中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030415

再見約瑟夫

學校名稱：新北市立江翠國民中學

作者：	指導老師：
國二 蔡旻諺	薛百祥 顏榮皇

關鍵詞：約瑟夫數列、不動點、同餘

摘要

所謂約瑟夫問題，就是有n個自然數排成一環狀，從頭開始，殺 1(個數)留 1(個數)，求最後留下的數會是多少？

本研究「殺α留β」。將原本的「求最後留下的數」改成「求最後第k個出局數」，並研究科展「撲克牌遊戲中的數學原理」裡沒有提及到的「殺1留2」及「殺α留β」，找出倒數第k個出局數是k之不動點。

壹、簡介

一、研究動機

約瑟夫數列是一題科學展覽的名題，如參考資料。在 2014 年 7 月 31 日於一項科展教師研習，授課教授針對一篇高中的國展作品提出殺α留 1 第k個出局數編號是k的不動點。本研究則針對殺α留β最後**倒數**第k個出局數編號是k的不動點提出討論。同時，我們也討論殺α留β第k個出局數編號是k的不動點。

二、約瑟夫數列

建構一個函數$f_{1,1,16}(2)$，如圖 1.1 所示。

所謂$f_{1,1,16}(2)$就是「16 個數排成一環，不斷地殺 1 留 1 直到求出倒數第 2 個被殺的數為止」。

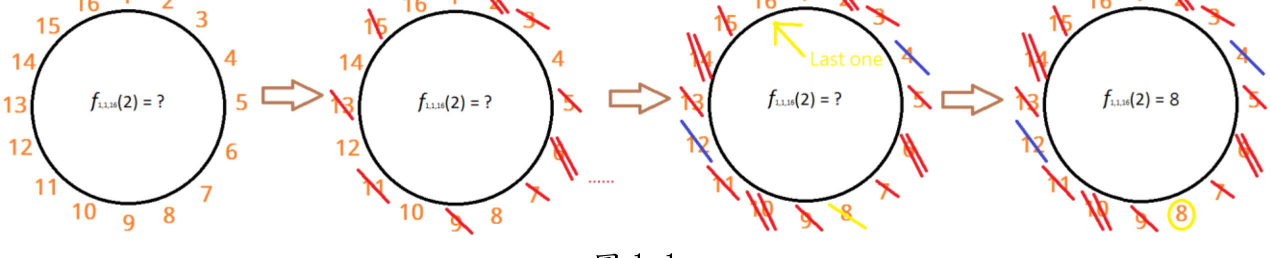

圖 1.1

三、過去研究作品

國內研究約瑟夫數列可以分成下列幾個階段

階段一：以數學歸納法證明殺α留 1，最後一個出局數。

代表作品：第 40 屆國展國中數學科《天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討》作品。

階段二：殺 1 留β，任意一個出局數。

代表作品：第 45 屆全國科展國小數學科，《探索俄羅斯遊戲法則之奧秘》，

階段三：殺α留β，最後一個出局數。

代表作品：第 45 屆全國科展國小數學科，《老師無法解決的難題》，

階段四：殺α留β，任意一個出局數。

代表作品：第 46 屆全國科展國中數學科，《約瑟夫數列的最後一章》，

歷屆台灣國際科學展覽只出現兩件約瑟夫數列作品，2006 年及 2007 年。都是同一作者完成。

階段五：殺α留 1，不動點。

代表作品：第 53 屆全國科展高中組數學科，《撲克牌遊戲中的數學原理》，

國外的研究，我們將以 Knuth 的《CONCRETE MATHEMATICS》第 8 頁至第 16 頁的探討。

四、研究目的

找出殺α留β倒數第k個出局數是編號k的不動點，並討論其性質。

五、研究設備

Scratch2.0 軟體、電腦、紙、筆、Microsoft Excel 2007。

六、本作品研究工具的優點

和第 46 屆國展「約瑟夫數列的最後一章」不同之處，我們使用 Scratch2.0 軟體作為主要的研究工具。「Scratch」乍看之下是小學生所使用的程式系統，但實際深入使用的話反而能做出讓人驚豔的程式，再加上程式簡單易懂，不會出現語法輸入錯誤的問題，找尋程式錯誤容易，又比 Excel 更像一個程式軟體。於是藉由此軟體，我們獲得了更大量的資料來進行直觀觀察，再進一步地證明出種種猜想和性質。

七、名詞定義

為了方便研究我們將規定名詞如表 1.3。

表 1.3　名詞定義

名詞	定義
$f_{\alpha,\beta,n}(k)$	在排成一環的n個數字數列中，無限的殺α留β後，所殺的倒數第 k 個出局數。
$k_{\alpha,\beta,n}$	若遇到$f_{\alpha,\beta,n}(k)$的值等於 k 時，則此 k 值以$k_{\alpha,\beta,n}$表示
$n_{\alpha,\beta,k,m}$	在殺α留β中，所有$f_{\alpha,\beta,n}(k)=k_{\alpha,\beta,n}$的$n$值的第 m 項
$\mathrm{SQ}_{\alpha,\beta,n,t}$	在殺α留β中，n個數字排成一環的第t項
$\mathrm{IK}_{\alpha,\beta,n,t}$	在殺α留β，n個數字中，倒數第t個被殺掉的數

八、本研究的重要發現

在殺α留β，本研究提出研究策略，先觀察$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列來得出不動點，後推論$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列出現的原因並導出演算法，同時找到一種演算方法可以尋得不動點，也就是，任何殺α留β，給定任何 k 值均會存在不動點。

當$1 \le \mathrm{k}_{\alpha,\beta,\mathrm{n}} \bmod (\alpha+\beta) \le \alpha$，則不動點只有 1 組解，本研究稱為唯一解。

當$\mathrm{k}_{\alpha,\beta,\mathrm{n}} \bmod (\alpha+\beta)=0$或$\mathrm{k}_{\alpha,\beta,\mathrm{n}} \bmod (\alpha+\beta)>\alpha$，將出現 2 個以上的不動點，此時，本研究稱為多重解。對於多重解，我們可以先提出一個特殊初始值，再給於一般式。

給定殺α留β的倒數第k個出局數排成的數列具有循環性。

貳、殺 1 留 1

請觀察，表 2.1，$f_{1,1,1}(k)$到$f_{1,1,10}(k)$之數列如表 2.1。

表 2.1　殺 1 留 1

$n=1$	$SQ_{1,1,1,t}$	1									
	$IK_{1,1,1,t}$	1									
$n=2$	$SQ_{1,1,2,t}$	1	2								
	$IK_{1,1,2,t}$	2	1								
$n=3$	$SQ_{1,1,3,t}$	1	2	3							
	$IK_{1,1,3,t}$	2	3	1							
$n=4$	$SQ_{1,1,4,t}$	1	2	3	4						
	$IK_{1,1,4,t}$	4	2	3	1						
$n=5$	$SQ_{1,1,5,t}$	1	2	3	4	5					
	$IK_{1,1,5,t}$	2	4	5	3	1					
$n=6$	$SQ_{1,1,6,t}$	1	2	3	4	5	6				
	$IK_{1,1,6,t}$	4	6	2	5	3	1				
$n=7$	$SQ_{1,1,7,t}$	1	2	3	4	5	6	7			
	$IK_{1,1,7,t}$	6	2	4	7	5	3	1			
$n=8$	$SQ_{1,1,8,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8		
	$IK_{1,1,8,t}$	8	4	6	2	7	5	3	1		
$n=9$	$SQ_{1,1,9,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	$IK_{1,1,9,t}$	2	6	8	4	9	7	5	3	1	
$n=10$	$SQ_{1,1,10,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$IK_{1,1,10,t}$	4	8	10	6	2	9	7	5	3	1

