中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030416

消失?!秘密!

—探討似直角三角形與中間矩形的關係與規律

學校名稱：高雄市立五福國民中學

作者：	指導老師：
國二 張仲誴	余尚芸 顏士強

關鍵詞：中間矩形、消失方塊、似直角三角形

摘要

本研究從網路風行影片出發，好奇消失的面積和似 Rt△邊長有何關係。利用中間矩形的切法進行抽絲剝繭，發現中間矩形的切法影響似 Rt△的兩股長和邊長 m×n 消失方塊的面積。另外，發現許多規律性，並利用邊長簡化推出 m×n 消失方塊、似 Rt△的兩股長，與斜邊斜率差間的關係式為 $\Delta\theta = \tan^{-1}\frac{h_1 m}{w_1 n} - \tan^{-1}\frac{h_2 m}{w_2 n}$(其中 h_1:右上 Rt△長，w_1: 右上 Rt△寬，h_2: 左下 Rt△長，w_2: 左下 Rt△寬)，右上 Rt△的邊長$= (h_1 \times m) \times (w_1 \times n)$，左下 Rt△的邊長$= (h_2 \times m) \times (w_2 \times n)$，似 Rt△的邊長$= [(h_1 + h_2)m] \times [(w_1 + w_2)n]$。最後利用軟體繪製出「xy 函數圖模式」，並推廣至分割成多塊小似直角三角形並找出一般化規律。

壹、研究動機：

網路上曾經流傳著一個影片(【中央大學】物理演示實驗－消失的面積 Disappeared Area (triangle))。影片中有一塊直角三角形，被分成了兩個小直角三角形、兩塊 L 形拼圖，在移動這四塊拼圖之後，形成了一塊兩股與移動前相等的直角三角形，但是竟然中間出現了一塊「消失方塊」!這究竟是直角三角形面積增加了一塊?還是直角三角形減少了一塊呢?我便在網路上搜尋了有關這個「魔術」的資料：數學史上十大難題之「消失的方格」，該文章中提及關於**一開始的直角三角形其實不是真的直角三角形，而兩個小直角三角形的斜邊斜率其實不同，我很好奇在這樣的圖形中是否隱藏數學規律，但經探討發現並無文獻做這方面的研究，**我猜測這應該跟圖形的切法有很大的關係，所以便利用(三) 2-3 畢氏定理及繪圖軟體，從拼圖的切法開始研究起。

貳、研究目的：

一、探討似直角三角形之內部分割線的合理切法。

二、探討似直角三角形中間為 m×n 消失方塊，消失方塊邊長、中間矩形邊長和似直角三角形兩股長之間的關係與規律。

三、探討中間矩形邊長之特性與其切法之關係。

四、似直角三角形當中間為 m×n 的消失方塊時，探討其消失方塊與斜邊斜率差、Δθ值之變化。

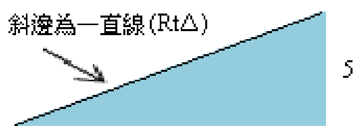
五、當似直角三角形分多塊小直角三角形時，探討似直角三角形移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值。

參、研究器材：Geogebra、Microsoft mathematics

肆、名詞解釋：

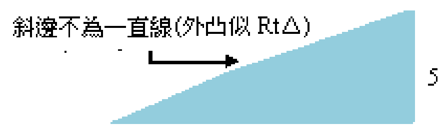
一、**似直角三角形**：兩股互相垂直，但是斜邊不為一直線的形狀。例如內凹似 Rt△以及外凸

之後為方便表示皆以「似 Rt△」簡稱。



13
(圖 4-1-1)

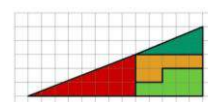
13
(圖 4-1-2)



13
(圖 4-1-3)

二、**移除三角形：**內凹似 Rt△與同兩股長 Rt△的面積差。消失方塊所佔的面積將由斜邊內凹或外凸來取代。而將右上小△和左下小△的交點與似 Rt△(Rt 以外)的兩點連接，即可形成一個△**，**其面積等於**消失方塊面積的一半**。之後為方便表示皆以「移除△」簡稱。

三、**內部分割線**：將似 Rt△內部，分割成多塊拼圖的切線。內部分割線必須互相垂直或平行，也必須垂直或平行於兩股。所分出來的拼圖移動之後不可翻轉，進而造成移動後邊長改變。

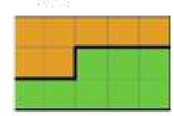

(圖 4-3-1)

例：內凹似 Rt△(圖 4-3-1)，被內部分割線分割成綠色、紅色、黃色和淺綠，四塊拼圖。

四、**消失方塊**：似 Rt△沿著內部分割線切割開後，移動各個拼圖，使移動之後兩股還是與移動前一樣，兩股也還是互為垂直，便使在移動之後多出的面積。移動之後多出來的面積，即為「消失方塊」。

圖 4-4-1

(圖 4-4-1 為移動之後所形成的外凸似 Rt△，相較於移動前，下方有增加一塊白色的消失方塊)

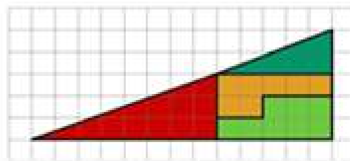
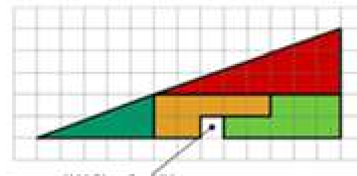

(圖 4-5-1)

五、**中間矩形**：分 2 塊小 Rt△的似 Rt△在沿著內部分割線切割開後，會形成右上 Rt△、左下 Rt△、及中間矩形 (圖 4-5-1)L 形拼圖 1(橘色)和 L 形拼圖 2(綠色)組成中間矩形。

(一) (圖 4-6-1)圖形中將圖形分割成綠色、紅色、黃色和淺綠，相交處皆為 Rt 的切線，即為「內部分割線」。

(二) (圖 4-6-2)在上圖的拼圖移動之後所形成(兩股長不變、只使用上圖的拼圖)。下方有一塊白色、增加出來的方塊，即為「消失方塊」。

(三) (圖 4-6-1)由黃色 L 形拼圖和淺綠 L 形拼圖所組成的矩形，即為「中間矩形」。在移動之後，邊長改變，但各個角皆還是 Rt，並且會多出一塊消失方塊。

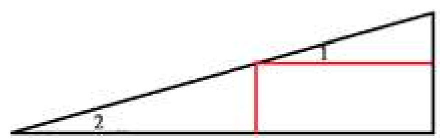
 圖 4-6-1	 圖 4-6-2
說明：此圖形為內凹似 Rt△ 由內部分割線分成四塊。在交換綠色以及紅色 Rt△的位置之後，移動橘色 L 形拼圖和綠色 L 形拼圖，形成右圖。(圖中面積=37)	說明：此圖形為外凸似 Rt△ 由內部分割線分成的四塊拼圖，在移動之後，能夠形成寬長不變，而面積加一的外凸似 Rt△。(圖中面積=37+1=38)

六、**斜邊斜率差**：為了觀察似直角△凹凸的情況，所以將每塊小直角△的斜率紀錄並依照不同的似直角三角形，計算其斜邊斜率差。斜邊斜率差越大，似直角三角形的斜邊越不像一條直線，而越小則反之。

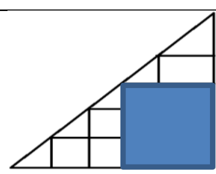
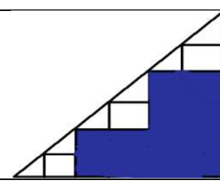
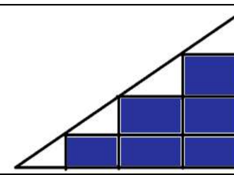
例：圖 4-6-1 中，右上 Rt△的斜邊斜率−左下 Rt△的斜邊斜率= $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$。

七、**Δθ**：移動前兩塊直角三角形相同對應位置的角度差

例：左圖是左下角差 $\theta 1 - \theta 2$。



八、**不動面積**：分 4 塊小直角三角形以上的似 Rt△在移動前後位置、面積、邊長接不變，但是不能與其他拼圖合併。如下圖中的藍色區域

伍、研究過程與結果：

一、探討似直角三角形之內部分割線的合理切法。

步驟 1：嘗試在方格紙上畫出不同大小的 Rt△，並以不同的方法繪製內部分分割線。

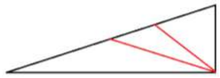
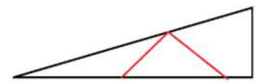
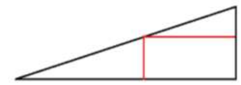
			

圖 5-1-1(不合)	圖 5-1-2(不合)	圖 5-1-3(不合)	圖 5-1-4(合)

