化簡，得到以下六式：

定理十：當 n 為奇數時，$A_n= 2^{(n-1)}A_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$

$B_n= 2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$

$C_n= 2^{(n-1)}C_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$

當 n 為偶數時，$A_n= 2^{(n-1)}A_1+2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^{n}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$

$B_n= 2^{(n-1)}A_1+2^{(n-1)}C_1-\frac{S}{3}(2^{n}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$

$C_n= 2^{(n-1)}B_1+2^{(n-1)}C_1-\frac{S}{3}(2^{n}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$

引用前文的發現，若一系統之 A_1 為任意臨界值，則其第 L+1 層之 A_{L+1} 必為 0。

我們要求出 n 層(n 為奇數)的最小可能 A_1 值，而其值大於 D(n-1,n)。根據上述的規律，在

$A_n= 2^{(n-1)}A_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$中假設 A_1 為一臨界值，則其 A_{L+1}=0。我們得出：

$2^{(n-1)}A_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)+\frac{b(n-1)}{2}=0$

接著，我們嘗試解出式中的 A_1，解得：$A_1=\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-\frac{b(n-1)}{2^n}$

則當指定一系統必須做到第 n 層(n 為奇數)時，其最小值大於$\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-\frac{b(n-1)}{2^n}$。

然後，我們試求指定第 n 層(n 為偶數)系統中的最大 A_1 值。

根據推論，若我們要求出第 n 層(n 為偶數)之最大可能 A_1 值，則其值等於 D(n,n+1)；因此系統中的 A_{n+1} 必為 0，我們將$2^{(n-1)}A_1-\frac{S}{3}(2^{(n-1)}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$=0 中 n 以(n+1)帶入，得出：

$2^{n}A_1-\frac{S}{3}(2^{n}-1)+\frac{bn}{2}=0$

我們嘗試著將式中的 A_1 解出，解出如右的式子：$A_1=\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n}\right)-\frac{bn}{2^{n+1}}$。

當 n 為偶數時，其最大值等於$\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n}\right)-\frac{bn}{2^{n+1}}$。

接下來，我們試求出指定能做出 n 層(n 為奇數)的最大 A_1 值。

根據前面的發現，推論出 n 層(n 為奇數)的最大 A_1 值為 D(n,n+1)，其 L+1 層為 0。

利用這項推理，我們若指定層數為 n(n 為奇數)，要知道其最大可能 A_1 值，則

$A_n= 2^{(n-1)}A_1+2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^{n}-1)+\frac{b(n-1)}{2}$中 A_n=0，我們將 n 以(n+1)代入，得到：

$2^{n}A_1+2^{n}B_1-\frac{S}{3}(2^{n+1}-1)+\frac{bn}{2}=0$

下一步，我們嘗試解出式中 A_1 的值，解得：$A_1=\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n}\right)-B_1-\frac{bn}{2^{n+1}}$。

當 n 為奇數時，其 A_1 最大值等於$\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n}\right)-B_1-\frac{bn}{2^{n+1}}$。

最後，我們試求指定第 n 層(n 為偶數)時系統的最小可能 A_1 值。

根據前面的發現與推理，我們能得知此系統的最小可能 A_1 值大於 D(n-1,n)，而 D(n-1,n)第 n 層為 0。

利用這項推理，我們若只指定層數為 n(n 為偶數)，要知道其最小可能 A_1 值，得到如右的式子：

$2^{(n-1)}A_1+2^{(n-1)}B_1-\frac{S}{3}(2^n-1)=0$

我們嘗試將 A_1 解出，解得：$A_1=\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-B_1-\frac{b(n-1)}{2^n}$。

當 n 為奇數時，其 A_1 最小值大於$\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-B_1-\frac{b(n-1)}{2^n}$。

統整以上求出來的式子，我們得到以下的公式：

定理十一：在 T_3 的 2X+b 系統中，S=任意正數，L=n，當 n 為奇數所對應 A_1 值 與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-\frac{b(n-1)}{2^n}<A_1\leq\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n}\right)-B_1-\frac{bn}{2^{n+1}}$$

當 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-B_1-\frac{b(n-1)}{2^n}<A_1\leq\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n}\right)-\frac{bn}{2^{n+1}}$$

(二)實驗五：在 T_4 系統中，當內層相鄰兩數為其外層對應數 X 之 2 倍多 b(b 為常數)時，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

完成了 T_3 的 2X+b 系統的部分，接下來我們將他推展到 T_4 的 2X+b 系統的部分，同《實驗四》的方法，我們得出了以下的兩個定理：

定理十二：當 n 為奇數時，$A_n=2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}A_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

$B_n=2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}B_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

$C_n=2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}C_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

$D_n=2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}D_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

當 n 為偶數時，$A_n=2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}A_1+2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}B_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

$B_n=2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}A_1+2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}C_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

$C_n=2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}B_1+2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}D_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

$D_n=2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}C_1+2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}D_1-\frac{S}{4}\left(2^{\left(\frac{n}{2}\right)}-1\right)+\frac{b(n-1)}{2}$

定理十三：在 T_4 的 2X+b 系統中，S=任意正數，a=2，L=n，當 n 為奇數所對應 A_1 值 與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})-\frac{b(n-1)}{2^n}<A_1\le\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-1}{2})})-B_1-\frac{bn}{2^{n+1}}$$

