中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030410

攜手共解圓

學校名稱：新竹市立培英國民中學

作者：	指導老師：
國二 張家翔 國二 黃瑋翔	黃珮漩

關鍵詞：扭結理論、Reidemeister moves、牽手遊戲

壹、 摘要

本研究主要研究團康遊戲「牽手遊戲」在不同情況下的成結情形。改變牽手的最少人數、交錯點數量和牽手順序，都可能改變結果，有些成結(解不開)，有些則不成結(解得開)，並發現可以使用「Reidemeister moves」的三個結的基礎變換，來簡化任何一個結，每個變換會消去不同數量的交錯點，利用「牽手順序」和「交錯點編碼」可直接看出一手結是否成結，並用最快的方式簡化結。

當所有人的手不是一個封閉曲線，而是兩個以上的封閉曲線時，也會遵守前述的規則，可利用基礎變換簡化圖形。文中也討論了較特別並具有規律的結——星星結，將星星結的簡化方式列出後，找出其主要規律性及能夠推廣的簡化方式，最後運用所有討論出來的結果推論出特定遊戲規則的牽手方式。

貳、 研究動機

在團體活動中，隊輔們喜歡帶破冰遊戲，因為可以帶動氣氛製造歡樂，而我們曾經玩過以下遊戲：數個人圍成一圈，每個人兩手牽住兩個不同人的手，而且不可以牽與自己相鄰的人的手。牽完後大家使出渾身解數，在兩手相連不分開的情況下，重新變回一個大圓。這個遊戲引發了我們的興趣，因為有時可以成功，有時候卻像打了死結一樣解不開，甚至有時解出的不是一個圓，而是數個圓。於是我們開始思考並研究此問題。

