中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030414

「三」不轉「六」轉，「六」不轉機器人轉
---從正多邊形翻轉問題到機器人掃樓梯

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：	指導老師：
國一　王昕宸	蔡明翰
國一　蔡杰辰	蔡名峯
國一　陳俐妤	

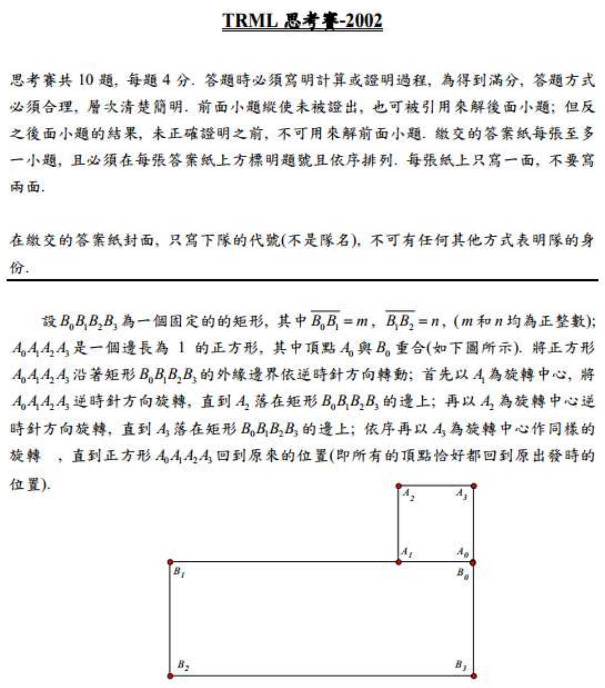
關鍵詞：正多邊形、重心、圖形的軌跡

摘要

為了可以設計能打掃樓梯的掃地機，我們需探討正 n 邊形在階梯上的翻轉，因此我們從試作小正三角形在大正四邊形外圍的翻轉，畫出質心之翻轉軌跡並算出弧長與面積；接著我們擴展到小正 n 邊形在大正 k 邊形的翻轉，在千變萬化的軌跡中，找到**弧長、面積的通式**。同時，我們也探討：當由大正 k 邊形翻轉小正 n 邊形的弧長軌跡，並計算出回到原出發點的最小圈數，並發現其規律。最後在應用方面，我們依此發展到小正 n 邊形及圓形在階梯上的翻轉，並改變階梯之夾角推導出其通式，可應用在**機器人掃地機**打掃樓梯。

壹、研究動機

這幾年市面上出現了掃地機的家電產品，有一天媽媽突然說：「如果能有也可以打掃樓梯的掃地機該有多好！」因此引發了我們的靈感，是否有朝一日會設計出如下圖的掃地機；再加上之前在數學研討課上，老師讓我們討論了一題 TRML 的思考賽試題(如下)，動手做的過程，我們發現：用電腦繪圖只要改變變因，就可以畫出千變萬化的美麗花邊，這引起了我們莫大的興趣。應該可以推廣應用到設計打掃樓梯的掃地機。

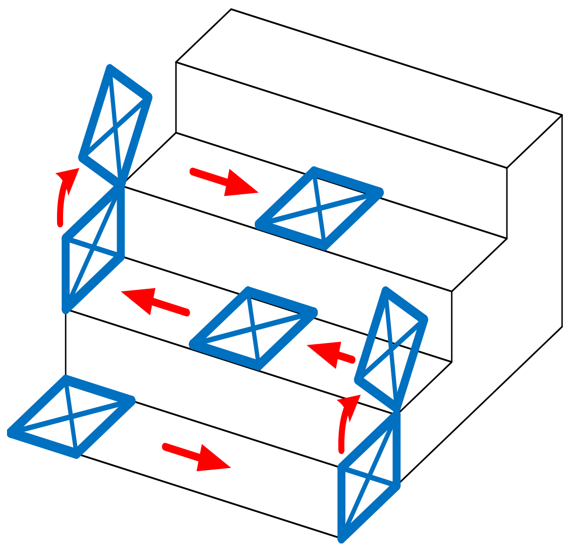


TRML 思考賽-2002

思考賽共 10 題，每題 4 分. 答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明. 前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但反之後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題. 繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列. 每張紙上只寫一面，不要寫兩面.

在繳交的答案紙封面，只寫下隊的代號(不是隊名)，不可有任何其他方式表明隊的身份.

設 $B_0B_1B_2B_3$ 為一個固定的的矩形，其中 $\overline{B_0B_1}=m$，$\overline{B_1B_2}=n$，(m 和 n 均為正整數)；$A_0A_1A_2A_3$ 是一個邊長為 1 的正方形，其中頂點 A_0 與 B_0 重合(如下圖所示). 將正方形 $A_0A_1A_2A_3$ 沿著矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的外緣邊界依逆時針方向轉動；首先以 A_1 為旋轉中心，將 $A_0A_1A_2A_3$ 逆時針方向旋轉，直到 A_2 落在矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的邊上；再以 A_2 為旋轉中心逆時針方向旋轉，直到 A_3 落在矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的邊上；依序再以 A_3 為旋轉中心作同樣的旋轉 ，直到正方形 $A_0A_1A_2A_3$ 回到原來的位置(即所有的頂點恰好都回到原出發時的位置).



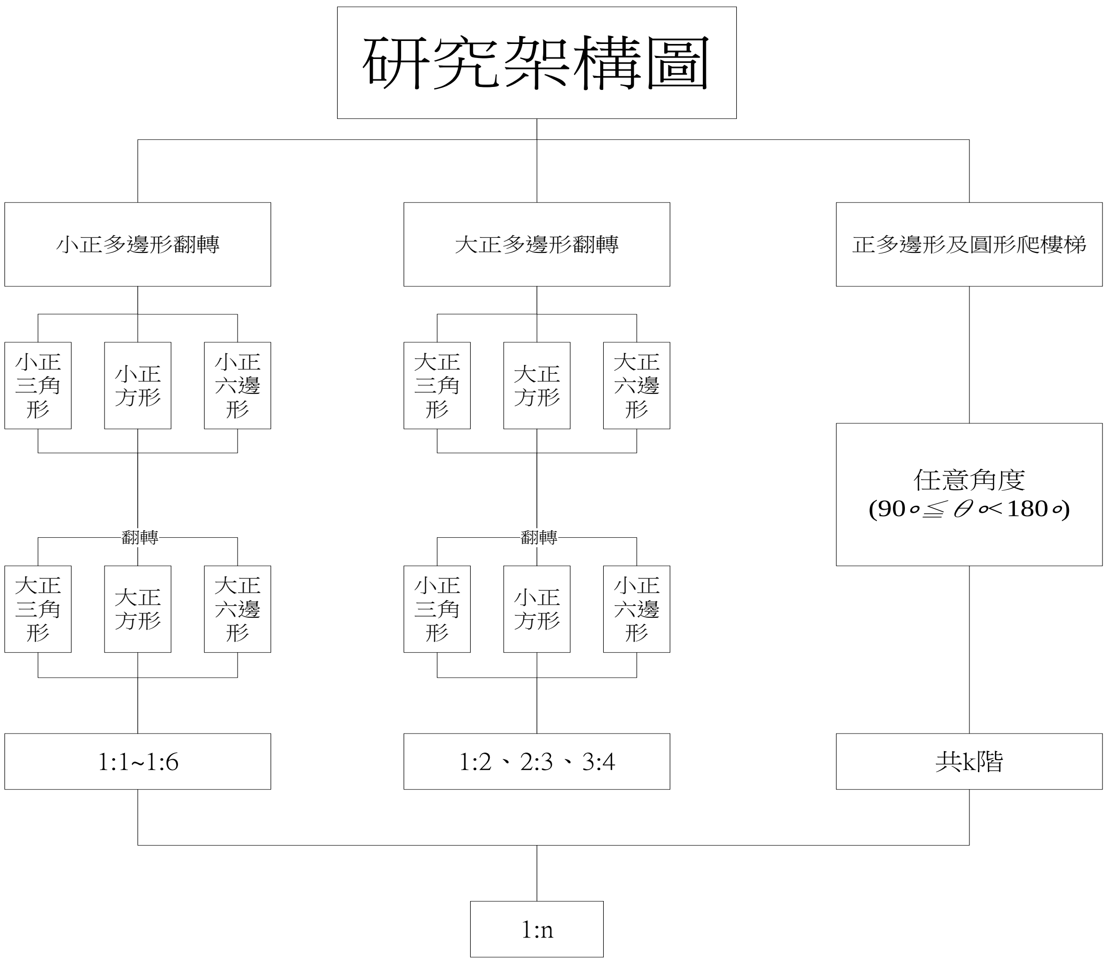
貳、研究目的

為了能設計可以打掃樓梯的掃地機，我們擬探討多邊形的平面翻轉問題，因此本研究第一部分首先計算小正 n 邊形之重心對大正 k 邊形作環繞旋轉之滾動軌跡圖形、弧長與面積，並探討其通式與規律性。第二部分為探討大正 k 邊形之重心對小正 n 邊形作環繞旋之滾動軌跡圖形之弧長，並計算大正 k 邊形回到原出發點之最小圈數。接著，本組想到將多邊形的平面翻轉發展到機器人掃樓梯的應用。因此探討小正 n 邊形及圓形之重心翻轉爬階梯時的軌跡圖形、周長與面積，並探討三者之間的力矩大小關係，利用此部分的計算結果，運用於機器人掃地機的設計概念。最後本組改變階梯的角度推導出當角度為 $\theta^{\circ}(90^{\circ} \le \theta^{\circ} \le 180^{\circ})$時，小正 n 邊形及圓形翻轉爬階梯的軌跡圖形、周長與面積之規律及通式。

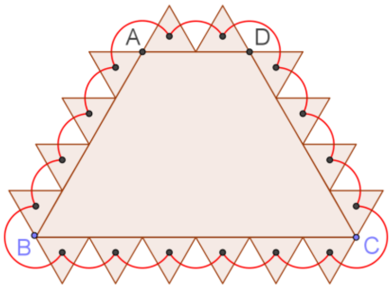
參、研究設備及器材

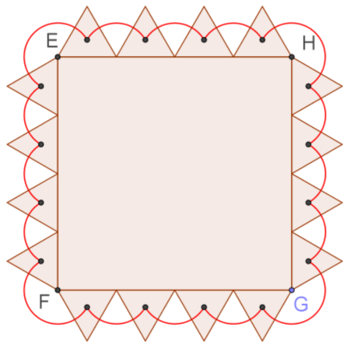
紙、筆、電腦、geogebra、visio

肆、研究過程或方法



一、探討當大 k 邊形周長與大正 k 邊形的周長相同時，小三角形翻轉時重心所走過的面積(弧線扣掉大正 k 邊形的區域)、周長是否會相等





舉例小正三角形 (設其邊長為 1)翻轉以上大四邊形 ABCD (邊長為 2,4,6,4)與大正四邊形 EFGH (邊長為 4)，弧長計算方式如下(r=半徑)：

	在大四邊形與大正四邊形角上的總弧長	在大四邊形與大正四邊形邊上的總弧長
翻轉大四邊形(邊長為 2,4,6,4)	$r\times2\times\pi\times\frac{360\times4-360-240}{360}$ $=r\times2\times\pi\times\frac{210}{360}\times4$	$r\times2\times\pi\times\frac{120}{360}\times(2-1+4-1+6-1+4-1)$ $=r\times2\times\pi\times\frac{120}{360}\times12$
翻轉大正四邊形(邊長為 4)	$r\times2\times\pi\times\frac{210}{360}\times4$	$r\times2\times\pi\times\frac{120}{360}(4-1)\times4$ $=r\times2\times\pi\times\frac{120}{360}\times12$