當 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

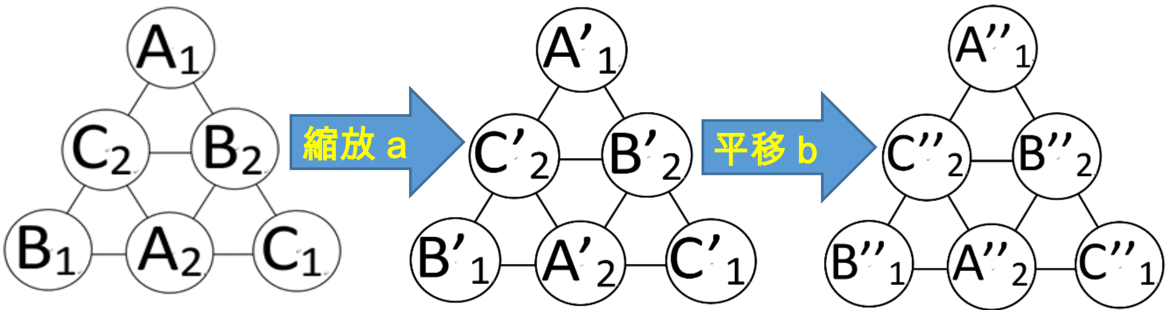
$$\frac{S}{4}(2-(\frac{1}{2})^{(\frac{n-2}{2})})-B_1-\frac{b(n-1)}{2^n}<A_1\le\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{2})^{(\frac{n}{2})})-\frac{bn}{2^{n+1}}$$

五、 在 T_3、T_4 的 2X+b 系統中，a=2，改成 a≠2，即將原始的系統作 a 倍縮放，再平移 b 單位的實驗與定理探討

(一)實驗六：在 T_3 系統中，當內層相鄰兩數為其外層對應數 X 之 a 倍多 b(b 為常數)時，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

接著我們又想，如果內層相鄰兩數為其外層對應數 X 之不為 2 倍，再多 b(b 為常數)時，其臨界值與 A_1 值的不等式為何？

我們欲將圖(丙)的配置縮放 a 倍，再平移 b 單位，而成圖(戊)配置：



圖(丙) 圖(丁) 圖(戊)

已知 $A_1=A'_1=A''_1$、$B_1=B'_1=B''_1$、$C_1=C'_1=C''_1$，$S=A_1+B_1+C_1=A'_1+B'_1+C'_1=A''_1+B''_1+C''_1$，a≠2，試求 A'_2、B'_2、C'_2

計算如下：

$$\begin{cases}B_2+C_2=aA_1=aA'_1\ \ldots\ldots ①\\ A_2+C_2=aB_1=aB'_1\ \ldots\ldots ②\\ A_2+B_2=aC_1=aC'_1\ \ldots\ldots ③\end{cases}$$

①+②+③：$2(A_2+B_2+C_2)=aA'_1+aB'_1+aC'_1$

$$A_2+B_2+C_2\ =\frac{a}{2}(A'_1+B'_1+C'_1)\ \ldots\ldots ④$$

① 代入④：$A_2+aA'_1+b=\frac{a}{2}(A'_1+B'_1+C'_1)$

$A_2=\frac{a}{2}(B'_1+C'_1-A'_1)$ 即 $A'_2=\frac{a}{2}(B'_1+C'_1-A'_1)$

同理 $B'_2=\frac{a}{2}(A'_1+C'_1-B'_1)$　　　$C'_2=\frac{a}{2}(A'_1+B'_1-C'_1)$

$$\begin{cases} B'_2+C'_2=aA'_1+b=aA''_1+b\ \ldots\ldots ⑤ \\ A'_2+C'_2=aB'_1+b=aB''_1+b\ \ldots\ldots ⑥ \\ A'_2+B'_2=aC'_1+b=aC''_1+b\ \ldots\ldots ⑦ \end{cases}$$

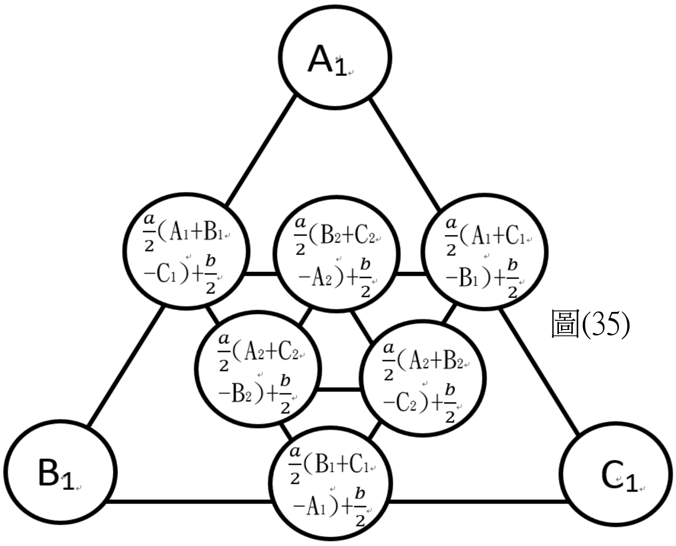
⑤+⑥+⑦：$2(A'_2+B'_2+C'_2)=aA''_1+aB''_1+aC''_1+3b$

$$A'_2+B'_2+C'_2=\frac{a}{2}(A''_1+B''_1+C''_1)+\frac{3}{2}b\ \ldots\ldots ⑧$$

⑤代入⑧：$A'_2+aA''_1+b=\frac{a}{2}(A''_1+B''_1+C''_1)+\frac{3}{2}b$

$A'_2=\frac{a}{2}(B''_1+C''_1-A''_1)+\frac{1}{2}b$　　即 $A''_2=\frac{a}{2}(B''_1+C''_1-A''_1)+\frac{1}{2}b$

同理 $B''_2=\frac{a}{2}(A''_1+C''_1-B''_1)+\frac{1}{2}b$　　　$C''_2=\frac{a}{2}(A''_1+B''_1-C''_1)+\frac{1}{2}b$



圖(35)

再重複前述步驟，可得 A''_i、B''_i、C''_i，……，其中 i=2、3、4……n，如圖(35)：

我們利用上述的方法，以 S=180 為例，試著算出此系統的臨界值，以下是我們求出的臨界值，如表(7)：

D(1，2)=89.875-B_1　　D(2，3)=44.90625
D(3，4)= 112.4453125-B_1 D(4，5)=56.220703125
D(5，6)=118.10986328125-B_1
D(6，7)=59.0548095703125
D(7，8)= 119.5273742675781-B_1

L	D(L-1，L)的臨界值	D(L-3，L-2)的臨界值	兩者之差
4	112.4453125-B_1	89.875-B_1	22.5703125
5	56.220703125	44.90625	11.31445313
6	118.10986328125-B_1	112.4453125-B_1	5.664550781
7	59.0548095703125	56.220703125	2.834106445
8	119.5273742675781-B_1	118.10986328125-B_1	1.417510986

