中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030412

分進合擊—分解勾股數

學校名稱：臺中市立居仁國民中學

作者：	指導老師：
國二 賴昱維	李美瑤

關鍵詞：勾股數、最簡真分數、遞迴關係式

摘要

本研究的目的是探討素勾股數家族的產生。研究方法是以最簡真分數數列產生素勾股數家族，研究結果是由最簡真分數數列產生股弦定差、勾弦定差以及勾股定差之素勾股數家族，更進一步由最簡真分數數列產生素勾股數三元樹。

壹、　研究動機

我曾以勾股數相關的作品參加了第 52、53 和 54 屆全國科展（表一），也曾以勾股數相關的數學文章刊登於中央研究院數學研究所數學傳播季刊第 150 和 151 期(表二)。這學期數學課本中的第二章第三節是「畢氏定理」，老師在上課中介紹勾股數，再度激起我對勾股數的熱情。在第四十七屆全國科展高中組數學科第三名的「勾股鐵路網」作品中，王重臻同學由佩爾數列產生費馬家族的模式，延伸到由佩爾方程產生整數數列，進而產生勾股定差的素勾股數家族，更讓我想進一步探討素勾股數家族的規律性。

勾股數又名畢氏數，是符合畢氏定理（$a^2+b^2=c^2$）的整數解（a,b,c），素勾股數則是（a,b,c）的最大公因數等於 1，素勾股數家族則是由同一個生成公式所產生的素勾股數數列$[(a_n,b_n,c_n)]$，例如歐幾里得家族（the Euclid family）、畢達哥拉斯家族（the Pythagoras family）、柏拉圖家族（the Plato family）及費馬家族（the Fermat family）。除了傳統的公式，史帝費爾 (Michael Stifel, 1544)和奧撒南(Jacques Ozanam, 1844) 分別以帶分數數列產生畢達哥拉斯和柏拉圖家族。因此，我想以分數進行「分進合擊—分解勾股數」的勾股數研究，先由歐幾里得家族產生最簡真分數數列，再分成畢達哥拉斯、柏拉圖及費馬家族進行探討，然後再綜合探討貝格倫的素勾股數三元樹（圖一）。

貳、　研究目的

一、　先由歐幾里得家族產生最簡真分數數列，再由此探討各種素勾股數家族。

(一) 以最簡真分數數列產生畢達哥拉斯家族與股弦定差的素勾股數家族。

(二) 以最簡真分數數列產生柏拉圖家族與勾弦定差的素勾股數家族。

(三) 以最簡真分數數列產生費馬家族與勾股定差的素勾股數家族。

二、　以最簡真分數數列產生貝格倫的素勾股數三元樹。

參、　研究設備及器材

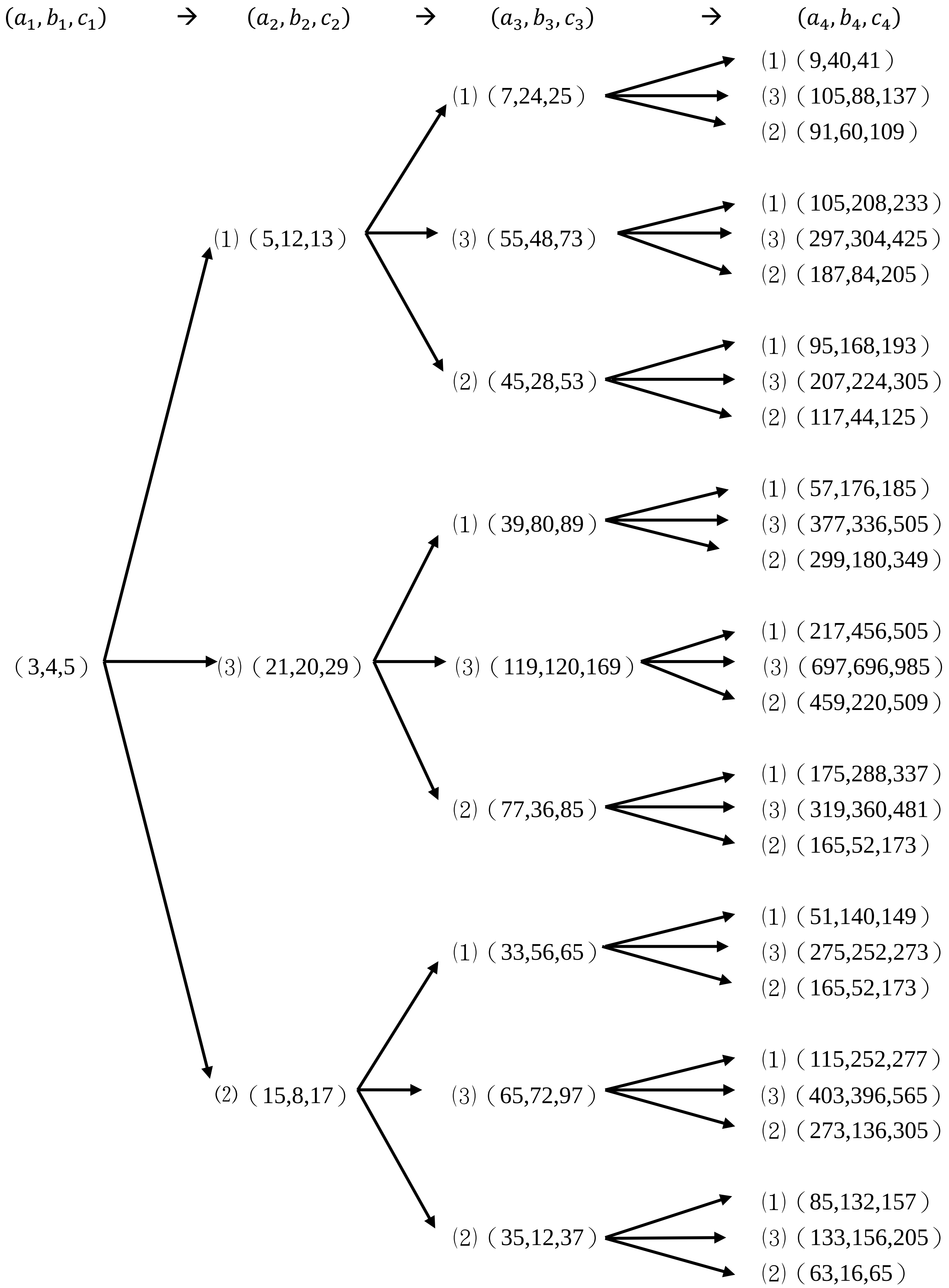
筆、紙、word 2007、excel 2007、小算盤。

表一　第 52、53 和 54 屆全國科展作品名稱及摘要

屆別	作品名稱	摘要
52	三催四請—從畢氏定理到 N 元畢氏數	利用對圓點方陣的降階分奇偶數組加以探討，其中，奇數組是在（M+1）階方陣中透過一次降一階來探討三元畢氏數中 X_1=2k+1 的情況，而偶數組是在（M+2）階方陣中透過一次降二階來探討三元畢氏數中 X_1=2k+2 的情況。在獲得初步的成果後，又藉著直角三角形的擴充依遞迴定義的方式來進一步來探討 N 元畢氏數。最後，我得到 N 元畢氏數（$X_1,X_2,\ldots,X_m,\ldots,X_{n-1},X_n$）的關係式。
53	接二連三—拼剪海倫三角形	面積是正整數的整數邊三角形就是海倫三角形；整數邊的直角三角形就是畢氏三角形。本研究先透過圓點方陣得到兩組基本的畢氏三角形的邊長生成公式，並且證明這兩組基本的畢氏三角形都是海倫三角形；接著，取其中一組基本的畢氏三角形加以複製，成為有一條公共邊的兩個相同畢氏三角形，接著拼接成四組三角形，並且證明這四組三角形都是海倫三角形；更進一步，把這兩組基本的畢氏三角形各放大到適當的倍數後，成為有一條公共邊的兩個不同的畢氏三角形，接著拼接成六組不同的三角形和剪接成六組不同的三角形，並且證明這十二組三角形都是海倫三角形。因此，本研究總共得到十八組海倫三角形的邊長生成公式。
54	代代相傳—迭代勾股數之猜想	探討「勾股數迭代公式」的問題，並驗證「由『勾股形』可得到三個相似的矩陣來生成『勾股數迭代公式』」的猜想。研究的結果是以『勾股形』得到不同的勾股數關係式，接著以這些不同的勾股數關係式作迭代運算，得到了七十八個不同的勾股數矩陣迭代公式，再將具有相似矩陣的公式歸為同一類，則這七十八個公式共可分成二十六類，每類皆有三個公式，由此證明了勾股數迭代公式的猜想。在研究過程中，我得到了一般的勾股數矩陣迭代公式。

表二　刊登於中研究院數學所數學傳播季刊第 150 和 151 期的數學文章摘要

期別	文章名稱	摘要
150	畢氏三元數生成公式之研究與發展	本研究不同於以往的畢氏三元數生成公式之產生方式，從連續奇數和的公式，延伸至圓點方陣的點數和的公式後，進一步產生了畢氏三元數的生成公式。
151	勾股數迭代公式之研究與發展	清代數學家劉彝程由勾股數為邊長所構作的幾何圖形，以迭代的方式，產生了一組的勾股數迭代公式，此公式類似於貝格倫以及普萊斯的畢氏三元數迭代公式。本研究由勾股數為邊長所構作的幾何圖形之性質，以迭代的方式，找到了劉彝程的另外兩組公式，以及重新產生了貝格倫和普萊斯的公式。

