中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030413

從平分問題到動態穩定

學校名稱：苗栗縣立興華高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 陳奕均	蘇柏奇 游淑媛

關鍵詞：二進位、輾轉相除法、動態穩定

摘要

本文探究由一人獨自進行的遊戲，探討最後是否能將兩堆石頭移動形成數量相等的狀態，稱之為「穩定狀態」。探索過程中，我們利用數對(x, y)來表示兩堆石頭分別有x, y顆的情況，利用輾轉相除法的形式來記錄移動過程，而因為遊戲進行中，兩堆石頭的總數不變，因而以此總數進行分類觀察，我們發現並非任意數對(x, y)皆能形成穩定狀態。

藉由列表觀察後，我們猜測當$x+y=2^k$時，任意數對(x, y)皆能形成穩定狀態，我們用二進位制驗證，並進一步得到定理 1：

定理 1：數對$(2^k-p\times 2^m, p\times 2^m)$形成穩定狀態所需的次數為$k-1-m$次。

另外，因為數對(qa, qb)和(a, b)的移動方式類似，得知定理 3 及 4 如下：

定理 3：數對$(q2^k-pq\times 2^m, pq\times 2^m)$形成穩定狀態所需的次數為$k-1-m$次。

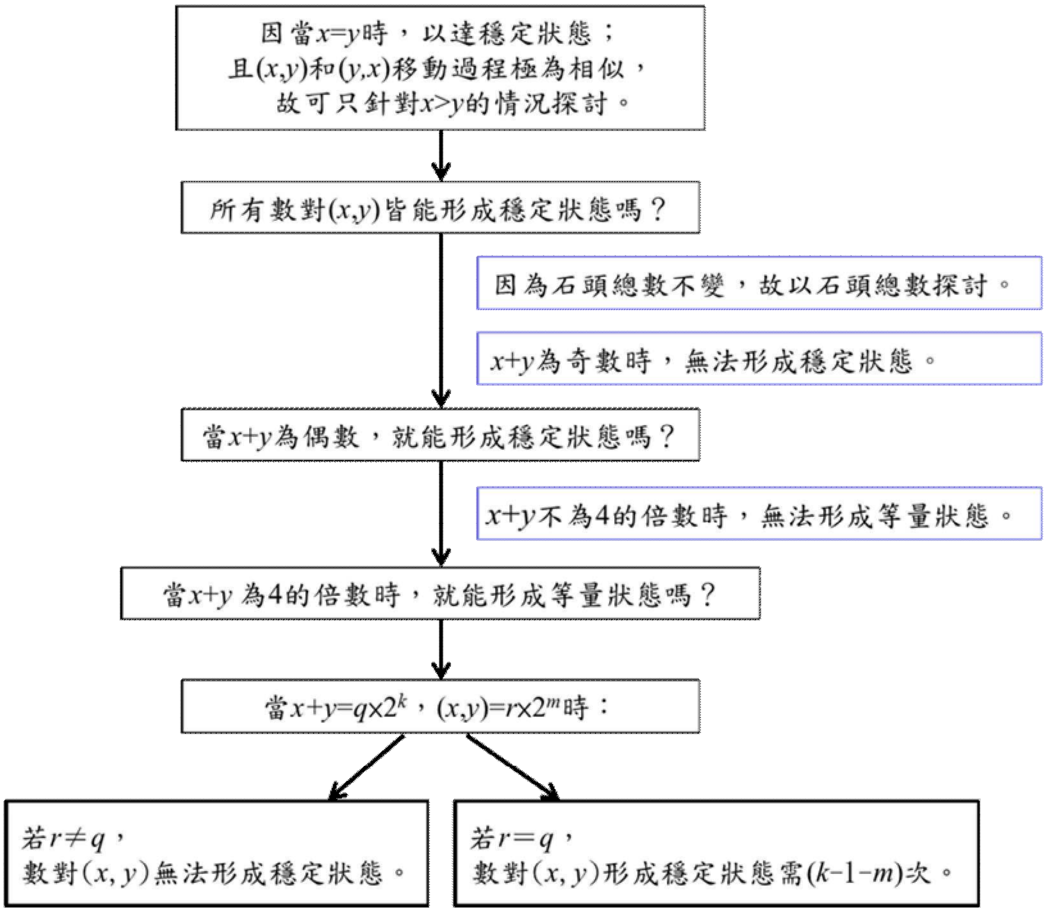
定理 4：若$x+y=q\times 2^k$, $q\neq 1$, 且x, y的最大公因數為$r\times 2^m$，$q\neq r$時(x,y)無法形成穩定狀態。

由以上定理 1、3、4，可歸納為定理 5 如下：

定理 5：若$x+y=q\times 2^k$(q為奇數), 且x, y的最大公因數為$r\times 2^m$，則

1.$q=r$時，數對(x, y)形成穩定狀態的次數為$k-1-m$次。

2.$q\neq r$時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。



壹、研究動機：

在某天下課時，老師和我們分享了一個數學問題：現在有兩堆小石子，一堆 21 個，另一堆 11 個，讓它們進行移動。每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，需要移動幾次，才能讓兩堆小石子數目相等？我們對它們之中的規則產生了好奇，於是我們把它延深，探討它們之中的規律。