表(7)

觀察以上的臨界值，我們發現此系統之臨界值不成等比級數，我們試著以前面實驗證明的方式與【實驗三】中推演的方法試推算出其公式。以下是我們的過程：

利用前文所推出的代數式，我們嘗試將所有的式子皆以 A_1、B_1、S、a 和 b 表示。

根據代數式，我們將 C_1 以 S-A_1-B_1 代入，得到：

第二層：$A_2=\frac{a}{2}[A_1+B_1-(S-A_1-B_1)]+\frac{b}{2}=aA_1+aB_1-\frac{a}{2}S+\frac{b}{2}$、$B_2=\frac{a}{2}(S-2B_1)+\frac{b}{2}=\frac{a}{2}S-aB_1+\frac{b}{2}$、

$C_2=\frac{a}{2}(B_1+(S-A_1-B_1)-A_1)+\frac{b}{2}=\frac{b}{2}-aA_1+\frac{a}{2}S$

運用上述的方法，我們又得出了第三層的式子：

第三層：$A_3=a^2A_1-\frac{a^2}{4}S+\frac{b}{2}(\frac{a}{2}+1)$、$B_3=a^2B_1-\frac{a^2}{4}S+\frac{b}{2}(\frac{a}{2}+1)$、$C_3=\frac{3a^2}{4}S-a^2A_1-a^2B_1+\frac{b}{2}(\frac{a}{2}+1)$

觀察以上的式子，我們嘗試推出 4~6 層的 A_4~A_6：

第四層：$A_4=a^3A_1+a^3B_1-\frac{5a^3}{8}S+\frac{b}{2}(\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}+1)$

第五層：$A_5=a^4A_1+\frac{5a^4}{16}S+\frac{b}{2}(\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}+1)$

第六層：$A_6=a^5A_1+a^5B_1-\frac{21a^5}{32}S+\frac{b}{2}(\frac{a^4}{16}+\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}+1)$

我們將其代入代數式，並驗證了其正確性。

接下來，我們以等比級數將它化簡，得到：

定理十四：當 n 為奇數時，$A_n=a^{n-1}A_1-\frac{(2^{n-1}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$

$B_n=a^{n-1}B_1-\frac{(2^{n-1}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b\left(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2}\right)$

$C_n=a^{n-1}C_1-\frac{(2^{n-1}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b\left(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2}\right)$

$D_n=a^{n-1}D_1-\frac{(2^{n-1}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$

當 n 為偶數時，$A_n=a^{n-1}A_1+a^{n-1}B_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$

$B_n=a^{n-1}A_1+a^{n-1}C_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$

$C_n=a^{n-1}B_1+a^{n-1}D_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$

$D_n=a^{n-1}C_1+a^{n-1}D_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$

引用前文的發現，若一系統之 A_1 為任意臨界值，則其第 L+1 層之 A_{L+1} 必為 0。

我們要求出第 n 層(n 為奇數)的最小可能 A_1 值，由先前的實驗，我們可知其值大於 D(n-1,n)。

根據上述的規律，$A_n=a^{n-1}A_1-\frac{(2^{n-1}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$中假設 A_1 為一臨界值，則其 $A_{L+1}=0$。

我們得出：$a^{n-1}A_1-\frac{(2^{n-1}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}S+b(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})=0$

接著，我們嘗試解出式中的 A_1，解得：$A_1=\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-b\cdot(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a^n-2\cdot a^{n-1}})$

則當指定一系統必須做到第 n 層(n 為奇數)時，其最小值大於$\frac{S}{3}\left(1-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-\mathrm{b}\cdot(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1}{a^{n}-2\cdot a^{n-1}})$。

然後，我們試求指定第 n 層(n 為偶數)系統中的最大 A_1 值。

若我們要求出第 n 層(n 為偶數)之最大可能 A_1 值，由前文的實驗，我們推知其值等於 D(n,n+1)；因此系統中的 A_{n+1} 必為 0，我們將 $A_n=a^{n-1}A_1-\frac{(2^{n-1}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}\mathrm{S}+\mathrm{b}(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$中的

A_n 以 0 代入，n 以(n+1)代入，得出：$a^{n}A_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n}}{2^{n}\cdot 3}\mathrm{S}+\mathrm{b}(\frac{(\frac{a}{2})^{n}-1}{a-2})=0$

我們嘗試著將試中的 A_1 解出，解出下列的式子：$A_1=\frac{S}{3}\left(1-(\frac{1}{2})^{n}\right)-\mathrm{b}\cdot(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1}{a^{n+1}-2\cdot a^{n}})$。

當 n 為偶數時，其最大值等於$\frac{S}{3}\left(1-(\frac{1}{2})^{n}\right)-\mathrm{b}\cdot(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1}{a^{n+1}-2\cdot a^{n}})$。

接下來，我們試求出指定能做出 n 層(n 為奇數)的最大 A_1 值。

我們要求出 n 層(n 為奇數)的最大可能 A_1 值，由先前的實驗，我們可知其值等於 D(n,n+1)，據此，我們推論出：其 L+1 層之 A_{L+1} 為 0。

利用這項推理，我們若指定層數為 n(n 為奇數)，要知道其最大可能 A_1 值，則

$A_n=a^{n-1}A_1+a^{n-1}B_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}\mathrm{S}+\mathrm{b}(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$中 A_n 以 0 代入，n 以(n+1)代入，我們得到：

$a^{n}A_1+a^{n}B_1-\frac{(2^{n+1}-1)\cdot a^{n}}{2^{n}\cdot 3}\mathrm{S}+\mathrm{b}(\frac{(\frac{a}{2})^{n}-1}{a-2})=0$

下一步，我們嘗試解出式中 A_1 的值，解得：$A_1=\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n}\right)-B_1-\mathrm{b}\cdot(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1}{a^{n+1}-2\cdot a^{n}})$。