得到

定理 2.2（$k_{1,1,n}$為奇數的n值）

$\alpha=1$，$\beta=1$，第一項$f_{1,1,n}(k)=k_{1,1,n}$，當$k_{1,1,n}\equiv 1\ (mod\ 2)$時，存在不動點$n=\dfrac{3k-1}{2}$。

[**證明**]

初始值為k，1 到$k-1$必須刪除，又因$k_{1,1,n}\equiv 1\ (mod\ 2)$。

整理出關係式$n=k-1+\dfrac{(k+1)}{2}=\dfrac{3k-1}{2}$。 □

定理 2.3（$k_{1,1,n}$為偶數的n值）

$\alpha = 1$，$\beta = 1$，第一項$f_{1,1,n}(k) = k_{1,1,n}$，當$k_{1,1,n} \equiv 0\ (mod\ 2)$時，存在不動點$n = \frac{5k-2}{2}$。

［**證明**］

先考慮$\frac{2k-1-1}{2} + 1 = k$個奇數，整理出關係式$n = k - 1 + k + \frac{k}{2} = \frac{5k-2}{2}$。 □

定理 2.4（$k_{1,1,n}$為偶數的n值，$n_{1,1,n,m+1}$與$n_{1,1,n,m}$的關係式）

$\alpha = 1$，$\beta = 1$，所有$f_{1,1,n}(k) = k_{1,1,n}$數列，當$k_{1,1,n} \equiv 0\ (mod\ 2)$時，存在不動點$n_{m+1} = 2(n_m) - \frac{k}{2}$。

［**證明**］

考慮定理 2.3， $f_{1,1,n}(k) = k_{1,1,n}$的數列，利用 $f_{1,1,n}(k) = n$ 的方法計算

$$n + \frac{n-k}{1} = 2n - k$$

此時，$f_{1,1,n+1}(k)$將會是 2，如要求$f_{1,1,n}(k) = k_{1,1,n}$的$k_{1,1,n}$值的話，再加上$\frac{k}{2}$，得證。 □

綜合以上結論，我們發現以下幾種判斷方式

1. 殺 1 留 1，$k_{1,1,n}$，奇數n只有 1 組解，偶數則有多重解。
2. 當$2^s < n < 2^{s+1}$時，可利用此性質來推論出不動點的一般式$n_{m+1} = 2(n_m) - \frac{k}{2}$。

本研究中，我們發現科展作品《老師無法解決的難題》有相同結論$\mathrm{IK}_{1,1,n,1} = 2 \times (\mathrm{n} - 2^s)$。

參、殺 1 留β

我們先觀察表 3.1 及附錄四。

表 3.1　殺 1 留 2

$n=1$	$SQ_{1,2,1,t}$	1									
	$IK_{1,2,1,t}$	1									
$n=2$	$SQ_{1,2,2,t}$	1	2								
	$IK_{1,2,2,t}$	2	1								
$n=3$	$SQ_{1,2,3,t}$	1	2	3							
	$IK_{1,2,3,t}$	3	2	1							
$n=4$	$SQ_{1,2,4,t}$	1	2	3	4						
	$IK_{1,2,4,t}$	3	2	4	1						
$n=5$	$SQ_{1,2,5,t}$	1	2	3	4	5					
	$IK_{1,2,5,t}$	2	5	3	4	1					
$n=6$	$SQ_{1,2,6,t}$	1	2	3	4	5	6				
	$IK_{1,2,6,t}$	5	3	6	2	4	1				
$n=7$	$SQ_{1,2,7,t}$	1	2	3	4	5	6	7			
	$IK_{1,2,7,t}$	2	6	3	5	7	4	1			
$n=8$	$SQ_{1,2,8,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8		
	$IK_{1,2,8,t}$	5	2	6	8	3	7	4	1		
$n=9$	$SQ_{1,2,9,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	$IK_{1,2,9,t}$	8	5	9	3	6	2	7	4	1	
$n=10$	$SQ_{1,2,10,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$IK_{1,2,10,t}$	2	8	3	6	9	5	10	7	4	1

得到

定理 3.2

當$\alpha = 1$，$k_{1,\beta,n} \equiv 1\ mod\ (\beta + 1)$時，時，存在不動點$n = \frac{(\beta+2)k-1}{\beta+1}$。

[**證明**]

初始值為k，1 到$k-1$必須刪除，又因$k_{1,\beta,n} \equiv 1\ mod\ (\beta + 1)$。

整理出關係式$n = k - 1 + \frac{(k+1)}{\beta+1} = \frac{(\beta+2)k-1}{\beta+1}$。 □

給定α、β和k，讓我們提出一些新的演算方法來尋找使不動點存在的n值。

演算方法 3.3

當$\alpha = 1$， $k_{1,\beta,n} \neq 1\ mod\ (\beta+1)$時，所求得第一項 $f_{1,\beta,n}(k) = k_{1,\beta,n}$ 的n找尋方法見以下

步驟 1： 令 $x_i = k - 1 + \left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor + 1$， for some $i \in N$；

令 $y_j = 2 + (\beta+1)\left(\left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor - 1\right) + \beta - \left(k - 1 + \left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor\right)$， for some $j \in N$，

$$\begin{cases} 若 y_j > x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1 則步驟2 \\ 若 y_j \le x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1 則 \begin{cases} 若(y_j \mod (\beta+1)) = (k \mod (\beta+1)) 則 x_i 即為所求 \\ 若(y_j \mod (\beta+1)) \neq (k \mod (\beta+1)) 則步驟3 \end{cases} \end{cases}$$

步驟 2： 令 $y_j = y_j - \left(k - 1 + \left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor\right)$，足碼 $j+1$，

$$\begin{cases} 若 y_j > x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1 則重複步驟2 \\ 若 y_j \le x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1 則 \begin{cases} 若(y_j \mod (\beta+1)) = (k \mod (\beta+1)) 則 x_i 即為所求 \\ 若(y_j \mod (\beta+1)) \neq (k \mod (\beta+1)) 則步驟3 \end{cases} \end{cases}$$

步驟 3： 令 $y_j = y_j + (\beta+1)\left(\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1\right) - \left(x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil\right)$，足碼 $j+1$，

$$\begin{cases} 若(y_j \mod (\beta+1)) = (k \mod (\beta+1)) 則步驟5 \\ 若(y_5 \mod (\beta+1)) \neq (k \mod (\beta+1)) 則步驟4 \end{cases}$$

步驟 4： 令 $x_i = x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1$，重複步驟 3，足碼$i+1$

步驟 5： $n_1 = x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \frac{k - y_j}{\beta+1} + 1$，即為所求