貳、研究目的：

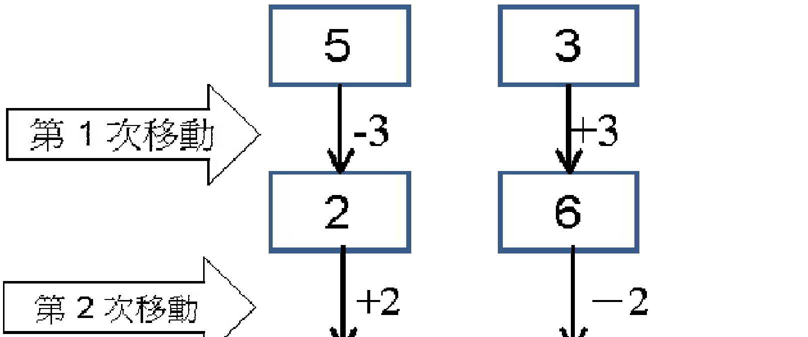
1. 探索可形成穩定狀態的條件。
2. 求數對(x, y)形成穩定狀態所需移動的次數。

叁、研究設備及器材：紙、筆、*Word*。

肆、研究過程或方法結果：

第一部分：定義符號

兩堆數量不同的石頭進行移動。每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，直到兩堆個數相等。例如現有兩堆石頭，分別有 5 顆、3 顆，其移動過程如下：



第 1 次移動時，右堆較少，從左堆移動 3 顆至右堆，移動後變成兩堆分別有 2 顆、6 顆。
第 2 次移動時，左堆較少，從右堆移動 2 顆至左堆，移動後變成兩堆分別有 4 顆、4 顆。
此時，兩堆的數量相同，即完成此局。

為方便討論，我們定義如下：

定義：
1. 左堆石頭有 x 個，右堆石頭有 y 個，以數對(x, y)表示。
2. 若兩堆石頭的個數相等，即 $x = y$，則數對(x, y) 稱為「穩定狀態」。

上述的(3,5)移動過程，記為：$(3,5) \rightarrow (6,2) \rightarrow (4,4)$ 。

在移動的過程中，我們發現其模式和輾轉相除法類似，因此，我們也可記錄如下：

	3	5	1
	+3	－3	
1	6	2	
	－2	+2	
	4	4	

兩堆石頭的數量關係有三種：$x>y$，$x=y$，$x<y$。其中，若 $x=y$，則表示已經形成兩堆數量相等的狀態；不難得知，$x>y$ 及 $x<y$ 兩種情形之間具有對稱的關係，例如：(3,5)和(5,3)的移動過程極為相似，如下：

	3	5	1
	+3	－3	
1	6	2	
	－2	+2	
	4	4	

(3,5) →(6,2) →(4,4)

1	5	3	
	－3	+3	
	2	6	1
	+2	－2	
	4	4	

(5,3) →(2,6) →(4,4)

因此，以下我們不妨只討論 $x>y$ 時的移動情形。

第二部分：初步探討

我們依序探討幾個基本問題，首先，我們將檢驗是否所有數對皆能形成穩定狀態。

問題 1：所有數對皆能形成「穩定狀態」嗎？

我們列出幾個數對的移動狀況如下：

$x+y=3$

1	2	1	
	－1	+1	
	1	2	1
	+1	－1	
	2	1	

(2,1) →(1,2) →(2,1) →...

形成循環！

$x+y=4$

1	3	1
	－1	+1
	2	2

(3,1) →(2,2)

形成穩定狀態！

$x+y=5$

1	3	2	
	－2	+2	
	1	4	1
	+1	－1	
	2	3	1
	+2	－2	
1	4	1	
	－1	+1	
	3	2	

(3,2) →(1,4) →(2,3) →(4,1) →(3,2)...形成循環！

$x+y=5$

1	4	1	
	−1	+1	
1	3	2	
	−2	+2	
	1	4	1
	+1	−1	
	2	3	1
	+2	−2	
	4	1	

(4,1) →(3,2) →(1,4) →(2,3) →(4,1) →...形成循環！

$x+y=6$

1	4	2	
	−2	+2	
	2	4	1
	+2	−2	
	4	2	

(4,2) →(2,4) →(4,2)→...
形成循環！

$x+y=6$

1	5	1	
	−1	+1	
1	4	2	
	−2	+2	
	2	4	1
	+2	−2	
	4	2	

(5,1)→(4,2)→(2,4)→(4,2)→...
形成循環！

$x+y=7$

1	4	3	
	−3	+3	
	1	6	1
	+1	−1	
	2	5	1
	+2	−2	
	4	3	

(4,3)→(1,6)→(2,5)→(4,3)
→...
形成循環！

$x+y=7$

1	5	2	
	−2	+2	
	3	4	1
	+3	−3	
1	6	1	
	−1	+1	
	5	2	

(5,2) →(3,4) →(6,1)→(5,2)...
形成循環！

$x+y=7$

1	6	1	
	−1	+1	
1	5	2	
	−2	+2	
	3	4	1
	+3	−3	
	6	1	

(6,1)→(5,2)→(3,4)→(6,1)→...
形成循環！

根據上述實驗，我們發現：

若(x, y)可成為穩定狀態，不妨設為(k, k), 因移動過程中，兩堆石頭的總量不變，故得：

$$x + y=2k,$$

得 $x + y$ 為奇數時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。由此可說明上述數對(2,1)、(3,2)、(4,1)、(4,3)無法形成穩定狀態。歸納如下。

結論 1：
當 $x + y$ 為奇數時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。

進一步觀察(3,1)、(4,2)兩數對，其石頭總量皆為偶數，但(3,1)可形成穩定狀態，而(4,2)卻形成循環。由此可見，並非所有兩堆石頭總量和皆為偶數時，就能形成穩定狀態。

我們接著探討，當兩堆石頭總量為偶數時，何時無法形成穩定狀態。

問題 2：當兩堆石頭總量為偶數時，何時無法形成穩定狀態？

經過第 1 次移動後，兩堆石頭的個數都為偶數，因此若(x, y)能形成穩定狀態(k, k)時，則 $k=\dfrac{x+y}{2}$ 為偶數，即得 $x+y$ 為 4 的倍數。歸納如下：