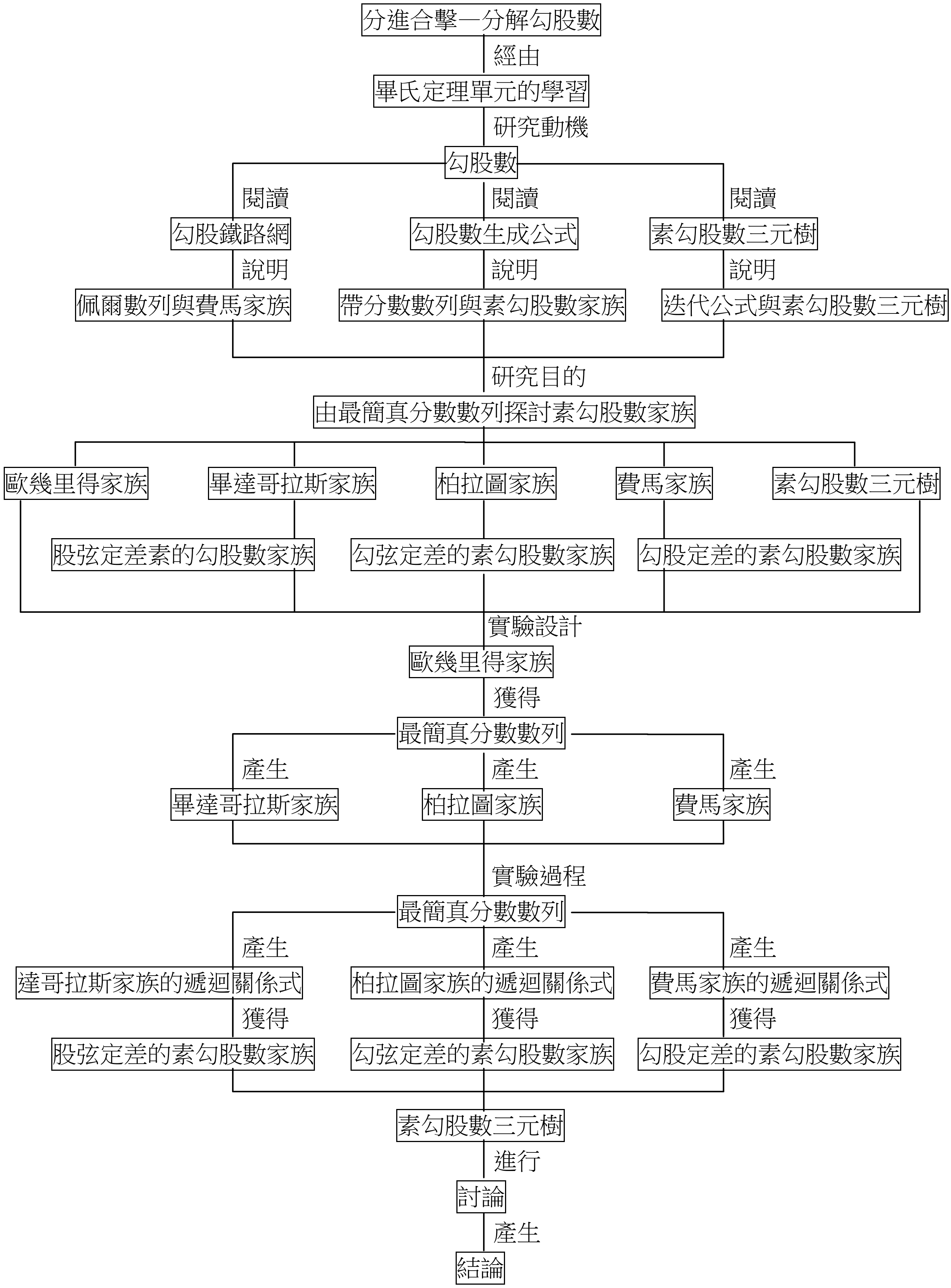


圖一　貝格倫由迭代公式⑴、⑵和⑶產生素勾股數三元樹(Wikipedia, the free encyclopedia, 2015)

⑴ $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$，⑵ $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$，⑶ $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

肆、 研究方法與過程

一、 研究架構



二、 文獻回顧與研究方法

(一) 整數數列與素勾股數

1. 歐幾里得家族是由整數數列$\langle u_n\rangle$與$\langle v_n\rangle$產生的素勾股數數列（蔡聰明,2010）：

$[(a_n,b_n,c_n)]=\left[\left({u_n}^2-{v_n}^2,2u_nv_n,{u_n}^2+{v_n}^2\right)\right],\forall n\,,u_n,v_n\in N$，$u_n>v_n$，

$(u_n,v_n)=1$，u_n,v_n一奇一偶。

2. 畢達哥拉斯家族是以整數數列$\langle n\rangle$產生的素勾股數數列(Price, H. Lee,2008)：

$[(a_n,b_n,c_n)]=[(2n+1,2n^2+2n,2n^2+2n+1)],\forall n\in N$，

此時，畢達哥拉斯家族的股弦差(c_n-b_n)為1。

證明：$c_n-b_n=(2n^2+2n+1)-(2n^2+2n)=1$。

3. 柏拉圖家族是以整數數列$\langle n\rangle$產生的素勾股數數列(Price, H. Lee,2008)：

$[(a_n,b_n,c_n)]=[(4n^2-1,4n\,,4n^2+1)],\forall n\in N$，

此時，柏拉圖家族的勾弦差(c_n-a_n)為2。

證明：$c_n-a_n=(4n^2+1)-(4n^2-1)=2$。

4. 費馬家族是以佩爾數列$\langle P_n\rangle$產生的素勾股數數列 (Price, H. Lee,2008)：

$[(a_n,b_n,c_n)]=\left[\left({P_{n+1}}^2-{P_n}^2,2P_{n+1}P_n,{P_{n+1}}^2+{P_n}^2\right)\right],\forall\, n\in N$，

註：佩爾數列$\langle P_n\rangle$是一整數數列$0,1,2,5,12,29,70,169,\cdots,P_n$，$\langle P_n\rangle$的遞迴關係式可表示為：$P_0=0,P_1=1$，$P_n=2P_{n-1}+P_{n-2},n\in N$，$n\geq 2$。

此時，費馬家族的勾股差$(|b_n-a_n|)$為1。

證明：
$$
\begin{aligned}
|b_n-a_n|&=\left|2P_{n+1}P_n-\left({P_{n+1}}^2-{P_n}^2\right)\right|\\
&=\left|2(2P_n+P_{n-1})P_n-\left[(2P_n+P_{n-1})^2-{P_n}^2\right]\right|\\
&=\left|2P_nP_{n-1}-\left({P_n}^2-{P_{n-1}}^2\right)\right|\\
&=\left|2(2P_{n-1}+P_{n-2})P_{n-1}-\left[(2P_{n-1}+P_{n-2})^2-{P_{n-1}}^2\right]\right|\\
&=\left|2P_{n-1}P_{n-2}-\left({P_{n-1}}^2-{P_{n-2}}^2\right)\right|\\
&\ \ \vdots\\
&=\left|2P_3P_2-\left({P_3}^2-{P_2}^2\right)\right|\\
&=\left|2(2P_2+P_1)P_2-\left[(2P_2+P_1)^2-{P_2}^2\right]\right|
\end{aligned}
$$

$$= \left|2P_2P_1 - \left({P_2}^2 - {P_1}^2\right)\right|$$

$$= \left|2(2P_1 + P_0)P_1 - \left[(2P_1 + P_0)^2 - {P_1}^2\right]\right|$$

$$= \left|2P_1P_0 - \left({P_1}^2 - {P_0}^2\right)\right|$$

$$= |0 - (1 - 0)|$$

$$= 1$$

(二) 分數數列與素勾股數

史帝費爾和奧撒南分別以帶分數數列產生畢達哥拉斯和柏拉圖家族。

1. 史帝費爾以$\begin{cases}\langle a_n\rangle = \langle 2n+1\rangle \\ \langle b_n\rangle = \langle 2n^2+2n\rangle\end{cases}$構成 $\langle\frac{b_n}{a_n}\rangle$，再由 $\langle\frac{b_n}{a_n}\rangle = \langle\frac{2n^2+2n}{2n+1}\rangle = \langle n + \frac{n}{2n+1}\rangle$產生 $\langle c_n\rangle = \langle 2n^2+2n+1\rangle$ (Wikipedia, the free encyclopedia, 2015)。
2. 奧撒南以$\begin{cases}\langle a_n\rangle = \langle (2n+2)^2-1\rangle \\ \langle b_n\rangle = \langle 2(2n+2)\rangle\end{cases}$構成 $\langle\frac{a_n}{b_n}\rangle$，再由$\langle\frac{a_n}{b_n}\rangle = \langle\frac{(2n+2)^2-1}{2(2n+2)}\rangle = \langle n + \frac{4n+3}{4n+4}\rangle$產生$\langle c_n\rangle = \langle (2n+2)^2+1\rangle$ (Ozanam, Jacques, 1844)。

(三) 迭代公式與素勾股數三元樹

在 1934 年，貝格倫由(3 ,4 ,5)開始，利用下列的素勾股數迭代公式⑴、⑵和⑶產生畢達哥拉斯、柏拉圖和費馬家族，更進一步產生素勾股數三元樹(圖一) (Price, H. Lee,2008；Wikipedia, the free encyclopedia, 2015)。

⑴$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\2 & -1 & 2\\2 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}$，⑵$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\-2 & 1 & 2\\-2 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}$，⑶$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}$

1. 貝格倫由(3 ,4 ,5)開始，利用迭代公式(1)依次產生畢達哥拉斯家族：

   $(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5) \rightarrow (a_2, b_2, c_2) = (5,12,13) \rightarrow (a_3, b_3, c_3) = (7,24,25) \rightarrow$
   $(a_4, b_4, c_4) = (9,40,41) \rightarrow \cdots$ 。
2. 貝格倫由(3 ,4 ,5)開始，利用迭代公式(2)依次產生柏拉圖家族：

   $(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5) \rightarrow (a_2, b_2, c_2) = (15,8,17) \rightarrow (a_3, b_3, c_3) = (35,12,37) \rightarrow$
   $(a_4, b_4, c_4) = (63,16,65) \rightarrow \cdots$ 。
3. 貝格倫由(3 ,4 ,5)開始，利用迭代公式(3)依次產生費馬家族：

   $(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5) \rightarrow (a_2, b_2, c_2) = (21,20,29) \rightarrow (a_3, b_3, c_3) = (119,120,169)$
   $\rightarrow (a_4, b_4, c_4) = (697,696,985) \rightarrow \cdots$ 。

(四) 歐幾里得家族與最簡真分數數列

由於史帝費爾與奧撒南以帶分數數列產生畢達哥拉斯與柏拉圖家族，讓我有了「以最簡真分數數列產生素勾股數家族」的研究構想。因為歐幾里得家族的u_n與v_n具有三種關係：①$u_n > v_n$，②$(u_n, v_n) = 1$，③u_n, v_n為一奇一偶，所以$\frac{v_n}{u_n}$是最簡真分數。因此，歐幾里得家族的最簡真分數數列可表示如下：

$$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{7}{10},\frac{9}{10},\frac{2}{11},\frac{4}{11},\frac{6}{11},$$
$$\frac{8}{11},\frac{10}{11},\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12},\frac{11}{12},\frac{2}{13},\frac{4}{13},\frac{6}{13},\frac{8}{13},\frac{10}{13},\frac{12}{13},\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{5}{14},\frac{9}{14},\frac{11}{14},\frac{13}{14},\frac{2}{15},$$
$$\frac{4}{15},\frac{8}{15},\frac{14}{15},\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{5}{16},\frac{7}{16},\frac{9}{16},\frac{11}{16},\frac{13}{16},\frac{15}{16},\frac{2}{17},\frac{4}{17},\frac{6}{17},\frac{8}{17},\frac{10}{17},\frac{12}{17},\frac{14}{17},\frac{16}{17},\cdots$$

所以，可由$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$產生歐幾里得家族$[(a_n, b_n, c_n)] = [({u_n}^2 - {v_n}^2, 2u_nv_n, {u_n}^2 + {v_n}^2)]$。

我的研究方法是藉由最簡真分數數列產生素勾股數家族。

三、 研究過程

(一) 畢達哥拉斯家族與股弦定差的素勾股數家族

在畢達哥拉斯家族$[(a_n, b_n, c_n)] = [(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)]$ 轉換成歐幾里得家族$[(a_n, b_n, c_n)] = [({u_n}^2 - {v_n}^2, 2u_nv_n, {u_n}^2 + {v_n}^2)]$的形式：

$$\begin{cases} a_n = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2 = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ b_n = 2n^2+2n = 2n(n+1) = 2u_nv_n \\ c_n = 2n^2+2n+1 = (n+1)^2 + n^2 = {u_n}^2 + {v_n}^2 \end{cases}$$

此時，$\langle u_n\rangle = \langle n+1\rangle$，$\langle v_n\rangle = \langle n\rangle$，且$u_{n-1} = v_n$。

所以，可由最簡真分數數列$\langle\frac{n}{n+1}\rangle$產生畢達哥拉斯家族。

$$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{9}{10},\frac{10}{11},\frac{11}{12},\frac{12}{13},\frac{13}{14},\frac{14}{15},\frac{15}{16},\frac{16}{17},\cdots,\frac{n}{n+1}$$

這個最簡真分數數列具有以下的規律性：

$$\frac{u_2}{v_2} + \frac{v_1}{u_1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \qquad (3-1)$$

$$\frac{u_3}{v_3} + \frac{v_2}{u_2} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \qquad (3-2)$$

$$\frac{u_4}{v_4} + \frac{v_1}{u_1} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2 \qquad (3-3)$$

$$\vdots$$

$$\frac{u_n}{v_n}+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}=\frac{n+1}{n}+\frac{n-1}{n}=2 \qquad (3-4)$$

