中華民國第 55 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第一名

030411

完美自戀數與自戀環之結構探討與研究

學校名稱：高雄市立三民國民中學

作者：	指導老師：
國三 邱彥甄	蔡震珊
國二 馬聿琳	黃昭勳

關鍵詞：遞迴收斂、自戀數、自戀環

得獎感言

“遞迴函數運算下完美自戀數與自戀環之結構探討”研究心得

我們從國二上開始發想這份研究，原因是來自老師出的一道資優題目。一開始也沒想到自己會以它作為研究主題，只是單純的進行討論，沒想到我們進一步發現許多美妙的性質以及無限的可能性，更打算透過參加科展的方式，來給自己的求知慾一個美好的抒發。

我們在研究過程中也遭遇過很多困難，尤其印象最深的是科展初審，剛好是我們教育會考前一個月，於是要想盡辦法把研究成果和讀書內容一起記住，更要把握時間同時進行兩件事，那種緊繃感是我們至今仍忘不了的，而現在回想起來，更像是對自己能力的肯定吧!

在研究的閒暇時間，我們兩人常常討論到自己學校的教育方式，這才發現，其實外國學校和台灣學校的理念有著很大的不同，外國較注重獨立思考但台灣相對來說則比較考慮成績，而參與科展讓我看到很多學弟妹、學長姐以及同學，都不畏考試壓力繼續做他們喜歡的事，倘若未來台灣能有更多學生參與科展會是一件很棒的事。

能否做科展並不取決於能力高低，而是有沒有思考的勇氣，其中更包含著與夥伴的相處之道以及向指導老師請益的收穫，是有別於普通學生生涯中，更具色彩的一頁。

得獎時的歡愉，有著說不盡的努力過程。

摘要

本研究主要是探討自然數系中，在 t 進位制 k 次方和的遞迴運算下，針對其週期解(自戀環)與不動點(完美自戀數)的存在性，進行一系列系統性的研究。

在自戀環的研究中，我們發展最適子區間的理論，期能最短的時間內求出自戀環；在二階完美自戀數研究過程中，我們不僅給出存在性的證明，利用數論上的定理證出自戀數 $C(t)$ 的個數理論：$C(t)=(\sum_{d\mid t^2+1}1)-2$。再分別利用 Pell 方程與聯立方程的方法給出二階完美自戀數的遞迴解與通式解，並且發展實用的電腦運算理論。

最後在三階完美自戀數的探討中，我們更將四元三次不定方程，轉換成聯立方程組求解的線性問題，目前已可將 t 進位制以 9 做分類，當 r=1~8 時 t=9k+r 的三階完美自戀數皆可找到相對應的通式解。

壹、 研究動機

在資優課程裡的一道題:「給定一個數『計算所有數字的平方和』,重覆此運算過程最後答案是甚麼？」為了解答這個問題，我們在自然數的系統裡定義一個函數，探究此遞迴函數的相關性質後，給出上述問題完善的解答，並將理論擴展到 t 進位制下與 k 次方和的情況，給出二階完美自戀數通式解的代數證明與實用的計算方法，並且在艱澀的三階完美自戀數研究中，找出部分通式解的探究方法與證明。

貳、 研究目的

一、 探討遞迴函數 A 的遞減性質並證明自戀數(環)的存在性

二、 縮減自戀數與自戀環的檢查範圍的研究與探討

三、 探討二階完美自戀數的存在性與個數的計算公式並發展階完美自戀數代數求解方法

四、 利用 Pell 方程求解二階完美自戀數並發展部分通式解的計算公式

五、 利用三角形數發展二階完美自戀數實用的演算法

六、 探求存在於特定條件的三階完美自戀數通式解

參、　名詞解釋

一、t 表進位制，k 表次方。

二、若$N_t=(a_1,a_2,\dots,a_n)_t$，則 N 為 t 進位制中的 n 位數，其中 $0\le a_i\le(t-1)$，$i=1,2,\dots,n$，但$a_1\ne 0$。

三、$[a,b]_t$表示 t 進位制下 a 數到 b 數之間的正整數，包括 a、b。

四、定義函數 A：$N\to N$，A（t,k,N_t）$=a_1{}^k+a_2{}^k+\cdots+a_n{}^k$，簡記為 $A(N_t)$

五、$A^n(N_t)$定義為：給定輸入N_t經過 A 函數遞迴運算 n 次後　所得到的輸出。

六、自戀數：若$A^n(N_t)=P$，且 A(P)=P，則 P 稱為在函數 A 運算下的自戀數。

七、完美自戀數：位數等於次方的自戀數稱之。

八、定義 C(t)表 t 進位制下二階完美自戀數的個數。

九、自戀環：若 n≥ p時，所有的$A^n(N_t)$，n=p,p+1,p+2,...以週期性的循環出現，其循環節稱之。

十、二階完美自戀數：函數 $A(N_t)=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2$，若$A^n(N_t)=P$，且 A(P)=P，當 P 為二位數時，我們稱為二階完美自戀數。

十一、　三階完美自戀數：函數 $A(N_t)=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_n{}^3$，若$A^n(N_t)=P$，且 A(P)=P，當 P 為三位數時，我們稱為三階完美自戀數。

肆、　研究歷程

一、探討遞迴函數 A 的遞減性質並證明自戀數(環)的存在性

函數$A(t,k,N_t)=a_1{}^k+a_2{}^k+\cdots+a_n{}^k$，其運算是將$N_t$(說明：為一個在 t 進位制下的 n 位數)中的每一個數字當輸入，k 次方和當輸出。以 t=10、k=2 ，N_t=130 為例，透過實際運算可得到：

A(10,2,130)=10，A(10,2,10)=1，A(10,2,1)=1

$\Rightarrow A^3(130)=1$，且 A(1)=1，此時我們稱在 10 進位制之下二階自戀數為 1。

再以 t=10、k=2 ，N_t=99 為例：

N=99$\Rightarrow A(99)=162, A(162)=41, A(41)=17, A(17)=50, A(50)=25, A(25)=29,$

$A(29)=85, A(85)=89, A(89)=145, A(145)=42, A(42)=20, A(20)=4, A(4)=16,$

$A(16)=37$, $A(37)=58$, $A(58)=89$, $A(89)=145$, $A(145)=42$, $A(42)=20$, $A(20)=4$,

$A(4)=16$,……

透過實際運算我們發現，其$A^n(99)$的輸出(n=1,2,3⋯)， 並不像上述的例子會收斂到一個數線上的點(1)，而是當遞迴次數 $n\geq 8$時，其$A^n(99)$的輸出會以 89,145,42,20, 4,16,37,58,89,145⋯週期性的循環出現。此時我們稱數列 4,16,37,58,89,145,42,20，為十進位制下的二階自戀環。

由上述的例子我們思考一個問題：在 t=10、k=2 條件下，當給定一個夠大的數，經過 A 函數的遞迴運算，其輸出都會收斂到自戀數或進入自戀環之中嗎？答案是肯定的。證明如下：

> 定理 1：
>
> 函數 A：N→N 定義為 $A(N_t)= {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$。當 n>3 時，任取一個$N_t\in N$(為一個 10 進位制下的 n 位數。則必存在一正整數 p，使得當 $i\geq p$時，$A^i(N_t)$會收斂至自戀數或進入自戀環週期性循環，其中 i=p,p+1,p+2,...。

證明：因為$a_i\leq 9<10$

故 $A(N_t)= {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2<100n$，當 n>3 時$10^n>100n$，且

$\log 10^n>\log 100n$，故 $n>2+\log n$。

令 m=〔logn〕+3，則當 n>3 時，m 必小於 n，$A(N_t)$至多為 m 位數，且 $A(N_t)<N_t$。

令$A^i(N_t)=p_i$，則$p_i<10^m+1$，i=1,2,3,...，$\varphi=\{p_i，\forall\, i=1,2,3,\ldots\}$，假設函數 A 遞迴運算不收斂於某一個自戀數或不進入自戀環中(也就是沒有週期解)， 則透過無限次的遞迴運算後，會輸出無限多個相異正整數。換句話說集合φ 元素個數為相異無限多個正整數且其上限為10^m+1，此結果明顯為矛盾。故自戀數或自戀環必然存在。很明顯的，上述的定理 1 在 t 進位制和 k 次方和的運算下，依舊成立。性質說明如下：

> 定理 2：
>
> 令 N 為正整數所成的集合，$N_t\in N$為一個 t 進位制下的 n 位數，函數 A：N→N 滿足 $A(N_t)= {a_1}^k+{a_2}^k+\cdots+{a_n}^k$。則必存在一正整數 p，使得當 $i\geq p$時，$A^i(N_t)$必會收斂至自戀數或進入自戀環週期性循環，其中 i=p,p+1,p+2,...。

上述的定理 2 闡明自戀數與自戀環的存在性。很明顯的，{1}是任何進位制與任何次方

和運算下的自戀數，但｛1｝卻不是完美自戀數。

而我們思考一個問題：當給定一個夠大的數，在十進位制進行每一位數平方和的遞迴運算下，很明顯的，當輸出$A^n(N_t)$為三位數時，再繼續進行後面的遞迴運算才會開始收斂至自戀數或慢慢進入自戀環的週期之中。換句話說若給定的N_t足夠大時，必存在一個輸出所成的數列$\{A^i(N_t)\}_{i=1}^{p-1}$，使得$A^i(N_t)$為 i=1,2,...,p-1 為一遞減數列。

下面我們將對此一遞減數列進行更進一步的說明。

性質 3：
$t,k \in N$ 且 $t,k \geq 2$，若$N_t = (a_1a_2 \dots a_n)_t$，$0 \leq a_i \leq t-1$，
$1 \leq i \leq n$，且$a_1 \neq 0$，$n = k+2$，則$N_t - A(t,k,N) \geq t^{k+1} - (k-1)(t-1)^k$