發現：根據名詞解釋，內部分割線要互相平行或垂直，也必須垂直或平行於兩股。

例：上表中的圖 5-1-1、圖 5-1-2、圖 5-1-3 皆不合。

步驟 2：確認內凹似 Rt△的內部分割線切割後完成的圖形。

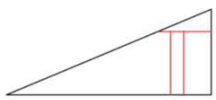
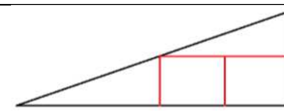
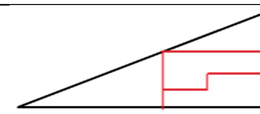
			

圖 5-1-9(不合)	圖 5-1-6(不合)	圖 5-1-7(不合)	圖 5-1-8(合)

發現：上表中，雖然圖 5-1-5、圖 5-1-6、圖 5-1-7、圖 5-1-8 都有符合內部分割線的要求，但是移動前後，有些無法從內凹似 Rt△，變成外凸似 Rt△(例如：圖 5-1-6、圖 5-1-7)；其中，唯一能夠符合移動之後出現消失方塊的是：圖 5-1-8

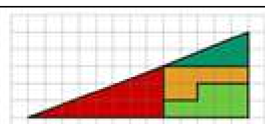
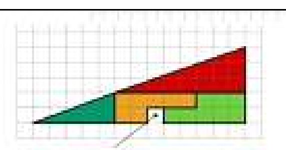
圖 5-1-8 所切割的拼圖，能在移動之後，保持圖形不變，但是多出一塊消失方塊。

步驟 3：在步驟二挑選出來的切法中找尋規律，能快速的在新的內凹似 Rt△中正確又快速的畫出正確的內部分割線。

步驟 3-1：因為原內凹似 Rt△中，增加面積不固定，所以

將消失方塊(移動後增加的面積)假設為單位面積(1×1)，將消失方塊邊長，定為原內凹似 Rt△的單位長度。

步驟 3-2：確認內凹似 Rt△的內部分割線切割後，移動，是否增加面積。

 (圖 5-1-13)	 消失方塊 (圖 5-1-14)
說明：使用步驟 2 中(圖 5-1-8)的切割方法所繪製成(5×13)的內凹似 Rt△。	說明：移動(圖 5-1-13)的拼圖之後，即可以形成一個(5×13)的外凸似 Rt△，以及一塊消失方塊。

小結：切法限定必須在重新移動排列後，除能在移動後多出面積，還要能形成邊長與原來內凹似 Rt△一樣的圖形(從內凹似 Rt△變成外凸似 Rt△視為同一種圖形)。

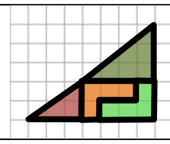
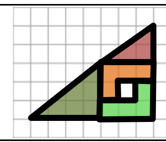
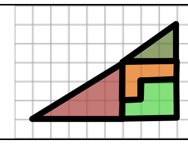
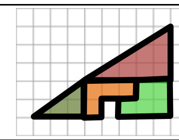
二、探討似直角三角形中間為 m×n 消失方塊，消失方塊邊長、中間矩形邊長和似直角三角形兩股長之間的關係與規律。

因為內凹似 Rt△在切割移動之後，變成外凸似 Rt△時，所增加的消失方塊，面積有大有小。所以希望從不同大小面積的消失方塊中，歸納出消失方塊、中間矩形邊長和 Rt△兩股長之間的關係及規律。

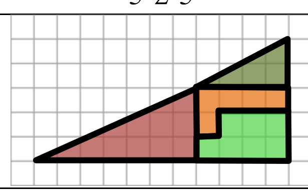
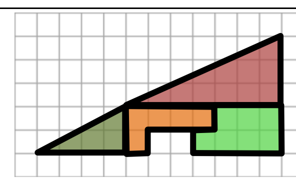
(一)探討似 Rt△中間為 1×1 消失方塊，消失方塊邊長、中間矩形邊長和似 Rt 三角形兩股之間長的關係與規律。

發現：似 Rt△長＝移動前的中間矩形長+移動後的中間矩形長。

似 Rt△寬＝移動前的中間矩形寬+移動後的中間矩形寬。

	編號	5-2-1	5-2-2	5-2-3	5-2-4
圖	圖形				
說明	移動前似 Rt△邊長	7×5	7×5	8×5	8×5
	中間矩形邊長	4×2	3×3=8+1	3×3	5×2=9+1
	消失方塊面積	1×1		1×1	
舉例	兩圖間的關係	內凹似 Rt△長為 4+3=7 內凹似 Rt△寬為 2+3=5		內凹似 Rt△長為 3+5=8 內凹似 Rt△寬為 3+2=5	

(二)探討似 Rt△中間為 1×2 消失方塊，消失方塊邊長、中間矩形邊長和似 Rt 三角形兩股長之間的關係與規律。

	編號	5-2-5	5-2-6
圖	圖形		
說明	移動前似 Rt△邊長	11×5	11×5
	中間矩形邊長	3×4	2×7=12+2
	消失方塊面積	1 × 2	

發現：(L 形拼圖 2 的上寬為圖 5-2-5 中的紅色線段。)

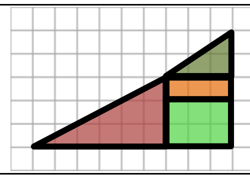
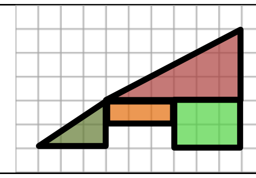
消失方塊邊長也能換成中間矩形的邊長

消失方塊的長＝$\frac{1}{2}$(3×移動後的中間矩形長−移動前的中間矩形長)

消失方塊的寬＝2× 綠色 L 形拼圖的上寬 −移動前的中間矩形寬

例：圖 5-2-5 中，消失方塊的長＝1＝ $\frac{1}{2}$(3×2−4)，消失方塊的寬＝2=2× 3 −4

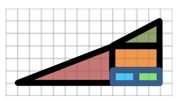
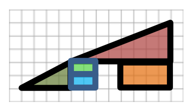
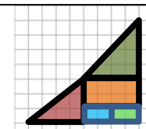
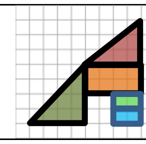
(三)探討似 Rt△中間為 1×3 消失方塊，消失方塊邊長、中間矩形邊長和似 Rt 三角形兩股長之間的關係與規律。

	編號	5-2-9	5-2-10
圖	圖形		
說明	移動前似 Rt△邊長	9×5	9×5
	中間矩形邊長	3×3	6×2=9+3
	消失方塊面積	1×3	

發現：似 Rt△長＝移動前的中間矩形長+移動後的中間矩形長。

似 Rt△寬＝移動前的中間矩形寬+移動後的中間矩形寬。

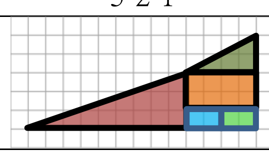
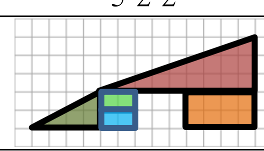
(四)探討似 Rt△中間為 2×2 消失方塊，消失方塊邊長、中間矩形邊長和似 Rt 三角形兩股長之間的關係及規律。

	編號	5-2-11	5-2-12	5-2-13	5-2-14
圖	圖形				
說明	移動前似 Rt△邊長	5×12	5×12	7×8	7×8
	中間矩形邊長	3×4	2×8=12+4	4×3	4×3=12+4
	消失方塊面積	2×2		2×2	
舉例	兩圖間的關係	內凹似 Rt△長為 3+2=5 內凹似 Rt△寬為 4+8=12		內凹似 Rt△長為 4+3=7 內凹似 Rt△寬為 4+4=8	

發現：似 Rt△長＝移動前的中間矩形長+移動後的中間矩形長。

似 Rt△寬＝移動前的中間矩形寬+移動後的中間矩形寬。

(五)探討似 Rt△中間為 2×3 消失方塊，消失方塊邊長、中間矩形邊長和似 Rt 三角形兩股長之間的關係及規律。

	編號	5-2-1	5-2-2
圖	圖形		
說明	移動前似 Rt△邊長	5×13	5×13
	中間矩形邊長	3×4	2×9=12+6
	消失方塊面積	2×3	

發現：似 Rt△長＝移動前的中間矩形長+移動後的中間矩形長。

似 Rt△寬＝移動前的中間矩形寬+移動後的中間矩形寬。

◎其他更多圖形因版面有限，詳見手稿或研究紀錄。

三、探討中間矩形邊長之特性與其切法之關係。

為方便討論，似 Rt△的變化可以分成「外部變化」以及「內部變化」:

❶外部變化:意指中間矩形移動前移動後的邊長與似 Rt△的斜邊斜率變化、兩股間的關係。

❷內部變化:指中間矩形被內部分割線所切割出來拼圖的邊長,與消失方塊面積間的關係。

進一步探討影響兩者之變因如下

❶內部變化影響變因：消失方塊面積大小、消失方塊邊長比、中間矩形切的塊數、中間矩形的切法、中間矩形的邊長及內部分割線的長度。

❷外部變化影響變因：中間矩形的邊長、似 Rt△的斜邊斜率差Δθ。

其中，連接「外部變化」以及「內部變化」的，就是中間矩形的邊長。

為了研究出中間矩形邊長，與似 Rt△的斜邊斜率差(左下 Rt△斜邊斜率減去右上 Rt△斜邊斜率)關係，就必須要適用相同類型的中間矩形的切法，分類出來。

(將每一種中間矩形，以邊長的特性，分入前一個研究依照拼圖塊數所分成的 3 類裡。)

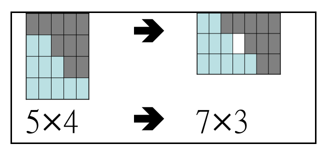
不同拼法下的中間矩形：

移動前的中間矩形，是由兩塊拼圖所組成，邊長為 x_1(寬) ×y_1(長)。移動之後變成兩塊拼圖、一塊消失方塊，中間矩形邊長變成為 x_2(寬)×y_2(長)。表示為數對：$(x_1,y_1) \rightarrow (x_2,y_2)$

但是在移動後增加消失方塊(m×n)，所以要符合：$x_1 \times y_1 + m \times n = x_2 \times y_2$

(一)中間矩形分成兩塊全等 L 拼圖，探討其切割後的拼圖形狀

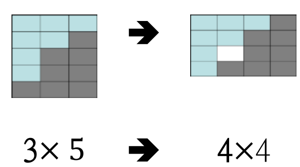
左圖為移動前的中間矩形(L 形拼圖 1 以及 L 形拼圖 2)，右圖為一移動後的中間矩形(含一塊消失方塊)。



發現：中間矩形面積必須為偶數，L 形拼圖 1 還有 L 形拼圖 2 即可分割成全等的兩片拼圖。

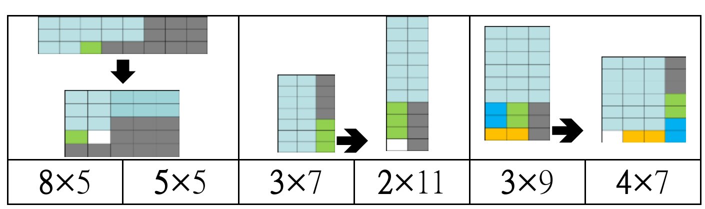
(二)中間矩形分成兩塊不全等拼圖，探討其切割後的拼圖形狀

發現：當中間矩形不為偶數時，為了還是要保持整數邊，所以兩塊 L 形拼圖，就不可能平分成兩個全等地圖形，因而就分成兩塊不全等，卻還是能在重拼之後，變成一個新的矩形。



(三)中間矩形分成三塊或三塊以上的拼圖，探討其切割後的拼圖形狀

發現：雖無法只將中間矩形分兩塊，就得到消失方塊，但是只要使用 3 塊以上的拼圖，還是能夠出現消失方塊。



四、似 Rt△當中間為 m×n 的消失方塊時，探討其消失方塊與斜邊斜率差之一般化。

接下來依照下面步驟繼續探討

步驟一：不失一般性假設消失方塊之邊長為 m×n。且為方便討論，右上小△以及左下小△的邊長設為 m 及 n 的倍數。

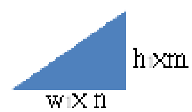
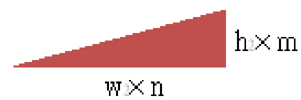
步驟二：中間矩形切法仿照研究三中分成三類。

步驟三：觀察各邊長單位邊長的關係。

發現：

1.針對兩個小△：

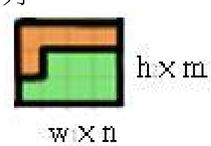
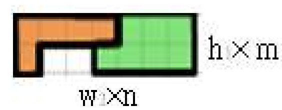
因似 Rt△在移動前是斜邊內凹，移動之後斜邊外凸，所以右上 Rt△的斜邊斜率必須大於左下 Rt△的斜邊斜率。$\frac{h_1\times m}{w_1\times n} > \frac{h_2\times m}{w_2\times n}$

說明：	
	
右上小△長為 h_1×m(長度單位 n 的 h_1 倍)寬為 w_1× n(寬度單位 m 的 w_1 倍)	左下小△長為 h_2× m(長度單位 n 的 h_2 倍)寬為 w_2× n(寬度單位 m 的 w_2 倍)。

2.針對中間矩形：

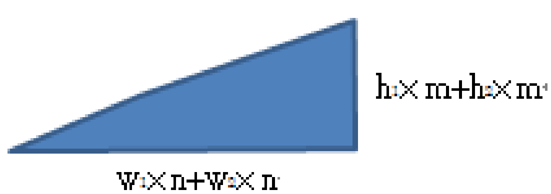
右上 Rt△寬=移動前的中間矩形的寬，左下 Rt△的長=移動前中間矩形的長；

左下 Rt△寬=移動後的中間矩形的寬，右上 Rt△的長=移動後中間矩形的長。

說明：	
	
中間矩形移動前的長為 h_2× m，寬為 w_1× n	中間矩形移動後的長為 h_1× m，寬為 w_2×n

3.針對似 Rt△：

由上任一圖形皆可推導出似 Rt△的長為 h_1× m+h_2× m，寬為 w_1× n+w_2× n，如下。



雖然似直角三角形可以分出兩塊小直角三角形，並且移動後邊長不變、增加消失方塊，但是否能在多塊 小直角三角形的狀況下，也符合「消失方塊」的效果呢?

五、當似 Rt△分多塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值。

為配合移動之規則，將各塊拼圖編號，以下加以說明。

● **小 Rt△：**

最下方的小 Rt△開始編號，1、2、3、4、…、。

小 Rt△的邊長，$\triangle_1$ 為$a_1 \times b_1$、$\triangle_2$ 為$a_2 \times b_2$、$\triangle_3$ 為$a_3 \times b_3$、…以此類推。

● 不動面積：

∵小似 Rt△各自符合似 Rt△的移動前移動後邊長不變之條件，且內部變化也不影響外部變化

∴移動前後會出現面積邊長皆不變的不動面積。移動之後也不會出現消失方塊。

因為小似 Rt△的塊數>2，所以不動面積的形狀就不會是矩形，而是樓梯狀的圖形。

● **似 Rt△與Δθ：**

∵各個小似 Rt△移動前以及移動之後的邊長皆不會改變，不動面積邊長也固定；各個似 Rt△的內部分割線也不互相影響

∴似 Rt△在移動前以及移動之後邊長固定

每一組小似 Rt△都會增加一塊消失方塊，透過先前的研究，可以各自藉由中間矩形邊長、塊數，還有小似 Rt△中的小 Rt△斜率，算出$\Delta\theta$和$\Delta\theta_{max}$。

● 斜邊斜率差：

$\triangle_1$的斜率標示為M_1；$\triangle_2$的斜率標示為M_2；$\triangle_3$的斜率標示為M_3…$\triangle_k$的斜率標示為M_k。

因為移動前斜邊為內凹，所以斜率之大小關係為$M_1 < M_2 < M_3 < \cdots < M_k$

也就是$\frac{b_1 m}{a_1 n} < \frac{b_2 m}{a_2 n} < \frac{b_3 m}{a_3 n} < \cdots < \frac{b_k m}{a_k n}$

$\boldsymbol{\Delta\theta}$：

$\triangle_1$的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_1$；$\triangle_2$的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_2$；$\triangle_3$的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_3$…以此類推，

$\triangle_k$的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_k$。

因為移動前的斜邊為內凹，所以$\Delta\theta_1 < \Delta\theta_2 < \Delta\theta_3 < \cdots < \Delta\theta_k$

因為移動的限制，故進一步將多塊小直角三角形分成奇數塊及偶數塊討論：

(一)當似 Rt△分 2t 塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值

1.當似直角△分 4 塊小直角△時，探討似直角△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值

發現：

①小 Rt△邊長關係：$\Delta_1 = a_1 n \times b_1 m$；$\Delta_2 = a_2 n \times b_2 m$；$\Delta_3 = a_3 n \times b_3 m$；$\Delta_4 = a_4 n \times b_4 m$