當 n 為奇數時，其 A_1 最大值等於$\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n}\right)-B_1-\mathrm{b}\cdot(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1}{a^{n+1}-2\cdot a^{n}})$。

最後，我們試求指定 n 層(n 為偶數)時系統的最小可能 A_1 值。

根據前面的發現與推理，我們能得知此系統的最小可能 A_1 值大於 D(n-1,n)，因此其第 n 層之 A_n 為 0。

利用這項推理，我們若只指定層數為 n(n 為偶數)，要知道其最小可能 A_1 值，則

$A_n=a^{n-1}A_1+a^{n-1}B_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}\mathrm{S}+\mathrm{b}(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})$中 A_n 以 0 代入，我們得到：

$a^{n-1}A_1+a^{n-1}B_1-\frac{(2^{n}-1)\cdot a^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}\mathrm{S}+\mathrm{b}(\frac{(\frac{a}{2})^{n-1}-1}{a-2})=0$

我們嘗試將式中 A_1 解出，解得：$A_1=\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-B_1-\mathrm{b}\cdot(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1}{a^{n}-2\cdot a^{n-1}})$。

當 n 為奇數時，其 A_1 最小值大於

$\frac{S}{3}\left(2-\frac{1}{2}^{n-1}\right)-B_1-\mathrm{b}\cdot(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1}{a^{n}-2\cdot a^{n-1}})$。

統整以上求出來的式子，我們得到以下的公式：

定理十五：在 T_3 的 aX+b 系統中，S=任意正數，L=n，當 n 為奇數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{3}\left(1-\frac{1^{n-1}}{2}\right)-\mathrm{b}\cdot\left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1}{a^{n}-2\cdot a^{n-1}}\right)<\mathrm{A}_1\leq\frac{S}{3}\left(2-\frac{1^{n}}{2}\right)-B_1-\mathrm{b}\cdot\left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1}{a^{n+1}-2\cdot a^{n}}\right)$$

當 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{3}\left(2-\frac{1^{n-1}}{2}\right)-B_1-\mathrm{b}\cdot\left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1}{a^{n}-2\cdot a^{n-1}}\right)<\mathrm{A}_1\leq\frac{S}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)-\mathrm{b}\cdot\left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1}{a^{n+1}-2\cdot a^{n}}\right)$$

(二)實驗七：在 T_4 系統中，當內層相鄰兩數為其外層對應數 X 之 a 倍多 b(b 為常數)時，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

完成了 T_3 的 aX+b 系統後，接下來我們將他推展到 T_4 的 aX+b 系統的部分，同《實驗六》的方法，我們得出了以下的兩個定理：

定理十六：當 n 為奇數時，

$$A_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}}A_1-\frac{\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

$$B_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}}B_1-\frac{\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

$$C_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}}C_1-\frac{\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

$$D_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}}D_1-\frac{\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

當 n 為偶數時，

$$A_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}A_1+\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}B_1-\frac{\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

$$B_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}A_1+\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}C_1-\frac{\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

$$C_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}B_1+\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}D_1-\frac{\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

$$D_n=\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}C_1+\frac{a^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}}D_1-\frac{\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)a^{n-1}}{2^{n+1}}S+\frac{b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a-2}$$

定理十七：在 T_4 的 aX+b 系統中，S=任意正數，L=n，當 n 為奇數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)-\frac{2^{\frac{n-1}{2}}b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a^{n}-2a^{n-1}}\leq A_1<\frac{S}{4}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)-B_1-\frac{2^{\frac{n+1}{2}}b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1\right)}{a^{n+1}-2a^{n}}$$

當 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

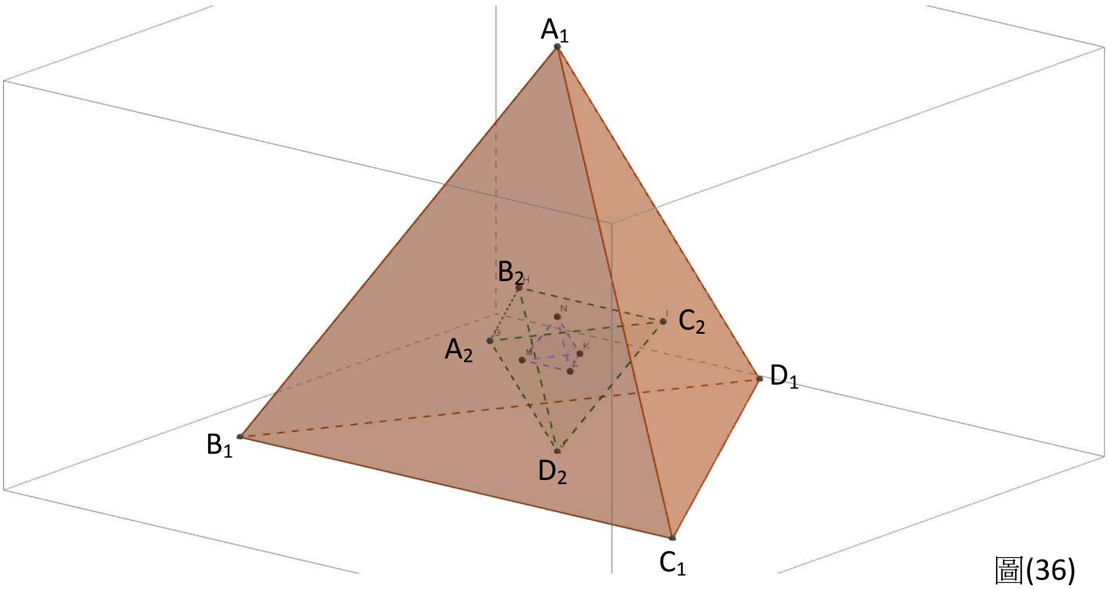
$$\frac{S}{4}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)-B_1-\frac{2^{\frac{n}{2}}b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{a^{n}-2a^{n-1}}\leq A_1<\frac{S}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)-\frac{2^{\frac{n}{2}}b\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{n}-1\right)}{a^{n+1}-2a^{n}}$$