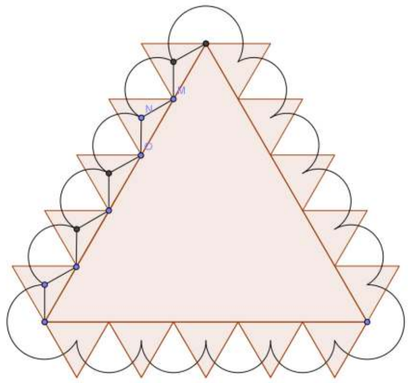
舉例小正三角形 (設其邊長為 1)翻轉以上大四邊形 ABCD (邊長為 2,4,6,4)與大正四邊形 EFGH (邊長為 4)，面積計算方式如下(r=半徑)：

	在大四邊形與大正四邊形角上的總面積	在大四邊形與大正四邊形邊上的面積(扇形)	在大四邊形與大正四邊形邊上的面積(三角形)
翻轉大四邊形(邊長為 2,4,6,4)	$r^2\pi\times\frac{360\times4-360-240}{360}$ $=r^2\pi\times\frac{210}{360}\times4$	$r^2\pi\times\frac{120}{360}\times(2-1+4-1+6-1+4-1)$ $=r^2\pi\times\frac{210}{360}\times12$	$\frac{\sqrt{3}}{12}\times4\times4$ $=\frac{\sqrt{3}}{12}\times16$
翻轉大正四邊形(邊長為 4)	$r^2\pi\times\frac{210}{360}\times4$	$r^2\pi\times\frac{120}{360}(4-1)\times4$ $=r^2\pi\times\frac{210}{360}\times12$	$\frac{\sqrt{3}}{12}\times(2+4+6+4)$ $=\frac{\sqrt{3}}{12}\times16$

得知其周長與面積皆相等，以下為計算證明過程：

若小正 n 邊形之邊長為 a，大正 k 邊形、與大 k 邊形的周長皆為 b，小正 n 邊形重心點所畫出之弧長在大正 k 邊形、與大 k 邊形的個數皆為 b/a，其扇形角度也相等，故在邊上的扇形弧長相等；而在角上翻轉的部分，因為大正 k 邊形與大 k 邊形之內角和相等，故影響 直徑×(360－1 內角)×k×π 的總弧長也會相等。綜合以上兩個部分，當大m邊形周長與大正m邊形的周長相同時，小三角形重心所走過的周長會相等。

若小正 n 邊形之邊長為 a，大正 k 邊形、與大 k 邊形的周長皆為 b，小正 n 邊形重心點所畫出之弧長在大正 k 邊形、與大 k 邊形的個數即右圖中三角形 MNO 的個數皆為 b/a，故在邊上的扇形及三角形面積相等；而在角上翻轉的部分，因為大正 k 邊形與大 k 邊形之內角和相等，故影響 半徑×半徑×(360－1 內角)×k×π 的總面積也會相等。綜合以上兩個部分，得證當大 k 邊形周長與大正 k 邊形的周長相同時，小三角形重心所走過的面積會相等。



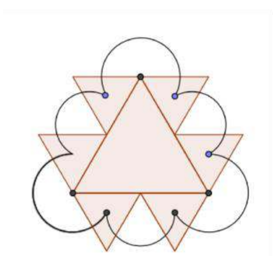
總結：當大 k 邊形周長與大正 k 邊形的周長相同時，小三角形重心所走過的面積、周長必會相等，故後面的整份研究皆採用**翻轉大正 k 邊形**來做。

二、當小正三角形沿著大正 k 邊形(k=3、4、6)翻轉一圈，回到原來位置，試繪出其重心點軌跡圖形，並探討軌跡的弧長及面積(以下計算為方便起見，以大正 k 邊形邊長為 60 計算)

(因作法雷同，故本研究只列出小正 n 邊形與大正 k 邊形邊長比為 1：2 及 1：5 之演算過程)

(一)設定小正三角形與大正三角形的邊長比為 1：2

1.重心點的軌跡圖形如下：



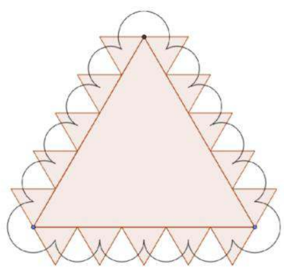
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長$=10\sqrt{3}\times 2\pi\times(\frac{240}{360}\times 3+\frac{120}{360}\times 3)=60\sqrt{3}\pi$

(2)面積$=10\sqrt{3}\times 10\sqrt{3}\times\pi\times(\frac{240}{360}\times 3+\frac{120}{360}\times 3)+900\sqrt{3}\div 2^2\times 2=900\pi+450\sqrt{3}$

(二)設定小正三角形與大正三角形的邊長比為 1：5

1.重心點的軌跡圖形如下：



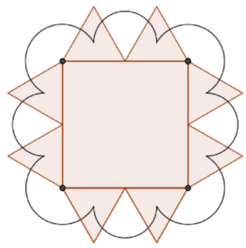
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝ $4\sqrt{3}\times2\pi\times(\frac{240}{360}\times3+\frac{120}{360}\times12)=48\sqrt{3}\pi$

(2)面積＝$4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\pi\times(\frac{240}{360}\times3+\frac{120}{360}\times12)+900\sqrt{3}\div5^2\times5=288\pi+180\sqrt{3}$

(三)設定小正三角形與大正四邊形的邊長比為 1：2

1.重心點的軌跡圖形如下：



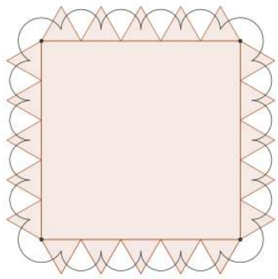
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$10\sqrt{3}\times2\pi\times(\frac{210}{360}\times4+\frac{120}{360}\times4)=\frac{220}{3}\sqrt{3}\pi$

(2)面積＝$10\sqrt{3}\times10\sqrt{3}\times\pi\times(\frac{210}{360}\times4+\frac{120}{360}\times4)+1200\sqrt{3}\div2^2\times2=1100\pi+600\sqrt{3}$

(四)設定小正三角形與大正四邊形的邊長比為 1：5

1.重心點的軌跡圖形如下：



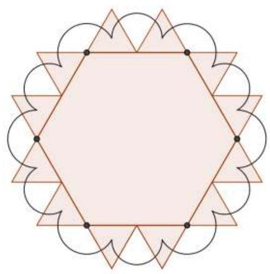
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝ $4\sqrt{3}\times2\pi\times(\frac{210}{360}\times4+\frac{120}{360}\times16)=\frac{176}{3}\sqrt{3}\pi$

(2)面積＝$4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\pi\times(\frac{210}{360}\times4+\frac{120}{360}\times16)+1200\sqrt{3}\div5^2\times5=352\pi+240\sqrt{3}$

(五)設定小正三角形與大正六邊形的邊長比為 1：2

1.重心點的軌跡圖形如下：



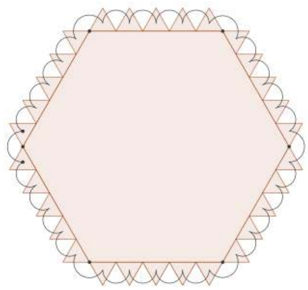
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)周長＝$10\sqrt{3}\times2\pi\times(\frac{180}{360}\times6+\frac{120}{360}\times6)=20\sqrt{3}\pi\times5\ =100\pi\sqrt{3}$

(2)面積＝$10\sqrt{3}\times10\sqrt{3}\times\pi\times(\frac{180}{360}\times6+\frac{120}{360}\times6)+10800\sqrt{3}\div2^2\times2=1500\pi+5400\sqrt{3}$

(六)設定小正三角形與大正六邊形的邊長比為 1：5

1.重心點的軌跡圖形如下：



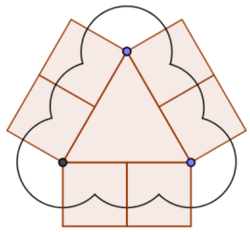
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)周長＝$4\sqrt{3}\times2\pi\times(\frac{180}{360}\times6+\frac{120}{360}\times24)=88\sqrt{3}\pi$

(2)面積＝$4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\pi\times(\frac{180}{360}\times6+\frac{120}{360}\times24)+1800\sqrt{3}\div5^2\times5=528\pi+360\sqrt{3}$

三、當小正四邊形沿著大正 k 邊形(k=3、4、6)翻轉一圈，回到原來位置，試繪出其重心點軌跡圖形，並探討軌跡的弧長及面積(以大正 k 邊形邊長為 60 計算)

(一)設定小正四邊形與大正三角形的邊長比為 1：2



1.重心點的軌跡圖形如下：

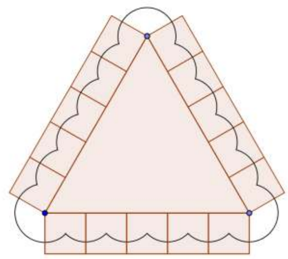
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$\sqrt{30\times30\times2}\times\frac{7}{12}\times3\pi+\sqrt{30\times30\times2}\times\frac{1}{4}\times3\pi=75\sqrt{2}\pi$

(2)面積＝$\sqrt{450}\times\sqrt{450}\times\frac{5}{6}\times3\pi+\sqrt{450}\times\sqrt{450}\times3$ ＝$450\times\frac{5}{6}\times3\pi+450\times3$

＝$1125\pi+1350$

(二)設定小正四邊形與大正三角形的邊長比為 1：5



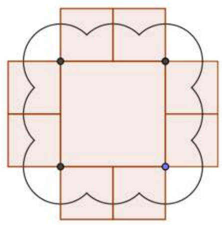
1.重心點的軌跡圖形如下：

2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$\sqrt{12\times12\times2}\times\frac{7}{12}\times3\pi+\sqrt{12\times12\times2}\times\frac{1}{4}\times12\pi=57\sqrt{2}\pi$

(2)面積＝$\sqrt{72}\times\sqrt{72}\times\frac{7}{12}\times3\pi+\sqrt{72}\times\sqrt{72}\times\frac{1}{4}\times12\pi+\sqrt{72}\times\sqrt{72}\times7.5$ ＝$342\pi+540$

(三)設定小正四邊形與大正四邊形的邊長比為 1：2



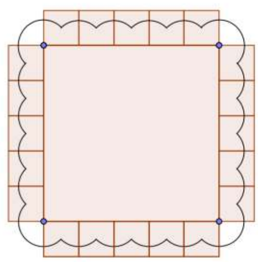
1.重心點的軌跡圖形如下：

2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$\sqrt{30\times30\times2}\times\frac{1}{2}\times4\pi+\sqrt{30\times30\times2}\times\frac{1}{4}\times4\pi=90\pi\sqrt{2}$