由式$(3-4)$移項產生：$\frac{u_n}{v_n}=2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} \leftrightarrow \frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，

因此，這個最簡真分數數列的遞迴關係式為：$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}} \qquad (3-5)$

研究一：探討遞迴關係式$(3-5)$

$\boxed{\text{問題}}$：首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$時，由式$(3-5)$生成$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle=\langle\frac{n}{n+1}\rangle$；當首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$以外的最簡真分數時，則由式$(3-5)$會產生何種$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$？前者可產生股弦定差為1的畢達哥拉斯家族，後者則產生何種股弦定差的素勾股數家族$[(a_n,b_n,c_n)]$？

$\boxed{\text{策略}}$：以首項$\frac{v_1}{u_1}$利用式$(3-5)$產生$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$的各項。

$$\frac{v_2}{u_2}=\frac{1}{2-\frac{v_1}{u_1}}=\frac{1}{\frac{2u_1-v_1}{u_1}}=\frac{u_1}{2u_1-v_1}$$

$$\frac{v_3}{u_3}=\frac{1}{2-\frac{v_2}{u_2}}=\frac{1}{\frac{2u_2-v_2}{u_2}}=\frac{u_2}{2u_2-v_2}$$

$$\frac{v_4}{u_4}=\frac{1}{2-\frac{v_3}{u_3}}=\frac{1}{\frac{2u_3-v_3}{u_3}}=\frac{u_3}{2u_3-v_3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}=\frac{1}{\frac{2u_{n-1}-v_{n-1}}{u_{n-1}}}=\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}-v_{n-1}}$$

因此，最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$為：

$$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{v_1}{u_1},\frac{u_1}{2u_1-v_1},\frac{u_2}{2u_2-v_2},\frac{u_3}{2u_3-v_3},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}-v_{n-1}} \qquad (3-6)$$

由式$(3-6)$最簡真分數數列$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$產生整數數列$\langle u_n\rangle,\langle v_n\rangle$及素勾股數家族

$$\langle u_n\rangle：u_1,2u_1-v_1,2u_2-v_2,2u_3-v_3,\cdots,2u_{n-1}-v_{n-1} \qquad (3-7)$$

$\langle v_n \rangle$：$v_1, u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{n-1}$ $(3-8)$

再產生素勾股數家族$[(a_n, b_n, c_n)] = [(u_n{}^2 - v_n{}^2, 2u_n v_n, u_n{}^2 + v_n{}^2)]$

則可得到股弦定差： $c_n - b_n = (u_n{}^2 + v_n{}^2) - 2u_n v_n = (u_n - v_n)^2$

$\boxed{\text{探討}}$：在首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$以外的最簡真分數時，我探討素勾股數家族的股弦差。

$$\frac{v_1}{u_1} \xrightarrow{\text{由式}(3-6)} \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle \xrightarrow{\text{由式}(3-7)\text{以及}\ (3-8)} [(a_n, b_n, c_n)] \xrightarrow{\text{股弦差}} c_n - b_n$$

(1) $\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{4} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$ ： $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{10}, \frac{10}{13}, \cdots, \frac{1+3(n-1)}{1+3n} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{3n-2}{3n+1} \rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(18n-3, 18n^2-6n-4, 18n^2-6n+5)]$

$\longrightarrow c_n - b_n = (18n^2-6n+5) - (18n^2-6n-4) = 9 = (u_1 - v_1)^2$

(2) $\frac{v_1}{u_1} = \frac{2}{5} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$ ： $\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{11}, \frac{11}{14}, \cdots, \frac{2+3(n-1)}{2+3n} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{3n-1}{3n+2} \rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(18n+3, 18n^2+6n-4, 18n^2+6n+5)]$

$\longrightarrow c_n - b_n = (18n^2+6n+5) - (18n^2+6n-4) = 9 = (u_1 - v_1)^2$

(3) $\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{6} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$ ： $\frac{1}{6}, \frac{6}{11}, \frac{11}{16}, \frac{16}{21}, \cdots, \frac{1+5(n-1)}{1+5n} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{5n-4}{5n+1} \rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(50n-15, 50n^2-30n-8, 50n^2-30n+17)]$

$\longrightarrow c_n - b_n = (50n^2-30n+17) - (50n^2-30n-8) = 25 = (u_1 - v_1)^2$

(4) $\frac{v_1}{u_1} = \frac{2}{7} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$ ： $\frac{2}{7}, \frac{7}{12}, \frac{12}{17}, \frac{17}{22}, \cdots, \frac{2+5(n-1)}{2+5n} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{5n-3}{5n+2} \rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(50n-5, 50n^2-10n-12, 50n^2-10n+13)]$

$\longrightarrow c_n - b_n = (50n^2-10n+13) - (50n^2-10n-12) = 25 = (u_1 - v_1)^2$

(5) $\frac{v_1}{u_1} = \frac{3}{8} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$ ： $\frac{3}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{18}, \frac{18}{23}, \cdots, \frac{3+5(n-1)}{3+5n} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{5n-2}{5n+3} \rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(50n+5\ , 50n^2+10n-12, 50n^2+10n+13)]$

$\longrightarrow c_n - b_n = (50n^2+10n+13) - (50n^2+10n-12) = 25 = (u_1 - v_1)^2$

(6) $\frac{v_1}{u_1} = \frac{4}{9} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$ ： $\frac{4}{9}, \frac{9}{14}, \frac{14}{19}, \frac{19}{24}, \cdots, \frac{4+5(n-1)}{4+5n} \to \langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{5n-1}{5n+4} \rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(50n+15, 50n^2+30n-8, 50n^2+30n+17)]$

$\longrightarrow c_n - b_n = (50n^2+30n+17) - (50n^2+30n-8) = 25 = (u_1 - v_1)^2$

結果：最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle \xrightarrow{\text{產生素勾股數家族}[(a_n,b_n,c_n)]}$ 股弦定差$(c_n - b_n)$

(1) $\langle\dfrac{3n-2}{3n+1}\rangle$ 或 $\langle\dfrac{3n-1}{3n+2}\rangle \rightarrow c_n - b_n = 9$

(2) $\langle\dfrac{5n-4}{5n+1}\rangle$ 、$\langle\dfrac{5n-3}{5n+2}\rangle$ 、$\langle\dfrac{5n-2}{5n+3}\rangle$ 或 $\langle\dfrac{5n-1}{5n+4}\rangle \rightarrow c_n - b_n = 25$

研究二：探討式$(3-6)$的最簡真分數數列

問題：由式$(3-6)$能否產生更多股弦定差的素勾股數家族？

探討：由式$(3-7)$以及 $(3-8)$產生整數數列$\langle u_n\rangle$與$\langle v_n\rangle$

$$u_2 = 2u_1 - v_1 = \boldsymbol{u_1 + (u_1 - v_1)}$$

$$u_3 = 2u_2 - v_2 = 2(2u_1 - v_1) - u_1 = 3u_1 - 2v_1 = \boldsymbol{u_1 + 2(u_1 - v_1)}$$

$$u_4 = 2u_3 - v_3 = 2(2u_2 - v_2) - u_2 = 3u_2 - 2v_2 = 3(2u_1 - v_1) - 2u_1$$

$$= 4u_1 - 3v_1 = \boldsymbol{u_1 + 3(u_1 - v_1)}$$

$$\vdots$$

$$u_n = 2u_{n-1} - v_{n-1} = 2(2u_{n-2} - v_{n-2}) - u_{n-2}$$

$$= 3u_{n-2} - 2v_{n-2} = 3(2u_{n-3} - v_{n-3}) - 2u_{n-3}$$

$$= 4u_{n-3} - 3v_{n-3} = 4(2u_{n-4} - v_{n-4}) - 3u_{n-4}$$

$$= 5u_{n-4} - 4v_{n-4} = 5(2u_{n-5} - v_{n-5}) - 3u_{n-5}$$

$$\vdots$$

$$= (n-2)u_3 - (n-3)v_3 = (n-2)(2u_2 - v_2) - (n-3)u_2$$

$$= (n-1)u_2 - (n-2)v_2 = (n-1)(2u_1 - v_1) - (n-2)u_1$$

$$= nu_1 - (n-1)v_1 = \boldsymbol{u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)}$$

因此，$\langle u_n\rangle$是首項為u_1，公差為$(u_1 - v_1)$的等差數列：

$$\langle u_n\rangle = \langle u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)\rangle \qquad (3-9)$$

由式$(3-7)$以及 $(3-9)$產生整數數列$\langle u_n\rangle$與$\langle v_n\rangle$

$$v_2 = u_1 = \boldsymbol{v_1 + (u_1 - v_1)}$$

$$v_3 = u_2 = 2u_1 - v_1 = \boldsymbol{v_1 + 2(u_1 - v_1)}$$

$$v_4 = u_3 = 3u_1 - 2v_1 = \boldsymbol{v_1 + 3(u_1 - v_1)}$$

$$\vdots$$

$v_n = u_{n-1} = (n-1)u_1 - (n-2)v_1 = \boldsymbol{v_1 + (n-1)(u_1 - v_1)}$

因此，$\langle v_n \rangle$是首項為v_1，公差為$(u_1 - v_1)$的等差數列：

$$\langle v_n \rangle = \langle v_1 + (n-1)(u_1 - v_1) \rangle \tag{3-10}$$

由式$(3-9)$及$(3-10)$的整數數列$\langle u_n \rangle$與$\langle v_n \rangle$產生$[(a_n, b_n, c_n)]$

$$\begin{cases} a_n = {u_n}^2 - {v_n}^2 = [u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]^2 - [v_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]^2 \\ b_n = 2u_n v_n = 2[u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)][v_1 + (n-1)(u_1 - v_1)] \\ c_n = {u_n}^2 + {v_n}^2 = [u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]^2 + [v_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]^2 \end{cases} \tag{3-11}$$

由$(3-11)$的素勾股數家族$[(a_n, b_n, c_n)]$得到股弦差為$(u_1 - v_1)^2$。

證明：$c_n - b_n = \{[u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]^2 + [v_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]^2\}$

$$-2[u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)][v_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]$$

$$= \{[u_1 + (n-1)(u_1 - v_1)] - [v_1 + (n-1)(u_1 - v_1)]\}^2$$

$$= (u_1 - v_1)^2$$

$\boxed{\text{結果}}$：當$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$：$\frac{v_1}{u_1}, \frac{u_1}{2u_1 - v_1}, \frac{u_2}{2u_2 - v_2}, \frac{u_3}{2u_3 - v_3}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1} - v_{n-1}}$，$\forall n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$

，$(u_n, v_n) = 1$，u_n, v_n一奇一偶時，則由$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$可產生股弦定差為$\left(u_1 - v_1\right)^2$

的素勾股數家族。

(二) 柏拉圖家族與勾弦定差的素勾股數家族

在柏拉圖家族$[(a_n, b_n, c_n)] = [(4n^2 - 1, 4n, 4n^2 + 1)]$ 轉換成歐幾里得家族

$[(a_n, b_n, c_n)] = [({u_n}^2 - {v_n}^2, 2u_n v_n, {u_n}^2 + {v_n}^2)]$的形式：

$$\begin{cases} a_n = 4n^2 - 1 = (2n)^2 - 1^2 = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ b_n = 4n = 2(2n)(1) = 2u_n v_n \\ c_n = 4n^2 + 1 = (2n)^2 + 1^2 = {u_n}^2 + {v_n}^2 \end{cases}$$

此時，$\langle u_n \rangle = \langle 2n \rangle$，$v_n = 1$。

所以，可由最簡真分數數列$\langle \frac{1}{2n} \rangle$產生柏拉圖家族。

$$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle：\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{20}, \frac{1}{22}, \frac{1}{24}, \frac{1}{26}, \frac{1}{28}, \frac{1}{30}, \cdots, \frac{1}{2n}$$