六、應用——四面體與平面鏡射

(一)實驗八、在立體 T_4 系統中，將 A、B、C、D 排成正四面體狀，計算出其運算層數的公式，並加以證明。

前面的實驗，我們嘗試的是一維空間以及二維空間的系統。我們很好奇：若我們將系統推展至三維空間的立體系統，是否也能推出公式？

一開始，我們先試著從較為簡單的正四面體開始嘗試。我們用軟體繪出正四面體，並設定內層四個點分別在外層的四個面上，而內層四面體的每一面上的三個數字和等於對應外層頂點數值的三倍，如圖(36)：



圖(36)

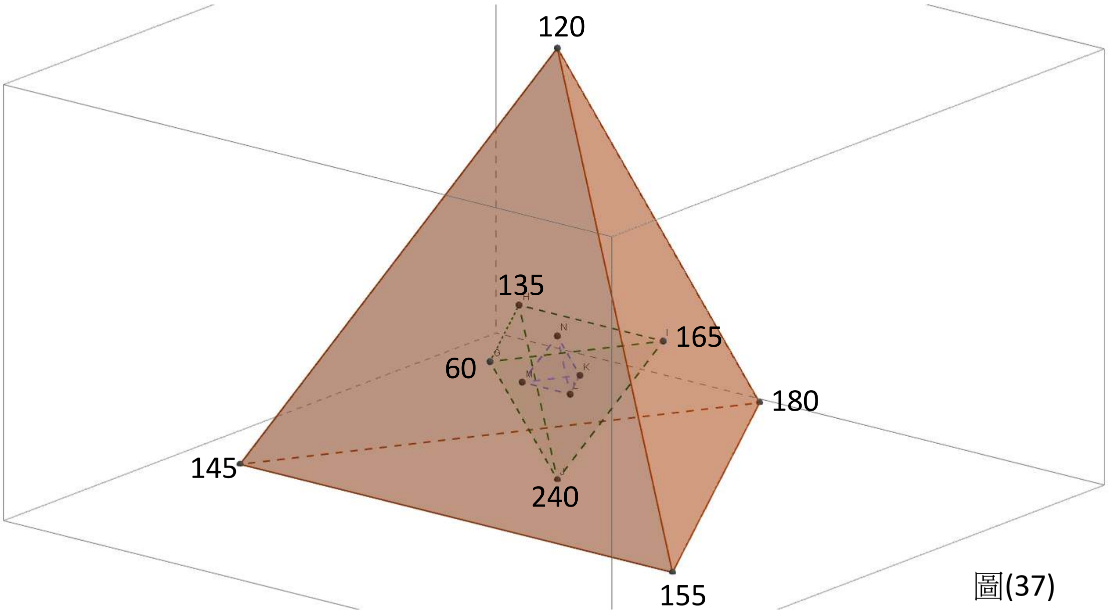
利用類似前面實驗的方法，我們先試求出其代數式，觀察其規律，我們得出了以下的式子：

以立體 T_4 系統($A_1=120$，$B_1=145$，$C_1=155$，$D_1=180$)為例：

第一層：$A_1=120$、$B_1=145$、$C_1=155$、$D_1=180$，如圖(37)：

第二層：$A_2=A_1+B_1+C_1-2D_1=60$、$B_2=A_1+B_1+D_1-2C_1=135$、$C_2=A_1+C_1+D_1-2B_1=165$、$D_1=B_1+C_1+D_1-2A_1=240$，如圖(37)：

第三層：$A_3=A_2+B_2+C_2-2D_2=-120$、$B_3=A_2+B_2+D_2-2C_2=105$、$C_3=A_2+C_2+D_2-2B_2=195$、$D_3=B_2+C_2+D_2-2A_2=420$，如圖(37)：



圖(37)

運用上述的方式，我們，以 S=600 的系統為例，試著算出此系統的臨界值，以下是我們求出的臨界值：

D(1，2)=400-B_1-C_1　D(2，3)=$133\frac{1}{3}$　D(3，4)=$444\frac{4}{9}$-B_1-C_1　D(4，5)=$148\frac{4}{27}$

D(5，6)=$449\frac{31}{81}$-B_1-C_1　D(6，7)=$149\frac{193}{243}$　D(7，8)=$449\frac{679}{729}$-B_1-C_1　D(8，9)=$149\frac{2137}{2187}$

觀察以上臨界值的規律，我們發現臨界值成等比數列，我們將其整合：

D(L-1，L)(L 為奇數)的臨界值與 D(L-3，L-2)的臨界值的差為 400 的($\frac{1}{3^{(\frac{L-1}{2})}}$)倍；D(L-1，L)(L 為偶數)的臨界值與 D(L-3，L-2)的臨界值的差為 400 的($\frac{1}{3^{(\frac{L}{2})}}$)倍:

接下來，我們嘗試以等比級數將其化簡，得到以下的公式：

D(L-1，L)(L 為奇數)的臨界值為 $133\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{9}\right)^0+\left(\frac{1}{9}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^{(\frac{L-3}{2})}\right)$；

D(L-1，L)(L 為偶數)的臨界值為 $400\left(\left(\frac{1}{9}\right)^0+\left(\frac{1}{9}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^{(\frac{L-2}{2})}\right)$，經過整理，得

定理十八：在 T_4的四面體系統中，S=600，a=3，b=0，L=n，當 n 為奇數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$150\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right) < A_1 \le 150\left(3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) - B_1 - C_1$$

當 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$150\left(2-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}\right) - B_1 < A_1 \le 150\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

我們試著將其一般化，得出：

定理十九：在 T_4 的四面體系統中，S=任意正數，a=3，b=0，L=n，當 n 為奇數

所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{3})^{(n-1)}) < A_1 \le \frac{S}{4}(3-(\frac{1}{3})^{n}) - B_1 - C_1$$

當 n 為偶數所對應 A_1 值與臨界值之不等式範圍為：

$$\frac{S}{4}(3-(\frac{1}{3})^{(n-1)}) - B_1 - C_1 < A_1 \le \frac{S}{4}(1-(\frac{1}{3})^{n})$$