證明：$N_t - A(t,k,N_t)$

$= (a_1 \times t^{n-1} + a_2 \times t^{n-2} + \dots + a_{n-1} \times t + a_n) - ({a_1}^k + {a_2}^k + \dots + {a_{n-1}}^k + {a_n}^k)$

$= a_1(t^{n-1} - {a_1}^{k-1}) + a_2(t^{n-2} - {a_2}^{k-1}) + \dots + a_{n-1}(t - {a_{n-1}}^{k-1}) + a_n(1 - {a_n}^{k-1})$

$\because a_1 \neq 0$，$0 \leq a_i \leq t-1$，$1 \leq i \leq n, n \geq k+2$。

$\therefore a_1(t^{n-1} - {a_1}^{k-1}) > 0$，$a_2(t^{n-2} - {a_2}^{k-1}) \geq 0$， … ，$a_{n-k+1}(t^{k-1} - {a_{n-k+1}}^{k-1})$
≥ 0

而最後$a_{n-k+2}(t^{k-2} - {a_{n-k+2}}^{k-1})$、$a_{n-k+3}(t^{k-3} - {a_{n-k+3}}^{k-1})$、 … 、
$a_n(1 - {a_n}^{k-1})$共$(k+1)$項可能小於 0，

故 $N - A(t,k,N)$

$\geq a_1(t^{n-1} - {a_1}^{k-1}) + a_{n-k+2}(t^{k-2} - {a_{n-k+2}}^{k-1}) + a_{n-k+3}(t^{k-3} - {a_{n-k+3}}^{k-1}) + \cdots$

$+a_{n-1}(t - {a_{n-1}}^{k-1}) + a_n(1 - {a_n}^{k-1})$

將此不等式命名為 F

則 F 在$a_1 = 1$，$a_{n-k+2} = a_{n-k+3} = \dots = a_n = t-1$，$n = k+2$ 時為極小值

將數值代入 F 式計算，則得：$N - A(t,k,N) \geq t^{k+1} - (k-1)(t-1)^k$。

可是，光是知道 N 跟 A(t,k,N)的差還不夠，還要想辦法得知 $t^{k+1}-(k-1)(t-1)^k>0$，於是，我們利用數學歸納法得到其證明。

性質 4：若 $t,k\geq 2$，則$t^{k+1}-(k-1)(t-1)^k>0$

證明：若 $k=2$

則$t^3-(2+t-1)(t-1)^2=t^3-(t+1)(t-1)^2$

$=t^3-(t^3-t^2-t+1)=t^2+t-1>0$ 成立

設 $k=s$ 時，$t^{s+1}>(s+t-1)(t-1)^s$成立

則當 $k=s+1$ 時，

$t^{(s+1)+1}=t^{s+1}\cdot t>(s+t-1)(t-1)^s\cdot t=(s+t-1)(t-1)^s\cdot(t-1+1)$

$=(s+t-1)(t-1)^s\cdot(t-1)+(s+t-1)(t-1)^s$

$>(s+t-1)(t-1)^{s+1}+(t-1)(t-1)^s$

$=(s+t-1)(t-1)^{s+1}+(t-1)^{s+1}$

$=(s+t-1+1)(t-1)^{s+1}$

$=(s+1+t-1)(t-1)^{s+1}>0$

$\therefore$ 當 $k=s+1$ 時，$t^{(s+1)+1}>(s+1+t-1)(t-1)^{s+1}$成立，

依數學歸納法得知$t^{k+1}-(k-1)(t-1)^k>0$。

二、縮減自戀數與自戀環的檢查範圍的研究與探討

在研究目的一的最後，我們歸納出一個重要的結論：

當位數 $\geq k+2$ 時，$N_t-A(N_t)>0$，也就是對每一個N_t，其位數 $\geq k+2$，經過 $A(N_t)$遞迴運算之下，其輸出會降到$(k+1)$位數以下，故自戀數或自戀環必存在。且要求自戀數或自戀環時只需計算 t 進位制 1 到(k+1)位最大數中所有數的輸出即可。

接下來我們的研究主要是關心如何在最適當的範圍內，計算出自戀數或自戀環。以下是我們證明所得的最適子區間理論，其證明的過程蘊含實際的計算方法。

那上述的子區間之最適範圍有多大？如何選取呢？底下針對這個問題我們提出詳細的

證明，敘述如下：

> 性質 5：
> 若在區間[1, R_t]中若存在自戀數與自戀環，則其必存在一最適子區間[1, R_{tn}] ⊆ [1, R_t]，使得自戀數或自戀環必落入[1, R_{tn}]之中。

證明：step1：

取 R_{t1}，R_{t2} 滿足 $R_{t1} < R_t < R_{t2}$ 滿足

$R_{t1}=(r_1, r_2, r_3, \dots r_n)_t$，其中$r_1 = a_1 - 1$，$r_j = t - 1$，j=2,3,⋯,n

$R_{t2}=(s_1, s_2, s_3, \dots s_n)_t$，其中$s_1 = a_1$，$s_j = t - 1$，j=2,3,⋯,n-1，$s_n = t - 2$

故[1,R_{t1}] ⊂[1,R_t] ⊂[1,R_{t2}]。

因為[1,R_{t1}] ⊂[1,R_t] ⊂[1,R_{t2}]

所以 max｛$A([1, R_{t2}])$｝ ≥ max｛$A([1, R_t])$｝ ≥ max｛$A([1, R_{t1}])$｝⋯(1)

又 A(R_{t1})= max｛$A([1, R_{t1}])$｝且 A(R_{t2})= max｛$A([R_{t1} + 1, R_{t2}])$｝

所以 A(R_{t1})- A(R_{t2})=$(a_1 - 1)^k$+$(t - 1)^k$-$(a_1)^k - (t - 2)^k \geq 0$，其中$a_1 \leq t - 1$。

所以$\max\{A([1, R_{t1}])\} \geq \max\{A([1, R_{t2}])\} \dots (2)$

由(1)(2)利用夾擠定理得知：$\max\{A([1, R_t])\} = \max$｛$A([1, R_{t1}])$｝。

所以可將自戀數與自戀環存在區間區間由[1,R_t]縮小至$[1, R_{t1}]$。

Step2：

令N_{L1}=R_{t1}，再令 R_t=A(N_{L1})，依此類推⋯，

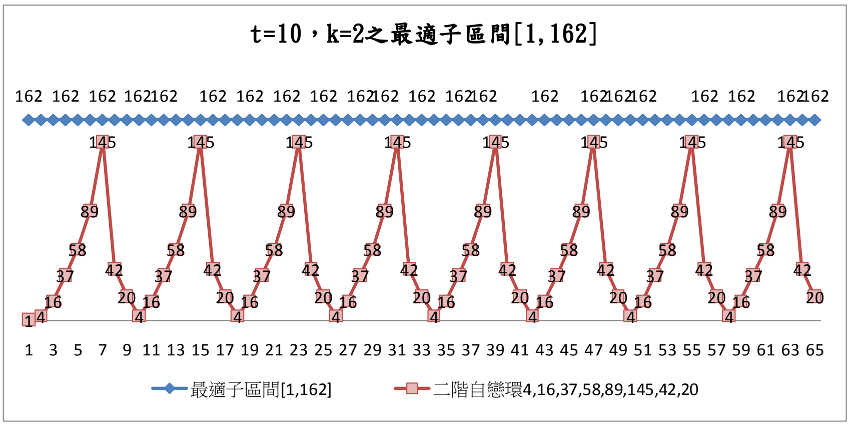
當 A($N_{L(n-1)}$)= A(N_{Ln})時，

即可得最適子區間[1,R_{tn}] ⊆[1,$R_{t(n-1)}$] ⊆⋯⋯⊆[1,R_{t1}] ⊆[1,R_t]使得自戀數與自戀環必若入[1,R_{tn}]。

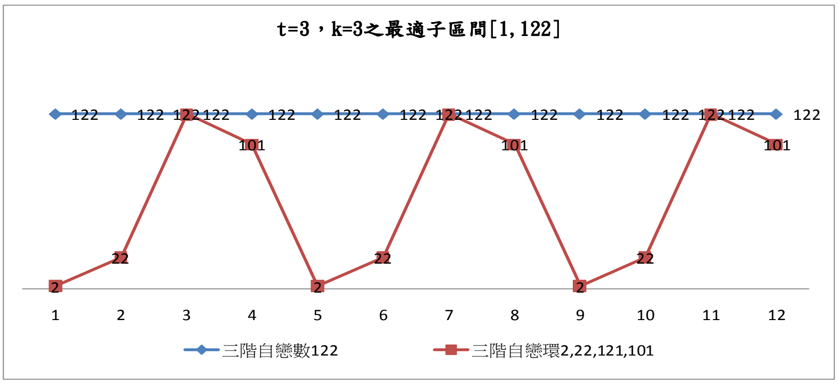
在性質 7 的證明過程中，亦昭揭實際的所解方法。成果舉例整理如下：

範圍 類別	原檢查範圍	N_{L1}	$A_k(N_{L1})$	N_{L2}	$A_k(N_{L2})$	N_{L3}	$A_k(N_{L3})$	N_{L4}	$A_k(N_{L4})$	最適子區間
t=10 k=2	[1,1000]	999	243	199	163	99	162	99	162	[1,162]
t=10 k=3	[1,10000]	9999	2916	1999	2188	1999	2188	1999	2188	[1,2188]
t=10 k=4	[1,100000]	99999	32805	29999	26260	19999	26245	19999	26245	[1,26245]
t=2 k=2	[1,1000]	111_2	11_2	11_2	10_2	1_2	1_2	1_2	1_2	[1, 1]
t=2, k=3	[1,10000]	1111_2	100_2	11_2	10_2	1_2	1_2	1_2	1_2	[1, 1]
t=2 k=4	[1,100000]	11111_2	101_2	11_2	10_2	1_2	1_2	1_2	1_2	[1, 1]
t=3 k=2	[1,1000]	222_3	110_3	22_3	22_3	22_3	22_3	22_3	22_3	[1,22]
t=3 k=3	[1,10000]	2222_3	1012_3	222_3	220_3	122_3	122_3	122_3	122_3	[1, 122]
t=3 k=4	[1,100000]	22222_3	2222_3	2222_3	2101_3	1222_3	1211_3	222_3	1210_3	[1,1210]

最適子區間（圖一）



最適子區間（圖二）



三、探討二階完美自戀數解的存在性與個數的計算公式

研究目的一中，我們證明了在自然數所成的集合 N 中，任挑$N_t \in N$，當 N 夠大時，$A^n(N_t)$將收斂到自戀數或進入自戀環之中，並證明當N_t足夠大時，輸出$A^n(N_t)$，n=1,2,3,......，必存在一個正整數 p，使得 $\{A^i(N_t)\}_{i=1}^{p-1}$為一遞減數列；我們也在研究目的二，縮減了自戀數或自戀環的上界。

如前所述：1 為任何進位制下的自戀數。試問：

(一)在任何進位制下完美自戀數皆存在嗎?