結論 2：
當 $x\neq y$ 時，若 $x+y$ 不為 4 的倍數，則數對(x,y)無法形成穩定狀態。

由上述歸納，我們可以初步判斷某些狀態必定無法形成穩定狀態。

例如：$(x,y)=(8,3)$時，因 $x+y=11$ 不為 4 的倍數，必不會形成穩定狀態。

再如：$(x,y)=(7,3)$時，也因為 $x+y=10$ 不為 4 的倍數，必不會形成穩定狀態。

因此，接下來的探討將排除已知無法形成穩定狀態。進一步思考，若 $x+y$ 為 4 的倍數，則數對(x, y)是否必能形成穩定狀態。

問題 3：若 $x+y$ 為 4 的倍數，則數對(x, y)一定能形成穩定狀態嗎？

以下針對 $x+y$＝8,12,16,20,24,32 進行探討：

1：$x+y$＝8

當 $x+y$＝8 且 $x>y$ 時，(x,y)可能的情況有：(7,1), (6,2),(5,3)，其移動的過程簡記如下：

初始狀態	(7,1)	(6,2)	(5,3)
第一次移動	(6,2)	(4,4)	(2,6)
第二次移動	(4,4)		(4,4)
形成穩定狀態次數	2	1	2

2：$x+y$＝12

當 $x+y$＝12 且 $x>y$ 時，(x,y)可能的情況有 5 種，其移動的過程簡記如下：

初始狀態	(11,1)	(10,2)	(9,3)	(8,4)	(7,5)
第 1 次移動	(10,2)	(8,4)	(6,6)	(4,8)	(2,10)
第 2 次移動	(8,4)	(4,8)		(8,4)	(4,8)
第 3 次移動	(4,8)				(8,4)
形成穩定狀態次數	---	---	1	---	---
備註	循環	循環		循環	循環

3：$x+y=16$

當 $x+y=16$ 且 $x>y$ 時，(x,y)可能的情況有 7 種，其移動的過程簡記如下：

初始狀態	(15,1)	(14,2)	(13,3)	(12,4)	(11,5)	(10,6)	(9,7)
第 1 次移動	(14,2)	(12,4)	(10,6)	(8,8)	(6,10)	(4,12)	(2,14)
第 2 次移動	(12,4)	(8,8)	(4,12)		(12,4)	(8,8)	(4,12)
第 3 次移動	(8,8)		(8,8)		(8,8)		(8,8)
形成穩定狀態次數	3	2	3	1	3	2	3

4：$x+y=20$

當 $x+y=20$ 且 $x>y$ 時，(x,y)可能的情況有 9 種，其移動的過程簡記如下：

初始狀態	(19,1)	(18,2)	(17,3)	(16,4)	(15,5)	(14,6)	(13,7)	(12,8)	(11,9)
第 1 次移動	(18,2)	(16,4)	(14,6)	(12,8)	(10,10)	(8,12)	(6,14)	(4,16)	(2,18)
第 2 次移動	(16,4)	(12,8)	(8,12)	(4,16)		(16,4)	(12,8)	(8,12)	(4,16)
第 3 次移動	(12,8)	(4,16)	(16,4)			(12,8)	(4,16)		(8,12)
第 4 次移動	(4,16)		(12,8)				(8,12)		(16,4)
形成穩定狀態次數	---	---	---	---	1	---	---	---	---
備註	循環	循環	循環	循環		循環	循環	循環	

5：$x+y=24$

當 $x+y=24$ 且 $x>y$ 時，(x,y)可能的情況有 11 種，其移動的過程簡記如下：

初始狀態	(23,1)	(22,2)	(21,3)	(20,4)	(19,5)	(18,6)
第 1 次移動	(22,2)	(20,4)	(18,6)	(16,8)	(14,10)	(12,12)
第 2 次移動	(20,4)	(16,8)	(12,12)	(8,16)	(4,20)	
第 3 次移動	(16,8)	(8,16)	-	(16,8)	(8,16)	
第 4 次移動	(8,16)		-		(16,8)	
形成穩定狀態次數	---	---	2	---	---	1
備註	循環	循環	-	循環	循環	-

初始狀態	(17,7)	(16,8)	(15,9)	(14,10)	(13,11)	
第 1 次移動	(10,14)	(8,16)	(6,18)	(4,20)	(2,22)	
第 2 次移動	(20,4)	(16,8)	(12,12)	(8,16)	(4,20)	
第 3 次移動	(16,8)		-	(16,8)	(8,16)	
第 4 次移動	(8,16)		-		(16,8)	
形成穩定狀態次數	---	---	2	---	---	
備註	循環	循環	-	循環	循環	

6：$x+y=32$

當 $x+y=32$ 且 $x>y$ 時，(x,y)可能的情況有 15 種，其移動的過程簡記如下：

初始狀態	(31,1)	(30,2)	(29,3)	(28,4)	(27,5)	(26,6)	(25,7)	(24,8)
第 1 次移動	(30,2)	(28,4)	(26,6)	(24,8)	(22,10)	(20,12)	(18,14)	(16,16)
第 2 次移動	(28,4)	(24,8)	(20,12)	(16,16)	(12,20)	(8,24)	(4,28)	
第 3 次移動	(24,8)	(16,16)	(8,24)		(24,8)	(16,16)	(8,24)	
第 4 次移動	(16,16)		(16,16)		(16,16)		(16,16)	
形成穩定狀態次數	4	3	4	2	4	3	4	1