②不動面積：∵要符合似 Rt△的條件，右上似直角△和左下似直角△移動前後都邊長不變

∴移動前和移動後的邊長保持不變，也沒有消失方塊的出現。

因為只有兩組小似 Rt△，故其圖形為矩形，邊長$= (a_3 n + b_3 n)(b_1 m + b_2 m)$

③消失方塊的邊長為 1×1(單位面積)，而其長寬比為$\frac{m}{n}$。

④似直角△之斜邊斜率差與Δθ：

∵要符合似直角△的條件，右上似直角△和左下似直角△移動前後都邊長不變

∴移動前和移動後的邊長保持不變

兩組小似直角△都會增加一塊消失方塊，透過先前的研究，可以各自藉由中間矩形邊長、塊數，還有小似直角△中的小直角△斜率，算出$\Delta\theta$和$\Delta\theta_{max}$。

❶斜邊斜率差：$\begin{cases} M_2 - M_1 = \frac{b_2 m}{a_2 n} - \frac{b_1 m}{a_1 n} \\ M_4 - M_3 = \frac{b_4 m}{a_4 n} - \frac{b_3 m}{a_3 n} \end{cases}$ ⇨ $M_t = (\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} - \frac{b_3+b_4}{a_3+a_4})\frac{m}{n}$

❷Δθ：$\begin{cases} \theta_2 - \theta_1 = tan^{-1}\frac{b_2 m}{a_2 n} - tan^{-1}\frac{b_1 m}{a_1 n} \\ \theta_4 - \theta_3 = tan^{-1}\frac{b_4 m}{a_4 n} - tan^{-1}\frac{b_3 m}{a_3 n} \end{cases}$ ⇨ $\Delta\theta_t = tan^{-1}\frac{b_3+b_4 m}{a_3+a_4 n} - tan^{-1}\frac{b_1+b_2 m}{a_1+a_2 n}$

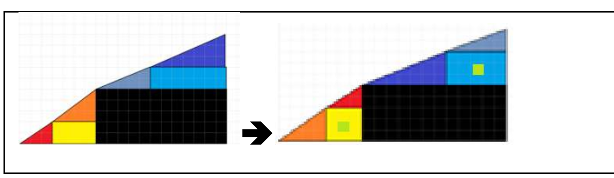
⑤似 Rt△的內部分割線各長度之關係與規律則因為兩組似 Rt△的邊長移動前與移動後不會改變，所以兩個小似 Rt△並不會互相影響。只要兩個小似 Rt△都各自符合能在移動之後邊長固定、增加消失方塊，則整個似 Rt△就能符合「消失方塊」的效果。

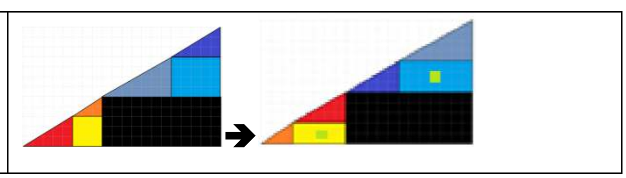
例 1：左下圖為右上似 Rt△為 5×12；左下似 Rt△為 5×7 時的情形，

$a_1 = 3$；$b_1 = 2$；$a_2 = 2$；$b_2 = 4$；$a_3 = 5$；$b_3 = 2$；$a_4 = 7$；$b_4 = 3$。消失方塊：2

例 2：右下圖為右上似 Rt△為 7×12；左下似 Rt△為 5×8 時的情形，

$a_1 = 5$；$b_1 = 3$；$a_2 = 3$；$b_2 = 2$；$a_3 = 7$；$b_3 = 4$；$a_4 = 5$；$b_4 = 3$。消失方塊：2





2.當似 Rt△分六塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值

發現：

①小 Rt△邊長關係：$\Delta_1 = a_1 n \times b_1 m$； $\Delta_2 = a_2 n \times b_2 m$； $\Delta_3 = a_3 n \times b_3 m$；

$\Delta_4 = a_4 n \times b_4 m$； $\Delta_5 = a_5 n \times b_5 m$； $\Delta_6 = a_6 n \times b_6 m$

②不動面積：∵要符合似 Rt△的條件，右上似 Rt△和左下似 Rt△移動前後都邊長不變
∴移動前和移動後的邊長保持不變，也沒有消失方塊的出現。
因為似 Rt△有三組，所以不動面積為一 L 形。

③消失方塊：消失方塊的邊長為 1×1(單位面積)，而其長寬比為$\frac{m}{n}$。

④似 Rt△之斜邊斜率差與Δθ：

兩組小似 Rt△都會增加一塊消失方塊，透過先前的研究，可以各自藉由中間矩形邊長、塊數，還有小似 Rt△中的小 Rt△斜率，算出$\Delta\theta$和$\Delta\theta_{max}$。

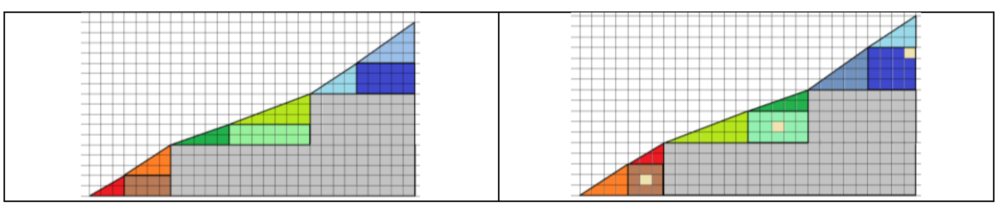
❶斜邊斜率差：$\begin{cases} M_2 - M_1 = \frac{b_2 m}{a_2 n} - \frac{b_1 m}{a_1 n} \\ M_4 - M_3 = \frac{b_4 m}{a_4 n} - \frac{b_3 m}{a_3 n} \\ M_6 - M_5 = \frac{b_6 m}{a_6 n} - \frac{b_5 m}{a_5 n} \end{cases}$ ⇨$M_t = \left(\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} - \frac{b_5+b_6}{a_5+a_6}\right)\frac{m}{n}$

❷Δθ：$\begin{cases} \theta_2 - \theta_1 = \tan^{-1}\frac{b_2 m}{a_2 n} - \tan^{-1}\frac{b_1 m}{a_1 n} \\ \theta_4 - \theta_3 = \tan^{-1}\frac{b_4 m}{a_4 n} - \tan^{-1}\frac{b_3 m}{a_3 n} \\ \theta_6 - \theta_5 = \tan^{-1}\frac{b_6 m}{a_6 n} - \tan^{-1}\frac{b_5 m}{a_5 n} \end{cases}$ ⇨$\Delta\theta_t = \tan^{-1}\frac{b_5+b_6 m}{a_5+a_6 n} - \tan^{-1}\frac{b_1+b_2 m}{a_1+a_2 n}$

⑤似 Rt△的內部分割線各長度之關係與規律

例：$a_1 = 3$；$b_1 = 2$；$a_2 = 4$；$b_2 = 3$；$a_3 = 5$；$b_3 = 2$；$a_1 = 7$；$b_3 = 3$；

$a_1 = 4$；$b_3 = 3$；$a_1 = 5$；$b_3 = 4$。消失方塊：2



3.當似 Rt△分 2t 塊小 Rt△，出現 t 塊 m×n 的消失方塊時，觀察似 Rt△移動前後的圖形變化觀察似 Rt△移動前後的圖形變化

推廣至一般化

發現：

①小 Rt△邊長關係：∵每兩個小 Rt△就能分出一個小似 Rt△

∴一共可以分出 t 組小似 Rt△。

最下方的小 Rt△開始編號，1、2、3、4、…、2t。

△1 為$a_1 \times b_1$、△2 為$a_2 \times b_2$、△3 為$a_3 \times b_3$、…以此類推。

②不動面積：∵小似 Rt△各自符合似 Rt△的移動前移動後邊長不變之條件

∴移動前後出現面積邊長皆不變的不動面積。移動之後也不會出現消失方塊。

因為小似 Rt△的塊數>2，所以不動面積的形狀是樓梯狀的圖形。

③似 Rt△之斜邊斜率差與Δθ：每一組小似 Rt△都會增加一塊消失方塊，透過先前的研究，可以各自藉由中間矩形邊長、塊數，還有小似 Rt△中的小 Rt△斜率，算出$\Delta\theta$和$\Delta\theta_{max}$。

❶斜邊斜率差：△1 的斜率標示為M_1；△2 的斜率標示為M_2…△k 的斜率標示為M_k。

斜率之大小關係為$M_1 < M_2 < M_3 < \cdots < M_k$

也就是$\frac{b_1 m}{a_1 n} < \frac{b_2 m}{a_2 n} < \frac{b_3 m}{a_3 n} < \cdots < \frac{b_k m}{a_k n}$

將最大小似 Rt△斜率減去最小小似 Rt△斜率，

$m_t = (\frac{b_{k-1}+b_k}{a_{k-1}+a_k} - \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2})\frac{m}{n}$

❷$\Delta\theta$：△1 的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_1$；△2 的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_2$；△3 的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_3$…△k 的$\Delta\theta$標示為$\Delta\theta_k$。