這個最簡真分數數列具有以下的規律性：

$$\frac{u_2}{v_2}-\frac{u_1}{v_1}=4-2=2 \tag{4-1}$$

$$\frac{u_3}{v_3}-\frac{u_2}{v_2}=6-4=2 \tag{4-2}$$

$$\frac{u_4}{v_4}-\frac{u_1}{v_1}=8-6=2 \tag{4-3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{u_n}{v_n}-\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}=2n-(2n-2)=2 \tag{4-4}$$

由式$(4-4)$移項產生：$\frac{u_n}{v_n}=2+\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leftrightarrow \frac{v_n}{u_n}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$，

因此，這個最簡真分數數列的遞迴關係式為：$\frac{v_n}{u_n}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$ $(4-5)$

研究三：探討遞迴關係式$(4-5)$

問題：當首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$時，由式$(4-5)$產生$\langle\frac{1}{2n}\rangle$；當首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$以外的最簡真分數時，則由式$(4-5)$產生何種$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$？前者產生勾弦定差為2的柏拉圖家族，後者會產生何種勾弦定差的素勾股數家族$[(a_n,b_n,c_n)]$？」

策略：利用遞迴關係式$\frac{v_n}{u_n}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$產生$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$的各項。

$$\frac{v_2}{u_2}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{v_1}{u_1}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{u_1}{v_1}}=\cfrac{1}{\cfrac{u_1+2v_1}{v_1}}=\frac{v_1}{u_1+2v_1}$$

$$\frac{v_3}{u_3}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{v_2}{u_2}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{u_2}{v_2}}=\cfrac{1}{\cfrac{u_2+2v_2}{v_2}}=\frac{v_2}{u_2+2v_2}$$

$$\frac{v_4}{u_4}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{v_3}{u_3}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{u_3}{v_3}}=\cfrac{1}{\cfrac{u_3+2v_3}{v_3}}=\frac{v_3}{u_3+2v_3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{v_n}{u_n}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}}=\cfrac{1}{\cfrac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{v_{n-1}}}=\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}+2v_{n-1}}$$

因此，最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ 為：

$$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{v_1}{u_1},\frac{v_1}{u_1+2v_1},\frac{v_2}{u_2+2v_2},\frac{v_3}{u_3+2v_3},\cdots,\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}+2v_{n-1}} \quad (4-6)$$

由式$(4-6)$的最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ 產生整數數列$\langle u_n\rangle$與$\langle v_n\rangle$

$$\langle u_n\rangle：u_1,u_1+2v_1,u_2+2v_2,u_3+2v_3,\cdots,u_{n-1}+2v_{n-1} \quad (4-7)$$

$$\langle v_n\rangle：v_1,v_1,v_2,v_3,\cdots,v_{n-1} \quad (4-8)$$

再產生勾股數家族$[(a_n,b_n,c_n)]=[(u_n{}^2-v_n{}^2,2u_nv_n,u_n{}^2+v_n{}^2)]$

則可得到勾弦定差：$c_n-a_n=(u_n{}^2+v_n{}^2)-(u_n{}^2-v_n{}^2)=2v_n{}^2$

$\boxed{\text{探討}}$：在首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$以外的最簡真分數時，我探討素勾股數家族的勾弦差。

$$\frac{v_1}{u_1}\xrightarrow{\text{由式}(4-6)}\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle\xrightarrow{\text{由式}(4-7)\text{以及}(4-8)}[(a_n,b_n,c_n)]\xrightarrow{\text{勾弦差}}c_n-a_n$$

(1) $\frac{v_1}{u_1}=\frac{2}{3}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{2}{3},\frac{2}{7},\frac{2}{11},\frac{2}{15},\cdots,\frac{2}{3+4(n-1)}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle=\langle\frac{2}{4n-1}\rangle$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(16n^2-8n-3,16n-4,16n^2-8n+5)]$

$\longrightarrow c_n-a_n=(16n^2-8n+5)-(16n^2-8n-3)=8=2(2)^2=2v_1{}^2$

(2) $\frac{v_1}{u_1}=\frac{2}{5}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{2}{5},\frac{2}{9},\frac{2}{13},\frac{2}{17},\cdots,\frac{2}{5+4(n-1)}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle=\langle\frac{2}{4n+1}\rangle$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(16n^2+8n-3,16n-4,16n^2+8n+5)]$

$\longrightarrow c_n-a_n=(16n^2+8n+5)-(16n^2+8n-3)=8=2(2)^2=2v_1{}^2$

(3) $\frac{v_1}{u_1}=\frac{3}{4}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{3}{4},\frac{3}{10},\frac{3}{16},\frac{3}{22},\cdots,\frac{3}{4+6(n-1)}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle=\langle\frac{3}{6n-2}\rangle$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(36n^2-24n-5,36n-12,36n^2-24n+13)]$

$\longrightarrow c_n-a_n=(36n^2-24n+13)-(36n^2-24n-5)=18=2(3)^2=2v_1{}^2$

(4) $\frac{v_1}{u_1}=\frac{3}{8}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{3}{8},\frac{3}{14},\frac{3}{20},\frac{3}{26},\cdots,\frac{3}{8+6(n-1)}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle=\langle\frac{3}{6n+2}\rangle$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(36n^2+24n-5,36n+12,36n^2+24n+13)]$

$\longrightarrow c_n-a_n=(36n^2+24n+13)-(36n^2+24n-5)=18=2(3)^2=2v_1{}^2$

(5) $\frac{v_1}{u_1}=\frac{4}{5}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{4}{5},\frac{4}{13},\frac{4}{21},\frac{4}{29},\cdots,\frac{4}{5+8(n-1)}\rightarrow\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle=\langle\frac{4}{8n-3}\rangle$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(64n^2-48n-7,64n-24,64n^2-48n+13)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (64n^2 - 48n + 25) - (64n^2 - 48n - 7) = 32 = 2(4)^2 = 2{v_1}^2$

(6) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{4}{7} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{4}{7},\dfrac{4}{15},\dfrac{4}{23},\dfrac{4}{31},\cdots,\dfrac{4}{7+8(n-1)} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\dfrac{4}{8n-1}\rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(64n^2 - 16n - 15, 64n - 24, 64n^2 - 16n + 17)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (64n^2 - 16n + 17) - (64n^2 - 16n - 15) = 32 = 2(4)^2 = 2{v_1}^2$

(7) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{4}{9} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{4}{9},\dfrac{4}{17},\dfrac{4}{25},\dfrac{4}{33},\cdots,\dfrac{4}{9+8(n-1)} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\dfrac{4}{8n+1}\rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(64n^2 + 16n - 15, 64n - 24, 64n^2 + 16n + 17)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (64n^2 + 16n + 17) - (64n^2 + 16n - 15) = 32 = 2(4)^2 = 2{v_1}^2$

(8) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{4}{11} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{4}{11},\dfrac{4}{19},\dfrac{4}{27},\dfrac{4}{35},\cdots,\dfrac{4}{11+8(n-1)} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\dfrac{4}{8n+3}\rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(64n^2 + 48n - 7, 72n + 24, 64n^2 + 48n + 13)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (64n^2 + 48n + 25) - (64n^2 + 48n - 7) = 32 = 2(4)^2 = 2{v_1}^2$

(9) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{5}{6} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{5}{6},\dfrac{5}{16},\dfrac{5}{26},\dfrac{5}{36},\cdots,\dfrac{5}{6+10(n-1)} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\dfrac{5}{10n-4}\rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(100n^2 - 80n - 9, 100n - 40, 100n^2 - 80n + 41)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (100n^2 - 80n + 41) - (100n^2 - 80n - 9) = 50 = 2(5)^2 = 2{v_1}^2$

(10) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{5}{8} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{5}{8},\dfrac{5}{18},\dfrac{5}{28},\dfrac{5}{38},\cdots,\dfrac{5}{8+10(n-1)} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\dfrac{5}{10n-2}\rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(100n^2 - 40n - 21, 100n - 20, 100n^2 - 40n + 29)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (100n^2 - 40n + 29) - (100n^2 - 40n - 40) = 50 = 2(5)^2 = 2{v_1}^2$

(11) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{5}{12} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{5}{12},\dfrac{5}{22},\dfrac{5}{32},\dfrac{5}{42},\cdots,\dfrac{5}{12+10(n-1)} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\dfrac{5}{10n+2}\rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(100n^2 + 40n - 21, 100n + 20, 100n^2 + 40n + 29)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (100n^2 + 40n + 29) - (100n^2 - 40n - 40) = 50 = 2(5)^2 = 2{v_1}^2$

(12) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{5}{14} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{5}{14},\dfrac{5}{24},\dfrac{5}{34},\dfrac{5}{44},\cdots,\dfrac{5}{14+10(n-1)} \to \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle = \langle\dfrac{5}{10n+4}\rangle$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(100n^2 + 80n - 9, 100n + 40, 100n^2 + 80n + 41)]$

$\longrightarrow c_n - a_n = (100n^2 + 80n + 41) - (100n^2 + 80n - 9) = 50 = 2(5)^2 = 2{v_1}^2$

結果：最簡真分數數列 $\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle \xrightarrow{\text{產生素勾股數家族}[(a_n,b_n,c_n)]}$ 勾弦定差 $(c_n - a_n)$

(1)□ $\langle\frac{2}{4n-1}\rangle$ 或 $\langle\frac{2}{4n+1}\rangle \rightarrow c_n - a_n = 8$

(2)□ $\langle\frac{3}{6n-2}\rangle$ 或 $\langle\frac{3}{6n+2}\rangle \rightarrow c_n - a_n = 18$

(3)□ $\langle\frac{4}{8n-3}\rangle$ 、$\langle\frac{4}{8n-1}\rangle$ 、$\langle\frac{4}{8n+1}\rangle$ 或 $\langle\frac{4}{8n+3}\rangle \rightarrow c_n - a_n = 32$

(4)□ $\langle\frac{5}{10n-4}\rangle$ 、$\langle\frac{5}{10n-2}\rangle$ 、$\langle\frac{5}{10n+2}\rangle$ 或 $\langle\frac{5}{10n+4}\rangle \rightarrow c_n - a_n = 50$

研究四：探討式$(\mathbf{4-6})$的最簡真分數數列

問題：由式$(4-6)$能否產生更多的勾弦定差的素勾股數家族？

探討：由式$(4-8)$產生$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = \cdots = v_{n-1} = v_n$

即$v_n = v_1$ $\qquad (4-9)$

由式$(4-7)$以及 $(4-9)$產生整數數列$\langle u_n\rangle$

$u_2 = \boldsymbol{u_1 + 2v_1}$

$u_3 = u_2 + 2v_2 = (u_1 + 2v_1) + 2v_1 = \boldsymbol{u_1 + 4v_1}$

$u_4 = u_3 + 2v_3 = (u_2 + 2v_2) + 2v_2 = u_2 + 4v_2 = (u_1 + 2v_1) + 4v_1 = \boldsymbol{u_1 + 6v_1}$

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} + 2v_{n-1} = (u_{n-2} + 2v_{n-2}) + 2v_{n-2} \\
&= u_{n-2} + 4v_{n-2} = (u_{n-3} + 2v_{n-3}) + 4v_{n-3} \\
&= u_{n-3} + 6v_{n-3} = (u_{n-4} + 2v_{n-4}) + 6v_{n-4} \\
&= u_{n-4} + 8v_{n-4} = (u_{n-5} + 2v_{n-5}) + 8v_{n-5} \\
&\ \ \vdots \\
&= u_3 + 2(n-3)v_3 = (u_2 + 2v_2) + 2(n-3)v_2 \\
&= u_2 + 2(n-2)v_2 = (u_1 + 2v_1) + 2(n-2)v_1 = \boldsymbol{u_1 + 2(n-1)v_1}
\end{aligned}
$$