利用不斷地搜索何時才會跑完「一輪」(每次超過n值重新循環回去後都叫一輪)，

並檢查其除以$\alpha+\beta$的餘數是否為k值除以$\alpha+\beta$的餘數，如果不是就再跑一輪檢查一次，

但如果是，就可以得知此輪一定會出現$f_{1,\beta,n}(k) = k_{1,\beta,n}$的值，再進一步地求出答案。

此演算法原本在一個情況下會不通，就是步驟 1 $y_j > x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1$ 時，因為$f_{1,\beta,n}(k)$不可能

大於n，故使$f_{1,\beta,n}(k)$數列無法正常算出，所以在定義 y_j 時要有步驟 2 的協助。

得到

演算方法 3.4

當$\alpha = 1$， $k_{1,\beta,n} \neq 1 \, mod \, (\beta + 1)$時，所求得所有項$f_{1,\beta,n}(k) = k_{1,\beta,n}$的$n$找尋方法見以下

步驟 1： 令 $x_i = (k_{1,\beta,n}\text{的}n_m) - \left\lfloor \frac{k}{\beta+1} \right\rfloor + 1$， for some $i \in N$；

令 $y_j = k - \left\lfloor \frac{k}{\beta+1} \right\rfloor + 1$， for some $j \in N$

步驟 2： 令 $y_j = y_j + (\beta+1)\left(\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1\right) - \left(x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil\right)$，足碼 $j+1$，

$$\begin{cases} \text{若}y_j > x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1\text{則步驟3} \\ \text{若}y_j \le x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1\text{則}\begin{cases} \text{若}(y_j \mod (\beta+1)) = (k \mod (\beta+1))\text{則步驟5} \\ \text{若}(y_j \mod (\beta+1)) \neq (k \mod (\beta+1))\text{則步驟4} \end{cases} \end{cases}$$

步驟 3： 令 $y_j = y_j - \left(x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil\right)$，足碼 $j+1$

$$\begin{cases} \text{若}y_j > x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1\text{則重複步驟3} \\ \text{若}y_j \le x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1\text{則}\begin{cases} \text{若}(y_j \mod (\beta+1)) = (k \mod (\beta+1))\text{則步驟5} \\ \text{若}(y_j \mod (\beta+1)) \neq (k \mod (\beta+1))\text{則步驟4} \end{cases} \end{cases}$$

步驟 4： 令 $x_i = x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + 1$，重複步驟 3，足碼$i+1$

步驟 5： $n_1 = x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \frac{k - y_j}{\beta+1} + 1$，即為所求

我們將殺 1 留β的演算法整理如圖 3.5 及圖 3.6。

其中，依照演算方法 3.3，初始值的求法如圖 3.5。

依照演算方法 3.4，一般數值的求法如圖 3.6。

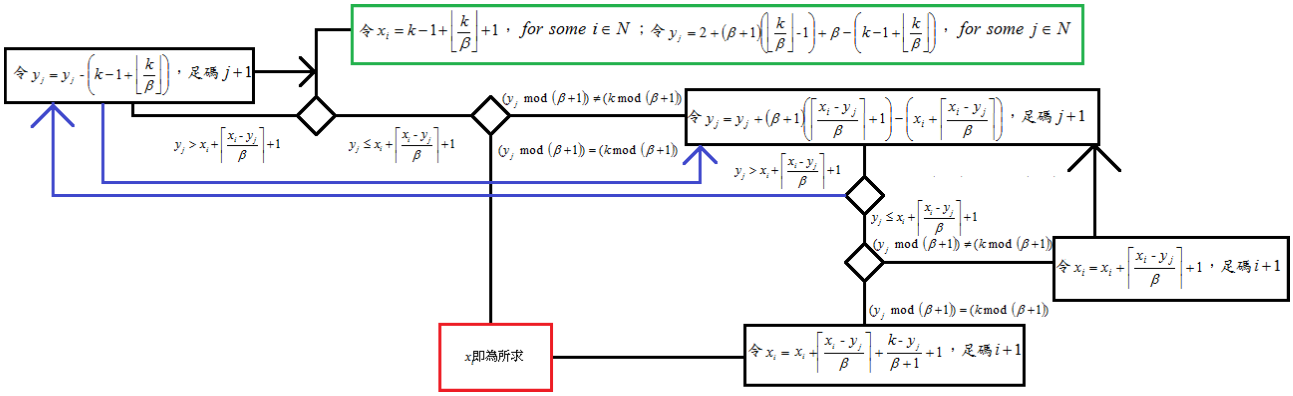

圖 3.5 殺 1 留β演算方法 3.3 流程圖

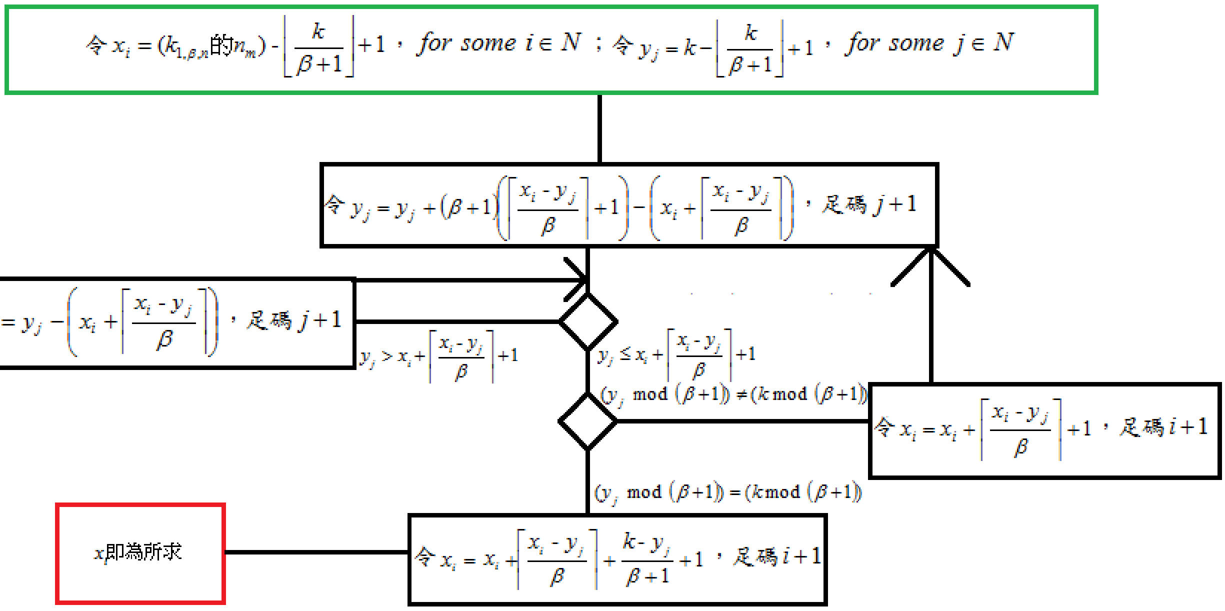

圖 3.6 殺 1 留β演算方法 3.4 流程圖

肆、殺α留β

一、分析

$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列是由兩種數列(公差為 1、 公差為$\alpha+\beta$)互相對照而成的數列。

下面表 4.1 整理出了各種變數變動所帶來的結果

表 4.1

變數	$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列變動的性質
α、β	使第二對照數列公差增加
α	原數列分裂，讓第一對照數列的公差也跟著增加，進而維持兩數列公差之差
β	不做任何對第一對照數列公差的變動，使得兩數列公差之差增加，導致原數列的不穩定
n	為第一對照數列內的數
k	構成原數列的最基本結構，隨著數值變大，兩數列的對照開端也會增大