初始狀態	(23,9)	(22,10)	(21,11)	(20,12)	(19,13)	(18,14)	(17,15)	
第 1 次移動	(14,18)	(12,20)	(10,22)	(8,24)	(6,26)	(4,28)	(2,30)	
第 2 次移動	(28,4)	(24,8)	(20,12)	(16,16)	(12,20)	(8,24)	(4,28)	
第 3 次移動	(24,8)	(16,16)	(8,24)		(24,8)	(16,16)	(8,24)	
第 4 次移動	(16,16)		(16,16)		(16,16)		(16,16)	
形成穩定狀態次數	4	3	4	2	4	3	4	

我們發現，當 $x+y=4,8,16,32$ 時，不論 x, y 為何，任意數對(x, y)，皆可形成穩定狀態，據此，我們猜測：當 x, y 滿足 $x+y=2^k$ 時，任意數對(x, y)皆可形成穩定狀態。我們將在第三部分探討並驗證。

猜測 1：

$x+y=2^k$ 時，任意數對(x, y)皆可形成穩定狀態。

我們也發現，當 $x+y\neq 2^k$ 時，部分數對(x, y)可形成穩定狀態，將其列表如下。從表中，我們發現若將 $x+y$ 表為 $q\times 2^k$，則 q 為可形成穩定狀態之 x、y 的公因數。

$q\times 2^k$	$x+y$	可形成等量狀態的數對(x, y)
3×2^2	12	(9,3) =3×(3,1)
5×2^2	20	(15,5) =5×(3,1)
3×2^3	24	(21,3) =3×(7,1) (18,6) =3×(6,2) (15,9)= 3×(5,3)

針對上表所呈現的規律，我們猜測：若 $x+y=q\times2^k$，則數對$(q\times2^k-qa, qa)$可形成穩定狀態。我們將在第四部分探討並驗證。

猜測 2：
當 $x+y= q\times2^k$ 時，數對$(q\times2^k-qa, qa)$可形成穩定狀態。

除了上述兩個猜測外，我們尚有一些發現，說明如下：

1. 若(x,y)移動後形成穩定狀態，則其移動過程中所形成的每個數對也會形成穩定狀態。

   例如：當 $x+y=8$ 時，(1,7)➔ (2,6)➔ (4,4)，則過程中的(2,6)和(4,4)也必定能形成穩定狀態。

   並且，當(1,7)需移動 2 次形成穩定狀態時，

   其第 1 次移動所成的(2,6)需移動 2-1 次形成穩定狀態；

   而(1,7) 第 2 次移動所成的(4,4)需移動 2-2 次形成穩定狀態。

   所以，可知道，若(x,y)移動 n 次後形成穩定狀態，則移動 r 次後（$0\leqq r\leqq n$），此數對也會形成穩定狀態，並且其完成穩定狀態的次數為 $n-r$ 次。

2. 若$(x,y)=(2m,m)$，因為$(2m,m)$及$(m,2m)$會無限循環，故無法達成穩定狀態。

   例如：當 $x+y=12$ 時，(8,4)➔ (4,8)➔ (8,4)➔ (4,8)➔ …..。

3. 完成穩定狀態的前一次(x,y)必為$(3m,m)$。

   因為$(3m,m)$下一步就為變成$(2m,2m)$，所以得之達成穩定狀態的前一數對必為$(3m,m)$。

我們得到以下結論：

結論 3：
1. 若(x,y)移動 n 次後形成穩定狀態，則移動 r 次後（$0\leqq r\leqq n$），此數對也會形成穩定狀態，並且其完成穩定狀態的次數為 $n-r$ 次。 2. 若$(x,y)=(2m,m)$，因為$(2m,m)$及$(m,2m)$會循環，故無法達成穩定狀態。 3. 形成穩定狀態的前一個數對必為$(3m,m)$。

第三部分：$x+y=2^k$ 的探討

本部分針對 $x+y=2^k$ 的情況進行探討，除了驗證「猜測一」之外，將給出數對(x, y)形成穩定狀態所需次數。

一、歸納(x, y)形成穩定狀態所需次數

為了歸納數對(x, y)形成穩定狀態所需的次數，我們列出 $x+y$＝8, 16, 32, 64 的情形如下。

$x+y$	x	y	完成次數
8	5	3	2
	6	2	1
	7	1	2
16	9	7	3
	10	6	2
	11	5	3
	12	4	1
	13	3	3
	14	2	2
	15	1	3
32	17	15	4
	18	14	3
	19	13	4
	20	12	2
	21	11	4
	22	10	3
	23	9	4
	24	8	1
	25	7	4
	26	6	3
	27	5	4
	28	4	2
	29	3	4
	30	2	3
	31	1	4
64	33	31	5
	34	30	4
	35	29	5

$x+y$	x	y	完成次數
64	36	28	3
	37	27	5
	38	26	4
	39	25	5
	40	24	2
	41	23	5
	42	22	4
	43	21	5
	44	20	3
	45	19	5
	46	18	4
	47	17	5
	48	16	1
	49	15	5
	50	14	4
	51	13	5
	52	12	3
	53	11	5
	54	10	4
	55	9	5
	56	8	2
	57	7	5
	58	6	4
	59	5	5
	60	4	3
	61	3	5
	62	2	4
	63	1	5

我們發現：

1. 當 x, y 同為奇數時，

當 $x+y=8$ 時， (7,1),(5,3)形成等量狀態次數皆為 2。

當 $x+y=16$ 時，(15,1), (13,3), (11,5), (9,7)形成穩定狀態皆為 3 次。

當 $x+y=32$ 時，(31,1), (29,3), (27,5), (25,7),…形成穩定狀態皆為 4 次。

當 $x+y=64$ 時，(63,1), (61,3), (59,5), (57,7),…形成穩定狀態皆為 5 次。

所以得出：

> 猜測 3-1：
>
> 若 p 為奇數，則數對 $(2^k-p,p)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1$ 次。