接著，我們嘗試證明以上推出的公式，以下是我們的證明過程：

我們先推出 A_1 為任意數在任意層時 A 值的公式：

定理二十：當 n 為奇數時，第 n 層 $A_n = 3^{n-1}A_1 - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$、$B_n = 3^{n-1}B_1 - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$

$C_n = 3^{n-1}C_1 - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$、$D_n = 3^{n-1}D_1 - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$

當 n 為偶數時，第 n 層 $A_n = 3^{n-1}A_1 - 3^{n-1}B_1 - 3^{n-1}C_1 - \frac{S}{4}(3^{n}-1)$

$B_n = 3^{n-1}A_1 - 3^{n-1}B_1 - 3^{n-1}D_1 - \frac{S}{4}(3^{n}-1)$

$C_n = 3^{n-1}A_1 - 3^{n-1}C_1 - 3^{n-1}D_1 - \frac{S}{4}(3^{n}-1)$

$D_n = 3^{n-1}B_1 - 3^{n-1}C_1 - 3^{n-1}D_1 - \frac{S}{4}(3^{n}-1)$

利用上述的定理與發現，若所要證明的定理正確，則 n=奇數之 D(n-1,n)：$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{3})^{(n-1)})$在 $A_n = 3^{n-1}A_1 - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$中 L+1 層 A_{L+1} 為 0；n=偶數之 D(n-1,n)：$\frac{S}{4}(3-(\frac{1}{3})^{(n-1)}) - B_1 - C_1$在 $A_n = 3^{n-1}A_1 - 3^{n-1}B_1 - 3^{n-1}C_1 - \frac{S}{4}(3^{n}-1)$中 L+1 層 A_{L+1} 為 0。

以下為 L=n=奇數之證明：

$A_n = 3^{n-1}A_1 - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$中 A_1 以$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{3})^{(n-1)})$代入：

$$A_n = (3^{n-1})(\frac{S}{4}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}) - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$$

$$= \frac{S}{4}(3^{n-1} - 3^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}) - \frac{S}{4}(3^{n-1}-1)$$

$$= \frac{S}{4}(3^{n-1} - 3^{n-1} - 1 + 1) = 0$$

∵A_n=0　故 n=奇數時定理$\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{3})^{(n-1)}) < A_1 \le \frac{S}{4}(3-(\frac{1}{3})^{n}) - B_1 - C_1$成立。

接下來為 L=n=偶數之證明：

$A_n = 3^{n-1}A_1 - 3^{n-1}B_1 - 3^{n-1}C_1 - \frac{S}{4}(3^{n}-1)$中 A_1 以$\frac{S}{4}(3-(\frac{1}{3})^{(n-1)}) - B_1 - C_1$代入：

$A_n = 3^{n-1}(\frac{S}{4}(3-(\frac{1}{3})^{(n-1)}) - B_1 - C_1) - 3^{n-1}B_1 - 3^{n-1}C_1 - \frac{S}{4}(3^{n}-1)$

$=\frac{S}{4}(3^{n-1}3-3^{n-1}(\frac{1}{3})^{(n-1)})-3^{n-1}$B1+$3^{n-1}$B1-$3^{n-1}$C1+$3^{n-1}$C1-$\frac{S}{4}(3^{n}-1)$

$=\frac{S}{4}(3^{n}-1)$-$\frac{S}{4}(3^{n}-1)$　$=0$

∵A_n=0　故 n=偶數時定理$\frac{S}{4}(3-(\frac{1}{3})^{(n-1)})-B_1-C_1<A_1\le\frac{S}{4}(1-(\frac{1}{3})^{n})$亦成立。

(二)實驗九、在 T_3 系統中，當 A_1、B_1、C_1 為任意正數，S=180，a=2 時，試將系統以幾何方式表示，並找出其與幾何之關係和尺規作圖法。

在前面的實驗中，系統皆是以代數的方式來呈現，後來，我們靈機一動，當 S=180 時，那不就是代表三角形的內角和嗎？此時的第二層、第三層……，的數值又代表何種意義？請看我們以下的實驗。如右表(8)：

	A	B	C
第一層	56	61	63
第二層	54	58	68
第三層	44	72	64
第四層	36	52	92
第五層	-4	76	108

表(8)

在表(8)中，明顯的知道最多可操作到第四層，即 L=4，我們發現我們可以不靠表(8)，直接利用三角形的內鏡射作圖法，一層層的將表(8)的數據作出來，接下來我們要介紹三角形的內鏡射作圖法，如圖(38)：

已知：△ABC 為銳角△，如圖(38)。

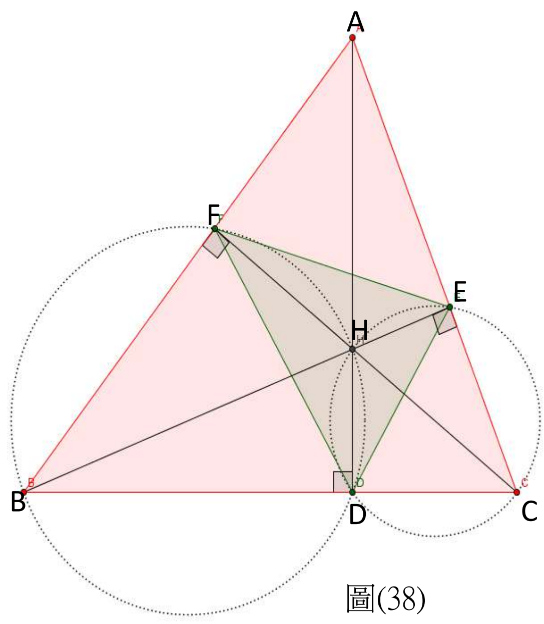
求作：作出△ABC 的內鏡射△，

並證明$\angle E+\angle F=2\angle A$，$\angle D+\angle E=2\angle C$，$\angle D+\angle F=2\angle B$

作法：

(1) 分別作$\overline{AD}\perp\overline{BC}$、$\overline{BE}\perp\overline{AC}$、$\overline{CF}\perp\overline{AB}$，設三高交於 H