由以上結果得知，殺α留β，$f_{\alpha,\beta,n}(k)$的變化就是殺α留 1、殺 1 留β的「合體」。

於是我們將定理及演算法合併，得到

定理 4.2

當$k_{\alpha,\beta,n} \equiv t \bmod (\alpha+\beta)$且$1 < t \le \alpha$時，所求得第一項$f_{\alpha,\beta,n}(k) = k_{\alpha,\beta,n}$的$n$，存在不動點

$$n = (2(k \bmod (\alpha+\beta)) - 1) + (2\alpha+\beta)\left\lfloor \frac{k}{\alpha+\beta} \right\rfloor \text{。}$$

[證明]

在數列裡，$k_{\alpha,\beta,n} \equiv t \bmod (\alpha+\beta)$且$1 < t \le \alpha$的$f_{\alpha,\beta,n}(k)$值只有可能在一開始出現，並無止盡的加$\alpha+\beta$直到$k$值出現。整理為

$$n = (k \bmod (\alpha+\beta) + k \bmod (\alpha+\beta) - 1) + (2\alpha+\beta)\left\lfloor \frac{k}{\alpha+\beta} \right\rfloor = (2(k \bmod (\alpha+\beta)) - 1) + (2\alpha+\beta)\left\lfloor \frac{k}{\alpha+\beta} \right\rfloor$$

□

二、演算方法

<u>讓我們考慮殺α留β的演算法。</u>

仿造殺 1 留β，再考慮α這個變數($f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列分裂)，使得要將所有$k_{\alpha,\beta,n}$之答案濃縮成一個完整、由小到大的數列變得困難，於是我們就直接求出每個支數列的開端，好以方便算下去。也就是說，在使用此演算法時要注意只要出現這種多元選項，後面出現的選項也必須一樣使用同編號的選項(選了第一個，後面的選項也都要選第一個)，再對照表 4.1 整理出的結果，將演算法加以變動得出結果。

演算方法 4.3

當$k_{\alpha,\beta,n} \equiv t \ mod\ (\alpha+\beta)$，$\alpha < t \leq \ \alpha+\beta-1$或$t=0$時，所求得特定$\alpha$項$f_{\alpha,\beta,n}(k) = k_{\alpha,\beta,n}$的$n$找尋方法見以下

步驟 1： 令 $x_i = k - 1 + \alpha\left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor + \begin{cases} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \alpha \end{cases}$， for some $i \in N$；

令 $y_j = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \alpha \end{cases} + (\alpha+\beta)\left(\left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor - 1\right) + \alpha + \beta - \left(k - 1 + \alpha\left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor - \begin{cases} (\alpha-1) \\ (\alpha-2) \\ \vdots \\ 0 \end{cases}\right)$，

for some $j \in N$

$$\begin{cases} 若 y_j > x_i + \alpha\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \alpha \text{ 則步驟2} \\ 若 y_j \leq x_i + \alpha\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \alpha \text{ 則} \begin{cases} 若(y_j \ \bmod\ (\alpha+\beta)) = (k \bmod (\alpha+\beta)) 則 x_i 即為所求 \\ 若(y_j \ \bmod\ (\alpha+\beta)) \neq (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟3 \end{cases} \end{cases}$$

步驟 2 ： 令 $y_j = y_j - \left(k-1+\alpha\left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor - \begin{cases} (\alpha-1) \\ (\alpha-2) \\ \vdots \\ 0 \end{cases} \right)$ ，足碼 $j+1$ ，

$$\begin{cases} 若 y_j > x_i+\alpha\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+\alpha 則重複步驟2 \\ 若 y_j \le x_i+\alpha\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+\alpha 則 \begin{cases} 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) = (k \bmod (\alpha+\beta)) 則 x_i 即為所求 \\ 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) \neq (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟3 \end{cases} \end{cases}$$

步驟 3 ： 令 $y_j = y_j + (\alpha+\beta)\left(\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+1\right) - \left(x_i+\alpha\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil\right)$ ，足碼 $j+1$ ，

$$\begin{cases} 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) = (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟5 \\ 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) \neq (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟4 \end{cases}$$

步驟 4 ： 令 $x_i = x_i+\alpha\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+\alpha$ ，重複步驟 3，足碼 $i+1$

步驟 5 ： $n_m = x_i + \left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+\alpha+\alpha\left(\frac{k-y_j}{\alpha+\beta}\right)$ ，即為所求

演算方法 4.4

當 $k_{\alpha,\beta,n} \equiv t \bmod (\alpha+\beta)$，$\alpha < t \le \alpha+\beta-1$ 或 $t=0$ 時，所求得所有 $f_{\alpha,\beta,n}(k) = k_{\alpha,\beta,n}$ 的 n 找尋方法見以下

步驟 1 ： 令 $x_i = (k_{\alpha,\beta,n} 的 n_m) - \alpha\left\lfloor \frac{k}{\alpha+\beta} \right\rfloor+\alpha$ ， for some $i \in N$ ；

令 $y_j = k-(\alpha+\beta)\left\lfloor \frac{k}{\alpha+\beta} \right\rfloor+\alpha+\beta$ ， for some $j \in N$

步驟 2 ： 令 $y_j = y_j + (\alpha+\beta)\left(\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+1\right) - \left(x_i+\alpha\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil\right)$ ，足碼 $j+1$ ，

$$\begin{cases} 若 y_j > x_i+\alpha\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+\alpha 則步驟3 \\ 若 y_j \le x_i+\alpha\left\lceil \frac{x_i-y_j}{\beta} \right\rceil+\alpha 則 \begin{cases} 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) = (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟5 \\ 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) \neq (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟4 \end{cases} \end{cases}$$

步驟 3： 令 $y_j = y_j - \left(x_i + \alpha\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil\right)$，足碼 $j+1$

$$\begin{cases} 若 y_j > x_i + \alpha\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \alpha 則重複步驟3 \\ 若 y_j \le x_i + \alpha\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \alpha 則 \begin{cases} 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) = (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟5 \\ 若(y_j \bmod (\alpha+\beta)) \neq (k \bmod (\alpha+\beta)) 則步驟4 \end{cases} \end{cases}$$

步驟 4： 令 $x_i = x_i + \alpha\left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \alpha$，重複步驟 2，足碼 $i+1$

步驟 5： $n_{m+1} = x_i + \left\lceil \frac{x_i - y_j}{\beta} \right\rceil + \alpha + \alpha\left(\frac{k - y_j}{\alpha+\beta}\right)$，即為所求