2. 固定 y 的值進行探討：

當 $y=2$ 時：

2^k	$x+y$	k	x	y	形成穩定狀態的次數
2^3	8	3	6	2	1
2^4	16	4	14	2	2
2^5	32	5	30	2	3
2^6	64	6	62	2	4

當 $y=4$ 時：

2^k	$x+y$	k	x	y	形成穩定狀態的次數
2^3	8	3	4	4	0
2^4	16	4	12	4	1
2^5	32	5	28	4	2
2^6	64	6	60	4	3

當 $y=8$ 時：

2^k	$x+y$	k	x	y	形成穩定狀態的次數
2^4	16	4	8	8	0
2^5	32	5	24	8	1
2^6	64	6	56	8	2

歸納一般 $y=2^m$ 的情形如下：

$x+y$	x	y	形成穩定狀態的次數
2^k	2^k-2^m	2^m	$k-1-m$

所以得出：

猜測 3-2：

數對 $(2^k-2^m,2^m)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

3. 列出當 $y=2p$ 時(p 為奇數)時的完成次數：

2^k	$x+y$	k	x	y	形成穩定狀態的次數
2^3	8	3	6	2	1
2^4	16	4	14	2	2
			10	6	
2^5	32	5	30	2	3
			26	6	
			22	10	
			18	14	
2^6	64	6	62	2	4
			58	6	
			54	10	
			50	14	
			46	18	
			42	22	
			38	26	
			34	30	

歸納 $y=2p$ 時的情形如下：

x	y	形成穩定狀態的次數
2^k-2p	$2p$	$k-2$

所以得出：

猜測 3-3：

數對 $(2^k-2p,2p)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-2$ 次。

4. 根據以上三個猜測，我們歸納出猜測 3-4 如下：

猜測 3-4：

數對 $(2^k-p\times 2^m,p\times 2^m)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

二、驗證形成穩定狀態所需的次數

經過多次實驗後，我們發現可以利用二進位的表法來說明形成穩定狀態所需的次數。以下為二進位用輾轉相除法的表示方式：

$x+y=(8)_{10}$

1	7	1	
	−1	+1	
1	6	2	
	−2	+2	
	4	4	

$x+y=(1000)_2$

1	111	1	
	−1	+1	
1	110	10	
	−10	+10	
	100	100	

$x+y=(16)_{10}$

1	13	3	
	−3	+3	
1	10	6	
	−6	+6	
	4	12	1
	+4	−4	
	8	8	

$x+y=(10000)_2$

1	1101	11	
	−11	+11	
1	1010	110	
	−110	+110	
	100	1100	1
	+100	−100	
	1000	1000	

$x+y=(32)_{10}$

1	26	6	
	−6	+6	
1	20	12	
	−12	+12	
	8	24	1
	+8	−8	
	16	16	

$x+y=(100000)_2$

1	11010	110	
	−110	+110	
1	10100	1100	
	−1100	+1100	
	1000	11000	1
	+1000	−1000	
	10000	10000	

將以上移動過程之二進位制表示法簡記如下：

$(x,y)=(7,1)$時，$(7)_{10}=(111)_2$，$(1)_{10}=(001)_2$

$$\begin{cases}111\\001\end{cases}\rightarrow\begin{cases}110\\010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}100\\100\end{cases}$$

或表示為

$$111\xrightarrow{-1}110\xrightarrow{-10}100$$

$$001\xrightarrow{+1}10\xrightarrow{+10}100$$

因此，經過 2 次移動可形成穩定狀態。

$(x,y)=(13,3)$時，$(13)_{10}=(1101)_2$，$(3)_{10}=(0011)_2$

$$\begin{cases}1101\\0011\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1010\\0110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0100\\1100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\end{cases}$$

或表示為

$$1101\xrightarrow{-11}1010\xrightarrow{-110}100\xrightarrow{+100}1000$$

$$0011\xrightarrow{+11}0110\xrightarrow{+110}1100\xrightarrow{-100}1000$$

因此，經過 3 次移動可形成穩定狀態。

$(x,y)=(26,6)$時，$(26)_{10}=(11010)_2$，$(6)_{10}=(00110)_2$

$$\begin{cases}11010\\00110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}10100\\01100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\11000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}10000\\10000\end{cases}$$

或表示為

$$11010\xrightarrow{-110}10100\xrightarrow{-1100}1000\xrightarrow{+1000}10000$$

$$00110\xrightarrow{+110}01100\xrightarrow{+1100}11000\xrightarrow{-1000}10000$$

因此，經過 3 次移動可形成穩定狀態。

再列出數對(33,31)和(34,30)的移動過程如下：

$(x,y)=(33,31)$時，$(33)_{10}=(100001)_2$，$(31)_{10}=(011111)_2$

$$\begin{cases}100001\\011111\end{cases}\rightarrow\begin{cases}000010\\111110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}000100\\111100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}001000\\111000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}010000\\110000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}100000\\100000\end{cases}$$

或表示為

$$100001\xrightarrow{-11111}000010\xrightarrow{+10}000100\xrightarrow{+100}001000\xrightarrow{+1000}010000\xrightarrow{+10000}100000$$

$$011111\xrightarrow{+11111}111110\xrightarrow{-10}111100\xrightarrow{-100}111000\xrightarrow{-1000}110000\xrightarrow{-10000}100000$$