參、 研究目的

一、 探討在各種牽手情況下，所有人是否都會在同一條封閉曲線上，並討論如何檢驗。

二、 探討在各種牽手情況下，是否都能解成一個圓，並討論在不同的最少人數中，解成一個大圓的所有可能性。

三、 尋找最快解成一個圓的方法及步驟。

四、 找出特別的圖形並利用找到的規律及特性，歸納出不同情況下解圓的方法。

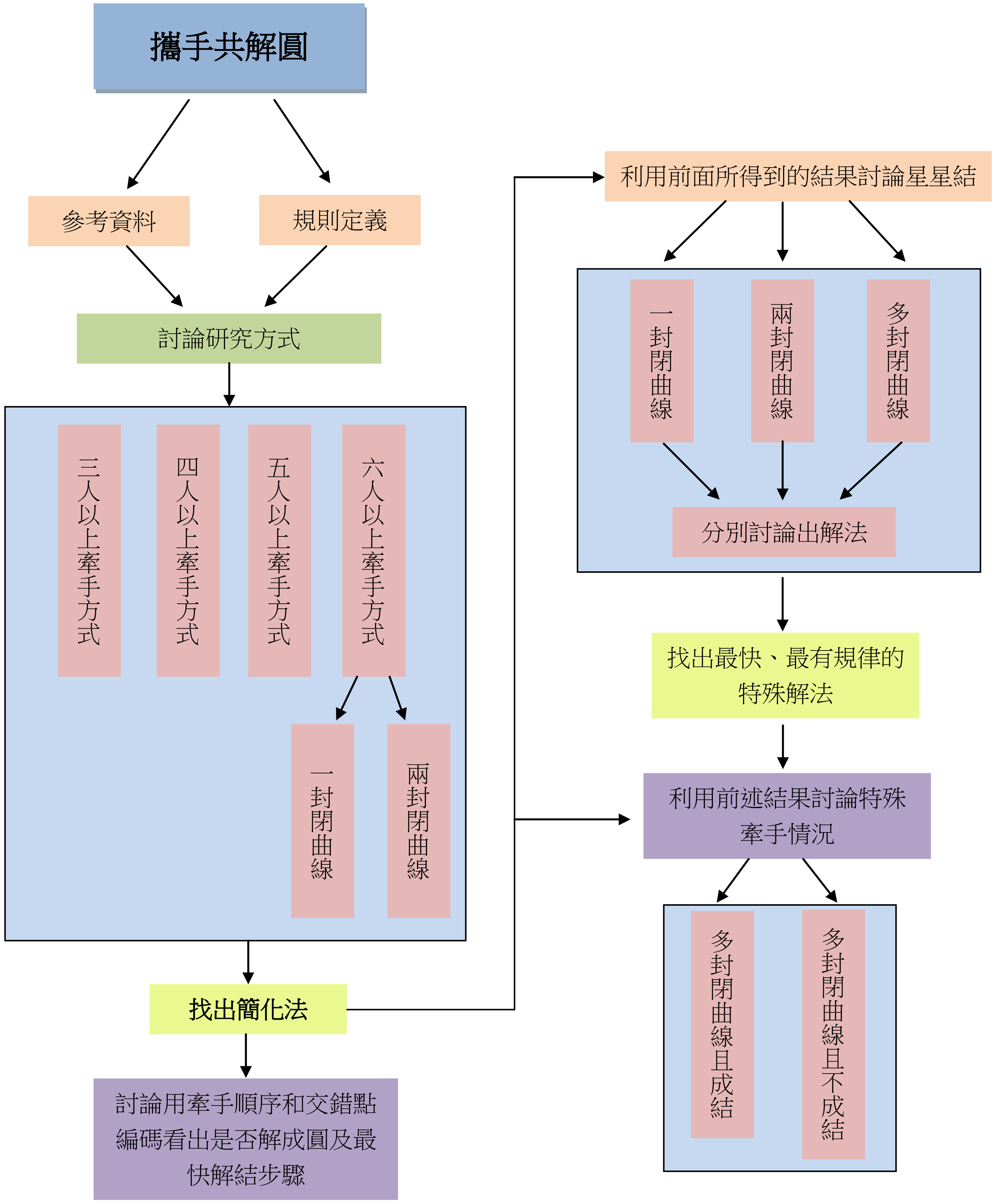
五、 利用得到的結論推廣具規律的牽手方式。

肆、 研究設備

1 米長棉線三條、膠帶、紙、筆、電腦、小畫家軟體。

伍、 研究過程

研究流程圖：


攜手共解圓
參考資料
規則定義
討論研究方式
三人以上牽手方式
四人以上牽手方式
五人以上牽手方式
六人以上牽手方式
一封閉曲線
兩封閉曲線
找出簡化法
討論用牽手順序和交錯點編碼看出是否解成圓及最快解結步驟
利用前面所得到的結果討論星星結
一封閉曲線
兩封閉曲線
多封閉曲線
分別討論出解法
找出最快、最有規律的特殊解法
利用前述結果討論特殊牽手情況
多封閉曲線且成結
多封閉曲線且不成結

一、參考資料整理

我們去圖書館及上網找尋資料，以下列出幾點較重要的參考資料並做了討論：

(一) 至少要三個以上交錯點才可能形成一個結(交錯點：繩子交錯的地方)。只要此結未達到三個交錯點，就不可能成結。

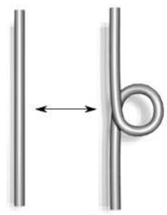
(二) 扭結理論(knot theory)——這個理論所涵蓋的範圍非常廣，較重要的討論是：如果一結符合扭結，則無法解回一個大圓，若不符合扭結，則可以解回一個大圓。扭結都是一封閉曲線，而「鏈」(link)則是兩個以上的封閉曲線且無法解成一個大圓。

綜合以上兩點，可提出初步的假設：牽手的方式可決定此次牽手是否能順利解開，若能解開代表此封閉曲線並不是扭結，稱為「不成結」；若不能解開代表此封閉曲線符合扭結，稱為「成結」。

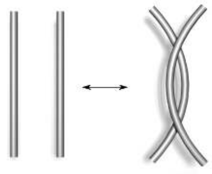
為了將牽手問題探討更廣，又查詢了更多資料並作整理：

(三) 拓樸：拓撲學是研究幾何形體連續變化的學科。繩圈可以挪動、不許切斷、不許黏起來，正是連續變化的意思，本文所要研究有關結的上下情形，正和拓樸學相關。

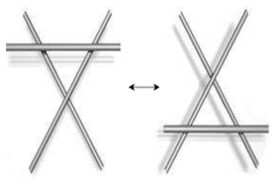
(四) Reidemeister moves：在 1926 年，Kurt Reidemeister 為了要分辨結的種類，將結畫成投影圖(knot diagram)，在投影圖中可看出繩子互相交錯的牽手順序(本研究的圖形即是以投影圖表示)，發現兩投影圖的結若是相等的(也就是可以從一個變換到另一個)，則可以用三種最基本的方式來達到兩個圖形的變換，稱為 Reidemeister moves，為下列三種方式：

1. 