三、流程圖

將殺α留β的演算法整理如圖 4.5 及圖 4.6。

其中，依照演算方法 4.3，初始值的求法如圖 4.5。

依照演算方法 4.4，一般數值的求法如圖 4.6。

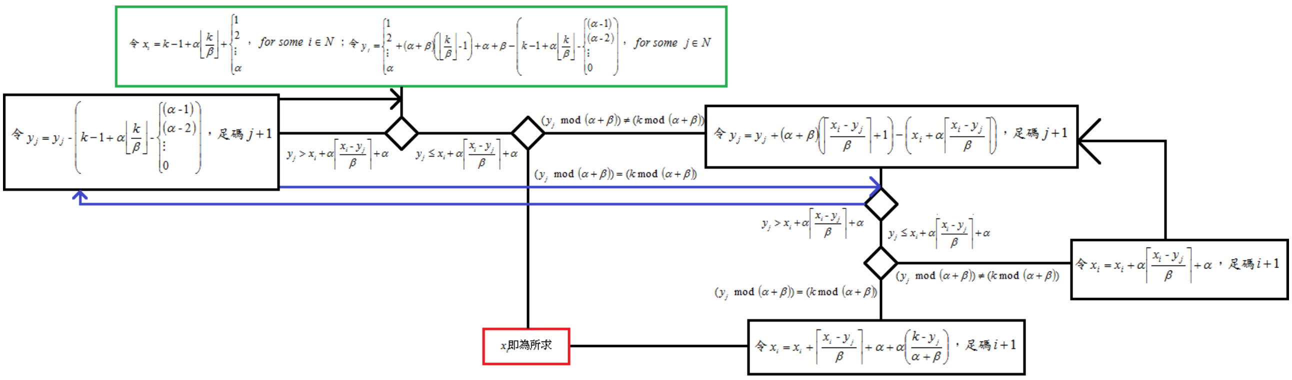

圖 4.5 殺α留β演算方法 4.3 流程圖

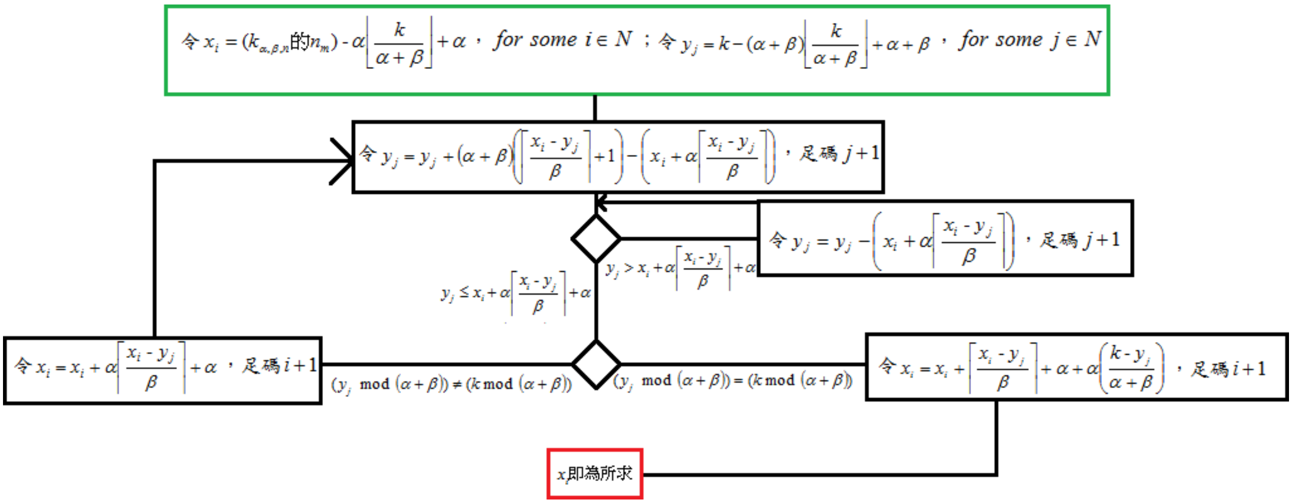

圖 4.6 殺α留β演算方法 4.4 流程圖

四、觀察

針對殺α留β，我們提出觀察，如表 4.7。

其中，縱軸為k值，橫軸為α及β值(α,β)，格子裡的數值為n。

若表示「多」，則此n值為多組解，必須代入到演算法裡計算(無上限)。

表 4.7

	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	多	多	多	多	多	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	多	多	多	多	多	多	多	多	多	5	5	5	5	5
4	多	5	多	多	多	6	多	多	多	多	多	多	多	多	多
5	7	多	6	多	多	8	7	多	多	多	8	多	多	多	多
6	多	多	多	7	多	多	9	8	多	多	10	9	多	多	多
7	10	9	多	多	8	11	多	10	9	多	12	11	10	多	多
8	多	多	多	多	多	13	多	多	11	10	多	13	12	11	多
9	13	多	11	多	多	多	13	多	多	12	15	多	14	13	12
10	多	13	多	多	多	16	15	多	多	多	17	多	多	15	14
11	16	多	多	13	多	18	多	15	多	多	19	17	多	多	16
12	多	多	多	多	多	多	多	17	多	多	多	19	多	多	多
13	19	17	16	多	15	21	19	多	17	多	22	21	19	多	多
14	多	多	多	多	多	23	21	多	19	多	24	多	21	多	多
15	22	多	多	多	多	多	多	多	多	19	26	多	23	21	多

五、存在性的證明

定理 4.8

給予特定的α、β和k值，至少會有一個n值來證明不動點。

[**證明**]

α、β、$k \in N$，在排成一環的數列的n個數當中，由 1 開始殺到越過或回到起始點前所殺的過程合稱「首輪」，考慮$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列始端會為固定首輪裡的n值，得知屬於首輪的數必有一組解來證明不動點。而首輪數後面的數值會因n值不同的變動，讓數列後端有不同的數值出現。因n值變動產生的這些不同數值還會類似等差數列的性質，再因為n值可以無上限地計算，則讓所有的數都能夠出現，得證。 □

定理 4.9「首輪」過程裡數字的k值都不會出現多重解。

[**證明**]

這些屬於「首輪」的數，只要讓α及β值固定，不管是k值或是n值有做改變，皆不會出現變動，同時這些數也有一定的規律，而規律是根據α及β值來做改變，也就是說，這些符合規律的數必定會在第一輪被殺掉。

既然這些符合規律的數不可能在第一輪存活下來，反向思考後我們會發現，每一種固定α、β和n值的函數表示法都只有 1 個固定的k值能夠讓函數出來的結果是這些符合規律的數，而且這些k值若不更動α及β值，則全部都不會相等，得證。 □

定理 4.10

在排成一環的數列的n個數當中，不屬於「首輪」的數字的 k 值都會出現多重解。

[**證明**]

經過了不動點唯一解的證明後，我們探討這些不屬於首輪的數值，為何這些數會出現多重解？

原因就在於，第二輪被殺的數將會根據n值進行一定的變化。

而當第二輪以後被殺的數有了連n值都能影響的結果後，再與唯一解做對照，得證之。 □

伍、數列結構分析

定理 5.1(循環性)

$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列的規律類似等差數列的循環，若下一解大於n值，必須從頭循環回去。

[**證明**]

當計算一個$f_{\alpha,\beta,n}(k)$值時，考慮原遊戲規則為n個數字排成一環，得知$f_{\alpha,\beta,n}(k)$的值必$\leq n$。而$f_{\alpha,\beta,n}(k)$的值若不可大於n，則遇到計算時下一解大於n值的情況將必須從頭循環回去。

□

定理 5.2(結構生成)

$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列的生成可由兩個等差數列互相對照構成。

[**證明**]

第一個數列為原本公差就為 1 的多個n值數列，會受α變動影響，

第二個數列則為公差$\alpha+\beta$的數列，實際操作殺α留β時，被殺的數字中間都間隔著β，剩下的$\alpha-1$則用來解釋第一個對照數列。 □

定理 5.3(多數列解)