因此，經過 5 次移動可形成穩定狀態。

(x,y)=(34,30)時，$(34)_{10}=(100010)_2$，$(30)_{10}=(011110)_2$

$$\begin{cases}100010\\011110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}000100\\111100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}001000\\111000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}010000\\110000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}100000\\100000\end{cases}$$

或表示為

$$100010\xrightarrow{-11110}000100\xrightarrow{+100}001000\xrightarrow{+1000}010000\xrightarrow{+10000}100000$$
$$011110\xrightarrow{+11110}111100\xrightarrow{-100}111000\xrightarrow{-1000}110000\xrightarrow{-10000}100000$$

因此，經過 4 次移動可形成穩定狀態。

進一步發現，二進位表示法各位值上的數字有規律，若令：$x=\sum_{i=0}^{k}a_i\times 2^i$，$y=\sum_{i=0}^{k}b_i\times 2^i$，$x+y=\sum_{i=0}^{k}c_i\times 2^i$，其中 a_i, b_i 為 0 或 1 且 $c_1=c_2=c_3=\ldots=c_{k-1}=0$, $c_k=1$, 則存在 m, 使得

$$\begin{cases}a_i=b_i=0,\ 0\le i\le m-1\\a_i=b_i=1,\ i=m\\a_i+b_i=1,\ m+1\le i\le k-1\end{cases}$$

為何會出現這種規律？不難得知原因出自於 x, y 滿足 $x+y=2^k$，當 $a_m=b_m=1$ 時，才能進一位，使得 $x+y$ 之二進位表示法的 2^m 之值為 0, 而因進位的關係，a_{m+1} 和 b_{m+1} 恰有一個為 0，同理可得當 $m+1\le i\le k-1$ 時，a_i 和 b_i 也都恰有一者為 0。將我們以下表表示：

	2^k	2^{k-1}	2^{k-2}	2^{k-3}	……	2^{m+1}	2^m	2^{m-1}	…	2^0
x	0	1	0 或 1				1	0	…	0
y	0	0	0 或 1				1	0	…	0
$x+y$	1	0	0	0	0	0	0	0	…	0

當 $x+y=2^k$ 時，其二進位表示法 $(x+y)_2=(1\underbrace{00.....0}_{k\text{個}0})_2$，穩定狀態 $(x)_2=(y)_2=(1\underbrace{00.....0}_{k-1\text{個}0})_2$。考慮 $x>y$ 時，數對(x, y)移動為$(x-y, 2y)$，從上面二進位表示的計算過程中，我們發現：

1. $y\xrightarrow{\times 2}2y$，將 y 乘以 2，即二進位之位值進一位，相當於「補一個 0」。
   例如：$(1)_2\xrightarrow{\times 2}(10)_2$，$(10)_2\xrightarrow{\times 2}(100)_2$，$(110)_2\xrightarrow{\times 2}(1100)_2$.
2. 由 $x\xrightarrow{-y}x-y$，因為 $x-y=x-(x+y-x)=x-(2^k-x)=2x-2^k$，化簡得：$x\xrightarrow{-y}2x-2^k$，亦即較大的數 x 移動時，會先「補一個 0」（即 x 乘以 2），再「扣除最左側的 1」（即減 2^k）。
   例如：$(110)_2\xrightarrow{-10}(100)_2$ (先在 110 右側補 0, 得 1100，再扣除最左側之 1, 得 ~~1~~100).
   再如：$(1101)_2\xrightarrow{-11}(1010)_2$ (先在 1101 右側補 0, 得 10100，再扣除最左側之 1, 得 ~~1~~1010).

另外，我們可以再次簡化，僅就其中一數來移動即可，例如：數對(33, 31)的移動過程簡化為：$(33)_{10}=(100001)_2$,

$$100001\rightarrow 000010\rightarrow 000100\rightarrow 001000\rightarrow 010000\rightarrow 100000$$

經過 5 次移動可形成穩定狀態。

再例如(34, 30)的移動過程簡化為：

$(34)_{10}=(100010)_2$,

$100010 \to 000100 \to 001000 \to 010000 \to 100000$

經過 4 次移動可形成穩定狀態。

當 $x+y=2^k$, $y=p\times 2^m$ 且 p 為奇數時，令 $y=\sum_{i=0}^{k} b_i \times 2^i$, 因 p 為奇數，故得 $b_m=1$, 問題即為：

$(y)_{10}=(.....1\underbrace{00.....0}_{m\text{個}0})_2$ 經過幾次移動可變成 $(1\underbrace{00.....0}_{k-1\text{個}0})_2$？

經由上述討論，問題轉化為：

問題 4：當 $x+y=2^k$ 時，將 y 表為二進制，經過多少次的進位(即補 0)、和刪去最高位值，可得到穩定狀態？

根據之前的討論，不難得到經 $k-1-m$ 次移動可變成穩定狀態。所以得出：

> 定理 1：
>
> 數對 $(2^k-p\times 2^m, p\times 2^m)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

第四部分：$x+y=q\times 2^k$ $(q\neq 1)$ 的探討

本部分針對：$x+y=q\times 2^k$ $(q\neq 1)$ 的情況進行探討。為了方便記錄及觀察，以下列出 $x+y=$ 20, 24, 28 時，數對(x, y)形成穩定狀態所需次數，無法達成則以「-」表示。

1. $x+y=20=5\times 2^2$

x	y	完成次數
19	1	-
18	2	-
17	3	-
16	4	-
15	5	1
14	6	-
13	7	-
12	8	-
11	9	-

2. $x+y=24=3\times 2^3$

x	y	完成次數
23	1	-
22	2	-
21	3	2
20	4	-
19	5	-
18	6	1
17	7	-
16	8	-
15	9	2
14	10	-
13	11	-