(2)面積＝$\sqrt{450}\times\sqrt{450}\times\frac{1}{2}\times4\pi+\sqrt{450}\times\sqrt{450}\times\frac{1}{4}\times4\pi+30\times30\times\frac{1}{4}\times8=1350\pi+1800$

(四)設定小正四邊形與大正四邊形的邊長比為 1：5



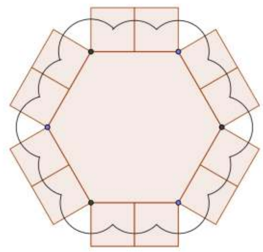
1.重心點的軌跡圖形如下：

2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$\sqrt{12\times12\times2}\times\frac{1}{2}\times4\pi+\sqrt{12\times12\times2}\times\frac{1}{4}\times16\pi=72\sqrt{2}\pi$

(2)面積＝$\sqrt{72}\times\sqrt{72}\times\frac{1}{2}\times4\pi+\sqrt{72}\times\sqrt{72}\times\frac{1}{4}\times16\pi+12\times12\times\frac{1}{4}\times20=432\pi+720$

(五)設定小正四邊形與大正六邊形的邊長比為 1：2



1.重心點的軌跡圖形如下：

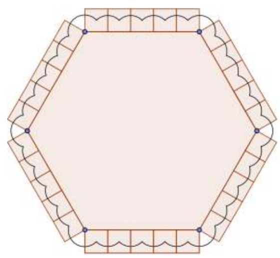
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$\sqrt{30\times30\times2}\times\frac{5}{12}\times6\pi+\sqrt{30\times30\times2}\times\frac{1}{4}\times6\pi=120\sqrt{2}\pi$

(2)面積＝$\sqrt{450}\times\sqrt{450}\times\frac{5}{12}\times6\pi+\sqrt{450}\times\sqrt{450}\times\frac{1}{4}\times6\pi+30\times30\times\frac{1}{4}\times12$

$=1800\pi+2700$

(六)設定小正四邊形與大正六邊形的邊長比為 1：5



1.重心點的軌跡圖形如下：

2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$\sqrt{12\times12\times2}\times\frac{5}{12}\times6\pi+\sqrt{12\times12\times2}\times\frac{1}{4}\times24\pi$

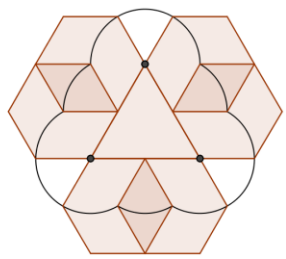
$=102\sqrt{2}\pi$

(2)面積＝$\sqrt{72}\times\sqrt{72}\times\frac{5}{12}\times6\pi+\sqrt{72}\times\sqrt{72}\times\frac{1}{4}\times24\pi+12\times12\times\frac{1}{4}\times30=$

$612\pi+1080$

四、當小正六邊形沿著大正 k 邊形(k=3、4、6)翻轉一圈，回到原來位置，試繪出其重心點軌跡圖形，並探討軌跡的弧長及面積(以大正 k 邊形邊長為 60 計算)

(一)設定小正六邊形與大正三角形的邊長比為 1：2



1.重心點的軌跡圖形如下：

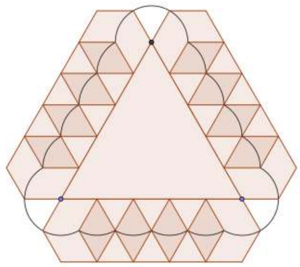
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$(30\times2\times\frac{1}{2}\times3+30\times2\times\frac{1}{6}\times3)\pi=120\pi$

(2)面積＝$30\times30\times\frac{1}{2}\times3\pi+30\times30\times\frac{1}{6}\times3\pi+30\times30\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div2\times2\times3=1800\pi+1350\sqrt{3}$

(二)設定小正六邊形與大正三角形的邊長比為 1：5

1.重心點的軌跡圖形如下：



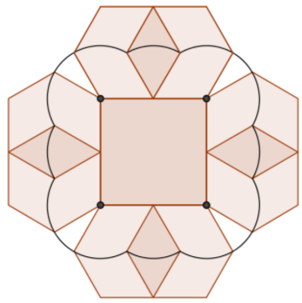
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$(12\times2\times\frac{1}{2}\times3+12\times2\times\frac{1}{6}\times4\times3)\pi=84\pi$

(2)面積＝$12\times12\times\frac{1}{2}\times3\pi+12\times12\times\frac{1}{6}\times4\times3\pi+12\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div2\times5\times3=504\pi+540\sqrt{3}$

(三)設定小正六邊形與大正四邊形的邊長比為 1：2

1.重心點的軌跡圖形如下：



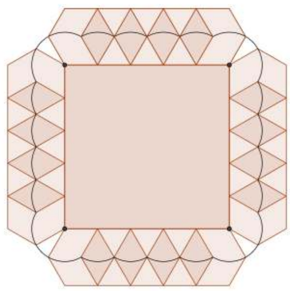
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$(30\times2\times\frac{5}{12}\times4+30\times2\times\frac{1}{6}\times4)\pi=140\pi$

(2)面積＝$30\times30\times\frac{5}{12}\times4\pi+30\times30\times\frac{1}{6}\times4\pi+30\times30\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div2\times2\times4=2100\pi+1800\sqrt{3}$

(四)設定小正六邊形與大正四邊形的邊長比為 1：5

1.重心點的軌跡圖形如下：



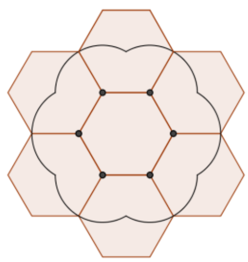
2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$(12\times2\times\frac{5}{12}\times4+12\times2\times\frac{1}{6}\times4\times4)\pi=104\pi$

(2)面積＝$12\times12\times\frac{5}{12}\times4\pi+12\times12\times\frac{1}{6}\times4\times4\pi+12\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div2\times5\times4=624\pi+720\sqrt{3}$

(五)設定小正六邊形與大正六邊形的邊長比為 1：2

1.重心點的軌跡圖形如下：

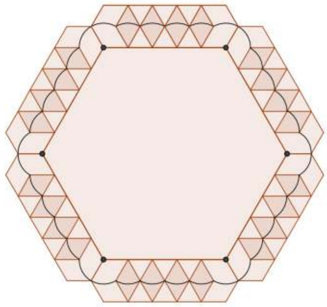


2.軌跡弧長、面積求法如下：

(1)弧長＝$(30\times2\times\frac{1}{3}\times6+30\times2\times\frac{1}{6}\times6)\pi=180\pi$

(2)面積＝$30\times30\times\frac{1}{3}\times6\pi+30\times30\times\frac{1}{6}\times6\pi+30\times30\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div2\times2\times6=2700\pi+2700\sqrt{3}$

(六)設定小正六邊形與大正六邊形的邊長比為 1：5



1.重心點的軌跡圖形如下：

2.軌跡弧長、面積求法如下：

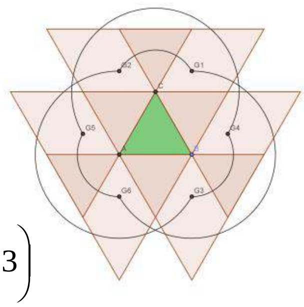
(1)弧長＝$(12\times2\times\frac{1}{3}\times6+12\times2\times\frac{1}{6}\times4\times6)\pi$＝$144\pi$

(2)面積＝$12\times12\times\frac{1}{3}\times6\pi+12\times12\times\frac{1}{6}\times4\times6\pi+12\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div2\times5\times6$＝$864\pi+1080\sqrt{3}$

接著，我們反過來思考，如果是小正多邊形固定，大正多邊形的重心在外部作環繞旋轉，就不一定會在旋轉一圈後就回到原出發點，那麼圖形回到出發點的重心軌跡及最小圈數又是如何呢？以下我們試作了小正 m 邊形與大正 n 邊形邊長比為 1：2，2：3 及 3：4 三種情形：

五、當大正 n 邊形(n=3、4、6)沿著小正三邊形翻轉一圈，回到原來位置，試繪出其重心點軌跡圖形，並探討軌跡的弧長及最小翻轉圈數

(一)設定小正三角形與大正三角形的邊長比為 1：2



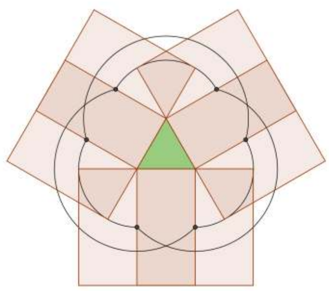
(1)令小正三角形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2\mid 3x \Rightarrow$ x 最小為 2

(2)軌跡弧長=$\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{r}\times2\times\pi\times\left(\frac{120}{360}\times3\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{r}\times2\times\pi\times\left(\frac{240}{360}\times3\right)$

$$=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\mathrm{r}+\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\mathrm{r}=\frac{10\sqrt{3}\pi}{3}\mathrm{r}$$

(二)設定小正三角形與大正四邊形的邊長比為 1：2



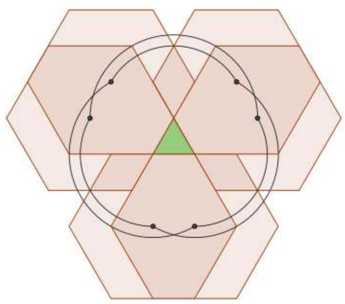
(1)令小正三角形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2\mid 3x \Rightarrow$ x 最小為 2

(2)軌跡弧長=$\sqrt{2}\mathrm{r}\times2\times\pi\times\left(\frac{210}{360}\times3\right)+\mathrm{r}\times2\times\pi\times\left(\frac{120}{360}\times3\right)$

$$=\frac{7\sqrt{2}\pi}{2}\mathrm{r}+2\pi\mathrm{r}=\frac{(7\sqrt{2}+4)\pi}{2}\mathrm{r}$$

(三)設定小正三角形與大正六邊形的邊長比為 1：2



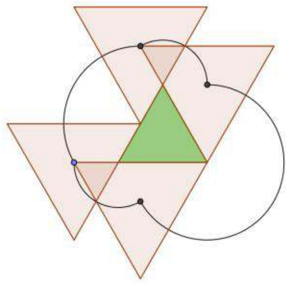
(1)令小正三角形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2\mid 3x \Rightarrow$ x 最小為 2

(2)軌跡弧長$=2\mathrm{r}\times 2\times \pi \times \left(\dfrac{180}{360}\times 3\right)+\sqrt{3}\mathrm{r}\times 2\times \pi \times \left(\dfrac{120}{360}\times 3\right)$

$$=6\pi\mathrm{r}+2\sqrt{3}\pi\mathrm{r}=2\left(3+\sqrt{3}\right)\pi\mathrm{r}$$

(四)設定小正三角形與大正三角形的邊長比為 2：3



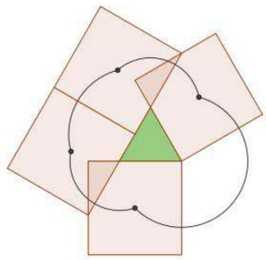
(1)令小正三角形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