當α變動時，會把$f_{\alpha,\beta,n}(k)$數列分裂並讓公差增大，導致將多重解串成單一由小到大的數列解變得困難，進而直接當作多數列解。

[**證明**]

依定理 5.2，對於第一個對照數列會受α變動影響，其影響不在數列本身，而是在對照方式。當α變動時，每次就得多殺 1 個數，而對照數列就必須分成α個情況討論。 □

依定理 4.9 的唯一解，及圖 5.5，得到

定理 5.4 $k_{\alpha,\beta,n} = \alpha$時，$n = 2\alpha - 1$。

	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	多	多	多	多	多	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	多	多	多	多	多	多	多	多	多	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
4	多	5	多	多	多	6	多	多	多	多	多	多	多	多	多	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	多	6	多	多	8	7	多	多	多	8	多	多	多	多	多	多	多	多	多	9	9	9	9	9

圖 5.5

依定理 4.9 的唯一解、定理 4.10 的多組解，及圖 5.7，得到

定理 5.6 當$\alpha + 1 \leq k_{\alpha,\beta,n} \leq \alpha + \beta$，則存在多組解。

	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	多	多	多	多	多	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	多	多	多	多	多	多	多	多	多	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
4	多	5	多	多	多	6	多	多	多	多	多	多	多	多	多	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	多	6	多	多	8	7	多	多	多	8	多	多	多	多	多	多	多	多	多	9	9	9	9	9
6	多	多	多	7	多	多	9	8	多	多	10	9	多	多	多	10	多	多	多	多	多	多	多	多	多
7	10	9	多	多	8	11	多	10	9	多	12	11	10	多	多	12	11	多	多	多	12	多	多	多	多
8	多	多	多	多	多	13	多	多	11	10	多	13	12	11	多	14	13	12	多	多	14	13	多	多	多
9	13	多	11	多	多	多	13	多	多	12	15	多	14	13	12	16	15	14	13	多	16	15	14	多	多
10	多	13	多	多	多	16	15	多	多	多	17	多	多	15	14	多	17	16	15	14	18	17	16	15	多

圖 5.7

此時多組解的圖形如樓梯狀。

考慮定理 4.9 的唯一性、定理 4.10 的多組解及樓梯狀的圖 5.7，如圖 5.9。

得到

定理 5.8 第二批的「多」呈現下降後的樓梯狀，如圖 5.9

4	多	5	多	多	多	6	多	多	多	多	多	多	多	多	多	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	多	6	多	多	8	7	多	多	多	8	多	多	多	多	多	多	多	多	多	9	9	9	9	9
6	多	多	多	7	多	多	9	8	多	多	10	9	多	多	多	10	多	多	多	多	多	多	多	多	多
7	10	9	多	多	8	11	多	10	9	多	12	11	10	多	多	12	11	多	多	多	12	多	多	多	多
8	多	多	多	多	多	13	多	多	11	10	多	13	12	11	多	14	13	12	多	多	14	13	多	多	多
9	13	多	11	多	多	多	13	多	多	12	15	多	14	13	12	16	15	14	13	多	16	15	14	多	多
10	多	13	多	多	多	16	15	多	多	多	17	多	多	15	14	多	17	16	15	14	18	17	16	15	多
11	16	多	多	13	多	18	多	15	多	多	19	17	多	多	16	19	多	18	17	16	20	19	18	17	16
12	多	多	多	多	多	多	多	17	多	多	多	19	多	多	多	21	多	多	19	18	多	21	20	19	18
13	19	17	16	多	15	21	19	多	17	多	22	21	19	多	多	23	21	多	多	20	23	多	22	21	20
14	多	多	多	多	多	23	21	多	19	多	24	多	21	多	多	25	23	多	多	多	25	多	多	23	22
15	22	多	多	多	多	多	多	多	多	19	26	多	23	21	多	多	25	23	多	多	27	25	多	多	24
16	多	21	多	19	多	26	多	22	多	21	多	25	多	23	多	28	27	25	多	多	29	27	多	多	多
17	25	多	21	多	多	28	25	24	多	多	29	27	多	25	23	30	多	27	25	多	31	29	27	多	多
18	多	多	多	多	多	多	27	多	多	多	31	29	多	多	25	32	多	29	27	多	多	31	29	多	多
19	28	25	多	多	22	31	多	多	25	多	33	多	28	多	27	34	31	多	29	27	34	33	31	29	多
20	多	多	多	多	多	33	多	多	27	多	多	多	30	多	多	多	33	多	31	29	36	多	33	31	多

圖 5.9

再考慮定理 4.9 的唯一性、定理 4.10 的多組解及樓梯狀的圖 5.7 及圖 5.9，得到

定理 5.10 當$k_{\alpha,\beta,n} \equiv t \bmod (\alpha+\beta)$，$\alpha < t \leq \alpha+\beta-1$或$t=0$時，則

給定殺α留β時，考慮兩個多組解區段，存在α個唯一解，且每個唯一解的公差為 2。

給定殺α留β時，考慮兩個唯一解區段，存在β個多組解。

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
多	多	多	多	多	3	3	3	3	3
4	多	多	多	多	多	多	多	多	多
多	5	多	多	多	6	多	多	多	多
7	多	6	多	多	8	7	多	多	多
多	多	多	7	多	多	9	8	多	多
10	9	多	多	8	11	多	10	9	多
多	多	多	多	多	13	多	多	11	10
13	多	11	多	多	多	13	多	多	12
多	13	多	多	多	16	15	多	多	多
16	多	多	13	多	18	多	15	多	多
多	多	多	多	多	多	多	17	多	多
19	17	16	多	15	21	19	多	17	多
多	多	多	多	多	23	21	多	19	多
22	多	多	多	多	多	多	多	多	19
多	21	多	19	多	26	多	22	多	21
25	多	21	多	多	28	25	24	多	多
多	多	多	多	多	多	27	多	多	多
28	25	多	多	22	31	多	多	25	多
多	多	多	多	多	33	多	多	27	多
31	多	26	25	多	多	31	29	多	多
多	29	多	多	多	36	33	31	多	27
34	多	多	多	多	38	多	多	多	29
多	多	多	多	多	多	多	多	多	多
37	33	31	多	29	41	37	多	33	多

圖 5.11　定理 5.10 的圖例

依定理 4.2，殺α留β的唯一解公式，如圖 5.13

得到

定理 5.12 若將一直排內所有數字排成一數列則這些數字可以「k + 項數 − 1」表示，如圖 5.13

	1,1	1,2	1,3
1	1	1	1
2	多	多	多
3	4	多	多
4	多	5	多
5	7	多	6
6	多	多	多
7	10	9	多
8	多	多	多
9	13	多	11
10	多	13	多
11	16	多	多
12	多	多	多
13	19	17	16
14	多	多	多
15	22	多	多
16	多	21	多
17	25	多	21
18	多	多	多
19	28	25	多
20	多	多	多
21	31	多	26
22	多	29	多
23	34	多	多
24	多	多	多
25	37	33	31