即$\langle u_n\rangle = \langle u_1 + 2(n-1)v_1\rangle$ $\qquad (4-10)$

由式$(4-9)$的v_n以及 $(4-10)$的整數數列$\langle u_n\rangle$產生 $[(a_n, b_n, c_n)]$

$$
\begin{cases}
a_n = {u_n}^2 - {v_n}^2 = [u_1 + 2(n-1)v_1]^2 - {v_1}^2 \\
b_n = 2u_n v_n = 2[u_1 + 2(n-1)v_1]v_1 \\
c_n = {u_n}^2 + {v_n}^2 = [u_1 + 2(n-1)v_1]^2 + {v_1}^2
\end{cases}
\qquad (4-11)
$$

由$(4-11)$的素勾股數家族$[(a_n, b_n, c_n)]$得到勾弦差為$2{v_1}^2$

證明：$c_n - a_n \ = \{[u_1 + 2(n-1)v_1]^2 + {v_1}^2\} - \{[u_1 + 2(n-1)v_1]^2 - {v_1}^2\}$

$= 2{v_1}^2$

$\boxed{\text{結果}}$：當 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\frac{v_1}{u_1}, \frac{v_1}{u_1+2v_1}, \frac{v_2}{u_2+2v_2}, \frac{v_3}{u_3+2v_3}, \cdots, \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}+2v_{n-1}}$ ，$\forall n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，

$(u_n, v_n) = 1$，u_n, v_n一奇一偶時，則由 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ 可產生勾弦定差為 $2{v_1}^2$ 的素勾股數家族。

(三) 費馬家族與勾股定差的素勾股數家族

在費馬家族$[(a_n, b_n, c_n)] = \left[\left({P_{n+1}}^2 - {P_n}^2, 2P_{n+1}P_n, {P_{n+1}}^2 + {P_n}^2\right)\right]$ 轉換成歐幾里得家族$[(a_n, b_n, c_n)] = [({u_n}^2 - {v_n}^2, 2u_nv_n, {u_n}^2 + {v_n}^2)]$的形式：

$$\begin{cases} a_n = {P_{n+1}}^2 - {P_n}^2 = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ b_n = 2P_{n+1}P_n \ = 2u_nv_n \\ c_n = {P_{n+1}}^2 + {P_n}^2 = {u_n}^2 + {v_n}^2 \end{cases}, \langle P_n \rangle \text{是佩爾數列。}$$

所以$\langle u_n \rangle = \langle P_{n+1} \rangle, \langle v_n \rangle = \langle P_n \rangle, u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}, v_n = 2v_{n-1} + v_{n-2}, v_n = u_{n-1}$。

因此，可由最簡真分數數列 $\langle\frac{P_n}{P_{n+1}}\rangle$ 產生費馬家族家族。

$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \frac{169}{408}, \frac{408}{985}, \frac{985}{2378}, \frac{2378}{5471}, \cdots, \frac{P_n}{P_{n+1}}$

這個最簡真分數數列具有以下的規律性：

$$\frac{u_2}{v_2} - \frac{v_1}{u_1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \qquad (5-1)$$

$$\frac{u_3}{v_3} - \frac{v_2}{u_2} = \frac{12}{5} - \frac{2}{5} = 2 \qquad (5-2)$$

$$\frac{u_4}{v_4} - \frac{v_1}{u_1} = \frac{29}{12} - \frac{5}{12} = 2 \qquad (5-3)$$

$$\vdots$$

$$\frac{u_n}{v_n} - \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{P_{n+1}}{P_n} - \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} - \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{2P_n}{P_n} = 2 \qquad (5-4)$$

由式$(5-4)$移項產生：$\frac{u_n}{v_n} = 2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} \leftrightarrow \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$

因此，這個最簡真分數數列的遞迴關係式為： $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ $\qquad (5-5)$

研究五：探討遞迴關係式$(5-5)$

$\boxed{\text{問題}}$：當首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$時，由式$(5-5)$生成$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle=\langle\frac{P_n}{P_{n+1}}\rangle$；當首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$以外的最簡真分數時，則由式$(5-5)$會產生何種$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$？前者可以產生勾股定差為1的費馬家族，後者則會產生何種勾股定差的素勾股數家族？

$\boxed{\text{策略}}$：利用遞迴關係式$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$產生$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$的各項。

$$\frac{v_2}{u_2}=\frac{1}{2+\frac{v_1}{u_1}}=\frac{1}{\frac{2u_1+v_1}{u_1}}=\frac{u_1}{2u_1+v_1}$$

$$\frac{v_3}{u_3}=\frac{1}{2+\frac{v_2}{u_2}}=\frac{1}{\frac{2u_2+v_2}{u_2}}=\frac{u_2}{2u_2+v_2}$$

$$\frac{v_4}{u_4}=\frac{1}{2+\frac{v_3}{u_3}}=\frac{1}{\frac{2u_3+v_3}{u_3}}=\frac{u_3}{2u_3+v_3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}=\frac{1}{\frac{2u_{n-1}+v_{n-1}}{u_{n-1}}}=\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$$

因此，最簡真分數數列$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$為：

$$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle：\frac{v_1}{u_1},\frac{u_1}{2u_1+v_1},\frac{u_2}{2u_2+v_2},\frac{u_3}{2u_3+v_3},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}} \qquad (5-6)$$

由式$(5-6)$最簡真分數數列$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$產生整數數列$\langle u_n\rangle,\langle v_n\rangle$及素勾股數家族

$$\langle u_n\rangle：u_1,2u_1+v_1,2u_2+v_2,2u_3+v_3,\cdots,2u_{n-1}+v_{n-1} \qquad (5-7)$$

$$\langle v_n\rangle：v_1,u_1,u_2,u_3,\cdots,u_{n-1} \qquad (5-8)$$

再產生素勾股數家族$[(a_n,b_n,c_n)]=[(u_n{}^2-v_n{}^2,2u_nv_n,u_n{}^2+v_n{}^2)]$

則可得到勾股定差：$|b_n-a_n|=|2u_nv_n-(u_n{}^2-v_n{}^2)|$。

$\boxed{\text{探討}}$：在首項$\frac{v_1}{u_1}$為$\frac{1}{2}$以外的最簡真分數時，我探討素勾股數家族的勾股差。

$$\frac{v_1}{u_1}\xrightarrow{\text{由式}(5-6)}\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle\xrightarrow{\text{由式}(5-7)\text{以及}(5-8)}[(a_n,b_n,c_n)]\xrightarrow{\text{勾股差}}|b_n-a_n|$$

(1) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{2}{3}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{2}{3},\dfrac{3}{8},\dfrac{8}{19},\dfrac{19}{46}\ ,\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(5,12,13),(55,48,73),(297,304,425),(1755,1748,2477),\cdots]$

$\longrightarrow|b_1-a_1|=|b_2-a_2|=|b_3-a_3|=|b_4-a_4|=\cdots=7=|2u_1v_1\ -({u_1}^2-{v_1}^2)|$

(2) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{1}{4}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{1}{4},\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{22},\dfrac{22}{53}\ ,\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(15,8,17),(65,72,97),(403,396,565),(2325,2332,3293),\cdots]$

$\longrightarrow|b_1-a_1|=|b_2-a_2|=|b_3-a_3|=|b_4-a_4|=\cdots=7=|2u_1v_1\ -({u_1}^2-{v_1}^2)|$

(3) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{3}{4}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{3}{4},\dfrac{4}{11},\dfrac{11}{26},\dfrac{26}{63},\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(7,24,25),(105,88,137),(555,572,797),(3293,3276,4645),\cdots]$

$\longrightarrow|b_1-a_1|=|b_2-a_2|=|b_3-a_3|=|b_4-a_4|=\cdots=17=|2u_1v_1\ -({u_1}^2-{v_1}^2)|$

(4) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{4}{5}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{4}{5},\dfrac{5}{14},\dfrac{14}{33},\dfrac{33}{80},\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(9,40,41),(171,140,221),(893,924,1285),(5311,5280,7489),\cdots]$

$\longrightarrow|b_1-a_1|=|b_2-a_2|=|b_3-a_3|=|b_4-a_4|=\cdots=31=|2u_1v_1\ -({u_1}^2-{v_1}^2)|$

(5) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{1}{6}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{1}{6},\dfrac{6}{13},\dfrac{13}{32},\dfrac{32}{77},\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(35,12,37),(133,156,205),(855,832,1193),(4905,4928,6953),\cdots]$

$\longrightarrow|b_1-a_1|=|b_2-a_2|=|b_3-a_3|=|b_4-a_4|=\cdots=23=|2u_1v_1\ -({u_1}^2-{v_1}^2)|$

(6) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{2}{7}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{2}{7},\dfrac{7}{16},\dfrac{16}{39},\dfrac{39}{94},\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(45,28,53),(207,224,305)\ ,(1265,1248,1777),(7315,7332,10357),\cdots]$

$\longrightarrow|b_1-a_1|=|b_2-a_2|=|b_3-a_3|=|b_4-a_4|=\cdots=17=\left|2u_1v_1\ -\left({u_1}^2-{v_1}^2\right)\right|$

(7) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{4}{7}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{4}{7},\dfrac{7}{18},\dfrac{18}{43},\dfrac{43}{104},\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(33,56,65),(275,252,373),(1525,1548,2173),(8967,8944,10816),\cdots]$

$\longrightarrow|b_1-a_1|=|b_2-a_2|=|b_3-a_3|=|b_4-a_4|=\cdots=23=|2u_1v_1\ -({u_1}^2-{v_1}^2)|$

(8) $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{5}{8}\longrightarrow\langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle\ :\ \dfrac{5}{8},\dfrac{8}{21},\dfrac{21}{50},\dfrac{50}{121},\cdots,\dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$

$\longrightarrow[(a_n,b_n,c_n)]=[(39,80,89),(377,336,505),(2059,2100,2941),(12141,12100,17141),\cdots]$

$\longrightarrow |b_1 - a_1| = |b_2 - a_2| = |b_3 - a_3| = |b_4 - a_4| = \cdots = 41 = |2u_1v_1 - ({u_1}^2 - {v_1}^2)|$

(9) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{2}{9} \longrightarrow \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{2}{9}, \dfrac{9}{20}, \dfrac{20}{49}, \dfrac{49}{118}, \cdots, \dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1} + v_{n-1}}$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(77,36,85), (319,360,481), (2001,1960,2801), (11523,11564,16325), \cdots]$

$\longrightarrow |b_1 - a_1| = |b_2 - a_2| = |b_3 - a_3| = |b_4 - a_4| = \cdots = 41 = |2u_1v_1 - ({u_1}^2 - {v_1}^2)|$

(10) $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{3}{10} \longrightarrow \langle\dfrac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\dfrac{3}{10}, \dfrac{10}{23}, \dfrac{23}{56}, \dfrac{56}{135}, \cdots, \dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1} + v_{n-1}}$

$\longrightarrow [(a_n, b_n, c_n)] = [(91,60,109), (429,460,629), (2607,2576,3665), (15089,15120,21361), \cdots]$

$\longrightarrow |b_1 - a_1| = |b_2 - a_2| = |b_3 - a_3| = |b_4 - a_4| = \cdots = 31 = |2u_1v_1 - ({u_1}^2 - {v_1}^2)|$

$\boxed{\text{結果}}$：最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle \xrightarrow{\text{產生素勾股數家族}[(a_n,b_n,c_n)]}$ 勾股定差 $|b_n - a_n|$

(1) $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{19}, \frac{19}{46}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 或 $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{22}, \frac{22}{53}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}} \longrightarrow |b_n - a_n| = 7$