即 $3\mid 6x \Rightarrow$ x 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=\sqrt{3}\mathrm{r}\times 2\times \pi \times \left(\frac{240}{360}+\frac{120}{360}\right)+\mathrm{r}\times 2\times \pi \times \left(\frac{120}{360}+\frac{120}{360}\right)=\frac{2\left(3\sqrt{3}+2\right)}{3}\pi\mathrm{r}$$

(五)設定小正三角形與大正四邊形的邊長比為 2：3



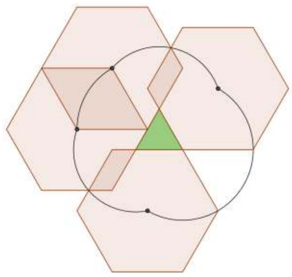
(1)令小正三角形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

即 $3\mid 6x \Rightarrow$ x 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}\mathrm{r}\times 2\times \pi \times (\frac{210}{360}+\frac{90}{360})+\frac{\sqrt{10}}{2}\mathrm{r}\times 2\times \pi \times (\frac{120}{360}+\frac{120}{360})=\frac{\sqrt{2}(15+4\sqrt{5})}{6}\pi\mathrm{r}$$

(六)設定小正三角形與大正六邊形的邊長比為 2：3



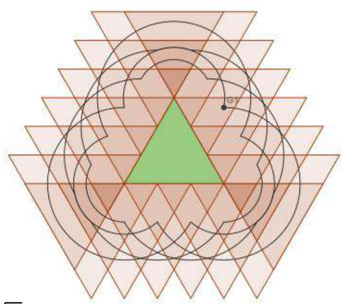
(1)令小正三角形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

即 $3\mid 6x \Rightarrow$ x 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=3\mathrm{r}\times 2\times \pi \times \left(\frac{180}{360}+\frac{60}{360}\right)+\frac{2\sqrt{7}}{2}\mathrm{r}\times 2\times \pi \times \left(\frac{120}{360}+\frac{120}{360}\right)=4\left(\frac{3+\sqrt{7}}{3}\right)\pi\mathrm{r}$$

(七)設定小正三角形與大正三角形的邊長比為 3：4



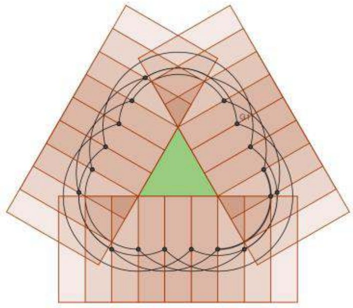
(1)令小正三角形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

即 $4\mid 9x \Rightarrow$ x 最小為 4

(2)軌跡弧長

$$=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{21}}{3}\times 2+\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 2\right)\mathrm{r}\times 2\times \pi \times \frac{120}{360}\times 3=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(36+4\sqrt{7}\right)\pi\mathrm{r}$$

(八)設定小正三角形與大正四邊形的邊長比為 3：4



(1)令小正三角形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

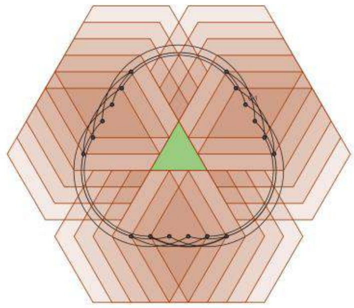
即 $4 \mid 9x \Rightarrow x$ 最小為 4

(2)軌跡弧長

$$=\left[\left(2+\sqrt{5}\times 2\right)r\times 2\times \pi\times \frac{120}{360}+\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)r\times 2\times \pi\times \frac{90}{360}+2\sqrt{2}r\times 2\times \pi\times \frac{210}{360}\right]$$

$$=\left(4+4\sqrt{5}+13\sqrt{2}\right)\pi r$$

(九)設定小正三角形與大正六邊形的邊長比為 3：4



(1)令小正三角形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

即 $4 \mid 9x \Rightarrow x$ 最小為 4

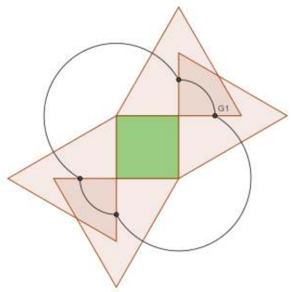
(2)軌跡弧長

$$=\left[\left(2\sqrt{3}+\sqrt{13}\times 2\right)r\times 2\times \pi\times \frac{120}{360}+\left(4+4\right)r\times 2\times \pi\times 60+4r\times 2\times \pi\times \frac{180}{360}\right]$$

$$=4\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}+5\right)\pi r$$

六、當大正 n 邊形(n=3、4、6)沿著小正四邊形翻轉一圈，回到原來位置，試繪出其重心點軌跡圖形，並探討軌跡的弧長及最小翻轉圈數

(一)設定小正四邊形與大正三角形的邊長比為 1：2



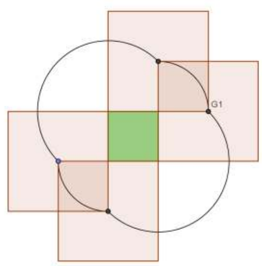
(1)令小正四邊形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2 \mid 4x \Rightarrow x$ 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}r\times \frac{210\times 2}{360}+\frac{2}{3}\sqrt{3}r\times \frac{90\times 2}{360}\right)\times \pi=\frac{17}{9}\sqrt{3}\pi r$$

(二)設定小正四邊形與大正四邊形的邊長比為 1：2



(1)令小正四邊形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2 \mid 4x \Rightarrow x$ 最小為 1

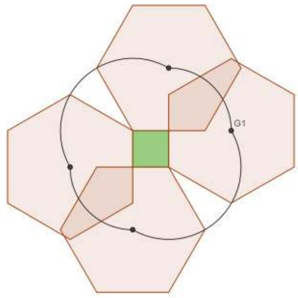
(2)軌跡弧長$=\left(2\sqrt{2}r\times \frac{180\times 2}{360}+2r\times \frac{90\times 2}{360}\right)\times \pi$

$$=\left(2\sqrt{2}+1\right)\pi r$$

(三)設定小正四邊形與大正六邊形的邊長比為 1：2

(1)令小正四邊形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2 \mid 4x \Rightarrow$ x 最小為 1



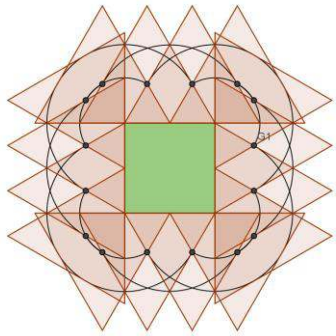
(2)軌跡弧長

$$=\left(4r\times\frac{150\times 2}{360}+2\sqrt{3}r\times\frac{90\times 2}{360}\right)\times\pi=\left(\frac{10}{3}+\sqrt{3}\right)\pi r$$

(四)設定小正四邊形與大正三角形的邊長比為 2：3

(1)令小正四邊形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

即 $3 \mid 8x \Rightarrow$ x 最小為 3



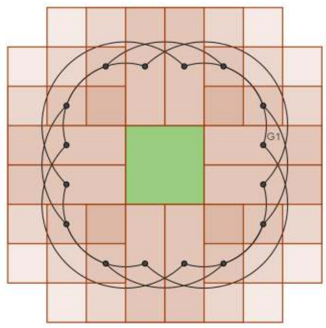
(2)軌跡弧長$=\left(2\sqrt{3}r\times\frac{(120+210)\times 4}{360}+2r\times\frac{90\times 8}{360}\right)\times\pi$

$$=\left(\frac{22}{3}\sqrt{3}+4\right)\pi r$$

(五)設定小正四邊形與大正四邊形的邊長比為 2：3

(1)令小正四邊形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

即 $3 \mid 8x \Rightarrow$ x 最小為 3



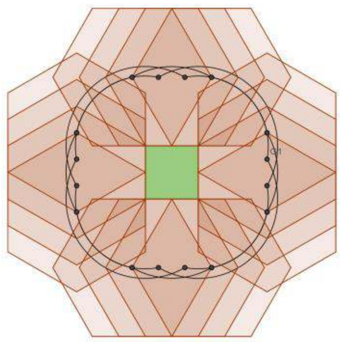
(2)軌跡弧長$=\left(3\sqrt{2}r\times\frac{(180+90)\times 4}{360}+\sqrt{10}r\times\frac{90\times 8}{360}\right)\times\pi$

$$=\left(9\sqrt{2}+2\sqrt{10}\right)\pi r$$

(六)設定小正四邊形與大正六邊形的邊長比為 2：3

(1)令小正四邊形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

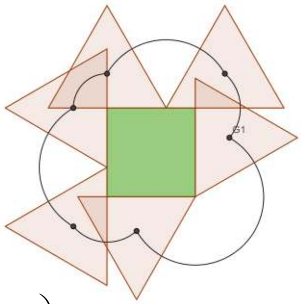
即 $3 \mid 8x \Rightarrow$ x 最小為 3



(2)軌跡弧長$=\left(6r\times\frac{(60+150)\times 4}{360}+2\sqrt{7}r\times\frac{90\times 8}{360}\right)\times\pi$

$$=\left(14+4\sqrt{7}\right)\pi r$$

(七)設定小正四邊形與大正三角形的邊長比為 3：4



(1)令小正四邊形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

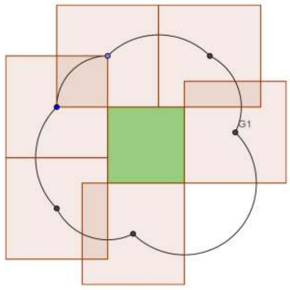
即 $4 \mid 12x \Rightarrow$ x 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=\left(\frac{8}{3}\sqrt{3}r\times\frac{120+210+120}{360}+\frac{2\sqrt{7}}{3}\times\sqrt{3}r\times\frac{90+90}{360}+\frac{4}{3}\sqrt{3}r\times\frac{90}{360}\right)\times\pi$$

$$=\frac{11+\sqrt{7}}{3}\sqrt{3}\pi r$$

(八)設定小正四邊形與大正四邊形的邊長比為 3：4



(1)令小正四邊形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

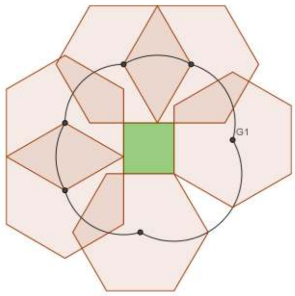
即 $4 \mid 12x \Rightarrow$ x 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=\left(4\sqrt{2}r\times\frac{180+90+90}{360}+2\sqrt{5}r\times\frac{90+90}{360}+4r\times\frac{90}{360}\right)\times\pi$$

$$=\left(4\sqrt{2}+\sqrt{5}+1\right)\pi r$$

(九)設定小正四邊形與大正六邊形的邊長比為 3：4



(1)令小正四邊形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

即 $4 \mid 12x \Rightarrow$ x 最小為 1

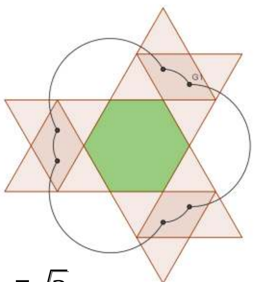
(2)軌跡弧長

$$=\left(8r\times\frac{60+60+150}{360}+2\sqrt{13}r\times\frac{90+90}{360}+4\sqrt{3}r\times\frac{90}{360}\right)\times\pi$$

$$=\left(6+\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)\pi r$$

七、當大正 n 邊形(n=3、4、6)沿著小正六邊形翻轉一圈，回到原來位置，試繪出其重心點軌跡圖形，並探討軌跡的弧長及最小翻轉圈數

(一)設定小正六邊形與大正三角形的邊長比為 1：2

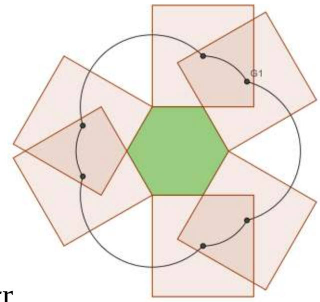


(1)令小正六邊形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2 \mid 6x \Rightarrow$ x 最小為 1