圖 5.13

依定理 5.8 及定理 5.12，如圖 5.15，

得到

定理 5.14 若將同α值所有直排內所有數字排成多個數列做比較，則這些數列共同項數會有

「β較小數列一項 + 項數 − 1 = β + 1 數列同項」的關係

1, 1	1, 2
1	1
4	5
7	9
10	13
13	17
16	21
19	25
22	29
25	33
28	多
31	多
34	多
37	多
多	多
多	多
多	多
多	多

圖 5.15

定理 5.16 給定殺α留β，$n = 2\alpha + \beta + 1$時，存在不動點$k_{\alpha,\beta,n}$。

3	4	多	多	多	多	多	多	多	多	多	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
4	多	5	多	多	多	6	多	多	多	多	多	多	多	多	多	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	7	多	6	多	多	8	7	多	多	多	8	多	多	多	多	多	多	多	多	多	9	9	9	9	9
6	多	多	多	7	多	多	9	8	多	多	10	9	多	多	多	10	多	多	多	多	多	多	多	多	多
7	10	9	多	多	8	11	多	10	9	多	12	11	10	多	多	12	11	多	多	多	12	多	多	多	多
8	多	多	多	多	多	13	多	多	11	10	多	13	12	11	多	14	13	12	多	多	14	13	多	多	多
9	13	多	11	多	多	多	13	多	多	12	15	多	14	13	12	16	15	14	13	多	16	15	14	多	多
10	多	13	多	多	多	16	15	多	多	多	17	多	多	15	14	多	17	16	15	14	18	17	16	15	多
11	16	多	多	13	多	18	多	15	多	多	19	17	多	多	16	19	多	18	17	16	20	19	18	17	16

圖 5.17　定理 5.16 的圖示

依定理 5.12，如圖 5.18，

得到

定理 5.18 固定β後，所有等差的α值去掉前α排後的第一個數有等差規律。

	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	多	多	多	多	多	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	多	多	多	多	多	多	多	多	多	5	5	5	5	5
4	多	5	多	多	多	6	多	多	多	多	多	多	多	多	多
5	7	多	6	多	多	8	7	多	多	多	8	多	多	多	多
6	多	多	多	7	多	多	9	8	多	多	10	9	多	多	多
7	10	9	多	多	8	11	多	10	9	多	12	11	10	多	多

圖 5.19　定理 5.18 的圖示

主要參考文獻

1.葉佩雯(第 45 屆)。**老師無法解決的難題**。載於國立科學教育館,全國中小學科學展覽第 39 屆國小組數學科。

2.葉佩雯(第 46 屆)。**約瑟夫數列的最後一章**。載於國立科學教育館,全國中小學科學展覽第 46 屆國中組數學科。

3.張哲綱、李汪其(第 53 屆)。**撲克牌遊戲中的數學原理**。載於國立科學教育館,全國中小學科學展覽第 53 屆高中組數學科。

4.葉佩雯。**約瑟夫數列**。2006 年台灣國際科學展覽數學科。

5.葉佩雯。**約瑟夫問題**。2007 年台灣國際科學展覽數學科。

歷屆全國科展我能搜尋到的約瑟夫數列作品

屆數	組別	作品名稱	與本作品之比較
39	國小組	公主如何救王子	殺 1 留β，$k=1$
40	國中組	天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討	殺α留 1，$k=1$
43	高中組	九死一生	殺α留 1、殺α留α，$k=1$
44	高中組	公主的抉擇	殺 1 留β，$k=1$
44	高中組	我要活下去	殺α留 1、殺α留α，$k=1$
44	國小組	王位繼承人	殺α留 1，$k=1$
45	國小組	探索俄羅斯遊戲法則之奧秘	殺 1 留β
45	國小組	老師無法解決的難題	殺α留β
45	國中組	魔數	殺 1 留 1
46	國中組	約瑟夫數列的最後一章	殺α留β
53	國中組	最後一張王牌	殺α留β，$k=1$
53	高中組	撲克牌遊戲中的數學原理	殺α留 1，不動點
54	國小組	生存者遊戲	殺α留 1，$k=1$
54	國中組	一！二！蹲下！—報數遊戲	殺 1 留 1，$k=1$

附錄一、找出第一個$f_{\alpha,\beta,n}(k) = k_{\alpha,\beta,n}$方法

殺α留β	找出第一個$f_{\alpha,\beta,n}(k) = k_{\alpha,\beta,n}$方法	
殺 1 留 1	$k_{1,1,n} \mod 2 = 1$	$k_{1,1,n} \mod 2 = 0$
	$n_1 = \dfrac{3k-1}{2}$	$n_1 = \dfrac{5k-2}{2}$
殺α留 1	$k_{\alpha,1,n} \mod \alpha+1 = 0$	$k_{\alpha,1,n} \mod \alpha+1 \neq 0$
	$n_1 = \dfrac{(2\alpha+1)k-\alpha-1+(k \bmod \alpha+1)}{\alpha+1}$	$n_1 = \dfrac{(\alpha^2+3\alpha+1)k-\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1}$
殺 1 留β	$k_{1,\beta,n} \mod 2(\beta+1) \equiv 1$或$k_{1,\beta,n} \mod 2(\beta+1) \equiv 2+\beta$	$k_{1,\beta,n} \mod 2(\beta+1) \neq 1$或 $k_{1,\beta,n} \mod 2(\beta+1) \neq 2+\beta$
	$n_1 = k-1+\dfrac{(k-1)}{\beta+1}+1 = \dfrac{(\beta+2)k-1}{\beta+1}$	見演算方法 3.3
殺α留β	$k_{\alpha,\beta,n} \equiv t \mod (\alpha+\beta)$，$1 < t \leq \alpha$	$k_{\alpha,\beta,n} \equiv t \mod (\alpha+\beta)$， $\alpha < t \leq \alpha+\beta-1$ 或 $t = 0$
	$n_1 = \big(2(k \bmod (\alpha+\beta))-1\big)+(2\alpha+\beta)\left\lceil \dfrac{k}{\alpha+\beta} \right\rceil$	見演算方法 4.3

附錄二、找出所有$f_{\alpha,\beta,n}(k)=k_{\alpha,\beta,n}$方法

殺α留β	找出所有$f_{\alpha,\beta,n}(k)=k_{\alpha,\beta,n}$方法
殺 1 留 1	$k_{1,1,n} \bmod 2=0$
	$n_{m+1}=2(n_m)-\frac{k}{2}$
殺α留 1	$k_{\alpha,1,n} \bmod \alpha+1=0$
	若 m mod $\alpha+1=0$，則 n_{m+1} 將是 $(\alpha+1)(n_m)-\frac{\alpha^2 k}{\alpha+1}$ 若 m mod $\alpha+1\neq 0$，則 n_{m+1} 將是 $n_m+(\alpha+1)^{\frac{m-(m \bmod \alpha)}{\alpha}}$
殺 1 留β	$k_{1,\beta,n} \bmod 2(\beta+1)\neq 1$或$k_{1,\beta,n} \bmod 2(\beta+1)\neq 2+\beta$
	見演算方法 3.4
殺α留β	$k_{\alpha,\beta,n}\equiv t \bmod (\alpha+\beta)$，$\alpha<t\leq \alpha+\beta-1$ 或 $t=0$
	見演算方法 4.4