因為移動前的斜邊為內凹，所以$\Delta\theta_1 < \Delta\theta_2 < \Delta\theta_3 < \cdots < \Delta\theta_k$

$$\Delta\theta_t = tan^{-1}\frac{b_{k-1}+b_k m}{a_{k-1}+a_k n} - tan^{-1}\frac{b_1+b_2 m}{a_1+a_2 n}$$

(二)當似 Rt△分 2t+1 塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值

1.當似 Rt△分 3 塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值

雖然似 Rt△分出了 3 塊(奇數塊)的小 Rt△，無法兩塊兩塊一組，組成小似 Rt△，但是可以將編號中間的小 Rt△固定不動(不與其他小 Rt△交換位置)，其他兩塊則移動後交換位置，也能是兩兩一組，即Δ_1和Δ_3交換，但Δ_2不動。

發現：

①小 Rt△邊長關係：$\Delta_1 = a_1 n \times b_1 m$；$\Delta_2 = a_2 n \times b_2 m$；$\Delta_3 = a_3 n \times b_3 m$

②消失方塊：消失方塊的邊長為 1×1(單位面積)，而其長寬比為$\frac{m}{n}$。

③似 Rt△之斜邊斜率差與Δθ：

❶斜邊斜率差：也就是$\frac{b_1 m}{a_1 n} < \frac{b_2 m}{a_2 n} < \frac{b_3 m}{a_3 n}$。

將最大斜率減去最小斜率，$\frac{b_3 m}{a_3 n} - \frac{b_1 m}{a_1 n}$ =「M_t」

❷$\Delta\theta$：也就是 $tan^{-1}\frac{b_1 m}{a_1 n} < tan^{-1}\frac{b_2 m}{a_2 n} < tan^{-1}\frac{b_3 m}{a_3 n}$

將最大$\Delta\theta$減去最小$\Delta\theta$， $tan^{-1}\frac{b_3 m}{a_3 n} - tan^{-1}\frac{b_1 m}{a_1 n}$ =「$\Delta\theta_t$」

④似 Rt△的內部分割線長度與消失方塊面積之關係與規律：

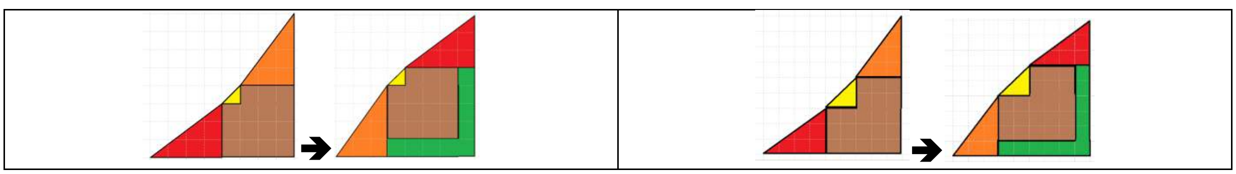
由於Δ_2移動前移動後的位置並不會改變，所以將三角形 2 的邊長設定為控制變因，觀察Δ_1、Δ_3的邊長與消失方塊邊長之間的關係與規律。

例 1.左下圖為Δ_2為 1n× 1m 的情況，

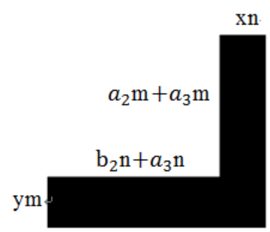
$a_1 = 4$、$b_1 = 3$、$a_2 = 1$、$b_2 = 1$、$a_3 = 3$、$b_3 = 4$。消失方塊：9

例 2.右下圖為Δ_2為 1n× 1m 的情況，

$a_1 = 4$、$b_1 = 3$、$a_2 = 2$、$b_2 = 2$、$a_3 = 3$、$b_3 = 4$。消失方塊：11



⑤ Δ_2為$b_2 n \times a_2 m$ 時



❶矩形 A、矩形 B、矩形 C 在移動三角形 1 和三角形 3 之後，並不會有面積或是形狀上的改變。似 Rt△在移動三角形 1、3 之後所增加或減少的面積，卻是出現在矩形 A、矩形 B、矩形 C 之外，且形狀為 L 形。(如右圖)

❷若$a_1n > a_3n$，則 $yn=(a_1-a_3)n$ (面積增加)；$a_1n < a_3n$，則 $yn=-(a_1-a_3)n$ (面積減少)

若$b_3m > b_1m$，則 $xm=(b_3-b_1)m$(面積增加)；$b_3m < b_1m$，$xm=-(b_3-b_1)m$(面積減少)

從a_1n、a_3n、b_3m、b_1m 可藉由大小關係，控制移動後所增加或減少的消失方塊面積。

❸∵ 矩形 A、矩形 B、矩形 C在移動之後邊長面積不變

∴所以可以得知移動後的消失方塊面積= $(b_3n+a_3n)ym+(b_2m+b_1m)xn+xnym$

2.當似 Rt△分 5 塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值

①小 Rt△的邊長關係： $\Delta_1= a_1n\times b_1m$； $\Delta_2= a_2n\times b_2m$；$\Delta_3= a_3n\times b_3m$；

$\Delta_4= a_4n\times b_4m$；$\Delta_5= a_5n\times b_5m$

②不動面積：∵要符合似 Rt△的條件，右上似 Rt△和左下似 Rt△移動前後都邊長不變

∴移動前和移動後的邊長保持不變，也沒有消失方塊的出現。

因似 Rt△有三組，所以不動面積為一 L 形。其中邊長為$(b_1+b_2+b_3)(a_1+a_2)$

③消失方塊：兩組小似直角三角形中，一組有兩塊小直角三角形，消失方塊為 m’×n’；

另一組有三塊小直角三角形，消失方塊為$(b_3n+a_3n)ym+(b_2m+b_1m)xn+xnym$

兩塊消失方塊並不會互相影響。

④似 Rt△之斜邊斜率差與Δθ：

❶斜邊斜率差：斜邊斜率(M)大小關係為$M_1<M_2<M_3<M_4<M_5$

$$M_t=\frac{(b_3+b_4+b_5)m}{(a_3+a_4+a_5)n}-\frac{(b_1+b_2)m}{(a_1+a_2)n}$$

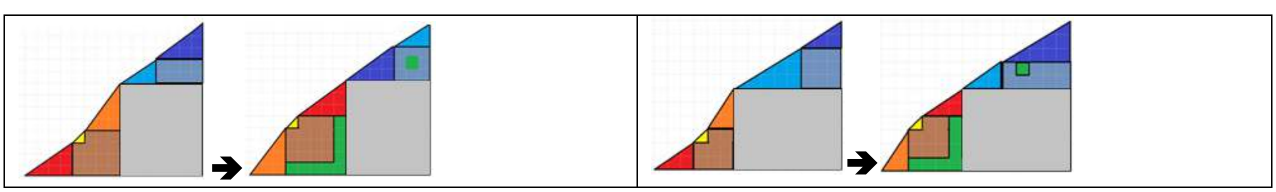
❷$\Delta\theta$：θ大小關係為$\theta_1<\theta_2<\theta_3<\theta_4<\theta_5$

$$\Delta\theta_t=\ tan^{-1}\frac{(b_1+b_2+b_3)m}{(a_1+a_2+a_3)n}-tan^{-1}\frac{(b_4+b_5)m}{(a_4+a_5)n}$$

⑤似 Rt△的內部分割線各長度之關係與規律：

例 1.左下圖為$a_1=4$；$b_1=3$；$a_2=1$；$b_2=1$；$a_3=3$；$b_3=4$；$a_4=3$；$b_4=2$；$a_5=4$；$b_5=3$。消失方塊：10 的情況

例 2.右下圖為$a_1=3$；$b_1=2$；$a_2=1$；$b_2=1$；$a_3=2$；$b_3=3$；$a_4=5$；$b_4=3$；$a_5=3$；$b_5=2$。消失方塊：8 的情況



3.當似 Rt△分 2t+1 塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值

推廣至一般化

①小 Rt△的邊長關係：∵每兩個小 Rt△就能分出一個小似 Rt△

∴一共可分出 t 組小似 Rt△，再將剩餘 1 塊小 Rt△併入其中一組小似 Rt△，形成 t−1 個分 2 塊小似 Rt△與一塊分 3 塊小 Rt△的小似 Rt△。

②不動面積：因為小似 Rt△的塊數>2，所以不動面積的形狀就是樓梯狀的圖形。

③消失方塊：分 2 塊小 Rt△的小似 Rt△移動後，消失方塊面積=$(a_{i+1}-a_i)(\mathrm{b}_{i+1}-\mathrm{b}_i)\mathrm{mn}$