(2)軌跡弧長$=(\frac{\sqrt{3}}{3}r\times2\times\pi\times\frac{30}{360}+\frac{2\sqrt{3}}{3}r\times2\times\pi\times\frac{180}{360})\times3=\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi r$

(二)設定小正六邊形與大正四邊形的邊長比為 1：2



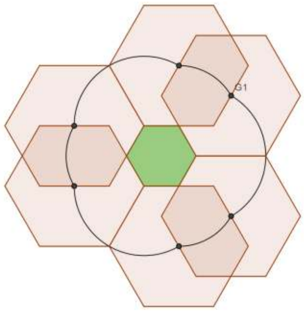
(1)令小正六邊形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2 \mid 6x \Rightarrow x$ 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=(2\times r\times\pi\times\frac{60}{360}+2\times\sqrt{2}r\times\pi\times\frac{150}{360})\times 3=(1+\frac{5\sqrt{2}}{2})\pi r$$

(三)設定小正六邊形與大正六邊形的邊長比為 1：2

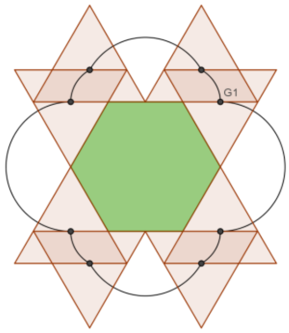


(1)令小正六邊形邊長為 r，翻轉圈數為 x

即 $2 \mid 6x \Rightarrow x$ 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=\left(2\times\sqrt{3}r\times\pi\times\frac{60}{360}+2\times 2r\times\pi\times\frac{120}{360}\right)\times 3=(\sqrt{3}+4)\pi r$$



(四)設定小正六邊形與大正三角形的邊長比為 2：3

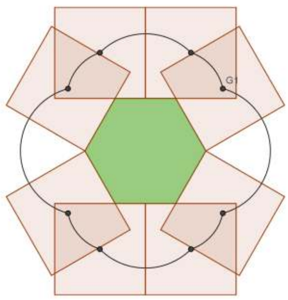
(1)令小正六邊形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

即 $3 \mid 12x \Rightarrow$ x 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=(2\times r\times\pi\times\frac{60}{360}\times 2+2\times\sqrt{3}r\times\pi\times\frac{120}{360}+2\times\sqrt{3}r\times\pi\times\frac{180}{360})\times 2=\frac{4+10\sqrt{3}}{3}\pi r$$

(五)設定小正六邊形與大正四邊形的邊長比為 2：3



(1)令小正六邊形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

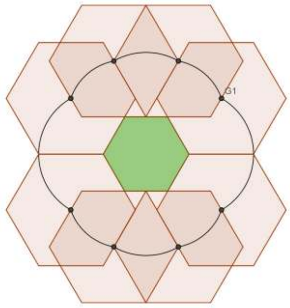
即 $3 \mid 12x \Rightarrow x$ 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=[2\times\frac{3}{2}\sqrt{2}r\times\pi\times(\frac{90}{360}+\frac{150}{360})+2\times\frac{\sqrt{10}}{2}r\times\pi\times\frac{60}{360}\times 2]\times 2$$

$$=(4\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{10}}{3})\pi r$$

(六)設定小正六邊形與大正六邊形的邊長比為 2：3



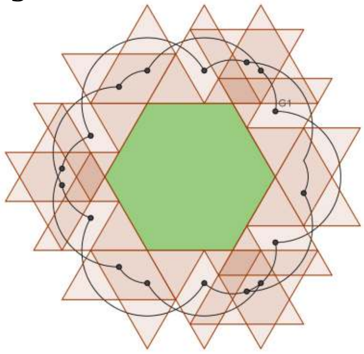
(1)令小正六邊形邊長為 2r，翻轉圈數為 x

即 $3 \mid 12x \Rightarrow x$ 最小為 1

(2)軌跡弧長

$$=[2\times\sqrt{7}r\times\pi\times\frac{60}{360}\times2+2\times3r\times\pi\times(\frac{60}{360}+\frac{120}{360})]\times2=(\frac{4\sqrt{7}}{3}+6)\pi r$$

(七)設定小正六邊形與大正三邊形的邊長比為 3：4



(1)令小正六邊形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

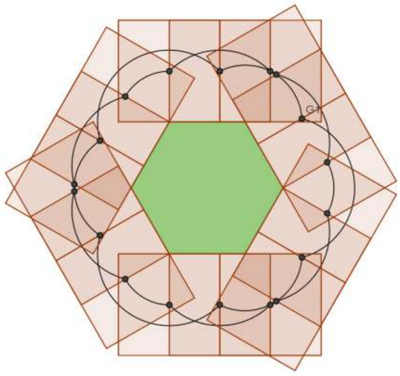
即 $4 \mid 18x \Rightarrow x$ 最小為 2

(2)軌跡弧長

$$=(2\times\frac{\sqrt{21}}{3}r\times\pi\times\frac{60}{360}\times2+2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}r\times\pi\times\frac{120}{360}\times2+2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}r\times\pi\times\frac{60}{360}+2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}r\times\pi\times\frac{180}{360})\times3$$

$$=(\frac{2\sqrt{21}}{3}+10\sqrt{3})\pi r$$

(八)設定小正六邊形與大正四邊形的邊長比為 3：4



(1)令小正六邊形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

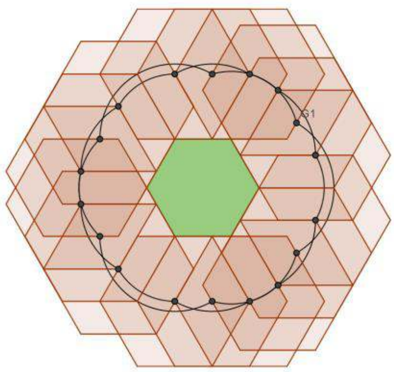
即 $4 \mid 18x \Rightarrow x$ 最小為 2

(2)軌跡弧長

$$=(2\times\sqrt{5}r\times\pi\times\frac{60}{360}\times2+2\times2\sqrt{2}r\times\pi\times\frac{90}{360}\times2+2\times2r\times\pi\times\frac{60}{360}+2\times2\sqrt{2}r\times\pi\times\frac{150}{360})\times3$$

$$=(2\sqrt{5}+2+11\sqrt{2})\pi r$$

(九)設定小正六邊形與大正六邊形的邊長比為 3：4



(1)令小正六邊形邊長為 3r，翻轉圈數為 x

即 $4 \mid 18x \Rightarrow x$ 最小為 2

(2)軌跡弧長

$$=(2\times\sqrt{13}r\times\pi\times\frac{60}{360}\times2+2\times4r\times\pi\times\frac{60}{360}\times2+2\times2\sqrt{3}r\times\pi\times\frac{60}{360}+2\times4r\times\pi\times\frac{120}{360})\times3$$

$$=(2\sqrt{13}+16+2\sqrt{3})\pi r$$

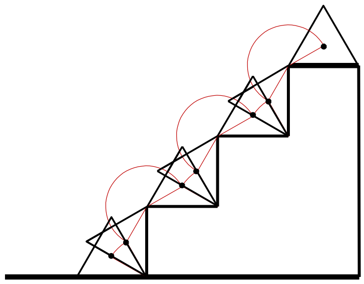
從正多邊形的翻轉中，我們想到市面上的機器人大多也是如此，僅會掃平面而不能掃樓梯，因此我們想要嘗試讓機器人翻轉階梯，並比較當機器人掃地機為三角形、正四邊形及圓形時在空中翻轉的面積大小關係(越大代表越耗力)；因為在掃平面時所需的動力皆相同，因此在本研究接下來所做的探討都是當機器人要翻上一階時的翻轉情形，此外，我們也將機器人邊長：階梯邊長=1：1 及 1：2 的狀況在以下本研究中呈現。

八、探討小正 m 邊形(m=3、4)及圓形之重心點翻轉爬階梯時的軌跡圖形周長及面積(以階梯一階為 1 計算)

(一)、討論正四邊形、正三角形、圓形之重心點翻轉上階梯(90°)的軌跡弧長及掃過面積：

(樓梯共 3 階)

1.正三角形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：1 進行)

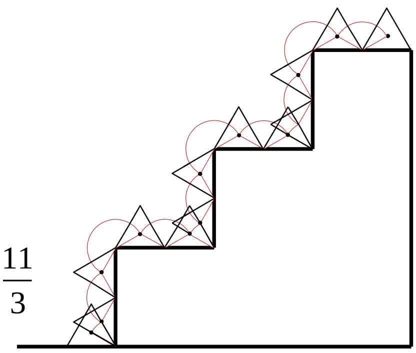


(1)如右圖

(2)軌跡 $=2\times(\frac{\sqrt{3}}{3})\pi\times(\frac{210+30}{360})\times3=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

(3)面積 $=[(\frac{\sqrt{3}}{3})^2\pi\times\frac{210+30}{360}]\times3+\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times\frac{5}{3}=\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{12}\sqrt{3}$

2.正三角形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：2 進行)



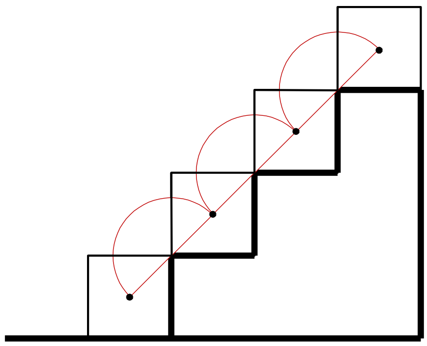
(1)如右圖

(2)軌跡 $=2\times(\frac{\sqrt{3}}{3})\pi\times(\frac{120+210+120+30}{360})\times3=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

(3)面積 $=(\frac{\sqrt{3}}{3})^2\pi\times(\frac{120+210+120+30}{360})\times3+\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times\frac{11}{3}$

$=\frac{4}{3}\pi+\frac{11}{12}\sqrt{3}$

3.正四邊形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：1 進行)