(2) $\frac{3}{4}, \frac{4}{11}, \frac{11}{26}, \frac{26}{63}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 或 $\frac{2}{7}, \frac{7}{16}, \frac{16}{39}, \frac{39}{94}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}} \longrightarrow |b_n - a_n| = 17$

(3) $\frac{1}{6}, \frac{6}{13}, \frac{13}{32}, \frac{32}{77}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 或 $\frac{4}{7}, \frac{7}{18}, \frac{18}{43}, \frac{43}{104}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}} \longrightarrow |b_n - a_n| = 23$

(4) $\frac{4}{5}, \frac{5}{14}, \frac{14}{33}, \frac{33}{80}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 或 $\frac{3}{10}, \frac{10}{23}, \frac{23}{56}, \frac{56}{135}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}} \longrightarrow |b_n - a_n| = 31$

(5) $\frac{5}{8}, \frac{8}{21}, \frac{21}{50}, \frac{50}{121}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 或 $\frac{2}{9}, \frac{9}{20}, \frac{20}{49}, \frac{49}{118}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}} \longrightarrow |b_n - a_n| = 41$

研究六：探討式(5 − 6)的最簡真分數數列

$\boxed{\text{問題}}$：由式(5 − 6)能否產生更多的勾股定差的素勾股數家族？

$\boxed{\text{探討}}$：由式(5 − 7)以及 (5 − 8)產生整數數列$\langle u_n\rangle$與$\langle v_n\rangle$

$u_1 = v_2$

$u_2 = 2u_1 + v_1 = v_3$

$u_3 = 2u_2 + v_2 = v_3$

$u_4 = 2u_3 + v_3 = v_4$

$\vdots$

$u_{n-1} = 2u_{n-2} + v_{n-2} = v_{n-1}$

$u_n = 2u_{n-1} + v_{n-1}$

因此，$\langle u_n\rangle$的遞迴關係式可表示為：

$u_n=2u_{n-1}+v_{n-1},\forall n\in N$，$n\geq 2$ $(5-9)$

$\langle v_n\rangle$的遞迴關係式可表示為：

$v_2=u_1$，$v_n=2u_{n-2}+v_{n-2}=u_{n-1},\forall n\in N$，$n\geq 3$ $(5-10)$

由式$(5-9)$以及 $(5-10)$的整數數列$\langle v_n\rangle$與$\langle u_n\rangle$產生$[(a_n,b_n,c_n)]$

$[(a_n,b_n,c_n)]$=$[({u_n}^2-{v_n}^2,2u_nv_n,{u_n}^2+{v_n}^2)]$，$v_2=u_1,$

$u_n=2u_{n-1}+v_{n-1}$，$n\geq 2,v_n=2u_{n-2}+v_{n-2}=u_{n-1}$，$n\geq 3$ $(5-11)$

由$(5-11)$素勾股數家族$[(a_n,b_n,c_n)]$得到勾股差為$|2u_1v_1-({u_1}^2-{v_1}^2)|$。

證明：
$$
\begin{aligned}
|b_n-a_n| &= |2u_nu_{n-1}-({u_n}^2-{u_{n-1}}^2)| \\
&= |2(2u_{n-1}+u_{n-2})u_{n-1}-[(2u_{n-1}+u_{n-2})^2-{u_{n-1}}^2]| \\
&= |2u_{n-1}u_{n-2}-({u_{n-1}}^2-{u_{n-2}}^2)| \\
&= |2(2u_{n-2}+u_{n-3})u_{n-2}-[(2u_{n-2}+u_{n-3})^2-{u_{n-2}}^2]| \\
&= |2u_{n-2}u_{n-3}-({u_{n-2}}^2-{u_{n-3}}^2)| \\
&\quad\vdots \\
&= |2u_3u_2-({u_3}^2-{u_2}^2)| \\
&= |2(2u_2+u_1)u_2-[(2u_2+u_1)^2-{u_2}^2]| \\
&= |2u_2u_1-({u_2}^2-{u_1}^2)| \\
&= |2(2u_1+v_1)u_1-[(2u_1+v_1)^2-{u_1}^2]| \\
&= |2u_1v_1-({u_1}^2-{v_1}^2)|
\end{aligned}
$$

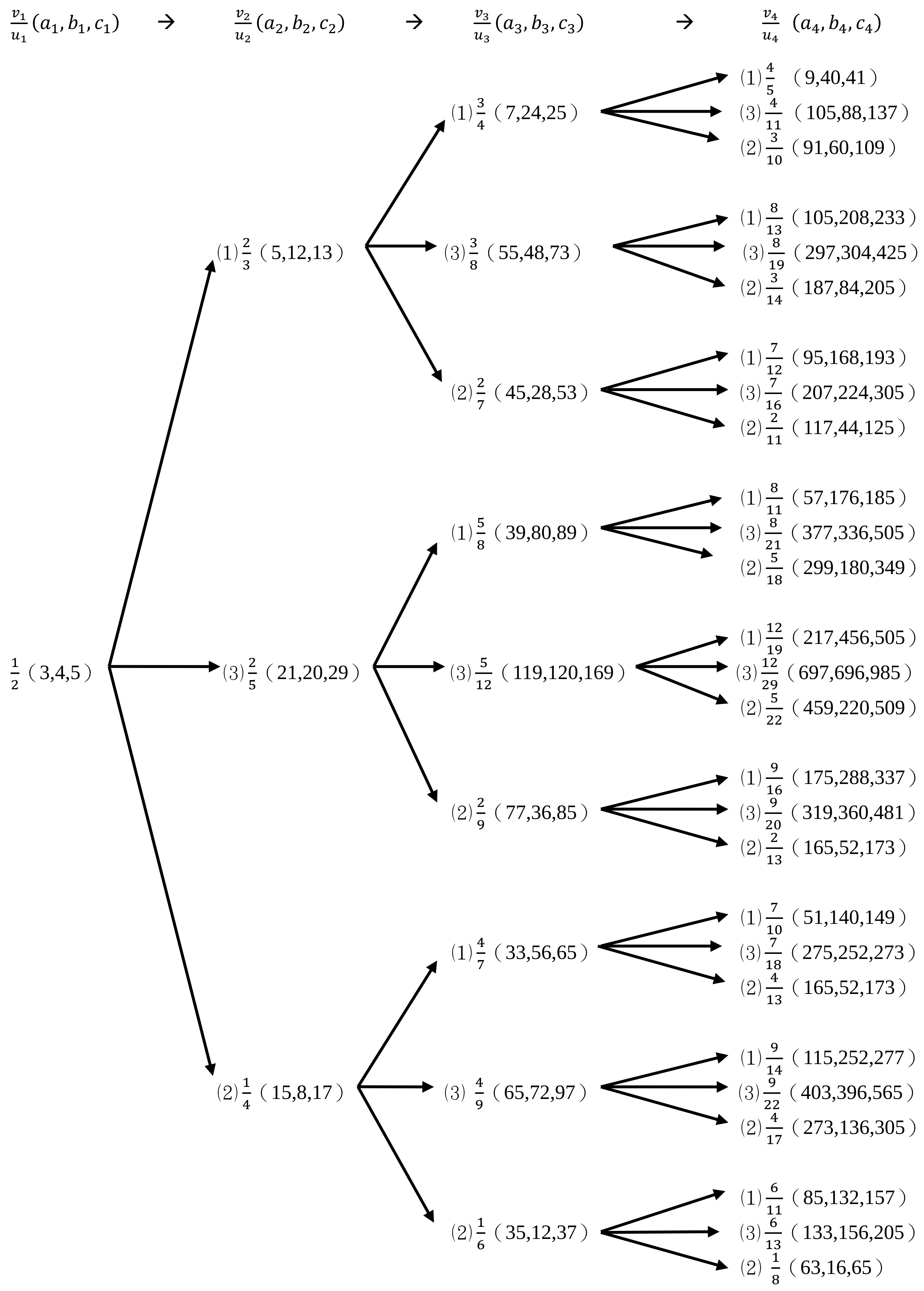
$\boxed{\text{結果}}$：當$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$：$\frac{v_1}{u_1},\frac{u_1}{2u_1+v_1},\frac{u_2}{2u_2+v_2},\frac{u_3}{2u_3+v_3},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，$\forall n,u_n,v_n\in N$，$u_n>v_n$，

（u_n,v_n）$=1$，u_n,v_n一奇一偶時，則由$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$可產生勾股定差為

$|2u_1v_1-({u_1}^2-{v_1}^2)|$的素勾股數家族。

四、 貝格倫的素勾股數三元樹

利用遞迴關係式⑴$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，⑵$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$，⑶$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，我則由分數$\frac{1}{2}$開始，利用遞迴公式⑴、⑵和⑶產生貝格倫的素勾股數三元樹(圖二)。



圖二　由(1)□ $\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，(2) $\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$ 及(3) $\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ 產生貝格倫的素勾股數三元樹

伍、 研究結果

一、 由歐幾里得家族產生$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$，$\forall n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，$(u_n, v_n) = 1$，$u_n, v_n$ 一奇一偶。再由最簡真分數數列$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$產生下列各種的素勾股數家族。

(一) 最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle \xrightarrow{\text{產生素勾股數家族}[(a_n,b_n,c_n)]}$ 股弦定差$(c_n - b_n)$

1. $\langle\frac{n}{n+1}\rangle \xrightarrow{\text{產生畢達哥拉斯家族}}$ 股弦定差為 1。
2. $\langle\frac{3n-2}{3n+1}\rangle$ 或 $\langle\frac{3n-1}{3n+2}\rangle \longrightarrow$ 股弦定差為 9。
3. $\langle\frac{5n-4}{5n+1}\rangle$ 、$\langle\frac{5n-3}{5n+2}\rangle$ 、$\langle\frac{5n-2}{5n+3}\rangle$ 或 $\langle\frac{5n-1}{5n+4}\rangle \longrightarrow$ 股弦定差為 25。
4. $\frac{v_1}{u_1}, \frac{u_1}{2u_1-v_1}, \frac{u_2}{2u_2-v_2}, \frac{u_3}{2u_3-v_3}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}-v_{n-1}}$，$\forall\, n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，

   $(u_n, v_n) = 1$，u_n, v_n一奇一偶 $\longrightarrow$ 股弦定差為$(u_1 - v_1)^2$。

(二) 最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle \xrightarrow{\text{產生素勾股數家族}[(a_n,b_n,c_n)]}$ 勾弦定差$(c_n - a_n)$

1. $\langle\frac{1}{2n}\rangle \xrightarrow{\text{產生柏拉圖家族}}$ 勾弦定差為 2。
2. $\langle\frac{2}{4n-1}\rangle$ 或 $\langle\frac{2}{4n+1}\rangle \longrightarrow$ 勾弦定差為 8。
3. $\langle\frac{3}{6n-2}\rangle$ 或 $\langle\frac{3}{6n+2}\rangle \longrightarrow$ 勾弦定差為 18。
4. $\langle\frac{4}{8n-3}\rangle$ 、$\langle\frac{4}{8n-1}\rangle$ 、$\langle\frac{4}{8n+1}\rangle$ 或 $\langle\frac{4}{8n+3}\rangle \longrightarrow$ 勾弦定差為 32。
5. 由 $\langle\frac{5}{10n-4}\rangle$ 、$\langle\frac{5}{10n-2}\rangle$ 、$\langle\frac{5}{10n+2}\rangle$ 或 $\langle\frac{5}{10n+4}\rangle \longrightarrow$ 勾弦定差為 50。
6. $\frac{v_1}{u_1}, \frac{v_1}{u_1+2v_1}, \frac{v_2}{u_2+2v_2}, \frac{v_3}{u_3+2v_3}, \cdots, \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}+2v_{n-1}}$，$\forall\, n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，

   $(u_n, v_n) = 1$，u_n, v_n一奇一偶 $\longrightarrow$ 勾弦定差為 $2{v_1}^2$。

(三) 最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle \xrightarrow{\text{產生素勾股數家族}[(a_n,b_n,c_n)]}$ 勾股定差$|b_n - a_n|$