(二)若存在，則會有幾個完美自戀數呢?

本研究目的將著重在完美自戀數的個數與通式解型態的探討。首先，我們證明二階完美自戀數所滿足的不定方程後，再引入數論上的個數定理，逐步展開本研究的重要思路歷程。

性質 6：令 N_t 為二位數,$N_t=(a_1a_2)_t$，若 $N_t=A_2(N_t)$，則 a_1、a_2、t 三者之間關係必滿足 $t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2$ 這個等式

證明：因 $N_t=A_2(N_t)$

所以 $a_1t+a_2=a_1^2+a_2^2$

$\Rightarrow a_1^2-a_1t=a_2-a_2^2$

$\Rightarrow a_1^2-a_1t+\frac{t^2}{4}=a_2-a_2^2+\frac{t^2}{4}$

$\Rightarrow 4a_1^2-4a_1t+t^2=4a_2-4a_2^2+t^2$

$\Rightarrow 4a_1^2-4a_1t+t^2=-4a_2^2+4a_2-1+t^2+1$

$\Rightarrow (2a_1-t)^2=-(2a_2-1)^2+t^2+1$

$\Rightarrow t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2$ 得證。

再來我們介紹數論上的一個定理：

定理 7:$n \geq 0$，不定方程$x^2+y^2=n$ 的解數為 $N(n)$，則 $N(n)=4(\sum_{d\mid n} h(d))$，

其中 $h(d)=\begin{cases} 0 & \Rightarrow 2\mid d \\ (-1)^{\frac{d-1}{2}} & \Rightarrow 2\nmid d \end{cases}$，x、y 為整數

我們將不定方程 $t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2$ 中，$(2a_1-t)$視為 x、$(2a_2-1)$視為 y，運用上述的定理即可展開完美自戀數的個數研究。

性質 8: 若 t 為正整數，將不定方程$x^2+y^2=t^2+1$的解的個數記為$N(t^2+1)$，

則$N(t^2+1)=4(\sum_{d\mid t^2+1} 1)$。

其中當 t 為偶數時，d 為t^2+1的正因數；當 t 為奇數時，d 為t^2+1正的奇因數。

證明:(1)若 t 為正偶數，則t^2+1 為正奇數，故t^2+1 的正因數 d 一定是奇數

$\because t^2+1$ 的標準分解式中無 $4k+3$ 型態的質因數

$\therefore$ 因此$d\mid t^2+1$，$(-1)^{\frac{d-1}{2}}=1$

(2) 若 t 為正奇數，t^2+1 為正偶數，t^2+1 的標準分解式中無 $4k+3$ 型態的質因數，在計算個數上運用先前所述的定理 7，我們只需取t^2+1 的正奇因數 d進行探討。

$\because t^2+1$ 的標準分解式中無 $4k+3$ 型態的質因數

$\therefore$ 因此$d\mid t^2+1$，$(-1)^{\frac{d-1}{2}}=1$

綜合(1)(2)得預備定理$N(t^2+1)=4(\sum_{d\mid t^2+1} 1)$，為了方便探討自戀數的個數，我們定義函數 C(t)表 t 進位制下二階完美自戀數的個數，利用上面的研究我們可以得到當 t 為正偶數且t^2+1為質數時，二階完美自戀數不存在：

性質 9:若 t 為正偶數且t^2+1為質數，則 C(t)=0，即不存在二階完美自戀數

證明:(1)$\because$ t 為偶數，t^2+1 為質數且為奇數

依性質 8 得 $N(t^2+1)=8$，即t^2+1 要表成兩個整數的平方和只有下列八種表示方法：

$$t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=t^2+1=(-t)^2+1^2=t^2+(-1)^2=(-t)^2+(-1)^2$$
$$=1+t^2=1^2+(-t)^2=(-1)^2+t^2=(-t)^2+(-1)^2$$

$\begin{cases} 2a_1-t=t \Rightarrow a_1=t \text{ 此與 } a_1<t\text{不合} \\ 2a_2-1=1 \Rightarrow a_2=1 \end{cases}$ 此組解不合

$\begin{cases} 2a_1-t=t \Rightarrow a_1=t \text{ 此與 } a_1<t\text{不合} \\ 2a_2-1=-1 \Rightarrow a_2=0 \end{cases}$ 此組解不合

$\begin{cases} 2a_1-t=-t \Rightarrow a_1=0 \text{ 不合} \\ 2a_2-1=1 \Rightarrow a_2=1 \end{cases}$ 此組解不合

$\begin{cases} 2a_1-t=-t \Rightarrow a_1=0 \text{ 不合} \\ 2a_2-1=-1 \Rightarrow a_2=0 \end{cases}$ 此組解不合

$\begin{cases} 2a_1-t=1 \Rightarrow a_1=\dfrac{t+1}{2}\text{不為正整數} \\ 2a_2-1=t \Rightarrow a_2=\dfrac{t+1}{2}\text{不為正整數} \end{cases}$ 此組解不合

$\begin{cases} 2a_1-t=1 \Rightarrow a_1=\dfrac{t+1}{2}\text{不為正整數} \\ 2a_2-1=-t \Rightarrow a_2=\dfrac{-t+1}{2}\text{不為整數} \end{cases}$ 此組解不合

$\begin{cases} 2a_1-t=-1 \Rightarrow a_1=\dfrac{t-1}{2}\text{不為整數} \\ 2a_2-1=t \Rightarrow a_2=\dfrac{t+1}{2}\text{不為整數} \end{cases}$ 此組解不合

$\begin{cases} 2a_1-t=-1 \Rightarrow a_1=\dfrac{t-1}{2}\text{不為整數} \\ 2a_2-1=-t \Rightarrow a_2=\dfrac{-t+1}{2}\text{不為整數} \end{cases}$ 此組解不合

這八組聯立方程組都不符合題意，故 C(t)=0，即二階完美自戀數不存在。

那當 t 為正偶數且t^2+1為合數時 C(t)個數為何?說明如下。

性質 10：若 t 為正偶數且t^2+1為合數，則 $C(t)=(\sum_{d\mid t^2+1}1)-2$，

其中 d 為t^2+1之正因數

證明:∵ t 為偶數，t^2+1 為合數且為奇數，依性質 8 得 $N(t^2+1)>8$

∴ 必存在一偶數 x 與一奇數 y 使得$t^2+1=x^2+y^2$，其中 $1<x<8$，$1<y<8$

(1) 引入符號的正負後得：

$t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=x^2+y^2=x^2+(-y)^2=(-x)^2+y^2=(-x)^2+(-y)^2$

因此可形成四組聯立方程組 a、b、c、d：

a : $\begin{cases}2a_1-t=x & \Rightarrow a_1=\frac{t+x}{2}\text{為正整數}\\ 2a_2-1=y & \Rightarrow a_2=\frac{y+1}{2}\text{為正整數}\end{cases}$　　此組解符合題意

b : $\begin{cases}2a_1-t=x & \Rightarrow a_1=\frac{t+x}{2}\text{為正整數}\\ 2a_2-1=-y & \Rightarrow a_2=\frac{-y+1}{2}\text{為負整數}\end{cases}$　　此組解不符合題意

c : $\begin{cases}2a_1-t=-x & \Rightarrow a_1=\frac{t-x}{2}\text{為正整數}\\ 2a_2-1=y & \Rightarrow a_2=\frac{y+1}{2}\text{為正整數}\end{cases}$　　此組解符合題意

d : $\begin{cases}2a_1-t=-x & \Rightarrow a_1=\frac{t-x}{2}\text{為正整數}\\ 2a_2-1=-y & \Rightarrow a_2=\frac{-y+1}{2}\text{為負整數}\end{cases}$　　此組解不符合題意

此四組聯立方程組有兩組解符合題意。

(2) 把 x、y 之偶、奇數互換得：

$t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=y^2+x^2=(-y)^2+x^2=y^2+(-x)^2$

$=(-y)^2+(-x)^2$

因此可形成四組聯立方程組 e、f、g、h：

e: $\begin{cases}2a_1-t=y\\ 2a_2-1=x\end{cases}$　f: $\begin{cases}2a_1-t=-y\\ 2a_2-1=x\end{cases}$　g: $\begin{cases}2a_1-t=y\\ 2a_2-1=-x\end{cases}$　h: $\begin{cases}2a_1-t=-y\\ 2a_2-1=-x\end{cases}$

由於$2a_1-t$為偶數，$2a_2-1$為奇數，y 為奇數，x 為偶數，

故 e、f、g、h 四組聯立方程組皆無解。

上面(1)(2)所探討 x、y 均小於 t，現在還有一組要討論的是$(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=t^2+1$

(3) 引進正負號後得$(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=t^2+1=(-t)^2+1^2=t^2+(-1)^2=(-t)^2+$

$(-1)^2$

因此可形成四組聯立方程組，如下:

$\begin{cases}2a_1-t=t\\2a_2-1=1\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1-t=t\\2a_2-1=-1\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1-t=-t\\2a_2-1=1\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1-t=-t\\2a_2-1=-1\end{cases}$