分 3 塊小 Rt△的小似 Rt△移動後，

消失方塊面積= $(\mathrm{b}_{i+2}\mathrm{n}+a_{i+1}\mathrm{n})\mathrm{ym}+(\mathrm{b}_{i+1}\mathrm{m}+\mathrm{b}_i\mathrm{m})\mathrm{xn}+\mathrm{xnym}$。

④似 Rt△之斜邊斜率差與Δθ：

❶斜邊斜率差：令第 k 個小似 Rt△之斜邊斜率最大，

因為移動前的斜邊為內凹，所以斜邊斜率(M)之大小關係為$M_1<M_2<M_3<\cdots<M_k$

將最大小似 Rt△斜率減去最小小似 Rt△斜率，$M_t=(\frac{b_{k-2}+b_{k-1}+b_k}{a_{k-2}+a_{k-1}+a_k}-\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2})\frac{m}{n}$

❷$\Delta\theta$：$\Delta\theta_t=\tan^{-1}\frac{(b_{k-2}+b_{k-1}+b_k)m}{(a_{k-2}+a_{k-1}+a_k)n}-\tan^{-1}\frac{(b_1+b_2)m}{(a_1+a_2)n}$

伍、討論：

一、針對研究二，討論似 Rt△中間為 m×n 消失方塊，消失方塊邊長、矩形邊長和似 Rt△兩股長之間的關係與規律。

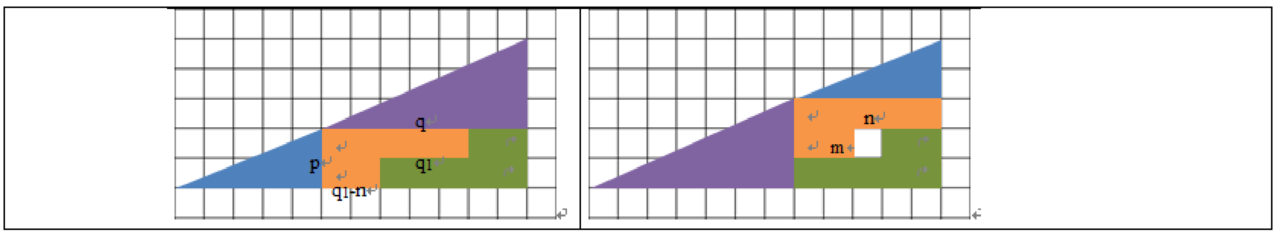
由以上消失方塊面積為 1×1、2×1、3×1、2×2、3×2…的圖形之中，可以歸納出消失方塊、中間矩形邊長和 Rt△兩股長之間的關係及規律。中間矩形中的內部分割線，可以藉由切出來的塊數，分為 3 類：❶中間矩形分成兩塊全等拼圖

❷中間矩形分成兩塊不全等拼圖

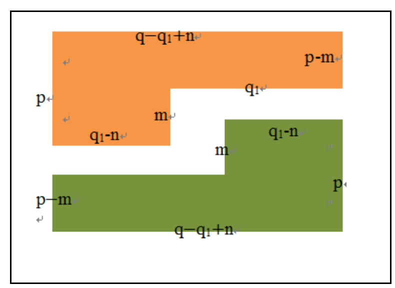
❸中間矩形分成多塊不全等拼圖

(一)中間矩形分成兩塊全等拼圖，探討其內部分割線之長度關係

由上述的各個似 Rt△的內部分割線中，可以發現，有好幾圖形，使用了幾乎相同的切法，都是將中間矩形分成兩個邊長不同的拼圖。



假設消失方塊長×寬=m×n，移動前的中間矩形長×寬=p×q



可以得知右圖中的邊長關係

$q_1=(q-q_1+n)-(q_1-n)=\dfrac{q+2n}{3}$

移動前內凹似 Rt△邊長$=(3p-m)\times(2q-q_1+n)$

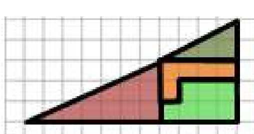
移動後外凸似 Rt△邊長$=(3p-m)\times(2q-q_1+n)$

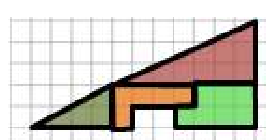
右上 Rt△的斜邊斜率$=\dfrac{2p-m}{q}$，左下 Rt△的斜邊斜率$=\dfrac{p}{q-q1+n}$

似 Rt△的斜邊斜率差$=\dfrac{2p-m}{q}-\dfrac{p}{q-q1+n}$

(二)中間矩形分成兩塊不全等的拼圖，探討其內部分割線之長度關係

假設消失方塊邊長為：m×n，移動前中間矩形邊長=p×q

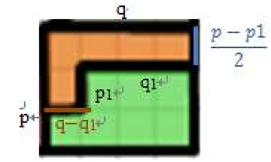




將中間矩形分成兩個「不全等」的拼圖，兩個拼圖的邊長關係如右圖

∵移動前的中間矩形面積=移動之後的中間矩形面積−消失方塊面積

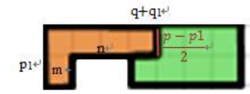
∴消失方塊邊長可由中間矩形邊長(q_1、p_1、q、p)表示如下



$n = 2q_1 - q$

$$m = p_1 - \frac{p - p_1}{2} = \frac{3p_1 - p}{2}$$

內凹似 Rt△長$= 2q + q_1$；內凹似 Rt△寬$= p + p_1$



似 Rt△的斜邊斜率差$= \frac{p_1}{q} - \frac{p}{q+q_1}$

(三)中間矩形分成多塊不全等拼圖，探討其內部分割線之長度關係

此種切法包含中間矩形切成兩塊非 L 形拼圖、切成三塊或是超過三塊拼圖。

假設移動前中間矩形邊長$= p \times q$；移動後中間矩形邊長$= p_1 \times q_1$

內凹似 Rt△長$= p + p_1$；內凹似 Rt△寬$= q + q_1$

似 Rt△的斜邊斜率差$= \frac{p}{q_1} - \frac{p_1}{q}$

二、針對研究三，討論中間矩形邊長之特性與其切法之關係。

當中間矩形移動前的面積為偶數時，大部分都可以分成兩個全等的 L 形拼圖，只有少數例外是要分成兩塊不全等的拼圖；而如果中間矩形在移動前面積為奇數，大部分能分成兩塊不全等的拼圖，少部分要分成三塊。

無論是邊長為多少(邊長為整數)的中間矩形，都能使用上述的3種方式，畫出內部分割線，並在移動之後增加消失方塊。

三、針對研究四，似 Rt△當中間為 m×n 的消失方塊時，討論其消失方塊與斜邊斜率差之一般化。

首先觀察在任意的 m、n 之下，各種邊長的似 Rt△的斜邊斜率差($\Delta\theta$)。分成兩類討論：

❶「m＝n」(正方形斜邊斜率差)。

❷「$(h_1+h_2)\, n = (w_1 + w_2)\, m$」(即似 Rt△為等腰 Rt△。)

接下來，右上 Rt△以及左下 Rt△之反正切值($\tan^{-1}\frac{hm}{wn}$)相減後再取絕對值，即為「似 Rt△的斜邊斜率差」。

由此可得知右上 Rt△以及左下 Rt△斜邊斜率差：

$|\Delta\theta|$=「$\tan^{-1}\frac{h_1 m}{w_1 n} - \tan^{-1}\frac{h_2 m}{w_2 n}$」。

再接下來，將預先訂定的 m、n 值，與最後($\tan^{-1}\frac{h_1 m}{w_1 n} - \tan^{-1}\frac{h_2 m}{w_2 n}$)也就是右上 Rt△以及