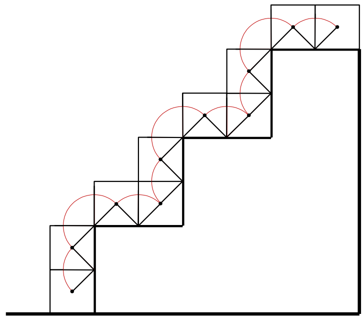


(1)如右圖

(2)軌跡 $=[2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})\pi\times\frac{180}{360}]\times3=\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$

(3)面積 $=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\pi\times\frac{1}{2}\times3+1^2=\frac{3}{4}\pi+1$

4.正四邊形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：2 進行)



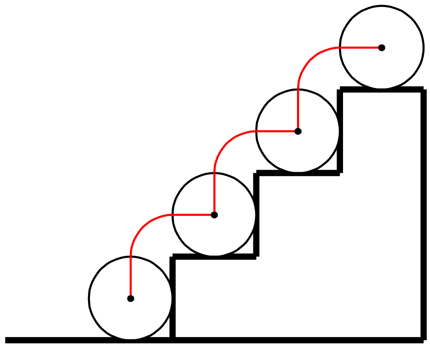
(1)如右圖

(2)軌跡＝$[2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})\pi\times(\frac{90+180+90}{360})]\times 3=3\sqrt{2}\pi$

(3)面積＝$[(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\pi\times(\frac{90+180+90}{360})]\times 3+\frac{1}{4}\times 10$

$=\frac{3}{2}\pi+\frac{5}{2}$

5.圓形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：1 進行)

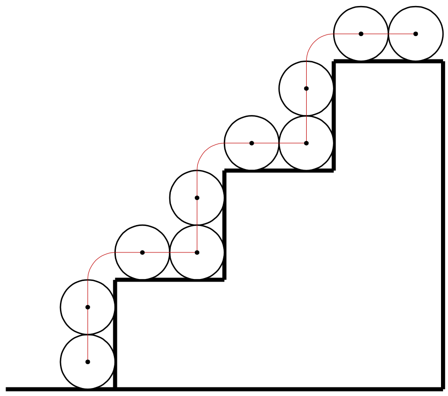


(1)如右圖

(2)軌跡＝$(1+\frac{1}{4}\pi)\times 3=3+\frac{3}{4}\pi$

(3)面積＝$8\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\pi\times 3=2+\frac{3}{16}\pi$

6.圓形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：2 進行)



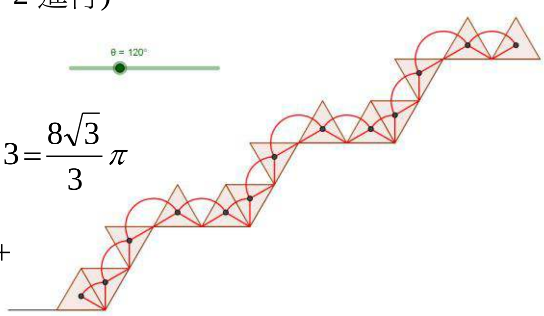
(1)如右圖

(2)軌跡＝ $(3+\frac{1}{4}\pi)\times 3=9+\frac{3}{4}\pi$

(3)面積＝ $20\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\pi\times 3=5+\frac{3}{16}\pi$

(二)改變階梯之角度(120°)，討論正四邊形、正三角形、圓形之重心點翻轉上階梯的軌跡弧長及掃過面積：(樓梯共 3 階)

1.正三角形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：2 進行)



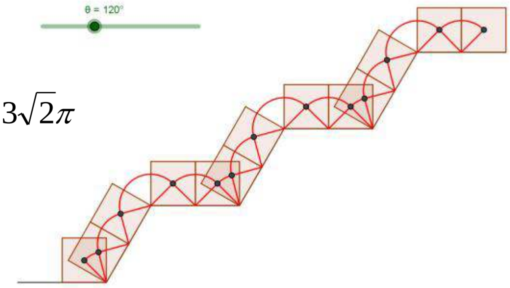
(1)如右圖

(2)軌跡=$2\times(\frac{\sqrt{3}}{3})\pi\times(\frac{60+2\times 120+180}{360})\times 3=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

(3)面積=$(\frac{\sqrt{3}}{3})^2\pi\times(\frac{60+2\times 120+180}{360})\times 3+$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times\frac{11}{3}=\frac{4}{3}\pi+\frac{11}{12}\sqrt{3}$

2.正四邊形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：2 進行)

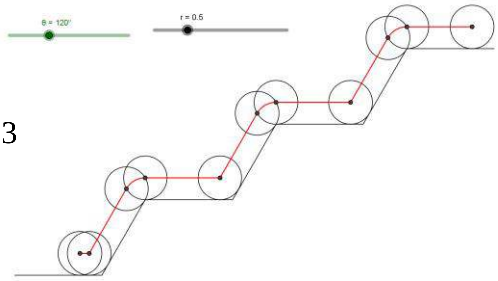


(1)如右圖

(2)軌跡=$[2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})\pi\times(\frac{30+90\times2+180}{360})]\times3=3\sqrt{2}\pi$

(3)面積=$[(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\pi\times(\frac{30+90\times2+180}{360})]\times3+\frac{1}{4}\times11=\frac{3}{2}\pi+\frac{11}{4}$

3. 圓形在階梯上的翻轉軌跡(以邊長 1：2 進行)



(1)如右圖

(2)軌跡=$(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3})+(2-\frac{\sqrt{3}}{6})\times6+\frac{1}{6}\pi\times3$

$=\frac{25}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\pi$

(3)面積=$(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6})\times\frac{1}{2}+[\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{6}+(2-\frac{\sqrt{3}}{6})\times\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\pi\times\frac{1}{6}=\frac{25}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{8}\pi$

我們觀察及計算後發現：

(1)當小正三角形爬階梯時，90°階梯及 120°階梯的軌跡及覆蓋區域面積都相同；

(2)小正四邊形爬階梯時其軌跡相同，但因為 120°階梯開始多了一次翻轉，故覆蓋區域面積多了 $\frac{1}{4}$

(3)圓形翻轉時的軌跡與覆蓋面積都不同，120°階梯之軌跡及覆蓋面積皆為大於 90°階梯之軌跡及覆蓋面積

伍、研究結果

由以上做法，整理表格如下：

一、(令大正 k 邊形之邊長=60)周長之表格

大 / 小		三	四	六
小正 n 邊形	與大正 k 邊形之**邊長**比			
三	(1)1：1	$80\sqrt{3}\pi$	$\frac{280}{3}\sqrt{3}\pi$	$120\sqrt{3}\pi$
	(2)1：2	$60\sqrt{3}\pi$	$\frac{220}{3}\sqrt{3}\pi$	$100\sqrt{3}\pi$
	(3)1：3	$\frac{160}{3}\sqrt{3}\pi$	$\frac{200}{3}\sqrt{3}\pi$	$\frac{280}{3}\sqrt{3}\pi$
	(4)1：4	$50\sqrt{3}\pi$	$\frac{190}{3}\sqrt{3}\pi$	$90\sqrt{3}\pi$
	(5)1：5	$48\pi\sqrt{3}$	$\frac{176}{3}\sqrt{3}\pi$	$88\sqrt{3}\pi$
	(6)1：6	$\frac{140}{3}\sqrt{3}\pi$	$\frac{250}{9}\sqrt{3}\pi$	$\frac{260}{3}\sqrt{3}\pi$
四	(1)1：1	$105\sqrt{2}\pi$	$120\sqrt{2}\pi$	$150\sqrt{2}\pi$
	(2)1：2	$75\sqrt{2}\pi$	$90\sqrt{2}\pi$	$120\sqrt{2}\pi$
	(3)1：3	$65\sqrt{2}\pi$	$80\sqrt{2}\pi$	$110\sqrt{2}\pi$
	(4)1：4	$60\sqrt{2}\pi$	$75\sqrt{2}\pi$	$105\sqrt{2}\pi$
	(5)1：5	$57\sqrt{2}\pi$	$72\sqrt{2}\pi$	$102\sqrt{2}\pi$
	(6)1：6	$55\sqrt{2}\pi$	$70\sqrt{2}\pi$	$100\sqrt{2}\pi$
六	(1)1：1	180π	200π	240π
	(2)1：2	120π	140π	180π
	(3)1：3	100π	120π	160π
	(4)1：4	90π	110π	150π
	(5)1：5	84π	104π	144π
	(6)1：6	80π	100π	140π

二、(令大正 k 邊形之邊長=60)面積之表格

小＼大		三	四	六
小正 n 邊形	與大正 k 邊形之**邊長**比			
三	(1)1：1	$2400\pi+900\sqrt{3}$	$2800\pi+1200\sqrt{3}$	$3600\pi+1800\sqrt{3}$
	(2)1：2	$900\pi+450\sqrt{3}$	$1100\pi+600\sqrt{3}$	$1500\pi+900\sqrt{3}$
	(3)1：3	$\frac{1600}{3}\pi+300\sqrt{3}$	$\frac{2000}{3}\pi+400\sqrt{3}$	$\frac{2800}{3}\pi+600\sqrt{3}$
	(4)1：4	$375\pi+225\sqrt{3}$	$475\pi+300\sqrt{3}$	$675\pi+450\sqrt{3}$
	(5)1：5	$288\pi+180\sqrt{3}$	$352\pi+240\sqrt{3}$	$528\pi+360\sqrt{3}$
	(6)1：6	$\frac{700}{3}\pi+150\sqrt{3}$	$\frac{2500}{9}\pi+200\sqrt{3}$	$\frac{1300}{3}\pi+300\sqrt{3}$
四	(1)1：1	$3150\pi+2700$	$3600\pi+3600$	$4500\pi+5400$
	(2)1：2	$1125\pi+1350$	$1350\pi+1800$	$1800\pi+2700$
	(3)1：3	$650\pi+900$	$800\pi+1200$	$1100\pi+2700$
	(4)1：4	$450\pi+675$	$562.5\pi+900$	$787.5\pi+1350$
	(5)1：5	$342\pi+450$	$432\pi+720$	$612\pi+1350$
	(6)1：6	$275\pi+450$	$350\pi+600$	$500\pi+900$
六	(1)1：1	$5400\pi+2700\sqrt{3}$	$6000\pi+3600\sqrt{3}$	$7200\pi+5400\sqrt{3}$
	(2)1：2	$1800\pi+1350\sqrt{3}$	$2100\pi+1800\sqrt{3}$	$2700\pi+2700\sqrt{3}$
	(3)1：3	$1000\pi+900\sqrt{3}$	$1200\pi+1200\sqrt{3}$	$1600\pi+1800\sqrt{3}$
	(4)1：4	$675\pi+675\sqrt{3}$	$825\pi+900\sqrt{3}$	$1125\pi+1350\sqrt{3}$
	(5)1：5	$504\pi+270\sqrt{3}$	$624\pi+720\sqrt{3}$	$864\pi+1080\sqrt{3}$
	(6)1：6	$400\pi+450\sqrt{3}$	$500\pi+600\sqrt{3}$	$700\pi+900\sqrt{3}$