如同(1)的討論方式，此四組聯立方程組無解。

(4) 把 t、1 互換得$(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=1+t^2=1^2+(-t)^2=(-1)^2+t^2=(-t)^2+(-1)^2$

因此可形成四組聯立方程組，如下:

$\begin{cases}2a_1-t=1\\2a_2-1=t\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1-t=-1\\2a_2-1=t\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1-t=1\\2a_2-1=-t\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1-t=-1\\2a_2-1=-t\end{cases}$

如同(1)的討論方式，此四組聯立方程組無解。

綜合(2)(4)交換(x,y)或(t,1)後所形成的四組聯立方程組均無解，故二階完美自戀數的個數要修正成$\frac{N(t^2+1)}{2}$。

綜合(1)(3)可知 x、y 所得之四組聯立方程組只有兩組聯立方程組符合題意，而 t、1 所得之四組聯立方程組均無解，又比(1)少了兩組解，故二階完美自戀數的個數須再修正成$\frac{N(t^2+1)}{4}-2$，因此得 $C(t)=\frac{N(t^2+1)}{4}-2=(\sum_{d\mid t^2+1}1)-2$。

而當 t 為奇數時二階完美自戀數必存在，其存在性證明如下。

性質 11：

若 t=2m+1，則必至少存在兩組二階完美自戀數$(a_1,a_2)=(m，m+1)_t$和$(m+1，m+1)_t$

證明：

(1)二階完美自戀數其通式解為：$a_1{}^2+a_2{}^2=a_1t+a_2$

$a_1t-a_1{}^2=a_2{}^2-a_2\Rightarrow a_1(t-a_1)=a_2(a_2-1)$

令$t-a_1=a_2\Rightarrow a_1=a_2-1$，分解並整理得$\begin{cases}a_1+a_2=t\\a_1-a_2=(-1)\end{cases}$

解出$(a_1,a_2)=\left(\frac{t-1}{2}，\frac{t+1}{2}\right)_t$

$\because a_1,a_2=0$ 或正整數

$\therefore$ t 必可表成 $2m+1$($m\in N$ 且 $m\geq 1$)，所以$(a_1,a_2)=(m，m+1)_t$

(2)另外，$a_1(t-a_1)=a_2(a_2-1)$

令$t-a_1=a_2-1 \Rightarrow a_1=a_2$，分解並整理得$\begin{cases} a_1+a_2=t+1 \\ a_1-a_2=0 \end{cases}$

解出$(a_1,a_2)=\left(\frac{t+1}{2}，\frac{t+1}{2}\right)_t$

$\because a_1,a_2$等於 0 或正整數

$\therefore$ t 必可表成 $2m+1(m\in N$ 且 $m\geq 1)$，所以$(a_1,a_2)=\left(m+1，m+1\right)_t$

證明存在性後，我們接著進行完美自戀數個數的探討。

性質 12:若 t 為正奇數，則 C(t)=$\left(\sum_{d\ |\ t^2+1} 1\right)-2$

證明:$\because$ t 為正奇數，t^2+1 為 $4k+2$ 的型態，因此t^2+1不可能表成兩個正偶數的平方和，只能表成兩個正奇數的平方和。又依性質 10，得$N(t^2+1)\geq 8$，若 $N(t^2+1)>8$，則必存在兩個正奇數 x、y 使得$t^2+1=x^2+y^2$，其中$1\leq x\leq t$，$1\leq y\leq t$

(1) 引入符號的正負後得：

$$t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=x^2+y^2=x^2+(-y)^2=(-x)^2+y^2$$
$$=(-x)^2+(-y)^2$$

因此可形成四組聯立方程組 a、b、c、d：

a：$\begin{cases} 2a_1-t=x & \Rightarrow a_1=\frac{t+x}{2}\text{為正整數} \\ 2a_2-1=y & \Rightarrow a_2=\frac{y+1}{2}\text{為正整數} \end{cases}$　　此組解符合題意

b：$\begin{cases} 2a_1-t=x & \Rightarrow a_1=\frac{t+x}{2}\text{為正整數} \\ 2a_2-1=-y & \Rightarrow a_2=\frac{-y+1}{2}\text{為負整數} \end{cases}$　　此組解不符合題意

c：$\begin{cases} 2a_1-t=-x & \Rightarrow a_1=\frac{t-x}{2}\text{為正整數} \\ 2a_2-1=y & \Rightarrow a_2=\frac{y+1}{2}\text{為正整數} \end{cases}$　　此組解符合題意

d：$\begin{cases} 2a_1-t=-x & \Rightarrow a_1=\frac{t-x}{2}\text{為正整數} \\ 2a_2-1=-y & \Rightarrow a_2=\frac{-y+1}{2}\text{為負整數} \end{cases}$　　此組解不符合題意

(2) 把 x、y 之兩奇數互換得：

$t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=y^2+x^2=(-y)^2+\ x^2=y^2+(-x)^2$

$=(-y)^2+(-x)^2$

因此可形成四組聯立方程組 e、f、g、h：

e：$\begin{cases} 2a_1-t=y & \Rightarrow a_1=\frac{t+y}{2} \text{ 為正整數} \\ 2a_2-1=x & \Rightarrow a_2=\frac{x+1}{2} \text{ 為正整數} \end{cases}$ 此組解符合題意

f：$\begin{cases} 2a_1-t=-y & \Rightarrow a_1=\frac{t-y}{2} \text{ 為正整數} \\ 2a_2-1=x & \Rightarrow a_2=\frac{x+1}{2} \text{ 為正整數} \end{cases}$ 此組解符合題意

g：$\begin{cases} 2a_1-t=y & \Rightarrow a_1=\frac{t+y}{2} \text{ 為正整數} \\ 2a_2-1=-x & \Rightarrow a_2=\frac{-x+1}{2} \text{ 為負整數} \end{cases}$ 此組解不符合題意

h：$\begin{cases} 2a_1-t=-y & \Rightarrow a_1=\frac{t-y}{2} \text{ 為正整數} \\ 2a_2-1=-x & \Rightarrow a_2=\frac{-x+1}{2} \text{ 為負整數} \end{cases}$ 此組解不符合題意

上面所探討的 x、y 均小於 t 的正奇數，現在還有一組解要討論的是$(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=t^2+1$。

(3) 引進正負號後得$(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=t^2+1=(-t)^2+1^2=t^2+(-1)^2=(-t)^2+(-1)^2$

因此可形成四組聯立方程組 a、b、c、d，如下:

a：$\begin{cases} 2a_1-t=t & \Rightarrow a_1=t \text{ (此與} a_1<t \text{不合)} \\ 2a_2-1=1 & \Rightarrow a_2=1 \end{cases}$ 此組解不符合題意

b：$\begin{cases} 2a_1-t=t & \Rightarrow a_1=t \text{ (此與} a_1<t \text{不合)} \\ 2a_2-1=-1 & \Rightarrow a_2=0 \end{cases}$ 此組解不符合題意

c：$\begin{cases} 2a_1-t=-t & \Rightarrow a_1=0 \text{ (此與} a_1>0 \text{ 不合)} \\ 2a_2-1=1 & \Rightarrow a_2=1 \end{cases}$ 此組解不符合題意

d：$\begin{cases} 2a_1-t=-t & \Rightarrow a_1=0 \text{(此與} a_1>0 \text{ 不合)} \\ 2a_2-1=-1 & \Rightarrow a_2=0 \end{cases}$ 此組解不符合題意

(4) 把 t、1 互換得$(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2=1+t^2=1^2+(-t)^2=(-1)^2+t^2=(-1)^2+(-t)^2$

因此可形成四組聯立方程組 e、f、g、h，如下:

e：$\begin{cases} 2a_1-t=1 & \Rightarrow a_1=\frac{t+1}{2} \text{ 為正整數} \\ 2a_2-1=t & \Rightarrow a_2=\frac{t+1}{2} \text{ 為正整數} \end{cases}$ 此組解符合題意

f : $\begin{cases} 2a_1 - t = -1 & \Rightarrow a_1 = \frac{t-1}{2} \text{為正整數} \\ 2a_2 - 1 = t & \Rightarrow a_2 = \frac{t+1}{2} \text{為正整數} \end{cases}$ 此組解符合題意

g : $\begin{cases} 2a_1 - t = 1 & \Rightarrow a_1 = \frac{t-1}{2} \text{為正整數} \\ 2a_2 - 1 = -t & \Rightarrow a_2 = \frac{-t+1}{2} \text{為正整數} \end{cases}$ 此組解不符合題意

h : $\begin{cases} 2a_1 - t = -1 & \Rightarrow a_1 = \frac{t-1}{2} \text{為正整數} \\ 2a_2 - 1 = -t & \Rightarrow a_2 = \frac{-t+1}{2} \text{為正整數} \end{cases}$ 此組解不符合題意

若 $N(t^2+1) = 8$，則只存在一組(t,1)使得$(2a_1 - t)^2 + (2a_2 - 1)^2 = t^2 + 1 = (-t)^2 + 1^2 = t^2 + (-1)^2 = (-t)^2 + (-1)^2 = 1 + t^2 = 1^2 + (-t)^2 = (-1)^2 + t^2 = (-1)^2 + (-t)^2$

此 8 種情形已在(3)(4)討論過，綜合(1)(2)(3)(4)得知除了(3)四組聯立方程組均無解外，可得每四組聯立方程組均有兩組解符合題意，故

$c(t) = \frac{N(t^2+1)}{2} - 2 = \frac{4\sum_{d\mid t^2+1} 1}{2} - 2 = 2(\sum_{d\mid t^2+1} 1) - 2$

此處 d 為t^2+1的正因數且為奇數，接下來由於t^2+1為 4k+2 之型態，所以t^2+1之標準分解式之中有 2 的質因數，且其次方為 1，即 $2 \mid t^2+1$，$4 \nmid t^2+1$。

故正因數中，奇數與偶數的個數相同，從而得知 $C(t) = 2(\sum_{d\mid t^2+1} 1) - 2$ ，此處數為t^2+1 之正奇因數，重新令 d 為t^2+1 之正因數則