附錄三、殺 1 留 3 的直觀觀察

附錄表 3.1　殺 1 留 3

$n=1$	$\mathrm{SQ}_{1,3,1,t}$	1									
	$\mathrm{IK}_{1,3,1,t}$	1									
$n=2$	$\mathrm{SQ}_{1,3,2,t}$	1	2								
	$\mathrm{IK}_{1,3,2,t}$	2	1								
$n=3$	$\mathrm{SQ}_{1,3,3,t}$	1	2	3							
	$\mathrm{IK}_{1,3,3,t}$	2	3	1							
$n=4$	$\mathrm{SQ}_{1,3,4,t}$	1	2	3	4						
	$\mathrm{IK}_{1,3,4,t}$	3	4	2	1						
$n=5$	$\mathrm{SQ}_{1,3,5,t}$	1	2	3	4	5					
	$\mathrm{IK}_{1,3,5,t}$	3	4	2	5	1					
$n=6$	$\mathrm{SQ}_{1,3,6,t}$	1	2	3	4	5	6				
	$\mathrm{IK}_{1,3,6,t}$	2	3	6	4	5	1				
$n=7$	$\mathrm{SQ}_{1,3,7,t}$	1	2	3	4	5	6	7			
	$\mathrm{IK}_{1,3,7,t}$	6	7	4	2	3	5	1			
$n=8$	$\mathrm{SQ}_{1,3,8,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8		
	$\mathrm{IK}_{1,3,8,t}$	3	4	8	6	7	2	5	1		
$n=9$	$\mathrm{SQ}_{1,3,9,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	$\mathrm{IK}_{1,3,9,t}$	7	8	4	2	3	6	9	5	1	
$n=10$	$\mathrm{SQ}_{1,3,10,t}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\mathrm{IK}_{1,3,10,t}$	2	3	8	6	7	10	4	9	5	1

附錄四、尋找過程的重要數列性質

殺 α 留 β	$f_{\alpha,\beta,n}(k)$ 數列的特質
殺 1 留 1	若 $f_{1,1,n}(k)=n$，則 $f_{1,1,n+1}(k)$ 將是 2；若 $f_{1,1,n}(k)<n$，則 $f_{1,1,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,1,n}(k)+2$ Or 若 $f_{1,1,n}(k)+2>n+1$，則 $f_{1,1,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,1,n}(k)+3-n$；反之，$f_{1,1,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,1,n}(k)+2$
殺 2 留 1	若 $f_{2,1,n}(k)=n$，則 $f_{2,1,n+2}(k)$ 將是 3；若 $f_{2,1,n}(k)<n$，則 $f_{2,1,n+2}(k)$ 將是 $f_{2,1,n}(k)+3$
殺 α 留 1	若 $f_{\alpha,1,n}(k)=n$，則 $f_{\alpha,1,n+\alpha}(k)$ 將是 $\alpha+1$；若 $f_{\alpha,1,n}(k)<n$，則 $f_{\alpha,1,1,n+\alpha}(k)$ 將是 $f_{\alpha,1,n}(k)+\alpha+1$
殺 1 留 2	若 $f_{1,2,n}(k)+3>n+1$，則 $f_{1,2,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,2,n}(k)+3-n$；反之，$f_{1,2,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,2,n}(k)+3$
殺 1 留 3	若 $f_{1,3,n}(k)+4>n+1$，則 $f_{1,3,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,3,n}(k)+4-n$；反之，$f_{1,3,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,3,n}(k)+4$
殺 1 留 β	若 $f_{1,\beta,n}(k)+\beta+1>n+1$，則 $f_{1,\beta,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,\beta,n}(k)+\beta+1-n$ 若處理完後 $f_{\alpha,\beta,n+1}(k)>n+1$，則必須再減一次 n，若還是同樣情況，就再循環下去； 反之，$f_{1,\beta,n+1}(k)$ 將是 $f_{1,\beta,n}(k)+\beta+1$
殺 2 留 2	若 $f_{2,2,n}(k)+4>n+2$，則 $f_{2,2,n+2}(k)$ 將是 $f_{2,2,n}(k)+4-n$；反之，$f_{2,2,n+2}(k)$ 將是 $f_{2,2,n}(k)+4$
殺 α 留 β	若 $f_{\alpha,\beta,n}(k)+\alpha+\beta>n+\alpha$，則 $f_{\alpha,\beta,n+\alpha}(k)$ 將是 $f_{\alpha,\beta,n}(k)+\alpha+\beta-n$ 若處理完後 $f_{\alpha,\beta,n+\alpha}(k)>n+\alpha$，則必須再減一次 n，若還是同樣情況，就再循環下去；反之，$f_{\alpha,\beta,n+\alpha}(k)$ 將是 $f_{\alpha,\beta,n}(k)+\alpha+\beta$

附錄五、本研究與約瑟夫問題的不同之處

2007 年國際科學展覽會作品《約瑟夫問題》與本研究的不同之處。如下

1. 主題

本研究針對「殺α留β」，找出倒數第 k 個出局數是 k 之不動點。《約瑟夫問題》則是單純地找出「殺α留β」第 k 個留下的數。

找出不動點很明顯地遠遠在找出留下的數之上，因為其實從別的角度上來看，找出不動點就是藉由找出留下的數來進一步地延伸，可說是進一步地延伸了《約瑟夫問題》的研究。

2. 專一性

本研究從頭到尾皆著重在找出不動點一般式，並再更進一步地探討其他有趣的性質與猜想。而《約瑟夫問題》則除了自身的主題之外，還延伸出了其他研究方向，使最後結論有些鬆散。

3. 性質探討

《約瑟夫問題》在最後結論部分只擺上了一個公式和其他延伸問題的小結論，但對於其他特殊、隱藏的性質卻沒有加以研究，最後結論是著重在「研究結果」。

本研究主要方向雖然也是找出「殺α留β倒數第k個出局數是k之不動點」的公式，但最後的結論並非完全在述說此公式，反而是更加地針對約瑟夫數列的種種性質來討論。

4.「數列」

從《約瑟夫問題》的結論我們可得知，《約瑟夫問題》求出的只是單一的數字，並不會出現多重解這種有趣的結果，《約瑟夫問題》才有辦法將結論全部歸納成一個公式。

但本研究有著極大的不同，不僅僅是研究主題「約瑟夫數列」是個數列，就連答案也有可能是數列，甚至還是無上限的數列，所以才會出現並非只有一個公式，還得分成兩個演算法分別找出數列起始值和其餘解的情況。

這讓本研究變得更加地複雜，使得每個部份都必需分成 3 個部分來討論：唯一解、多重解起始解和多重解一般式。不僅如此，我們也必須證明出，為什麼會有這樣一個如此奇妙的情況？為什麼《約瑟夫問題》不會出現這樣的情形？

【評語】030415

約瑟夫問題及其變形為常見之研究題材，原始約瑟夫問題為在固定人數之下的變化，本件作品考慮先給定規則，與倒數第 k 名出局之編號恰為 k，反求可能的 n，是有創意的想法。但目標是求 n 的關鍵在摘要，說明書或現場口試皆未能凸顯，對於存在性與演算法是否之最小值亦未能清楚說明. 因為 n 可浮動，問題自由度放大許多，從而大大降低了作品的難度，數列之初始值有規律，反覆使用同餘之技巧可解決，是較為可惜之處。作品說明書不易閱讀，宜減少數學符號並突出主線。本作品之作者有研究之潛力，未來可選擇適當之主題再接再厲。