三、(令小正 k 邊形與大正 n 邊形之邊長比為 r：2r、2r：3r、3r：4r)大正 n 邊形重心之滾動弧長之表格

小正 k 邊形	與大正 n 邊形之邊長比	大正三角形	大正四邊形	大正六邊形	環繞圈數 x
k=3	1：2	$\frac{10\sqrt{3}\pi}{3}r$	$\frac{17}{9}\sqrt{3}\pi r$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi r$	2
	2：3	$\frac{2\left(3\sqrt{3}+2\right)}{3}\pi r$	$\left(\frac{22}{3}\sqrt{3}+4\right)\pi r$	$\frac{4+10\sqrt{3}}{3}\pi r$	1
	3：4	$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(36+4\sqrt{7}\right)\pi r$	$\frac{11+\sqrt{7}}{3}\sqrt{3}\pi r$	$(\frac{2\sqrt{21}}{3}+10\sqrt{3})\pi r$	4
k=4	1：2	$\frac{(7\sqrt{2}+4)\pi}{2}r$	$\left(2\sqrt{2}+1\right)\pi r$	$(1+\frac{5\sqrt{2}}{2})\pi r$	1
	2：3	$\frac{\sqrt{2}(15+4\sqrt{5})}{6}\pi r$	$\left(9\sqrt{2}+2\sqrt{10}\right)\pi r$	$(4\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{10}}{3})\pi r$	3
	3：4	$\left(4+4\sqrt{5}+13\sqrt{2}\right)\pi r$	$\left(4\sqrt{2}+\sqrt{5}+1\right)\pi r$	$(2\sqrt{5}+2+11\sqrt{2})\pi r$	1
k=6	1：2	$2\left(3+\sqrt{3}\right)\pi r$	$\left(\frac{10}{3}+\sqrt{3}\right)\pi r$	$(\sqrt{3}+4)\pi r$	1
	2：3	$4\left(\frac{3+\sqrt{7}}{3}\right)\pi r$	$\left(14+4\sqrt{7}\right)\pi r$	$(\frac{4\sqrt{7}}{3}+6)\pi r$	1
	3：4	$4\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}+5\right)\pi r$	$\left(6+\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)\pi r$	$(2\sqrt{13}+16+2\sqrt{3})\pi r$	2

陸、討論

一、發現由以上的實驗方法，我們推論出其通式

(一)、探討一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之弧長

(1)當 k=3

弧長

$$=(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times2\times\pi\times\frac{1}{3}\times(n-1)\times3+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times2\times\pi\times\frac{240}{360}\times3$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\times(n-1)\times r\times\pi+\frac{4}{3}\sqrt{3}\times r\times\pi$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}r\pi(3n+3)$$

(2)當 k=4

弧長

$$=(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times2\times\pi\times\frac{1}{3}\times(n-1)\times4+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2})\times2\times\pi\times\frac{7}{12}\times4$$

$$=\frac{8}{9}\sqrt{3}\times(n-1)\times r\times\pi+\frac{14}{9}\sqrt{3}\times r\times\pi$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}r\pi(4n+3)$$

(3)當 k=6

弧長

$$=(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times2\times\pi\times\frac{1}{3}\times(n-1)\times6+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times2\times\pi\times\frac{180}{360}\times6$$

$$=(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times2\times\pi\times6\times[\frac{1}{3}(n-1)+\frac{180}{360}]$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{3}r\pi(n+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}r\pi(6n+3)$$

發現：由上可推知，當一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)

所滾動軌跡之弧長，其軌跡弧長為 $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi r(kn+3)$

此外，我們也直接以算式證明了這項公式：

$$(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times 2\times\pi\times\frac{1}{3}\times(n-1)\times k+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2})\times 2\times\pi\times\frac{360-30\times 2-(180-\frac{360}{k})}{360}\times k$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}\times(n-1)\times r\times\pi\times k+\frac{2}{3}\sqrt{3}\times r\times\pi\times k\times\frac{\frac{k}{3}+1}{k}=\frac{2}{9}\sqrt{3}r\pi k(n-1+3\times\frac{\frac{k}{3}+1}{k})$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}r\pi(kn-k+k+3)=\frac{2}{9}\sqrt{3}r\pi(kn+3)$$

(二)、探討一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之面積

(1)當 k=3

面積

$$=(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\frac{120}{360}\times(n-1)\times 3\times\pi+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\frac{180}{360}\times\pi\times 3+r\times\frac{\sqrt{3}}{6}r\times\frac{1}{2}\times n\times 3$$

$$=\frac{1}{3}r^2\times\frac{1}{3}\times(n-1)\times 3\times\pi+\frac{1}{3}r^2\times\frac{2}{3}\times 3\times\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\times r^2\times n$$

$$=\frac{1}{3}r^2\pi(n+1)+\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 n$$

$$=\frac{1}{9}r^2\pi(3n+3)+\frac{3}{12}\sqrt{3}r^2 n$$

(2)當 k=4

面積

$$=(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\frac{120}{360}\times(n-1)\times 4\times\pi+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\frac{210}{360}\times\pi\times 4+r\times\frac{\sqrt{3}}{6}r\times\frac{1}{2}\times n\times 4$$

$$=\frac{1}{3}r^2\times\frac{1}{3}\times(n-1)\times 4\times\pi+\frac{1}{3}r^2\times\frac{7}{12}\times 4\times\pi+\frac{\sqrt{3}}{6}\times 2\times r^2\times n$$

$$=\frac{1}{9}r^2\pi(4n+3)+\frac{\sqrt{3}}{3}r^2 n$$

$$=\frac{1}{9}r^2\pi(4n+3)+\frac{4}{12}\sqrt{3}r^2 n$$

(3)當 k=6

面積

$$=(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\frac{120}{360}\times(n-1)\times6\times\pi+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\frac{180}{360}\times\pi\times6+r\times\frac{\sqrt{3}}{6}r\times\frac{1}{2}\times n\times6$$

$$=\frac{6}{9}r^2\times(n-1)\times\pi+\pi r^2+\frac{\sqrt{3}}{2}nr^2$$

$$=\frac{1}{9}r^2\pi(6n+3)+\frac{6}{12}\sqrt{3}r^2n$$

發現：由上可推知，當一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之弧長，其軌跡弧長為$\frac{1}{9}\pi r^2(kn+3)+\frac{k}{12}\sqrt{3}nr^2$

此外，我們也直接以算式證明了這項公式：

$$(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\pi\times\frac{1}{3}\times(n-1)\times k+(r\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2})\times\pi\times\frac{360-30\times2-(180-\frac{360}{k})}{360}\times k$$

$$=\frac{1}{9}\times(n-1)\times r^2\times\pi\times k+\frac{1}{3}\times r^2\times\pi\times k\times\frac{\frac{k}{3}+1}{k}+\frac{\sqrt{3}}{12}nr^2k=\frac{1}{9}\pi r^2k(n-1+3\times\frac{\frac{k}{3}+1}{k})+\frac{\sqrt{3}}{12}nr^2k$$

$$=\frac{1}{9}\pi r^2(kn-k+k+3)+\frac{k}{12}\sqrt{3}nr^2=\frac{1}{9}\pi r^2(kn+3)+\frac{k}{12}\sqrt{3}nr^2$$

(三)、探討一小正四邊形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之弧長與面積：

	弧長	面積
k＝3	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(3n+4)$	$\frac{1}{8}\pi r^2(3n+4)+\frac{3}{4}nr^2$
k＝4	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(4n+4)$	$\frac{1}{8}\pi r^2(4n+4)+\frac{4}{4}nr^2$
k＝6	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(6n+4)$	$\frac{1}{8}\pi r^2(6n+4)+\frac{6}{4}nr^2$
推測	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(kn+4)$	$\frac{1}{8}\pi r^2(kn+4)+\frac{k}{4}nr^2$

$\boxed{\text{弧長}}$：

發現：由上可推知，當一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之弧長，其軌跡弧長為 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(kn+4)$

此外，我們也直接以算式證明了這項公式：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\times r\times 2\times\pi\times\frac{1}{4}\times(n-1)\times k+\frac{\sqrt{2}}{2}\times r\times 2\times\pi\times\frac{360-45\times 2-(180-\frac{360}{k})}{360}\times k$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2}\times(n-1)\times r\times\pi\times k+\sqrt{2}\times r\times\pi\times k\times\frac{\frac{k}{4}+1}{k}=\frac{1}{4}\sqrt{2}r\pi k(n-1+\frac{k+4}{k})$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2}r\pi(kn-k+k+4)=\frac{1}{4}\sqrt{2}r\pi(kn+4)$$

$\boxed{\text{面積}}$：

發現：由上可推知，當一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之弧長，其軌跡弧長為 $\frac{1}{8}\pi r^2(kn+4)+\frac{k}{4}nr^2$

此外，我們也直接以算式證明了這項公式：

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}r)^2\times\pi\times\frac{1}{4}\times(n-1)\times k+(\frac{\sqrt{2}}{2}r)^2\times\pi\times\frac{360-45\times 2-(180-\frac{360}{k})}{360}\times k+r\times\frac{r}{2}\times\frac{1}{2}\times n\times k$$

$$=\frac{1}{8}\times(n-1)\times r^2\times\pi\times k+\frac{1}{2}\times r^2\times\pi\times k\times\frac{\frac{k}{4}+1}{k}+\frac{1}{4}nr^2k=\frac{1}{8}\pi r^2k(n-1+\frac{k+4}{k})+\frac{1}{4}nr^2k$$

$$=\frac{1}{8}\pi r^2(kn-k+k+4)+\frac{k}{4}nr^2=\frac{1}{8}\pi r^2(kn+4)+\frac{k}{4}nr^2$$

(四)、探討一小正六邊形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之面 積與周長

	弧長	面積
k＝3	$\frac{1}{3}\pi r(3n+6)$	$\frac{1}{6}\pi r^2(3n+6)+\frac{3}{4}\sqrt{3}\pi r^2$
k＝4	$\frac{1}{3}\pi r(4n+6)$	$\frac{1}{6}\pi r^2(4n+6)+\frac{4}{4}\sqrt{3}\pi r^2$
k＝6	$\frac{1}{3}\pi r(6n+6)$	$\frac{1}{6}\pi r^2(6n+6)+\frac{6}{4}\sqrt{3}\pi r^2$
推測	$\frac{1}{3}\pi r(kn+6)$	$\frac{1}{6}\pi r^2(kn+6)+\frac{k}{4}\sqrt{3}\pi r^2$

$\boxed{\text{周長}}$：

發現：由上可推知，當一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之弧長，其軌跡弧長為$\frac{1}{3}\pi r(kn+6)$

此外，我們也直接以算式證明了這項公式：

$$r\times 2\times\pi\times\frac{1}{6}\times(n-1)\times k+r\times 2\times\pi\times\frac{360-60\times 2-(180-\frac{360}{k})}{360}\times k$$

$$=\frac{1}{3}\pi r(kn-k+k+6)=\frac{1}{3}\pi r(kn+6)$$

$$=\frac{1}{3}\times(n-1)\times r\times\pi\times k+2\times r\times\pi\times k\times\frac{\frac{k}{6}+1}{k}=\frac{1}{3}\pi rk(n-1+\frac{k+6}{k})$$

$\boxed{\text{面積}}$：

發現：由上可推知，當一小正三角形(邊長 r)重心點繞大正 k 邊形(邊長 nr)(n 為正整數)所滾動軌跡之弧長，其軌跡弧長為$\frac{1}{6}\pi r^2(kn+6)+\frac{k}{4}\sqrt{3}nr^2$