$C(t)$可表為與正偶數同樣形態的公式：$C(t) = (\sum_{d\mid t^2+1} 1) - 2$

探求完二階完美自戀數的存在性與存在個數後，我們已將二階完美自戀數的研究拓廣至近乎完美，最後我們欲再探討完整解出二階完美自戀數的方式，以及求出部分通式解。

若要精準求出二階完美自戀數的值，意即在給定 t 的狀況下，我們須找出 a_1、a_2的數值。由性質 6，我們知道 t^2+1 要能表成二個整數的平方和，才可求出 t、a_1、a_2之值。我們先將 t^2+1

性質 13：$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) = \lvert x_1x_2+y_1y_2 \rvert^2 + \lvert x_1y_2-x_2y_1 \rvert^2 = \lvert x_1x_2-y_1y_2 \rvert^2 + \lvert x_1y_2+x_2y_1 \rvert^2$ 其中 x_1,x_2,y_1,y_2 為整數

做質因數分解後，把每一個質因數表成平方和，再把所表成的平方和兩兩合併，這樣就可以將 t^2+1 表成兩個整數的平方和了，證明如下。

證明：因 $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2$

$|x_1x_2+y_1y_2|^2+|x_1y_2-x_2y_1|^2=(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$

$=x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2$

$=x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2$

所以 $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=|x_1x_2+y_1y_2|^2+|x_1y_2-x_2y_1|^2$

同理得 $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=|x_1x_2-y_1y_2|^2+|x_1y_2+x_2y_1|^2$

有了性質 13，把 t^2+1 表成二個整數的平方和的所需具備的工具也已齊全，因此利用不定方程式解出所有二階完美自戀數的詳細步驟列表如下(表一)：

(表一)不定方程式解二階完美自戀數的步驟流程

步驟	內容	實例
1	t^2+1 先列出其標準分解式	$t=5$ ， $t^2+1=26=2\times13$
2	將 t^2+1 中的每一個質因數寫成二個正整數的平方和	$2=1^2+1^2$，$13=2^2+3^2$
3	把每一組平方和作合併：$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=\|x_1x_2+y_1y_2\|^2+\|x_1y_2-x_2y_1\|^2$	$2\times13=(1^2+1^2)(2^2+3^2)$ $=\|2+3\|^2+\|3-2\|^2=5^2+1^2$
4	結合交換律與正負號變換，再配合 $t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2$，就可解出 a_1 與 a_2	$t^2+1=(2a_1-5)^2+(2a_2-1)^2$
5	每一組可能可以列出八個方程式 (僅列出有解的兩組)	$\begin{cases}2a_1-5=1 \Rightarrow a_1=3\\ 2a_2-1=5 \Rightarrow a_2=3\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1-5=-1 \Rightarrow a_1=2\\ 2a_2-1=5 \Rightarrow a_2=3\end{cases}$ 得五進位二階完美自戀數有(33)、(23)

在以不定方程解出存在於 5 進位制下的所有二階完美自戀數後，我們將 t=5 代入 C(t)的計算公式，$C(t)=\sum_{d\mid t^2+1}1-2=4-2=2$，得到答案為 2，也就是 5 進位制下存在 2 個二階完美自戀數，更多方面驗證了我們的研究成果。

四、利用 P ell 方程求解二階完美自戀數並發展部分通式解的計算公式

我們知道當 N_t 為二位數,$N_t=(a_1a_2)_t$ 且 N_t 為二階完美自戀數時，a_1、a_2、t 三者之間關係必滿足 $t^2+1=(2a_1-t)^2+(2a_2-1)^2$ …(*)。當我們令 $2a_1-t=2a_2-1=s$ 時，(*)這一個等式可改寫為$2s^2=t^2+1$的 Pell 方程式，且此 Pell 方程式的解滿足如下所示的遞迴關係：

> 性質 14：已知(1,1)為$2{s_n}^2={t_n}^2+1$的解，則其解滿足$\begin{bmatrix}s_{m+1}\\t_{m+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_m\\t_m\end{bmatrix}$的遞迴關係，
>
> 其中$m\in N$

證明：$2s^2=t^2+1\Rightarrow 2s^2-t^2=1$

$\because 2s^2-t^2=1$ 可表成$\begin{bmatrix}s&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}[t]=1$，令 $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}$

若$\exists B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$使得$\begin{bmatrix}s_2\\t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\t_1\end{bmatrix}$，則$\begin{bmatrix}s_2&t_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_2\\t_2\end{bmatrix}=1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}s_1&t_1\end{bmatrix}B^{-1}AB\begin{bmatrix}s_1\\t_1\end{bmatrix}=1\Rightarrow B^TAB=A\Rightarrow B^TA=AB^{-1}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}2a&-c\\2b&-d\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}2d&-2b\\c&-a\end{bmatrix}$

若滿足$\begin{cases}a=b\\b=\frac{c}{2}\\ad-bc=1\end{cases}$ 則$(a,b,c,d)=(3,2,4,3)$為其解

即 $B=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}s_2\\t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\t_1\end{bmatrix}$

同理$\begin{bmatrix}s_3\\t_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_2\\t_2\end{bmatrix}\dots\dots\begin{bmatrix}s_{m+1}\\t_{m+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_m\\t_m\end{bmatrix}$

運用上面的遞迴關係，我們發現二階完美自戀數隨著t_n進位制的變化，亦具有遞迴關係式，說明如下 。

性質 15:在t_n進位制下，必存在二階完美自戀數$(a_{1(n)}, a_{2(n)})_{t_n}$，滿足$(a_{1(n)}, a_{2(n)}) = \left(\frac{t_n+s_n}{2}, \frac{s_n+1}{2}\right)$，其中$\begin{cases} a_{1(n+1)} = 5a_{1_n} + 2a_{2_n} - 1 \\ a_{2(n+1)} = 2a_{1(n)} \quad + a_{2(n)} \end{cases}$

證明：因為$2a_{1(n)} - t_n = s_n$，從而$a_{1(n)} = \frac{t_n+s_n}{2}$；又 $2a_{2(n)} - 1 = s_n$，從而$a_{2(n)} = \frac{s_n+1}{2}$

故$a_{1(n+1)} = \frac{t_{n+1}+s_{n+1}}{2}$，$a_{1(n)} = \frac{t_n+s_n}{2}$，$a_{2(n+1)} = \frac{s_{n+1}+1}{2}$，$a_{2(n)} = \frac{s_n+1}{2}$，利用性質 14 可得

$t_m = 3t_n + 4s_n$，$s_m = 2t_n + 3s_n$

$$\therefore a_{1(n+1)} = \frac{t_{n+1} + s_{n+1}}{2} = \frac{3t_n + 4s_n + 2t_n + 3s_n}{2} = \frac{5t_n + 7s_n}{2} = \frac{5t_n + 5s_n + 2s_n + 2}{2} - 1$$

$$= 5 \cdot \frac{t_n + s_n}{2} + 2 \cdot \frac{s_n + 1}{2} - 1 = 5a_{1(n)} + 2a_{2(n)} - 1$$

$$a_{2(n+1)} = \frac{s_{n+1} + 1}{2} = \frac{2t_n + 4s_n + 1}{2} = \frac{2t_n + 2s_n + s_n + 1}{2} = 2 \cdot \frac{t_n + s_n}{2} + \frac{s_n + 1}{2}$$

$$= 2a_{1(n)} + a_{2(n)}$$

利用性質 14 可得 s 與 t 的遞迴解，呈現如下：

s	5	29	169	985	5741	33461
t	7	41	239	1393	8119	47321

利用性質 15 的關係式$\begin{cases} a_{1(n+1)} = 5a_{1_n} + 2a_{2_n} - 1 \\ a_{2(n+1)} = 2a_{1(n)} \quad + a_{2(n)} \end{cases}$即可得二階完美自戀數一系列的遞迴解，如下表：

t_1	s_1	(a_{11},a_{21})	t_2	s_2	(a_{12},a_{22})	t_3	s_3	(a_{13},a_{23})
7	5	(6,3)	41	29	(35,15)	239	169	(204,85)

在運用 Pell 方程進行二階完美自戀數的探討之後，我們更希望能再以通式表示解的型態，以更符合數學的美感。因此，我們將性質 11 的限制條件：$t = 2m + 1$改寫成$t = (1^2 + 1)m + 1$，或$t = (1^2 + 1)m + 1^2 - 1 + 1$，得到下列三種通式解的型態。

型態一:【當$t=(n^2+1)m+n$，第一種變數變換】

性質 16：若 $t=(n^2+1)m+n$，則存在$(a_1,a_2)_t=\left(\frac{t-n}{n^2+1},\frac{nt+1}{n^2+1}\right)=\left(m，nm+1\right)_t$ 的二階完美自戀數，其中$n,m\in N$

證明：以下是利用消去變數法求得的證明

原式：$a_1t+a_2={a_1}^2+{a_2}^2$，令 $t=a_1+na_2$

則$a_1(a_1+na_2)+a_2={a_1}^2+{a_2}^2$

$\Rightarrow {a_1}^2+na_1a_2+a_2={a_1}^2+{a_2}^2\Rightarrow na_1a_2+a_2={a_2}^2\Rightarrow na_1+1=a_2$

由$\begin{cases}na_1-a_2=1\\a_1+na_2=t\end{cases}$ 解出$(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2})_\mathbf{t}=(\frac{t-n}{n^2+1}，\frac{nt+1}{n^2+1})\cdots(1)$，

因為a_1為正整數，a_2為正整數或 0

所以 t 必可表成$(n^2+1)m+n$，其中 n,m 皆為正整數

將$t=(n^2+1)m+n$ 代入(1)，

$$得\begin{cases}a_1=\dfrac{t-n}{n^2+1}=\dfrac{(n^2+1)m+n-n}{n^2+1}=m\\a_2=\dfrac{nt+1}{n^2+1}=\dfrac{n[(n^2+1)m+n]+1}{n^2+1}=\dfrac{(n^2+1)nm+(n^2+1)}{n^2+1}=nm+1\end{cases}$$