1. $\langle\frac{P_n}{P_{n+1}}\rangle$，$\langle P_n\rangle$是佩爾數列 $\xrightarrow{\text{產生費馬家族}[(a_n,b_n,c_n)]}$ $|b_n - a_n| = 1$
2. $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{19}, \frac{19}{46}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 或 $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{22}, \frac{22}{53}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}} \longrightarrow$ 勾股定差為 7。

3. $\frac{3}{4},\frac{4}{11},\frac{11}{26},\frac{26}{63},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$或$\frac{2}{7},\frac{7}{16},\frac{16}{39},\frac{39}{94},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}\longrightarrow$勾股定差為 17。

4. $\frac{1}{6},\frac{6}{13},\frac{13}{32},\frac{32}{77},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$或$\frac{4}{7},\frac{7}{18},\frac{18}{43},\frac{43}{104},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}\longrightarrow$勾股定差為 23。

5. $\frac{4}{5},\frac{5}{14},\frac{14}{33},\frac{33}{80},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$或$\frac{3}{10},\frac{10}{23},\frac{23}{56},\frac{56}{135},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}\longrightarrow$勾股定差為 31。

6. $\frac{5}{8},\frac{8}{21},\frac{21}{50},\frac{50}{121},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$或$\frac{2}{9},\frac{9}{20},\frac{20}{49},\frac{49}{118},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}\longrightarrow$勾股定差為 41。

7. $\frac{v_1}{u_1},\frac{u_1}{2u_1+v_1},\frac{u_2}{2u_2+v_2},\frac{u_3}{2u_3+v_3},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，$\forall\, n,u_n,v_n\in N$，$u_n > v_n$，

$(u_n,v_n)=1$，u_n,v_n一奇一偶$\longrightarrow$勾股定差為$\left|2u_1v_1-\left({u_1}^2-{v_1}^2\right)\right|$。

二、 從$\frac{v_1}{u_1}=\frac{1}{2}$開始，利用(1)$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$，(2)$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}}$，(3)$\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$產生了貝格倫的素勾股數三元樹。

陸、 討論

一、 在本研究由不同的最簡真分數數列所產生股弦定差的素勾股數家族中，除了股弦定差為1有1條最簡真分數數列之外，股弦定差為9以及25各有2以及4條最簡真分數數列。接下來，再找到了股弦定差為49、81、121以及169各有6、6、10以及12條最簡真分數數列（表三）。因此，產生股弦定差的素勾股數家族之最簡真分數數列具有下列的規律。由此，我可推得股弦定差為225、289以及361各有8、16以及18條最簡真分數數列（表三）。

(一) 產生股弦定差為$(u_1-v_1)^2$的最簡真分數數列之條數為：

小於(u_1-v_1)的正整數中與(u_1-v_1)互質的數之數目。

(二) 這些最簡真分數數列可表示為：

將小於(u_1-v_1)的正整數中與(u_1-v_1)互質的數由小到大排列設為整數數列

$\langle s_m\rangle$：$s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{m-2},s_{m-1},s_m$，$\forall\, m\in N$。

則產生股弦定差$(u_1-v_1)^2$的素勾股數家族的最簡真分數數列有

$\langle\frac{(u_1-v_1)n-s_1}{(u_1-v_1)n+s_m}\rangle,\langle\frac{(u_1-v_1)n-s_2}{(u_1-v_1)n+s_{m-1}}\rangle,\langle\frac{(u_1-v_1)n-s_3}{(u_1-v_1)n+s_{m-2}}\rangle,\cdots,\langle\frac{(u_1-v_1)n-s_{m-2}}{(u_1-v_1)n+s_3}\rangle\ \langle\frac{(u_1-v_1)n-s_{m-1}}{(u_1-v_1)n+s_2}\rangle,\langle\frac{(u_1-v_1)n-s_m}{(u_1-v_1)n+s_1}\rangle$

表三　產生股弦定差的素勾股數家族的最簡真分數數列係數

$u_1 - v_1$	$c_n - b_n$	$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$	係數
1	1	$\langle \frac{n}{n+1} \rangle$	1
3	9	$\langle \frac{3n-2}{3n+1} \rangle, \langle \frac{3n-1}{3n+2} \rangle$	2
5	25	$\langle \frac{5n-4}{5n+1} \rangle, \langle \frac{5n-3}{5n+2} \rangle, \langle \frac{5n-2}{5n+3} \rangle, \langle \frac{5n-1}{5n+4} \rangle$	4
7	49	$\langle \frac{7n-6}{7n+1} \rangle, \langle \frac{7n-5}{7n+2} \rangle, \langle \frac{7n-4}{7n+3} \rangle, \langle \frac{7n-3}{7n+4} \rangle, \langle \frac{7n-2}{7n+5} \rangle, \langle \frac{7n-1}{7n+6} \rangle$	6
9	81	$\langle \frac{9n-8}{9n+1} \rangle, \langle \frac{9n-7}{9n+2} \rangle, \langle \frac{9n-5}{9n+4} \rangle, \langle \frac{9n-4}{9n+5} \rangle, \langle \frac{9n-2}{9n+7} \rangle, \langle \frac{9n-1}{9n+8} \rangle$	6
11	121	$\langle \frac{11n-1}{11n+10} \rangle, \langle \frac{11n-2}{11n+9} \rangle, \langle \frac{11n-3}{11n+8} \rangle, \langle \frac{11n-4}{11n+7} \rangle, \langle \frac{11n-5}{11n+6} \rangle,$ $\langle \frac{11n-6}{11n+5} \rangle, \langle \frac{11n-7}{11n+4} \rangle, \langle \frac{11n-8}{11n+3} \rangle, \langle \frac{11n-9}{11n+2} \rangle, \langle \frac{11n-10}{11n+1} \rangle$	10
13	169	$\langle \frac{13n-1}{13n+12} \rangle, \langle \frac{13n-2}{13n+11} \rangle, \langle \frac{13n-3}{13n+10} \rangle, \langle \frac{13n-4}{13n+9} \rangle, \langle \frac{13n-5}{13n+8} \rangle, \langle \frac{13n-6}{13n+7} \rangle,$ $\langle \frac{13n-7}{13n+6} \rangle, \langle \frac{13n-8}{13n+5} \rangle, \langle \frac{13n-9}{13n+4} \rangle, \langle \frac{13n-10}{13n+3} \rangle, \langle \frac{13n-11}{13n+2} \rangle, \langle \frac{13n-12}{13n+1} \rangle$	12
15	225	$\langle \frac{15n-14}{15n+1} \rangle, \langle \frac{15n-13}{15n+2} \rangle, \langle \frac{15n-11}{15n+4} \rangle, \langle \frac{15n-8}{15n+7} \rangle, \langle \frac{15n-7}{15n+8} \rangle, \langle \frac{15n-4}{15n+11} \rangle, \langle \frac{15n-2}{15n+13} \rangle, \langle \frac{15n-1}{15n+14} \rangle$	8
17	289	$\langle \frac{17n-1}{17n+16} \rangle, \langle \frac{17n-2}{17n+15} \rangle, \langle \frac{17n-3}{17n+14} \rangle, \langle \frac{17n-4}{17n+13} \rangle, \langle \frac{17n-5}{17n+12} \rangle, \langle \frac{17n-6}{17n+11} \rangle, \langle \frac{17n-7}{17n+10} \rangle, \langle \frac{17n-8}{17n+9} \rangle,$ $\langle \frac{17n-9}{17n+8} \rangle, \langle \frac{17n-10}{17n+7} \rangle, \langle \frac{17n-11}{17n+6} \rangle, \langle \frac{17n-12}{17n+5} \rangle, \langle \frac{17n-13}{17n+4} \rangle, \langle \frac{17n-14}{17n+3} \rangle, \langle \frac{17n-15}{17n+2} \rangle, \langle \frac{17n-16}{17n+1} \rangle$	16
19	361	$\langle \frac{19n-1}{19n+18} \rangle, \langle \frac{19n-2}{19n+17} \rangle, \langle \frac{19n-3}{19n+16} \rangle, \langle \frac{19n-4}{19n+15} \rangle, \langle \frac{19n-5}{19n+14} \rangle, \langle \frac{19n-6}{19n+13} \rangle, \langle \frac{19n-7}{19n+12} \rangle, \langle \frac{19n-8}{19n+11} \rangle, \langle \frac{19n-9}{19n+10} \rangle,$ $\langle \frac{19n-10}{19n+9} \rangle, \langle \frac{19n-11}{19n+8} \rangle, \langle \frac{19n-12}{19n+7} \rangle, \langle \frac{19n-13}{19n+6} \rangle, \langle \frac{19n-14}{19n+5} \rangle, \langle \frac{19n-15}{19n+4} \rangle, \langle \frac{19n-16}{19n+3} \rangle, \langle \frac{19n-17}{19n+2} \rangle, \langle \frac{19n-18}{19n+1} \rangle$	18
$u_1 - v_1$	$(u_1 - v_1)^2$	$\langle \frac{(u_1-v_1)n-s_1}{(u_1-v_1)n+s_m} \rangle, \langle \frac{(u_1-v_1)n-s_2}{(u_1-v_1)n+s_{m-1}} \rangle, \langle \frac{(u_1-v_1)n-s_3}{(u_1-v_1)n+s_{m-2}} \rangle, \cdots, \langle \frac{(u_1-v_1)n-s_{m-2}}{(u_1-v_1)n+s_3} \rangle \ \langle \frac{(u_1-v_1)n-s_{m-1}}{(u_1-v_1)n+s_2} \rangle, \langle \frac{(u_1-v_1)n-s_m}{(u_1-v_1)n+s_1} \rangle$	m

二、　在本研究由不同的最簡真分數數列產生勾弦定差的素勾股數家族中，除了勾弦定差為2有1條最簡真分數數列之外，勾弦定差為8以及18皆各有2條最簡真分數數列，勾弦定差為32以及50各皆各有及4條最簡真分數數列。接下來，再找到了勾弦定差為72、98與128各有4、6與8條最簡真分數數列（表四）。因此，產生勾弦定差的素勾股數家族之最簡真分數數列具有下列的規律。由此，我可推得勾弦定差為162、200以及242各有6、8以及10條最簡真分數數列（表四）。

(一) 產生勾弦定差$2{v_1}^2$的最簡真分數數列之係數為：

小於$2v_1$的正整數中與$2v_1$互質的數之數目。

(二) 這些最簡真分數數列可表示為：

將小於$2v_1$的正整數中與$2v_1$互質的數由小到大排列設為整數數列

$\langle t_m \rangle$：$t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{m-2}, t_{m-1}, t_m$，$\forall m \in N$

則產生股弦定差$(u_1 - v_1)^2$的素勾股數家族的最簡真分數數列有：

$$\langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_1} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_2} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_3} \rangle, \cdots \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_{m-2}} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_{m-1}} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_m} \rangle$$