3. $x+y=28=7\times 2^2$

x	y	完成次數
27	1	-
26	2	-
25	3	-
24	4	-
23	5	-
22	6	-
21	7	1
20	8	-
19	9	-
18	10	-
17	11	-
16	12	-
15	13	-

我們列出可形成穩定狀態的數對如下：

$x+y$	可形成穩定狀態的數對
20	(15,5)
24	(15,9)、(18,6)、(21,3)
28	(21,7)

發現當 $x+y=q\times2^k$ 和 $x+y=2^k$ 有關，例如：

$x+y=24=3\times2^3$	$x+y=8=2^3$
$(15,9)=3\times(5,3)$	(5,3)
$(18,6)=3\times(6,2)$	(6,2)
$(21,3)=3\times(7,1)$	(7,1)

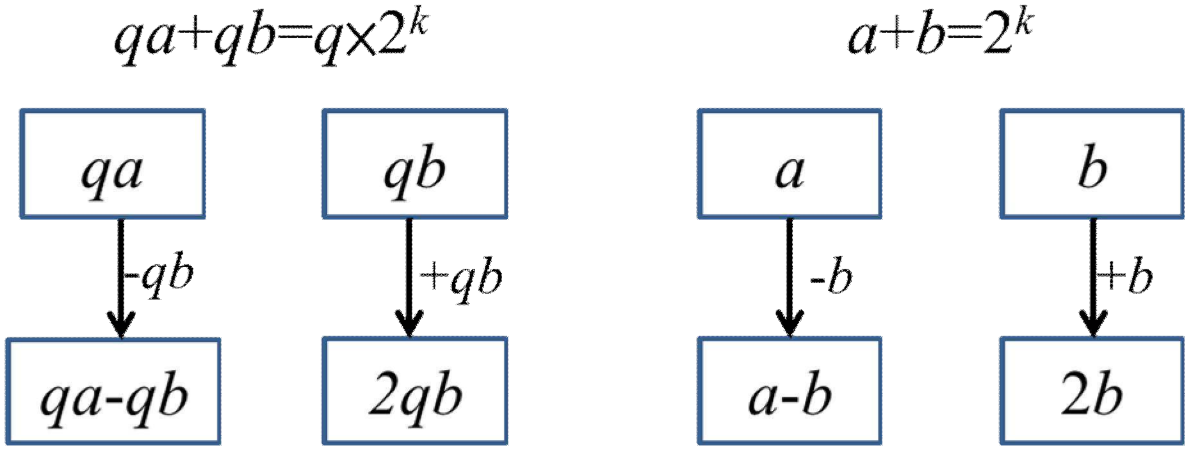
再例如：

$x+y=28=7\times2^2$	$x+y=4=2^2$
$(21,7)=7\times(3,1)$	(3,1)

由此關係，我們可以寫出一般情況如下：

	$x+y=q\times2^k$	$x+y=2^k$
可形成穩定狀態的數對	$(q\times2^k-qt,qt)$ $=q\times(2^k-t,t)$	$(2^k-t,t)$

為何兩者間會有關聯，探討 $x+y=q\times2^k$ 的數對(qa, qb)和 $x+y=2^k$ 的數對(a, b)的變動過程，不妨先假設 $a>b$ (顯然 $qa>qb$)，其中$(qa, qb)\to(qa-qb, 2qb)$，若提出其公因數 q，則與 $x+y=2^k$ 的數對$(a, b)\to(a-b, 2b)$ 變動過程一模一樣。



藉由上述探討，我們得到定理 2：

> 定理 2：
>
> 兩數對(qa, qb)、(a, b) 形成穩定狀態所需的次數相同。

透過上述觀察，我們可以在計算過程中，將提出兩數的最大公因數，以達到簡化求移動次數的過程，例如：數對(39, 9)經過 3 次移動形成穩定狀態，計算過程如下：

$$(39,9)\xrightarrow{(13,3)}(10,6)\xrightarrow{(5,3)}(2,6)\xrightarrow{(1,3)}(2,2)$$

例如數對(60, 4)經過 3 次移動形成穩定狀態，計算過程如下：

$$(60,4)\xrightarrow{(15,1)}(14,2)\xrightarrow{(7,1)}(6,2)\xrightarrow{(3,1)}(2,2)$$

例如數對(116,12)經過 4 次移動形成穩定狀態，計算過程如下：

$$(116,12)\xrightarrow{(29,3)}(26,6)\xrightarrow{(13,3)}(10,6)\xrightarrow{(5,3)}(2,6)\xrightarrow{(1,3)}(2,2)$$

根據定理 1 及定理 2，我們得到以下結論：

> 定理 3：
>
> 數對$(q2^k - pq\times 2^m, pq\times 2^m)$形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

以上，我們檢驗了滿足 $x+y=q\times 2^k$ 且 x, y 的最大公因數為 $q\times 2^m$ 的數對(x, y) ，得到這些數對必能形成穩定狀態，根據定理 3 可進一步算出其形成穩定狀態所需的次數。相對的，若 x, y 的最大公因數不等於 $q\times 2^m$ 時，數對(x, y)能否形成穩定狀態?接下來探討的問題如下。

問題 5：當 $x+y= q\times 2^k$ 且 x,y 的最大公因數為 $r\times 2^m$ 時，(x, y)能否形成穩定狀態？

以下分別呈現數對(33,3), (81,7)和(196,44)的化簡過程，這些例子顯示，若 x, y 的最大公因數為 $r\times 2^m$，$q\neq r$ 時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。