故$(a_1,a_2)=\left(m，nm+1\right)_t$

以下為輔助表格：$t=(n^2+1)m+n$ 及通式解

n	t	二階完美自戀數
1	2m+1	$\left(m，m+1\right)_t$
2	5m+2	$\left(m，2m+1\right)_t$
…	…	…
n	$(n^2+1)m+n$	$\left(m，nm+1\right)_t$

型態二:【當$t=(n^2+1)m+n$，第二種變數變換】

性質 17：

若 $t=(n^2+1)m+n$，則存在$(a_1,a_2)_t=\left(\frac{n^2t+n}{n^2+1},\frac{nt+1}{n^2+1}\right)$

$=\left(n^2m+n，nm+1\right)_t$的二階完美自戀數，其中$n,m\in N$

證明：以下是利用消去變數法求得的證明

原式：$a_1t+a_2={a_1}^2+{a_2}^2$，令$a_1=na_2$

則$na_2t+a_2=(na_2)^2+{a_2}^2=(n^2+1)\,{a_2}^2$

$\Rightarrow a_2(nt+1)=(n^2+1)\,{a_2}^2$

$\Rightarrow (nt+1)=(n^2+1)a_2\cdots(1)$

將$t=(n^2+1)m+n$代入(1)得

$n((n^2+1)m+n)+1=(n^2+1)a_2$

$a_2=\frac{n((n^2+1)m+n)+1}{(n^2+1)}=nm+1$

因此$a_1=na_2=n(nm+1)$

以下為輔助表格：$t=(n^2+1)m+n$及通式解

n	t	二階完美自戀數
1	2m+1	$\left(m+1，m+1\right)_t$
2	5m+2	$\left(4m+2，2m+1\right)_t$
…	…	…
n	$(n^2+1)m+n$	$(\,n(nm+1),nm+1)$

型態三:【當$t=(n^2+1)m+n^2-n+1$，第三種變數變換】

性質 18：

若 $t=(n^2+1)m+n^2-n+1$，則存在$(a_1,a_2)_t=(\frac{t+n}{n^2+1},\frac{nt+n^2}{n^2+1})$

$=\left(m+1，nm+n\right)_t$的二階完美自戀數，

其中$n,m\in N$

證明：原式：$a_1 t + a_2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$，

令$t_1 = a_1 + na_2 - n$(其中 $a_2 \neq 1$)代入上式，乘開移項化簡後得$na_1(a_2 - 1) = a_2(a_2 - 1)$

$\Rightarrow\ na_1 = a_2$

$$\begin{cases} a_1 + na_2 - n = t \\ na_1 = a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + na_2 - n = (n^2 + 1)m + n^2 - n + 1 \\ na_1 = a_2 \end{cases}$$

解出$(a_1, a_2)_t = \left(m + 1，nm + n\right)_t = \left(\frac{t+n}{n^2+1}, \frac{nt+n^2}{n^2+1}\right)$

以下為輔助表格：$t = (n^2 + 1)m + n^2 - n + 1$

n	t	二階完美自戀數
1	2m+1	$\left(m + 1，m + 1\right)_t$
2	5m+3	$\left(m + 1，2m + 2\right)_t$
…	…	…
n	$(n^2 + 1)m + n^2 - n + 1$	$\left(m + 1，nm + n\right)_t$

五、研究目的五：利用三角形數發展二階完美自戀數實用的演算法

研究目的四所探討的進位制，包括 $t = 2m + 1$，$5m + 2$，$10m + 3$，$2m^2$到$(n^2 + 1)m + n$ 之中，若令 $m = 1$ 且 $t \neq 0,1$ ，則從最小值 $t = 3$開始到 13 中，不符合 $t = 2m^2$ 或 $(n^2 + 1)m + n$ 的數，如 $t = 2$、4、6、10、12 等，經過計算都沒有二階完美自戀數，驗證我們的證明：$t = 2m$，且$(t^2 + 1)$為質數時，二階完美自戀數必不存在。

但是，徒手計算二階完美自戀數，還真的很辛苦，我們想要尋求更簡便有利的方法，能有系統的找出二階完美自戀數。因此，本研究目的主要是發展實用的二階自戀數演算法，可利用電腦幫我們輕鬆的算出。透過本章節的研究，與電腦程式的設計理論基於下面所證明出相當漂亮的結果：

程式設計理論基礎：t 進位制下的二階完美自戀數是由『三角形數』所決定。

性質 19：

給定一正整數a_1，若$N_t = [a_1, a_2]_t$為一 t 進位制的二階完美自戀數，則存在三角形數Δ使得$t = \frac{2\Delta + a_1^2}{a_1}$為正整數，且$a_2 = \frac{1+\sqrt{1+8\Delta}}{2}$必為一正整數，其中$a_1$，$a_2 < t$。

證明：二階完美自戀數的基本定義為 $N_t = A(t, 2, N_t)$，$a_1 t + a_2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$

$$\Rightarrow {a_1}^2 - a_1 t = a_2 - {a_2}^2$$

$$\Rightarrow a_1(t - a_1) = a_2(a_2 - 1) \ldots\ldots(*)$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{t} = \frac{2\Delta + a_1^2}{a_1}$$ **(其中Δ為一三角形數)代入(*)**

得a_2^2-a_2-2Δ=0， 故$\mathbf{a_2} = \frac{1+\sqrt{1+8\Delta}}{2}$**(負不合)**

利用性質 19，我們給定$a_1 = 1$，取Δ∈ ｛1,3,6,10,15,21,28 …… ｝使得 t 為滿足(*)的最小正整數。故取Δ= 1時，得 t=3，$a_2 = 2$，即可找到一組 3 進位制的二階完美自戀數$(12)_3$，且很明顯得到 t=2 不存在二階完美自戀數。實際運用舉例如下：

【例一】取$a_1 = 6$，進位制由小到大，計算出前 5 個二階完美自戀數

$\mathbf{a_1}$	a_2	t(進位制)
6	3	7
6	4	8
6	6	11
6	7	13
6	9	18
6	10	21
6	12	28
6	13	32
6	15	41
6	16	46

【例二】取$a_1=99$，進位制由小到大，計算出前 10 個二階完美自戀數

$\mathbf{a_1}$	a_2	t(進位制)
99	45	119
99	55	129
99	99	197
99	100	199
99	144	307
99	154	337
99	198	493
99	199	497
99	243	693
99	253	743

六、探求存在於特定條件的三階完美自戀數通式解

完整做完二階完美自戀數的研究以後，我們想將研究範圍擴展至三階完美自戀數。但三階完美自戀數的成立條件又比二階完美自戀數更複雜、更艱深，其相當於要解一個四元三次不定方程$a_1t^2+a_2t+a_3={a_1}^3+{a_2}^3+{a_3}^3$，經過我們的努力已可以找出數種不同型態的通式解。

【三階完美自戀數第一種型態】

> 性質 20：若 $t=3m+1$，則至少必存在兩個三階完美自戀數，其$(a_1,a_2,a_3)_t=\left(\frac{t-1}{3}，\frac{2t+1}{3}，0\right)$或$\left(\frac{t-1}{3}，\frac{2t+1}{3}，1\right)$，即$(a_1,a_2,a_3)_t=(m,2m+1,0)$或$(m,2m+1,1)$，其中 $m\geq 1$

證明：三階完美自戀數定義：$N_t=(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3})_t$，A（$t,3,N_t$）$={a_1}^3+{a_2}^3+{a_3}^3=N_t$，

則N_t為 t 進位制時之三階完美自戀數

公式：$(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3})_t$，$a_1t^2+a_2t+a_3={a_1}^3+{a_2}^3+{a_3}^3$

現令$\begin{cases} a_3={a_3}^3 \\ t=a_1+a_2 \end{cases} \Rightarrow a_3=0$ 或$a_3=1$

$\Rightarrow\ a_1t^2+a_2t={a_1}^3+{a_2}^3$

$\Rightarrow\ a_1(a_1+a_2)^2+a_2(a_1+a_2)={a_1}^3+{a_2}^3=(a_1+a_2)({a_1}^2-a_1a_2+{a_2}^2)$

$\Rightarrow\ a_1(a_1+a_2)+a_2=a_1{}^2-a_1a_2+a_2{}^2$

$\Rightarrow\ a_1{}^2+\ a_1a_2+a_2=a_1{}^2-a_1a_2+a_2{}^2$

$\Rightarrow\ 2a_1a_2=a_2{}^2-a_2$

$\Rightarrow\ 2a_1=a_2-1$

整理得$\begin{cases}2a_1-a_2=-1\\ a_1+a_2=t\end{cases}\ \Rightarrow\ a_1=\frac{t-1}{3}$，$a_2=\frac{2t+1}{3}$