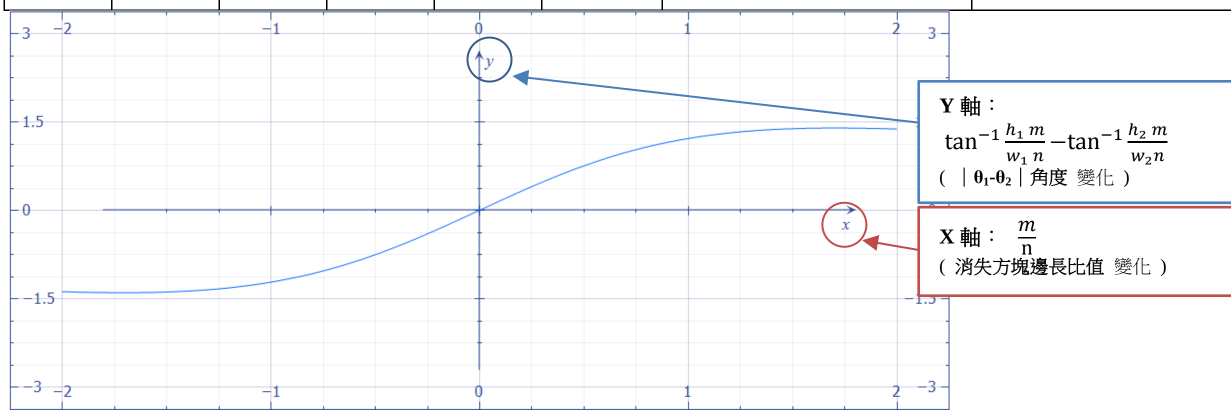
左下 Rt△之斜邊斜率差，利用 Microsoft　mathematics 軟體繪製成「xy 函數圖模式」：

x 軸=$\frac{m}{n}$ (兩邊長單位比值)；**y 軸**=Δθ(似 Rt△斜邊斜率差)，最後將以下數據分成 3 類討論：

(一)切兩塊且兩塊為全等拼圖時，探討其斜邊斜率差

例：當 $w_1 = 7$、$w_2 = 5$、$h_1 = 4$、$h_2 = 3$，似 Rt△長度=7m、寬度=12n

正方形斜邊斜率差 (m=n)			等腰△斜邊斜率差 $(h_1+h_2)m=(w_1+w_2)n$			θ_1-θ_2角度	$\frac{消失方塊面積}{似Rt\triangle面積}$
θ_1	θ_2	θ_1-θ_2	θ_1	θ_2	θ_1-θ_2	xy 函數圖模式	1：84
30.96	29.74	1.22	45.81	44.41	1.40	5 − 4 = 7 − 3 模式□	

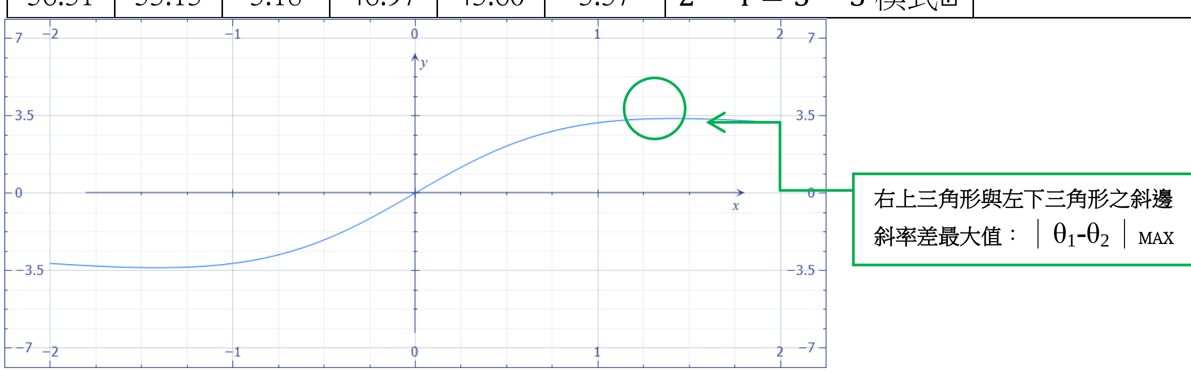


x y 函數圖模式：(5 − 4 = 7 − 3 模式□)

發現：當似 Rt△兩股長相等時，似 Rt△斜邊斜率差為最大值(1.40)　。

例：當 $w_1 = 3$、$w_2 = 2$、$h_1 = 4$、$h_2 = 3$，似 Rt△長度=7m、寬度=5n

正方形斜邊斜率差 (m=n)			等腰△斜邊斜率差 $(h_1+h_2)m=(w_1+w_2)n$			θ_1-θ_2角度	$\frac{消失方塊面積}{似Rt\triangle面積}$
θ_1	θ_2	θ_1-θ_2	θ_1	θ_2	θ_1-θ_2	x y 函數圖模式	1：35
56.31	53.13	3.18	46.97	43.60	3.37	2 − 4 = 3 − 3 模式□	



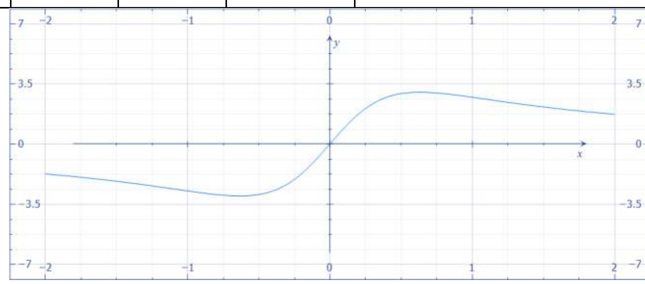
x y 函數圖模式：　(2 − 4 = 3 − 3 模式□)

發現：當似 Rt△兩股長相等時，似 Rt△斜邊斜率差為最大值(3.37)。

(二)切兩塊且兩塊為不全等拼圖時，探討其斜邊斜率差

例：當 $w_1=2$、$w_2=3$、$h_1=3$、$h_2=5$，似 Rt△長度=8m 寬度=5n

正方形斜邊斜率差 (m=n)			等腰△斜邊斜率差 (h_1+h_2) m= (w_1+w_2)n			$\theta_1-\theta_2$角度	$\frac{消失方塊面積}{似Rt\triangle面積}$
θ_1	θ_2	$\theta_1-\theta_2$	θ_1	θ_2	$\theta_1-\theta_2$	x y 函數圖模式	1：40
59.04	56.31	2.73	46.17	43.15	3.02	$3-3=2-5$ 模式⍰	

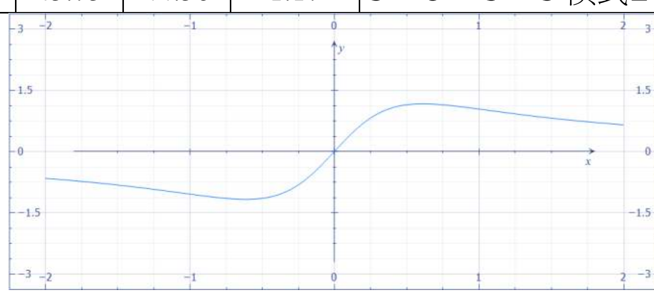


x y 函數圖模式： ($3-3=2-5$ 模式⍰)

發現：當似 Rt△兩股長相等時，似 Rt△斜邊斜率差為最大值(3.02)。

例：當 $w_1=5$、$w_2=3$、$h_1=8$、$h_2=5$，似 Rt△長度=13m 寬度=8n

正方形斜邊斜率差 (m=n)			等腰△斜邊斜率差 (h_1+h_2)m=(w_1+w_2)n			$\theta_1-\theta_2$角度	$\frac{消失方塊面積}{似Rt\triangle面積}$
θ_1	θ_2	$\theta_1-\theta_2$	θ_1	θ_2	$\theta_1-\theta_2$	x y 函數圖模式	1：104
59.04	57.99	1.04	45.73	44.56	1.17	$3-8=5-5$ 模式⍰	



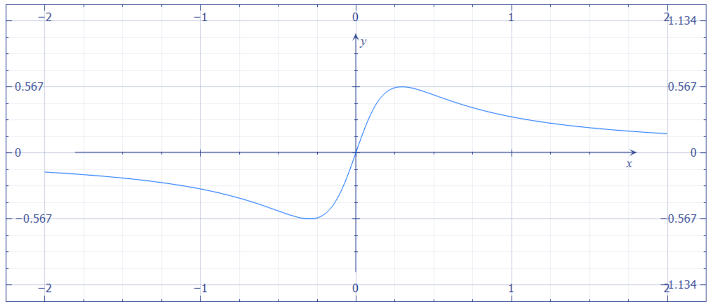
x y 函數圖模式： ($3-8=5-5$ 模式⍰)

發現：當似 Rt△兩股長相等時，似 Rt△斜邊斜率差為最大值(1.17)。

(三)切兩塊以上拼圖時，探討其斜邊斜率差

例：當 $w_1=3$、$w_2=5$、$h_1=10$、$h_2=17$，似 Rt△長度=27m 寬度=8n

正方形斜邊斜率差 (m=n)			等腰△斜邊斜率差 (h_1+h_2)m=(w_1+w_2)n			$\theta_1-\theta_2$角度	$\frac{消失方塊面積}{似Rt\triangle面積}$
θ_1	θ_2	$\theta_1-\theta_2$	θ_1	θ_2	$\theta_1-\theta_2$	x y 函數圖模式	1：216
73.61	73.30	0.31	45.21	44.64	0.57	$5-10=3-17$ 模式⍰	



x y 函數圖模式： $(5-10=3-17$ 模式□)

發現：當似 Rt△兩股長相等時，似 Rt△斜邊斜率差為最大值(0.57)。

(1)$\dfrac{\text{消失方塊面積}}{\text{似 Rt}\triangle\text{面積}}$的數值與似 Rt△的斜邊斜率差成現正關係。

(2)無論似 Rt△的面積為多少，當期兩股長相等時，斜邊斜率差之值為最大。

四、針對研究五，當似 Rt△分多塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值。

從「當似 Rt△分 2t+1 塊小 Rt△時，探討似 Rt△移動前後的圖形變化與斜邊斜率差、Δθ之值」的研究中，可以將奇數小 Rt△個數的似 Rt△，分成 t−1 組的分兩塊小 Rt△的小似 Rt△，以及 1 組的分三塊小 Rt△的似 Rt△。但是，是否那 1 組的分三塊小 Rt△的似 Rt△所在的位置，會影響到似 Rt△移動前後的圖形呢?