例 1：$33+3=36=9\times 2^2$, 33 和 3 的最大公因數為 $3\neq 9$,數對(33,3)會形成循環，計算過程如下：

$$(33,3)\xrightarrow{(11,1)}(10,2)\xrightarrow{(5,1)}(4,2)\xrightarrow{(2,1)}(1,2)\rightarrow(2,1)\rightarrow\ldots$$

例 2：$81+7=88=11\times 2^3$, 81 和 7 的最大公因數為 $1\neq 11$,數對(81,7)會形成循環，計算如下：

$$(81,7)\longrightarrow(74,14)\xrightarrow{(37,7)}(30,14)\xrightarrow{(15,7)}(8,14)\xrightarrow{(4,7)}(8,3)\rightarrow(5,6)\rightarrow(10,1)\rightarrow\ldots$$

事實上，當(81,7)變成(8,3)時，因為 8+3=11 為奇數，即得此數對無法形成穩定狀態。

例 3：$196+44=240=15\times 2^4$, 196 和 44 的最大公因數為 $4\neq 15$,數對(196,44)會形成循環。

$$(196,44)\xrightarrow{(49,11)}(38,22)\xrightarrow{(19,11)}(8,22)\xrightarrow{(4,11)}(8,7)\rightarrow(1,14)\rightarrow(2,13)\rightarrow\ldots$$

同理，當(196,44)變成(8,7)時，因為 8+7=15 為奇數，即得此數對無法形成穩定狀態。

從上三例中，我們進一步發現，當 $x+y=q\times 2^k$ 且 x, y 的最大公因數為 $r\times 2^m$, r 為奇數時，當我們不斷將數對的公因數提出來時，最後所形成的數對之兩數和為 q/r 。例如：上三例中最後形成的數對之兩數和分別為 3,11,15。

為何會產生上述和為 q/r 的結果？我們列出此三個例子化簡過程中的數對如下。

$x+y=9\times 2^2$	$x+y=3\times 2^2$		$x+y=3\times 2$		$x+y=3$
(33,3)	(11,1)	(10,2)	(5,1)	(4,2)	(2,1)

$x+y=11\times 2^3$		$x+y=11\times 2^2$		$x+y=11\times 2$		$x+y=11$
(81,7)	(74,14)	(37,7)	(30,14)	(15,7)	(8,14)	(4,7)

$x+y=15\times 2^4$	$x+y=15\times 2^2$		$x+y=15\times 2$		$x+y=15$
(196,44)	(49,11)	(38,22)	(19,11)	(8,22)	(4,11)

從這些變化過程中，我們發現若數對內兩數同為偶數時，則會提出公因數，將成為兩個奇數，而經過移動後，數對內的兩數又會變成同為偶數，因此可再提出公因數，這個過程會反覆進行到數對內的兩數和為奇數，即為 q/r, 因兩數和為奇數，即可得知此數對無法形成穩定狀態。我們得到以下結論：

定理 4：

若 $x+y=q\times 2^k(q\neq 1)$, 且 x, y 的最大公因數為 $r\times 2^m$

，$q\neq r$ 時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。

由以上定理 1、3、4，可歸納為定理 5 如下：

定理 5：若 $x+y=q\times 2^k$(q 為奇數), 且 x, y 的最大公因數為 $r\times 2^m$，則

1.$q=r$ 時，數對(x, y)形成穩定狀態的次數為 $k-1-m$ 次。

2.$q\neq r$ 時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。

伍、研究結果：

本文探究由一人獨自進行的「拈」遊戲，探討最後是否能將兩堆石頭移動形成數量相等的狀態，稱之為「穩定狀態」。探索過程中，我們利用數對(x, y)來表示兩堆石頭分別有 x, y 顆的情況，利用輾轉相除法的形式來記錄移動過程，而因為遊戲進行中，兩堆石頭的總數不變，因而以此總數進行分類觀察，我們發現並非任意數對(x, y)皆能形成穩定狀態。

藉由列表觀察後，我們猜測當 $x+y=2^k$ 時，任意數對(x, y)皆能形成穩定狀態，我們用二進位制驗證，並進一步得到定理 1：

定理 1：數對 $(2^k-p\times 2^m, p\times 2^m)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

另外，因為數對(qa, qb)和(a, b)的移動方式類似，得知定理 3 及 4 如下：

定理 3：數對 $(q2^k-pq\times 2^m, pq\times 2^m)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

定理 4：若 $x+y=q\times 2^k$, $q\neq 1$, 且 x, y 的最大公因數為 $r\times 2^m$, $q\neq r$ 時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。

由以上定理 1、3、4，可歸納為定理 5 如下：

定理 5：

若 $x+y=q\times 2^k$(q 為奇數), 且 x, y 的最大公因數為 $r\times 2^m$

1.$q=r$ 時，數對(x, y)形成穩定狀態的次數為 $k-1-m$ 次。

2.$q\neq r$ 時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。

陸、未來展望：希望藉由此實驗，未來可以推論出石頭堆數不只兩堆的情形，進而求出石頭堆數有 n 堆時，能形成穩定狀態的數對之關係式。

【評語】030413

本作品處理一則有趣的數字平分問題。作者把問題巧妙的轉化成一個二進位數字的移位問題，藉由簡單的分析手法，對整個問題給出了頗為完整的解答，說理清楚，值得肯定及鼓勵。然而，此作品處理的問題稍嫌狹窄，建議可考慮延伸至多個數字均分的問題，包括問題該如何定義？是否仍然能給出一個完整的答案？這顯然是一個困難得多的問題，作者可以嘗試在未來針對這個部分做更深入的探討，使作品的內容更豐富。