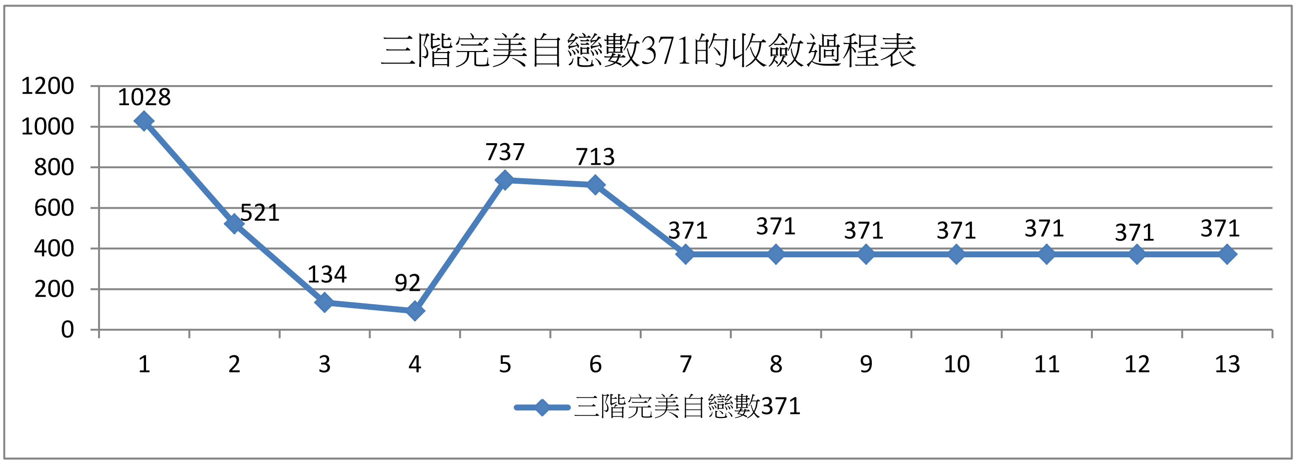
$\because a_3=0$ 或 1

$\therefore (\mathbf{a_1,a_2,a_3})_t=\left(\frac{t-1}{3}，\frac{2t+1}{3}，0\right)_t$ 或 $\left(\frac{t-1}{3}，\frac{2t+1}{3}，1\right)_t\cdots(*)$

又 $\because a_1,a_2,a_3$為 0 或正整數，$\therefore$ t 必可表為 $3m+1$，$m\geq 1$，再將$t=3m+1$代入(*)

得$(a_1,a_2,a_3)_t=(m,2m+1,0)$或$(m,2m+1,1)$，其中 $m\geq 1$。

透過性質 20 的證明，我們舉例 t=10，k=3 的其中一個三階完美自戀數。取 N_t=1028，透過遞迴運算得 521、134、92、737、713、371、371…收斂至三階完美自戀數 371，其收斂過程如下圖表，滿足通式解$(\mathbf{m,2m+1,1})$的型態，其中 m=3。



此性質是利用當 $a_3{}^3=a_3$，也就是$a_3=0$ 或 1 時進行探討。接下來，要以它做為基礎繼續探討「當 $t=a_1+a_2$」時，但取消$a_3=0$ 或 1的限制條件，想必會困難許多，但是我們還是努力的將其所滿足的關係式找出，證明如下。

【三階完美自戀數第二種型態】

性質 21：若 $t=9m+3$，則必至少存在一 t 進位制的三階完美自戀數，使得$(a_1,a_2,a_3)_t=\left(\frac{5t-6}{9}，\frac{4t+6}{9}，\frac{2}{3}t\right)_t$，即$(a_1,a_2,a_3)_t=(5m+1,4m+2,6m+2)$其中 $m\geq 0$

證明：$a_1t^2+a_2t+a_3=a_1{}^3+a_2{}^3+a_3{}^3$

令 $t=a_1+a_2$

$a_1(a_1+a_2)^2+a_2(a_1+a_2)+a_3=a_1{}^3+a_2{}^3+a_3{}^3$

$\Rightarrow\ a_1(a_1+a_2)^2+a_2(a_1+a_2)-(a_1{}^3+a_2{}^3)=a_3{}^3-a_3$

$\Rightarrow\ a_1(a_1+a_2)^2+a_2(a_1+a_2)-(a_1+a_2)(a_1{}^2-a_1a_2+a_2{}^2)=a_3(a_3+1)(a_3-1)$

$(a_1+a_2)[a_1(a_1+a_2)+a_2-(a_1{}^2-a_1a_2+a_2{}^2)]=a_3(a_3+1)(a_3-1)$

$(a_1+a_2)(a_1{}^2+a_1a_2+a_2-a_1{}^2+a_1a_2-a_2{}^2)=a_3(a_3+1)(a_3-1)$

$(a_1+a_2)(2a_1a_2+a_2-a_2{}^2)=a_3(a_3+1)(a_3-1)$

$\Rightarrow\ a_2(a_1+a_2)(2a_1+1-a_2)=a_3(a_3+1)(a_3-1)$

在進一步的假設中，我們推算後發現，若假設 $a_3+1=2a_1+1-a_2$或$a_3=2a_1+1-a_2$，均不能得出結果。所以，所以我們只剩下以下的限制條件：令 $a_3-1=2a_1+1-a_2$，使得$a_2(a_1+a_2)=a_3(a_3+1)$ ，並且設定三個狀況來求解：

(a)：若 $a_2=a_3$ 則 $a_1+a_2=a_3+1$

因此得出 $\begin{cases} a_3-1=2a_1+1-a_2 \\ a_2=a_3 \\ a_1+a_2=a_3+1 \end{cases}$ 解出$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=2$ 無法得到通式解

(b)：若 $a_1+a_2=a_3$時

因 $t=a_1+a_2$ ，此與$a_3<t$不合，故不可能有此情形

(c)：調整係數

由 $a_2(a_1+a_2)=a_3(a_3+1)\Rightarrow 2\times3\times a_2(a_1+a_2)=2\times3\times a_3(a_3+1)$

令 $2(a_1+a_2)=3a_3$，則 $3a_2=2(a_3+1)$

得$\begin{cases} 2a_1+2a_2-3a_3=0 \\ 3a_2-2a_3=2 \end{cases}$，又 $a_3-1=2a_1+1-a_2$

$\Rightarrow 2a_1-a_2-a_3=-2$

綜合整理得$\begin{cases} 2a_1+2a_2-3a_3=0\ \ldots(1) \\ 3a_2-2a_3=2\ \ldots(2) \\ 2a_1-a_2-a_3=-2\ \ldots(3) \end{cases}$ 由(1)式減(3)式恰好得(2)式

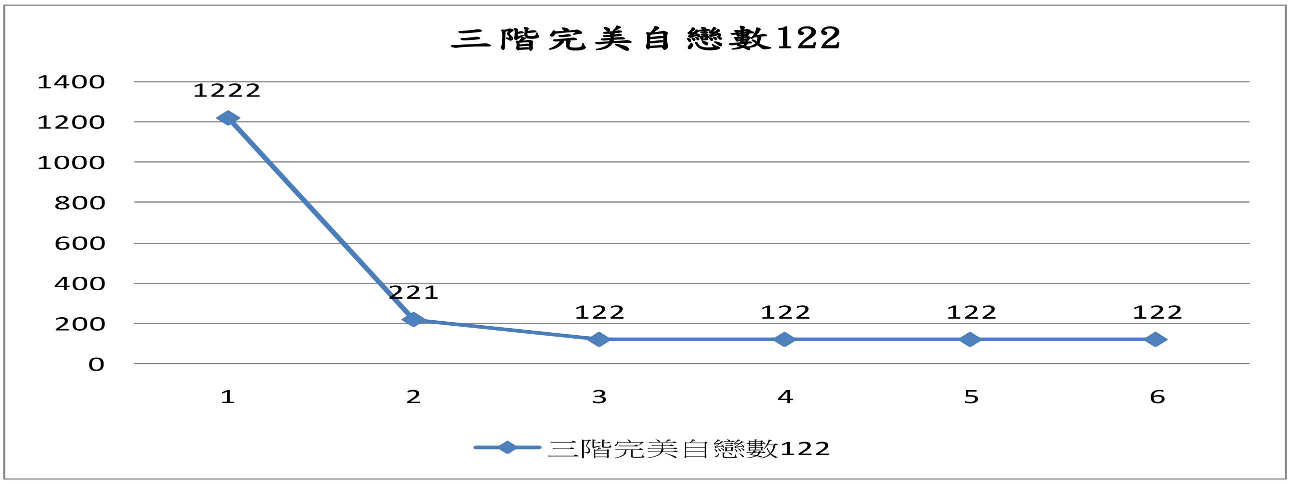
故(1)(2)(3)三式子其實只有二個式子

又重新整理得$\begin{cases} a_1+a_2=t \\ 3a_2-2a_3=2 \\ 2a_1+2a_2-3a_3=0 \end{cases}$ 解出$\begin{cases} a_1=\frac{5t-6}{9} \\ a_2=\frac{4t+6}{9} \\ a_3=\frac{2}{3}t \end{cases}$ …(*)

$\because$ a_1，a_2，a_3為正整數或 0，$\therefore$ 取 $t=9m+3$，$m\geq 0$ ，再將$t=9m+3$代入(*)

得$(a_1,a_2,a_3)_t=(5m+1,4m+2,6m+2)$其中 $m\geq 0$

舉例 t=3，k=3 的其中一個三階完美自戀數。取 N_1=1222，透過遞迴運算得 221、122、122…，收斂至三階完美自戀數 122，其收斂過程如下圖表，滿足通式解$(5m+1,4m+2,6m+2)$，其中 $m=0$的型態。



此性質雖然也是在 $t=a_1+a_2$ 的背景下完成，但在推算過程中遇上了一些瓶頸，最後求助於老師，才以「調整係數」一法得到解答。這麼美好的結果，令我們信心大增，決定以調整係數的方式再找出別的通式解。

【三階完美自戀數第三種型態】

性質 22：若 $t=9m+6$， 則必至少存在一 t 進位制之三階完美自戀數，其$(a_1,a_2,a_3)_t=\left(\frac{7t+3}{9}，\frac{2t-3}{9}，\frac{2}{3}t\right)_t$，即$(a_1,a_2,a_3)_t=(7m+5,2m+1,6m+4)$，$m\geq 0$

證明：$a_1t^2+a_2t+a_3=a_1{}^3+a_2{}^3+a_3{}^3$

令 $t=a_1+a_2$

得$a_1t^2+a_2t+a_3=a_1{}^3+a_2{}^3+a_3{}^3$，如性質 21，

可表成$a_2(a_1+a_2)(2a_1+1-a_2)=a_3(a_3+1)(a_3-1)$

調整係數，

得 $a_2(a_1+a_2)(2a_1+1-a_2)=2\times a_3(a_3+1)(a_3-1)\times\frac{1}{2}$

令 $2a_1+1-a_2=2(a_3+1)$ 則$a_2(a_1+a_2)=a_3(a_3-1)\times\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow 2a_2(a_1+a_2)=a_3(a_3-1)$