將分 2 塊小 Rt△的小似 Rt△標示為「2」；分 3 塊小 Rt△的小似 Rt△標示為「3」。

發現：

1. 分 3 塊小 Rt△的似 Rt△所在的各種位置，與消失方塊面積之關係與規律如下：

符合 2t+1 的有

3 個小 Rt△： $\{(3)$

5 個小 Rt△： $\begin{cases}(2.3)\\(3.2)\end{cases}$

7 個小 Rt△： $\begin{cases}(3.2.2)\\(2.3.2)\\(2.2.3)\end{cases}$

9 個小 Rt△： $\begin{cases}(3.2.2.2)\\(2.3.2.2)\\(2.2.3.2)\\(2.2.2.3)\end{cases}$

⋮

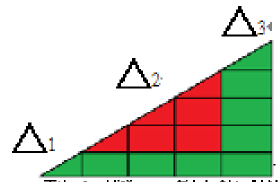
2t+1 個小 Rt△： $\begin{cases}(3.\overbrace{2.2\ldots2.2}^{t-1})\\(2.3.\overbrace{2\ldots2.2}^{t-2})\\(2.2.3\overbrace{\ldots2.2}^{t-3})\\\text{以此類推}\ldots\\(\overbrace{2.2.2\ldots2}^{t-1}.3)\end{cases}$

①分三塊小 Rt△的小似 Rt△由任意三個連續的小 Rt△所組成，並不會有所影響。

②所有 2t+1 個小 Rt△的情況，都可以由一個分三塊小 Rt△的小似 Rt△以及 t−1 個分兩塊小 Rt△的小似 Rt△所組成。

③每個小似 Rt△只要都符合移動之後邊長不變、增加消失塊，則整個似 Rt△就能達到「消失方塊」的效果。

2.研究五可知，分 2t 或是 2t+1 塊小 Rt△，都是 2 或 3 個一組，做不同的組合。



雖然有些 2t+1(奇數)的分法，雖然是要用多個「2」加上奇數個「3」，但其實因為「2」和「3」移動前後邊長都保持不變，所以可以視為一塊小 Rt△。如右上圖，將一組小似 Rt△(紅色區域)的外部增加一對小 Rt△(綠色區域)。將小似 Rt△(紅色區域)視為「$△_2$」，仿造分 3 塊小 Rt△的似 Rt△的移動方式，$△_1$和$△_3$交換位置，$△_2$位置不移動、邊長不變，但是$△_2$內部卻依照似直角三角形的規則，增加消失方塊。

整個圖形(紅色區域加綠色區域)一共增加兩個消失方塊。

陸、結論：

一、針對研究一，發現：內部分割線最合適的切法，是將似 Rt△分成右上 Rt△、左下 Rt△以及中間矩形。

二、針對研究二，發現：

(一)似 Rt△長=移動前的中間矩形長+移動後的中間矩形長；

似 Rt△寬=移動前的中間矩形寬+移動後的中間矩形寬。

(二)中間矩形可以由切法分成 3 類：

1.中間矩形分成 2 塊全等拼圖。若消失方塊邊長為 m×n、移動前的中間矩形邊長為 p×q、$q_1=\frac{q+2n}{3}$，則似 Rt△的邊長= $(3p-m)(2q-q_1+n)$，似 Rt△斜邊斜率差= $\frac{2p-m}{q}-\frac{p}{q-q_1+n}$。

2.中間矩形分成2塊不全等拼圖。若消失方塊邊長為m×n、移動前的中間矩形邊長為p×q，則似 Rt△的邊長= $(2q-q_1)(p+p_1)$，其斜邊斜率差= $\frac{p_1}{q}-\frac{p}{q+q_1}$。

3.中間矩形分成多塊不全等拼圖。若消失方塊邊長為 m×n、移動前的中間矩形邊長 p×q，則似 Rt△邊長$(p+p_1)(q+q_1)$，似 Rt△的斜邊斜率差= $\frac{p}{q_1}-\frac{p_1}{q}$。

三、針對研究三，發現：

(一)中間矩形欲分成兩塊全等的拼圖，則移動前的中間矩形面積必須為偶數。

(二)當移動前的中間矩形面積為奇數時，都能分成兩塊不全等的拼圖。

四、針對研究四，發現：若消失方塊之邊長為 m×n

(一)右上 Rt△的邊長$=(h_1 \times m)\times(w_1 \times n)$，

左下 Rt△的邊長$=(h_2 \times m)\times(w_2 \times n)$，

似 Rt△的邊長$=[(h_1+h_2)m]\times[(w_1+w_2)n]$。

(二)似 Rt△的斜邊斜率與邊長之間的關係式$\boldsymbol{\Delta\theta}= \tan^{-1}\frac{h_1 m}{w_1 n}-\tan^{-1}\frac{h_2 m}{w_2 n}$

(三)當移除△的的底邊為似 Rt△的斜邊時，其高為$\frac{2}{mn\times 斜邊長}$、mn$\propto \Delta\theta$及$\frac{1}{斜邊長}\propto \Delta\theta$。當似 Rt△的兩股相等時，$\boldsymbol{\Delta\theta}= \boldsymbol{\Delta\theta_{max}}$。

五、針對研究五，發現：

(一)當似直角△分成>2 塊小直角△時，可以分成：2t 以及 2t+1 兩種

1.似直角△分 2t(偶數)塊小直角△時，可以分出 t 組分兩塊小直角△的小似直角△，並且出現 t 個 m×n 的消失方塊。而其斜邊斜率差$(M_t)=(\frac{b_{k-1}+b_k}{a_{k-1}+a_k}-\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2})\frac{m}{n}$；

$\Delta\theta_t = \tan^{-1}\frac{b_{k-1}+b_k m}{a_{k-1}+a_k n}-\tan^{-1}\frac{b_1+b_2 m}{a_1+a_2 n}$。

2.似直角△分 2t+1(奇數)塊小直角△時，可以分出 t−1 組分兩塊小直角△的小似直角△和 1 組分三塊小直角△的小似直角△，並出現 t−1 個消失方塊和 1 個 L 形的消失方塊。

而其斜邊斜率差$(M_t)=(\frac{b_{k-2}+b_{k-1}+b_k}{a_{k-2}+a_{k-1}+a_k}-\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2})\frac{m}{n}$；

$\Delta\theta_t = \tan^{-1}\frac{(b_{k-2}+b_{k-1}+b_k)m}{(a_{k-2}+a_{k-1}+a_k)n}-\tan^{-1}\frac{(b_1+b_2)m}{(a_1+a_2)n}$。

(二)「分兩塊小直角△的小似直角△」和「分三塊小直角△的小似直角△」可藉由互相交換，改變消失方塊的面積和形狀。

(三)不論小直角△有 2t 個或 2t+1 個，只要是使用「分兩塊小直角△的小似直角△」和「分三塊小直角△的小似直角△」，就可以使所有的情況都符合「消失方塊」的效果。

柒、參考資料：

1.失蹤的正方形(2014 年 12 月 27 日 00：09)‧取自網路文章

http//zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%B1%E8%B8%AA%E7%9A%84%E6%AD%A3%E6%96%B9%E5%BD%A2

2.數學史上十大難題之「消失的方格」。取自網路文章

http：//clickme.net/1336

3.Curry's Paradox and the Notion of Area：Part I‧取自網路影片

https：//www.youtube.com/watch?v=eFw0878Ig-A&feature=related

4.【中央大學】物理演示實驗－消失的面積 disappeared area (triangle) ‧取自網路影片

https：//www.youtube.com/watch?v=zMaAs6VicKM

5.The Triangle Problem or What's Wrong with the Obvious Truth‧取自網路文章(翻譯)

http：//www.marktaw.com/blog/TheTriangleProblem.html

6.Geometrical Paradox。取自網路文章(翻譯)

http：//www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/jigsaw-paradox.html

【評語】030416

本作品討論一個常見之面積消失益智遊戲，求出了分割方法，斜率差變化等定量結果，是一個有趣的小作品教材材料。原始之面積消失之問題各拼片還可以再重組成為面積再消失一格之圖形，但本作品並未觸及，未來若要繼續進行此主題，可以朝此方向發展。