表四　產生勾弦定差的素勾股數家族的最簡真分數數列係數

v_1	$c_n - a_n$	$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$	係數
1	2	$\langle \frac{1}{2n} \rangle$	1
2	8	$\langle \frac{2}{4n-1} \rangle, \langle \frac{2}{4n+1} \rangle$	2
3	18	$\langle \frac{3}{6n-2} \rangle, \langle \frac{3}{6n+2} \rangle$	2
4	32	$\langle \frac{4}{8n-3} \rangle, \langle \frac{4}{8n-1} \rangle, \langle \frac{4}{8n+1} \rangle, \langle \frac{4}{8n+3} \rangle$	4
5	50	$\langle \frac{5}{10n-4} \rangle, \langle \frac{5}{10n-2} \rangle, \langle \frac{5}{10n+2} \rangle, \langle \frac{5}{10n+4} \rangle$	4
6	72	$\langle \frac{6}{12n-5} \rangle, \langle \frac{6}{12n-1} \rangle, \langle \frac{6}{12n+1} \rangle, \langle \frac{5}{12n+5} \rangle$	4
7	98	$\langle \frac{7}{14n-6} \rangle, \langle \frac{7}{14n-4} \rangle, \langle \frac{7}{14n-2} \rangle, \langle \frac{7}{14n+2} \rangle, \langle \frac{7}{14n+4} \rangle, \langle \frac{7}{14n+6} \rangle$	6
8	128	$\langle \frac{8}{16n-7} \rangle, \langle \frac{8}{16n-5} \rangle, \langle \frac{8}{16n-3} \rangle, \langle \frac{8}{16n-1} \rangle, \langle \frac{8}{16n+1} \rangle, \langle \frac{8}{16n+3} \rangle, \langle \frac{8}{16n+5} \rangle, \langle \frac{8}{16n+7} \rangle$	8
9	162	$\langle \frac{9}{18n-8} \rangle, \langle \frac{9}{18n-4} \rangle, \langle \frac{9}{18n-2} \rangle, \langle \frac{9}{18n+2} \rangle, \langle \frac{9}{18n+4} \rangle, \langle \frac{9}{18n+8} \rangle$	6
10	200	$\langle \frac{10}{20n-9} \rangle, \langle \frac{10}{20n-7} \rangle, \langle \frac{10}{20n-3} \rangle, \langle \frac{10}{20n-1} \rangle, \langle \frac{10}{20n+1} \rangle, \langle \frac{10}{20n+3} \rangle, \langle \frac{10}{20n+7} \rangle, \langle \frac{10}{20n+9} \rangle$	8
11	242	$\langle \frac{11}{22n-10} \rangle, \langle \frac{11}{22n-8} \rangle, \langle \frac{11}{22n-6} \rangle, \langle \frac{11}{22n-4} \rangle, \langle \frac{11}{22n-2} \rangle, \langle \frac{11}{22n+2} \rangle, \langle \frac{11}{22n+4} \rangle, \langle \frac{11}{22n+6} \rangle, \langle \frac{11}{22n+8} \rangle, \langle \frac{11}{22n+10} \rangle$	10
v_1	$2{v_1}^2$	$\langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_1} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_2} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_3} \rangle, \cdots \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_{m-2}} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_{m-1}} \rangle, \langle \frac{v_1}{2v_1 n - v_1 + t_m} \rangle$	m

三、　在本研究可由不同的最簡真分數數列產生了勾股定差的素勾股數家族中，除了勾股定差為1有1條最簡真分數數列之外，勾股定差為7、17、23、31以及41皆各有2條最簡真分數數列（表五），接下來，可推得勾股定差為47、49以及71皆各有2條最簡真分數數列。因此，產生勾股定差的素勾股數家族之最簡真分數數列具有的規律是：除了勾股定差為1有1條外，其餘勾股定差大於1的最簡真分數數列之條數皆為2條。由此，我可推得勾股定差為73、79以及89皆各有2條最簡真分數數列（表五）。

表五 產生勾股定差的素勾股數家族的最簡真分數數列

$\lvert b_n - a_n \rvert$	$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle$	條數
1	$\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{12},\frac{12}{29},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	1
7	$\frac{2}{3},\frac{3}{8},\frac{8}{19},\frac{19}{46},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{1}{4},\frac{4}{9},\frac{9}{22},\frac{22}{53},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
17	$\frac{3}{4},\frac{4}{11},\frac{11}{26},\frac{26}{63},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{2}{7},\frac{7}{16},\frac{16}{39},\frac{39}{94},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
23	$\frac{1}{6},\frac{6}{13},\frac{13}{32},\frac{32}{77},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{4}{7},\frac{7}{18},\frac{18}{43},\frac{43}{104},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
31	$\frac{4}{5},\frac{5}{14},\frac{14}{33},\frac{33}{80},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{3}{10},\frac{10}{23},\frac{23}{56},\frac{56}{135},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
41	$\frac{5}{8},\frac{8}{21},\frac{21}{50},\frac{50}{121},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{2}{9},\frac{9}{20},\frac{20}{49},\frac{49}{118},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
47	$\frac{1}{8},\frac{8}{17},\frac{17}{42},\frac{42}{101},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{6}{11},\frac{11}{28},\frac{28}{67},\frac{67}{162},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
49	$\frac{5}{6},\frac{6}{17},\frac{17}{40},\frac{40}{97},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{4}{13},\frac{13}{30},\frac{30}{73},\frac{73}{176},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
71	$\frac{6}{7},\frac{7}{20},\frac{20}{47},\frac{47}{114},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{5}{16},\frac{16}{37},\frac{37}{90},\frac{90}{217},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
73	$\frac{2}{11},\frac{11}{24},\frac{24}{59},\frac{59}{142},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{7}{12},\frac{12}{31},\frac{31}{74},\frac{74}{179},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
79	$\frac{1}{10},\frac{10}{21},\frac{21}{52},\frac{52}{125},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{8}{15},\frac{15}{38},\frac{38}{91},\frac{91}{220},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2
89	$\frac{7}{10},\frac{10}{27},\frac{27}{64},\frac{64}{155},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，或$\frac{4}{15},\frac{15}{34},\frac{34}{83},\frac{83}{200},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$	2

柒、 結論

一、 不同於王重臻同學的「勾股鐵路網」作品（由佩爾方程產生整數數列，進而產生勾股定差的素勾股數家族），本研究以歐幾里得家族產生了最簡真分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$，$\forall\, n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，$(u_n, v_n) = 1$，$u_n, v_n$一奇一偶，再由最簡真分數數列產生以下的各種股弦定差、勾弦定差以及勾股定差之素勾股數家族：

(一) 畢達哥拉斯與股弦定差的素勾股數家族。

1. 由$\langle\frac{n}{n+1}\rangle$產生股弦定差為 1 的畢達哥拉斯家族。
2. 由 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\frac{v_1}{u_1}, \frac{u_1}{2u_1-v_1}, \frac{u_2}{2u_2-v_2}, \frac{u_3}{2u_3-v_3}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}-v_{n-1}}$ ，$\forall\, n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，（$u_n, v_n$）$= 1$，$u_n, v_n$一奇一偶,產生股弦定差為$\left(u_1 - v_1\right)^2$的素勾股數家族。
3. 將小於$(u_1 - v_1)$的正整數中與$(u_1 - v_1)$互質的數由小到大排列設為整數數列 $\langle s_m\rangle$：$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_{m-2}, s_{m-1}, s_m$，$\forall\, m \in N$，

   則可產生股弦定差$(u_1 - v_1)^2$的素勾股數家族的最簡真分數數列有下列m條。

   $\langle\frac{(u_1-v_1)n-s_1}{(u_1-v_1)n+s_m}\rangle, \langle\frac{(u_1-v_1)n-s_2}{(u_1-v_1)n+s_{m-1}}\rangle, \langle\frac{(u_1-v_1)n-s_3}{(u_1-v_1)n+s_{m-2}}\rangle, \cdots, \langle\frac{(u_1-v_1)n-s_{m-2}}{(u_1-v_1)n+s_3}\rangle\ \langle\frac{(u_1-v_1)n-s_{m-1}}{(u_1-v_1)n+s_2}\rangle, \langle\frac{(u_1-v_1)n-s_m}{(u_1-v_1)n+s_1}\rangle$ 。

(二) 柏拉圖家族與勾弦定差的素勾股數家族

1. 由$\langle\frac{1}{2n}\rangle$產生勾弦定差為 2 的柏拉圖家族。
2. 由 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ ： $\frac{v_1}{u_1}, \frac{v_1}{u_1+2v_1}, \frac{v_2}{u_2+2v_2}, \frac{v_3}{u_3+2v_3}, \cdots, \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}+2v_{n-1}}$ ，$\forall\, n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，（$u_n, v_n$）$= 1$，$u_n, v_n$一奇一偶,產生勾弦定差為 $2{v_1}^2$的素勾股數家族。
3. 將小於$2v_1$的正整數中與$2v_1$互質的數由小到大排列設為整數數列 $\langle t_m\rangle$：$t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{m-2}, t_{m-1}, t_m$，$\forall\, m \in N$，

   則可產生勾弦定差$2{v_1}^2$的素勾股數家族的最簡真分數數列有下列m條。

   $\langle\frac{v_1}{2v_1n-v_1+t_1}\rangle, \langle\frac{v_1}{2v_1n-v_1+t_2}\rangle, \langle\frac{v_1}{2v_1n-v_1+t_3}\rangle, \cdots\ \langle\frac{v_1}{2v_1n-v_1+t_{m-2}}\rangle,\ \langle\frac{v_1}{2v_1n-v_1+t_{m-1}}\rangle, \langle\frac{v_1}{2v_1n-v_1+t_m}\rangle$ 。

(三) 費馬家族與勾股定差的素勾股數家族

1. 由$\langle\frac{P_n}{P_{n+1}}\rangle$產生勾股定差為 1 的費馬家族，$\langle P_n\rangle$是佩爾數列。

2. 由$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$：$\frac{v_1}{u_1},\frac{u_1}{2u_1+v_1},\frac{u_2}{2u_2+v_2},\frac{u_3}{2u_3+v_3},\cdots,\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$，$\forall\, n, u_n, v_n \in N$，$u_n > v_n$，$(u_n, v_n) = 1$，$u_n, v_n$一奇一偶, 產生勾股定差為$|2u_1v_1 - (u_1{}^2 - v_1{}^2)|$的素勾股數家族。

3. 由不同的最簡真分數數列產生了勾股定差的素勾股數家族中，除了勾股定差為1有1條最簡真分數數列之外，勾股定差大於1的最簡真分數數列之條數皆為2條。

二、 不同於貝格倫的方法（利用迭代公式產生了素勾股數三元樹），本研究則是利用遞迴關係式產生最簡真分數數列，然後綜合產生貝格倫的素勾股數三元樹。

捌、 參考資料

一、 許介彥（2005）。數學悠哉遊（頁 272－275）。台北市：三民。

二、 蔡聰明（2010）。數學拾貝（頁 204－210）。台北市：三民。

三、 王重臻（2007）。勾股鐵路網。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組數學科。http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040410.pdf

四、 From " Wikipedia, the free encyclopedia ": Formulas for generating Pythagorean triples. (31 Jan. 2015). Retrieved 31 Jan. 2015, from http://en.wikipedia.org/wiki/Formulas_for_generating_Pythagorean_triples

五、 From " Wikipedia, the free encyclopedia ": Tree of primitive Pythagorean triples. (17 Feb. 2015). Retrieved 17 Feb. 2015, from http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_of_primitive_Pythagorean_triples

六、 Ozanam, Jacques, (1844). Science and Natural Philosophy: Dr. Hutton’s Translation of Montucla’s edition of Ozanam, revised by Edward Riddle, Thomas Tegg, London（2014）. Retrieved 2014,from http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/pageviewer-idx?c=math;cc=math;q1=ozanam;rgn=full%20text;idno=07160001;didno=07160001;view=image;seq=7;page=root;size=50

七、 Price, H. Lee (2008). "The Pythagorean Tree: A New Species".arXiv:0809.4324 [math.HO] , from:http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf

【評語】030412

探討生成用最簡真分數生成畢氏三數組的方法。針對前人的結果與對應的最簡真分數間的關係作了討論。針對斜邊與一股的長的差距為定值的畢氏三數組給出了生成的方式。作者顯然對勾股數有深入的研究，對於文獻與已知結果也知之甚詳，但相關題目發展似乎愈來愈狹隘，也許作者以後可以考慮其他問題。