再調整係數得 $2\times 3a_2(a_1+a_2)\times\frac{1}{3}=a_3(a_3-1)$

又令 $3a_2=a_3-1$ 則$\frac{2}{3}(a_1+a_2)=a_3$

綜合整理得$\begin{cases}2a_1+1-a_2=2(a_3+1)\\ 3a_2=a_3-1\\ \frac{2}{3}(a_1+a_2)=a_3\end{cases}$

上述三式可表為$\begin{cases}2a_1-a_2-2a_3=1\ldots(1)\\ 3a_2-a_3=-1\ldots(2)\\ 2a_1+2a_2-3a_3=0\ldots(3)\end{cases}$

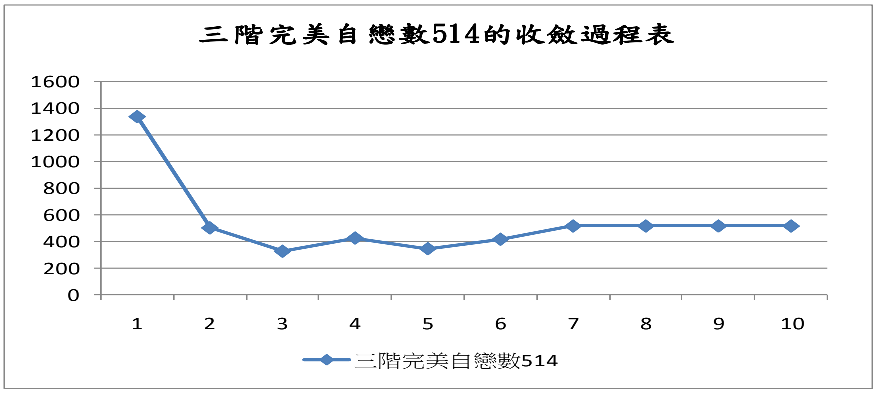
而(3)式減去(1)式恰好得到(2)式，故(1)、(2)、(3)式其實只有二個式子

又重新整理得$\begin{cases}a_1+a_2=t\\ 3a_2-a_3=-1\\ 2a_1+2a_2-3a_3=0\end{cases}$ 解出通式解$\begin{cases}a_1=\frac{7t+3}{9}\\ a_2=\frac{2t-3}{9}\\ a_3=\frac{2}{3}t\end{cases}$ $\cdots(*)$

$\because$ a_1，a_2，a_3為正整數或 0 ,$\therefore$ 取 $t=9m+6$，$m\geq 0$ ，再將$t=9m+6$ 代入$(*)$，

即可得$(a_1,a_2,a_3)_t=(7m+5,2m+1,6m+4)$，其中 $m\geq 0$

在性質 22 的證明過程中，我們找出存在於特定條件下的三階完美自戀數，並舉例 t=6，k=3 的其中一個三階完美自戀數。取N_t =1335，透過遞迴運算得三階完美自戀數 514，其收斂過程如下圖表，滿足$(a_1,a_2,a_3)_t=(7m+5,2m+1,6m+4)$，其中 $m=0$。



【三階完美自戀數第四種型態】

性質 23：若 t=3m+2，則至少必存在一個三階自戀數$(a_1a_2,a_3)_t=(\frac{t-2}{3},0,\frac{2t-1}{3})_t$，即$(a_1,a_2,a_3)_t=(m,0,2m+1)$，其中$m\geq 1$

證明:令$a_2=0$，$t-1=a_1+a_3$，則$a_1t^2+a_2t+a_3=a_1^3+a_2^3+a_3^3$

$\Rightarrow a_1t^2+a_3=a_1^3+a_3^3$

$\Rightarrow a_1(a_1+a_3+1)^2+a_3=a_1^3+a_3^3$

$\Rightarrow a_1[(a_1+a_3)^2+2(a_1+a_3)+1]+a_3=a_1^3+a_3^3$

$\Rightarrow a_1(a_1+a_3)^2+2a_1(a_1+a_3)+a_1+a_3=(a_1+a_3)(a_1^2-a_1a_3+a_3^2)$

$\Rightarrow (a_1+a_3)[a_1(a_1+a_3)+2a_1+1]=(a_1+a_3)(a_1^2-a_1a_3+a_3^2)$

$\Rightarrow a_1(a_1+a_3)+2a_1+1=a_1^2-a_1a_3+a_3^2$

$\Rightarrow a_1a_3+2a_1+1=-a_1a_3+a_3^2$

$\Rightarrow 2a_1a_3+2a_1=a_3^2-1$

$\Rightarrow 2a_1(a_3+1)=(a_3+1)(a_3-1)$

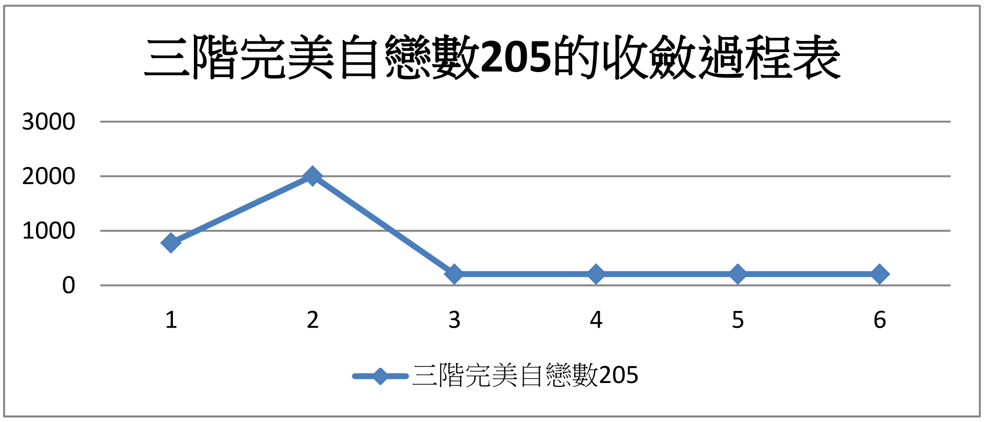
$\Rightarrow 2a_1=a_3-1$

$\begin{cases}a_1+a_3=t-1\\ 2a_1-a_3=1\end{cases}\Rightarrow a_1=\frac{t-2}{3}$，$a_3=\frac{2t-1}{3}\quad\cdots(*)$

$\because$ a_1，a_2，a_3為正整數或 0 ,$\therefore$ 取 $t=3m+2$，$m\geq 0$ ，再將$t=3m+2$ 代入$(*)$，

即可得$(a_1,a_2,a_3)_t=(m,0,2m+1)$，其中$m\geq 1$。

在性質 23 的證明過程中，我們找出存在於特定條件下的三階完美自戀數，並舉例 t=8，k=3 的其中一個三階完美自戀數。取$N_t=777$，透過遞迴運算得三階完美自戀數 205，其收斂過程如下圖表，滿足$(a_1,a_2,a_3)_t=(m,0,2m+1)$，其中 $m=2$。



綜合性質 20 ~23 的證明，我們將 t 進位制以 9 做分類，當 r=1~8 時，t=9k+r 的三階完美自戀數皆已找出部分型態的通式解。至於當 r=0 時是否存在三階完美自戀數呢?此議題容我們往後再研究。

伍、　結論

代數的美通常來自於「簡單」--「簡單」的性質、「簡單」的美----。

在自然數系中，當我們選定一個足夠大的數，經過函數 $A:N\rightarrow N$ **滿足** $A(N_t)=\mathbf{a_1}^{\mathbf{k}}+\mathbf{a_2}^{\mathbf{k}}+\cdots+\mathbf{a_n}^{\mathbf{k}}$**，經過遞迴運算後**，其輸出最終會收斂於一點或進入一個週期解。很明顯的，1 是任何進位制下 k 次方和的收斂自戀數，但完美自戀數卻不一定存在。

在我們的研究中，我們不僅給出找尋自戀數和自戀環的最佳範圍，又在二階完美自戀數上探討出完整的證明並發展計算理論；在艱澀的三階完美自戀數之探究中，雖然我們尚無法找出完善的代數解法，但透過不斷的嘗試與計算，我們亦得出其部分的通式解。

陸、　心得

這是一份充滿艱辛的作品，就三個層面來說；一是技能層面：這份研究用了許多假設的手法，都需要努力揣測才能抓到較精確的假設，尤其是在「三階完美自戀數」的轉換係數上，也遇到很大的瓶頸，幸虧有老師的協助，加上一點機緣，雖然不能完全的找出三階完美自戀數，但如此發展，對三階完美自戀數已經是不小的突破了。

二是思考層面：研究中的證明雖然大多是國中時期的乘法公式等，但有些奇妙的假設、轉換，甚至是運用，還是得依賴老師的幫助和提點，才能順利完成研究。

三是時機點：撰寫研究的時間恰好是準備複習大考的時候，十分感謝家人的陪同與支持，讓我們能專心致志的進行研究。最後，仍非常感謝指導老師的教導，讓我們的數學學習與這份研究更上一層樓。

柒、　參考資料

1. 潘承洞、潘承彪（民 84）。初等數論（272 頁）。新竹市：凡異出版社
2. 單墫(民 89)。趣味數論(123 頁)。台北市:九章出版社

【評語】030411

關於 happy number 的討論。作者們對進制下，happy number 的存在性作了分析，給出了簡化尋找 happy number 的方法。並針對兩位數（進制下）的 happy number 的存在性給出了一個好的結果，在存在的情況下，也給出了一些具體構造的方式。對於三位數的 happy number，也作了一些討論。能夠深入分析問體，給出清楚的說明，十分不容易。分析和論證的過程更能充分的看出作者的一些巧思，值得稱許。唯一美中不足的是，作者們顯然不清楚這個問題其實流傳已久，許多他們討論的面向在之前其實都已經有部分的結果了。如果能在資料收集上再下點功夫，說明這個問題目前的進展，以及自己得出了哪些與眾不同的全新結論，會是一個非常棒的作品。