此外，我們也直接以算式證明了這項公式：

$$r^2\times\pi\times\frac{1}{6}\times(n-1)\times k+r^2\times\pi\times\frac{360-45\times 2-(180-\frac{360}{k})}{360}\times k+\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\times n\times k$$

$$=\frac{1}{6}\times(n-1)\times r^2\times\pi\times k+r^2\times\pi\times k\times\frac{\frac{k}{6}+1}{k}+\frac{\sqrt{3}}{4}nr^2k=\frac{1}{6}\pi r^2k(n-1+\frac{k+6}{k})+\frac{\sqrt{3}}{4}nr^2k$$

$$=\frac{1}{6}\pi r^2(kn-k+k+6)+\frac{k}{4}\sqrt{3}nr^2=\frac{1}{6}\pi r^2(kn+6)+\frac{k}{4}\sqrt{3}nr^2$$

(四)、探討小正三邊形、正四邊形(邊長為 r)及圓形(半徑為 $\frac{1}{2}$r)之重心點翻轉爬 90°階梯時的軌跡弧長及面積(邊長與階梯高之比=1：n，樓梯共 k 階)

(1)正三邊形：

$$\text{軌跡弧長}=2\times(\frac{\sqrt{3}}{3}r\pi)\times(\frac{30+2(n-1)\times120+210}{360})\times k=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}nkr$$

$$\text{面積}=(\frac{\sqrt{3}}{3}r)^2\pi\times(\frac{30+2(n-1)\times120+210}{360})\times k+\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\times\frac{1}{3}\times(2nk-1)$$

$$=\frac{2\pi}{9}nkr^2+\frac{\sqrt{3}}{12}r^2(2nk-1)$$

(2)正四邊形：

$$\text{軌跡弧長}=2\times(\frac{\sqrt{2}}{2}r\pi)\times(\frac{2(n-1)\times90+180}{360})\times k=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}nkr$$

$$\text{面積}=(\frac{\sqrt{2}}{2}r)^2\pi\times(\frac{2(n-1)\times90+180}{360})\times k+\frac{1}{4}r^2(2nk-2)=\frac{\pi}{4}nkr^2+\frac{1}{4}r^2(2nk-2)$$

(3)圓形：

$$\text{軌跡弧長}=[2(n-\frac{1}{2})r+\pi r\times\frac{1}{4}]\times k=(2n-1)kr+\frac{\pi}{4}kr$$

$$\text{面積}=2\times(n-\frac{1}{2})r\times\frac{1}{2}r\times k+(k-1)\times\frac{1}{4}r^2+k\times\frac{\pi}{16}r^2=(nk-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4})r^2+\frac{\pi}{16}kr^2$$

(五)、探討小正三邊形、正四邊形(邊長為 1)及圓形(半徑為 $\frac{1}{2}$)之重心點翻轉爬 θ°（90≤θ≤180）階梯時的軌跡弧長及面積(邊長與階梯高之比=1：n，樓梯共 k 階)

(1)正三角形：

$$\text{軌跡弧長}=2\times(\frac{\sqrt{3}}{3}r\pi)\times(\frac{(\theta-60)+2(n-1)\times120+(300-\theta)}{360})\times k=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}nkr$$

$$\text{面積}=(\frac{\sqrt{3}}{3}r)^2\pi\times(\frac{(\theta-60)+2(n-1)\times120+(300-\theta)}{360})\times k+\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\times\frac{1}{3}\times(2nk-1)$$

$$=\frac{2\pi}{9}nkr^2+\frac{\sqrt{3}}{12}r^2(2nk-1)$$

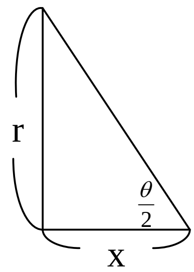
(2)正四邊形：

$$\text{軌跡弧長}=2\times(\frac{\sqrt{2}}{2}r\pi)\times(\frac{2(n-1)\times 90+(\theta-90)+(270-\theta)}{360})\times k=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}nkr$$

$$\text{面積}=(\frac{\sqrt{2}}{2}r)^2\pi\times(\frac{2(n-1)\times 90+(\theta-90)+(270-\theta)}{360})\times k+\frac{1}{4}r^2(2nk-1)$$

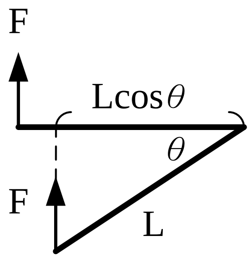
$$=\frac{\pi}{4}nkr^2+\frac{1}{4}r^2(2nk-1)$$

(3)圓形：目前只解決 120°之階梯問題，其他角度之計算一直困擾我們很久，若階梯夾角為θ，依切線性質可得知需計算一銳角為 $\frac{\theta}{2}$ 之直角三角形(如右圖)，x 之值以目前我們所學無法表示，老師也訴我們未來可以用三角函數表示之，因此，這個問題等以後再行突破。



(六)、探討小正 m 邊形(m=3、4)及圓形之重心點翻轉爬階梯時的費力大小關係(以階梯一階為 1 計算，而小正多邊形的重量皆一樣)

在任何地方，力矩皆為 F(施力)×Lcosθ，我們假設掃地機為質量均勻的物體，則其重量可視為集中於物體的重心，則物體瞬時翻轉所需之力矩為抵抗物體重力之 F 與 Lcosθ 之乘積(L 為重心到旋轉中心之距離)，但是若要真的計算整個翻轉過程之總力矩，可能會需要用到積分的部分，對於國一學生來說無法理解；因此我們想到，可以使用**估算**的方式，計算在整個翻轉中最大的 F×Lcosθ 的值，如果所需最大力矩的部分翻得過去，而其它的部分也一定能翻得過去，而且若全成的翻轉動作皆保持同樣的力矩，機器人也才不用每翻轉一次就去換一次的力矩，可達到省電的效果。



計算 F×Lcosθ 的值時，因 F 值固定，故當 θ=0 度時，此時 cosθ 的最大值=1，所以得知，N 邊形或圓形在翻轉階梯，最費力的部分就在其其中一邊與地面平行的時候。

因此，最後剩下要 L 的大小，也就是正 N 邊形中心到頂點之距離或圓形的半徑的長度大小關係，舉例若小三角形、小正四邊形的邊長為 1、圓形的半徑為 $\frac{1}{2}$，及 L 的大小依序為：$\frac{\sqrt{3}}{3}$、$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{1}{2}$，故 L 的大小關係為 $\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}$，因此，費力程度的大小關係=力矩的大小關係=L 的大小關係為小正四邊形＞小三角形＞圓形。

柒、結論

一、設小正 m 邊形邊長為 r，大正 k 邊形邊長為 nr，小正 m 邊形沿著大正 k 邊形翻轉一圈，我們得到以下結果：

面積通式	弧長通式	m	k
$\frac{1}{9}\pi r^2(3n+3)+\frac{3}{12}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi r(3n+3)$	三	三
$\frac{1}{9}\pi r^2(4n+3)+\frac{4}{12}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi r(4n+3)$	三	四
$\frac{1}{9}\pi r^2(6n+3)+\frac{6}{12}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi r(6n+3)$	三	六
$\frac{1}{8}\pi r^2(3n+4)+\frac{3}{4}nr^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(3n+4)$	四	三
$\frac{1}{8}\pi r^2(4n+4)+\frac{4}{4}nr^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(4n+4)$	四	四
$\frac{1}{8}\pi r^2(6n+4)+\frac{6}{4}nr^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(6n+4)$	四	六
$\frac{1}{6}\pi r^2(3n+6)+\frac{3}{4}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{1}{3}\pi r(3n+6)$	六	三
$\frac{1}{6}\pi r^2(4n+6)+\frac{4}{4}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{1}{3}\pi r(4n+6)$	六	四
$\frac{1}{6}\pi r^2(6n+6)+\frac{6}{4}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{1}{3}\pi r(6n+6)$	六	六

二、設大正多邊形邊數為 k、邊長為 nr（n 為正整數），小正多邊形為 r，即邊長比為 1:n。

面積通式	弧長通式	小
$\frac{1}{9}\pi r^2(kn+3)+\frac{k}{12}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi r(kn+3)$	三
$\frac{1}{8}\pi r^2(kn+4)+\frac{k}{4}nr^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi r(kn+4)$	四
$\frac{1}{6}\pi r^2(kn+6)+\frac{k}{4}\sqrt{3}nr^2$	$\frac{1}{3}\pi r(kn+6)$	六

三、大正 n 邊形翻轉小正 k 邊形之重心軌跡尚未找到通式，但我們發現，若小正 k 邊形邊長比大正 n 邊形邊長為 a：b，最少翻轉圈數為 x，則 **b 為 kax 之因數**，即可推算出翻轉回原出發點之最少圈數。

四、由上可知，小正 M 邊形(M=3、4)(邊長為 r)及圓形(半徑為 $\frac{1}{2}r$)之重心點翻轉爬階梯時的軌跡弧長及面積如下**(以階梯一階為 1 計算)**：

(1)邊長與階梯高之比=1：n(小正 M 邊形邊長、圓形直徑為 r，90°樓梯共 k 階)

M	弧長	面積
三	$\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}nkr$	$\frac{2\pi}{9}nkr^2+\frac{\sqrt{3}}{12}r^2(2nk-1)$
四	$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}nkr$	$\frac{\pi}{4}nkr^2+\frac{1}{4}r^2(2nk-2)$
圓形	$(2n-1)kr+\frac{\pi}{4}kr$	$(nk-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4})r^2+\frac{\pi}{16}kr^2$

(2)當階梯角度 θ 改變（90°≤θ≤180°）之結論則如同討論所示

五、應用：

市面上的機器人掃地機只能掃平面，不能掃樓梯。我們的正多邊形及圓形在階梯上的翻轉，可以提供機器人掃地機改良運作的方向。若機器人掃地機以正三角形、正四邊形或圓盤方式翻滾，到下一個階梯再來掃，如此連樓梯都能掃，功能更加擴大。

因為我們在理化所學知識有限，只能描述其軌跡弧長及面積的比大小，假以時日，再繼續研究力矩、功和順向速度的比大小，可提供機器人掃樓梯一個更佳的方向。

捌、參考資料及其他

一、國中數學課本第四冊第四章。南一出版社。

二、高中數學課本第三冊第一章。南一出版社。

三、TRML2002 屆試題

http://sites.chhs.hcc.edu.tw/shu-xue-tian-de/li-jie-shi-ti-zhuan-qu/tai-wan-qu-gao-zhong-shu-xue-jing-sai-trml-li-jie-shi-ti-1999-2007

四、2007 加拿大科學展覽“圖形版”的圖形軌跡之探討及延伸。

【評語】030414

本作品討論特定多邊形繞另一多邊形所成面積與弧長，為傳統科展題目。

由一個實際的問題出發，給出一個模型，並針對幾種特殊的圖像（三角形、四邊形、六邊形和圓形）給出計算的結果，想法很可愛，值得嘉許。對於一般正多邊形，滿足邊長成倍數關係應該也可以給出通式。如果能給出最一般化的結果會更好。（四十六屆全國中小學科展國中組有一件類似作品『滾滾紅成』，可以參考。）