(2) 連$\overline{EF}$、$\overline{FD}$、$\overline{DE}$，則△DEF 即為所求的內鏡射△



圖(38)

證明：

(1) 在四邊形 HFBD 中

∵$\overline{HF}\perp\overline{BF}$，$\overline{HD}\perp\overline{BD}$

∴$\angle HFB+\angle HDB=90^{\circ}+90^{\circ}=180$

∴四邊形 HFBD 存在一個外接圓，同理

四邊形 HECD 也存在一個外接圓。

(2) 分別作出四邊形 HFBD 和四邊形 HECD 的外接圓。

(3) $\because \angle FDB = \angle FHB = \frac{1}{2}\widehat{BF}$(圓周角)　　$\angle EDC = \angle EHC = \frac{1}{2}\widehat{EC}$(圓周角)

又$\angle FHB = \angle EHC$(對頂角)　$\therefore \angle FDB = \angle EDC$

(4) 同理$\angle DFB = \angle EFA$，$\angle FEA = \angle DEC$

故△DEF 為△ABC 的內鏡射△。

(5) 明顯的 H 是△DEF 的內心，$\angle E + \angle F = 2\angle HFD + 2\angle HED$

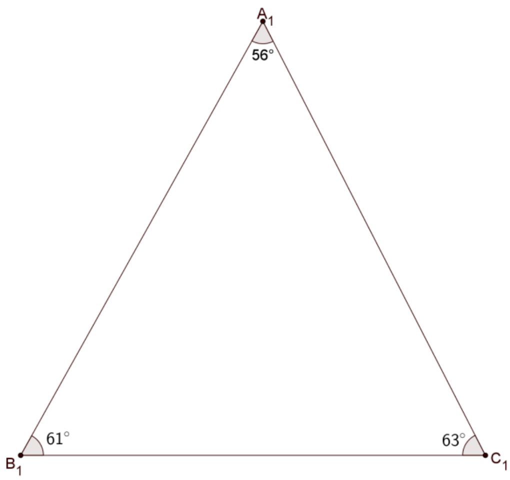
$$= 2\angle HBD + 2\angle HCD$$

(6) 由$\angle HBD + \angle C = 90° = \angle CAD + \angle C$

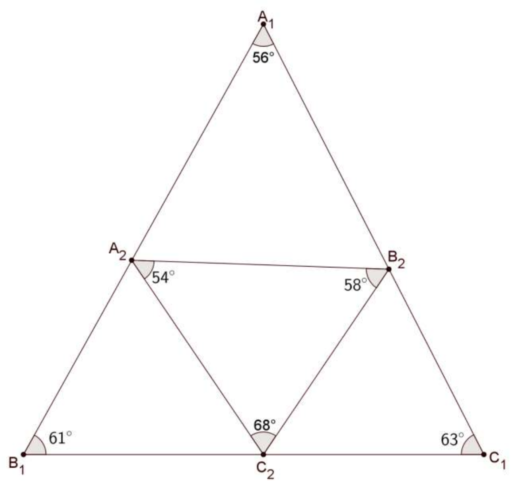
$\therefore \angle HBD = \angle CAD$，同理$\angle HCD = \angle BAD$

代入(5)得$\angle E + \angle F = 2(\angle CAD + \angle BAD) = 2\angle A$，　得證

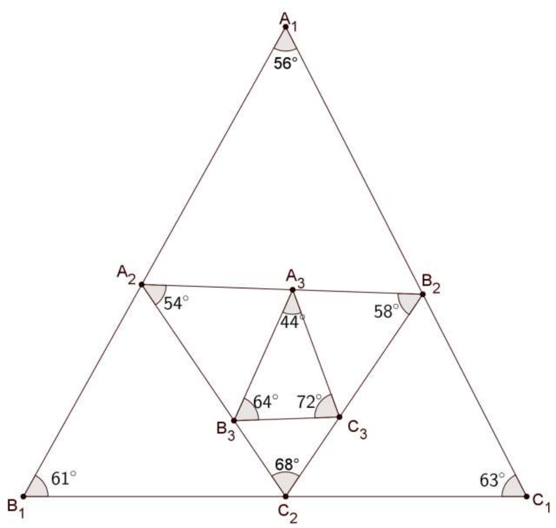
接著將各層用內鏡射方法畫出來，即可一一印證表(8)，如圖(39)~圖(42)：



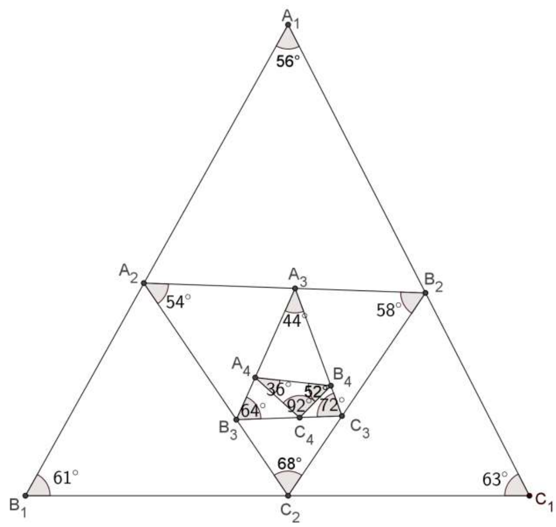
圖(39)第一層



圖(40)前二層



圖(41)前三層



圖(42)前四層

在圖(42)中，∵第四層為鈍角△，∴第五層無法繪出，故 L 值為 4。

發現十：任意一般銳角△之內層，可用內鏡射方法連續向內作圖，其 L 值會與表(8)計算出的最大層數完全吻合，且臨界值範圍不等式公式完全正確。

伍、 討論

一、在 T_2、T_3、T_4…等各系統中，若一群玩家想要玩到 100 局，則依照各臨界值不等式，取 n=100 代入，理論上，可以得出臨界值的範圍，進而取得所要的初始值，開始遊戲，但是由於軟體小數點的位數限制，可能會無法表達，以至於看不到第 100 局。

二、為了讓各系統至少能玩到第二局，在 aX+b 條件中的 b，不要取太大的負值，因為那會使第二局提早出現負值結束遊戲，

三、在研究架構中，有些系統的研究報告，由於篇幅大小關係，沒能放在報告中，我們將它存放在附件電子檔裡，詳列如下：

(一) **a≠2，b=0 的 T_3、T_4 系統**。(見電子檔附件四)

(二) **a=2，b=0 的 T_5 系統**。(見電子檔附件五)

(三) **T_3 系統的等腰三角形內鏡射作圖**。 (見電子檔附件六)

(四) **T_4 系統的等腰梯形內鏡射作圖**。(見電子檔附件七)

(五) **任意共圓四邊形的內鏡射作圖**(見電子檔附件八)

四、在 a=2，b=0 的 T_5 系統中，第 n 層的公式如下：

$$A_n=\frac{2(\sqrt{5}+1)^{n-2}+2(1-\sqrt{5})^{n-2}+1}{5}A_1+\frac{2(\sqrt{5}+1)^{n-2}+2(1-\sqrt{5})^{n-2}+1}{5}B_1-\frac{(\sqrt{5}+1)^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}-2}{10}C_1+\frac{2(\sqrt{5}+1)^{n-1}+2(1-\sqrt{5})^{n-1}+1}{5}D_1-\frac{(\sqrt{5}+1)^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}-2}{10}E_1$$

其餘的 B_n、C_n、D_n、E_n 按之前的規律擺放，推導過程中，使用類費氏數列第 n 項公式的推導方法計算而來，詳細內容請見電子檔附件五。又 A_1 的臨界值範圍不等式如下：

$$MAX\left[\begin{array}{c}\frac{((1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}-2)C_1+((1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}-2)(S-B_1-C_1-D_1)-(4(1+\sqrt{5})^{n-2}+4(1-\sqrt{5})^{n-2}+2)B_1-(4(1+\sqrt{5})^{n-1}+4(1-\sqrt{5})^{n-1}+2)D_1}{4(1+\sqrt{5})^{n-2}+4(1-\sqrt{5})^{n-2}+(1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}}, \\ \frac{((\sqrt{5}+1)^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}-2)B_1+((\sqrt{5}+1)^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}-2)(S-B_1-C_1-D_1)-(4(\sqrt{5}+1)^{n-2}+4(1-\sqrt{5})^{n-2}+2)C_1-(4(\sqrt{5}+1)^{n-2}+4(1-\sqrt{5})^{n-2}+2)D_1}{4(\sqrt{5}+1)^{n-1}+4(1-\sqrt{5})^{n-1}+(\sqrt{5}+1)^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}}\end{array}\right]<A_1$$

$$\leq MAX\left[\begin{array}{c}\frac{((1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}-2)C_1+((1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}-2)(S-B_1-C_1-D_1)-(4(1+\sqrt{5})^{n-1}+4(1-\sqrt{5})^{n-1}+2)B_1-(4(1+\sqrt{5})^{n}+4(1-\sqrt{5})^{n}+2)D_1}{4(1+\sqrt{5})^{n-1}+4(1-\sqrt{5})^{n-1}+(1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}}, \\ \frac{((\sqrt{5}+1)^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}-2)B_1+((\sqrt{5}+1)^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}-2)(S-B_1-C_1-D_1)-(4(\sqrt{5}+1)^{n-1}+4(1-\sqrt{5})^{n-1}+2)C_1-(4(\sqrt{5}+1)^{n-1}+4(1-\sqrt{5})^{n-1}+2)D_1}{4(\sqrt{5}+1)^{n}+4(1-\sqrt{5})^{n}+(\sqrt{5}+1)^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}}\end{array}\right]$$

陸、 結論

一、T_2系統並不是多餘的，他是一個重要的研究手段，他讓我們找到發現「臨界值」的方法，若想要跳過T_2而直接一開始在T_3、T_4等系統中尋找「臨界值」那是非常困難的，因此**「發現一」**可說是本報告的基石。

二、我們建立了T_2系統，a=2，b=0，(各層的 S 相同)的臨界值範圍不等式。

三、我們建立了T_3、T_4系統中，a=2，b=0，(各層的 S 相同)，分成 n 為奇偶數的臨界值範圍不等式。

四、我們建立了T_3、T_4系統中，內層相鄰兩數為外層對應數 X 之 a 倍多 b 系統的臨界值不等式，其中各層的 S 值不一定相等。

(一) a=2，b≠0，分成 n 為奇偶數的臨界值範圍不等式。

(二) a≠2，b≠0，分成 n 為奇偶數的臨界值範圍不等式。

五、我們建立了正四面體，內層四面體的每一個面上的三個數字和，等於對應外層頂點數值的三倍，S 為定值的臨界值範圍不等式。

六、在T_3系統中，我們發現 S=180，使用內鏡射作圖法可以印證最大運算層數。

柒、 參考資料

一、賴緯倫等(民 83)。數字方塊。中華民國第 34 屆中小學科學展覽作品。台北市。

二、Geogebra 使用說明書。

三、高中數學第二冊。

【評語】030417

考慮給定初始狀態，在滿足一定的限制條件下，層層堆疊的數字最多可以有多少組的一個有趣的數字問題。作者們針對他們所提出的、系統作了完整的分析。不只針對原本的的情況給出了解答，對於一般化的問題也作了完整的討論。不止探討理論，還給出了一個實際的應用，頗具創意。分析此問題的另一種觀點是從第 n 層倒回去看其與第 n-1 層的關係。以這樣的觀點，我們應該可以很快看出在系統中，第 n-1 層的、恰好是閉區間的三等分點。由此，說明定理一、定理二和定理三會更為容易，看起來也會更直觀。如果倒著算回來（最後一層當第一層，倒數第二層當第二層…），在系統中，如果對頂的點用相同的符號，則有（對所有的，我們都會有）。由此遞迴關係搭配，我們應該很容易可以得出的通式。這樣的討論，會讓整個論述看起來更清楚。作者們如果能由這樣的觀點出發，應該可以讓論述更為精簡，整個作品的呈現也會更好。