把一個圈打開或加一個圈(研究內容中簡稱 R_1)

2. 

把兩條疊在一起的線拉開或把兩條線疊上(研究內容中簡稱 R_2)

3. 

三條線互相交叉，前面的兩根不動，把後面的一根向上或向下挪(研究內容中簡稱 R_3)

(五) Dowker notation：原先是使用在電腦判斷結，使用 Dowker notation 的標記方式可以讓電腦了解一個結並畫出，但有一個問題：同樣的 Dowker notation 可能化出兩種結；同樣的結也可能寫出不一樣的 Dowker notation。

(六) 結的不變量：兩個投影圖，是否能透過初等變換(Reidemeister moves)從一個變到另一個。如果可以，就稱為等價；如果不可以，就稱為不等價。要說明兩投影圖是否等價，必須以邏輯推理為基礎，結的不變量即為判斷依據。

(七) 結的分類：進百年來數學家熱烈研究的問題，現在已經有電腦程式能夠依照步驟基本的簡化一個結，其中需要使用到 Dowker notation 和 crossing orientations 搭配 HOMFLY polynomial，但過程複雜，現在還在找尋較簡便的方式。

由上述的資料探討中可得知，使用 Dowker notation 和 crossing orientations 配合電腦程式可以分類簡化一個結，但過程複雜，我們將試著使用容易擁有的資訊來完全簡化一個結。

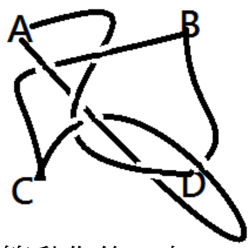
二、 規則定義與研究在不同的最少人數中所結成的結

這種遊戲有非常多種玩法，實際詢問老師、同學並參考網路資料後，訂定了兩條規則：

規則一：兩手牽著不同人。

規則二：不可以牽旁邊(相鄰)的人。

(一) 規則解釋、研究前提與研究方式



1. 規則解釋：訂定的兩個規則無法避免在很少人的遊戲中打出很多交錯點的結(如右圖)，為了解決這個問題並讓每個人的手都能伸直，以下討論的結是屬於「每隻手都能伸直」的情況。

   全部人手牽好之後就可以開始解圓了，經過許多跨過或穿越等動作後，在保持手不放開的情況下，只要最後結果是解成一個大圓(也就是沒有交錯點)，不管人朝內朝外都算是成功。

2. 研究前提：依照這樣的規則討論，首先最讓我們感到困惑的是：真的能夠解成一個大圓嗎？會不會變成兩個圓或更多的圓？為了解決此問題，我們先做了假設：若解成的大圓是由一條線圍成，則人都只是線上一點，因此無須討論人數，只需要討論線的打結情形即可(意即當這條線打結時，此圓無法解開；若沒有打結，則可以解成一個大圓)。

3. 研究方式：以下雖然是從人數討論，但每一種結(不限人數的牽手遊戲)解到最後都有可能形成以下所討論到的圖形，因此這僅是提供一種較規律的找結方式。在以下的研究中，都會以「(某人數)以上牽手情況」為小節標題，因為在那一小節中所討論的結都是在某人數以上才有可能打成的，也代表了每一種結都不會只在某些人數的情況下才能打出。

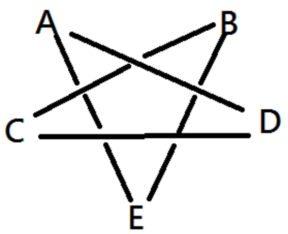
研究過程由三人到六人以上牽手情況來找出各種結,並利用分析的方法將牽手遊戲簡化，找出解法並歸納出規律。

(三)五人以上牽手情況

由於四人以下的牽手情況中，皆無法同時遵守規則一與規則二，因此以下將從五人以上的牽手情況開始討論。

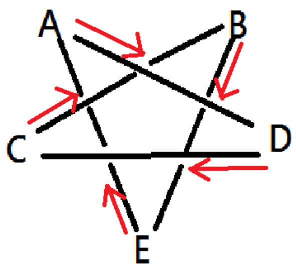
1. 可能的牽手圖形

將所有符合規則的圖形畫出後發現，在五人的牽手情況中，只有一種圖形同時符合規則一與規則二並超過超過 3 個交錯點，這種結的樣子像星星，所以稱之為「星星結」(如右圖)。



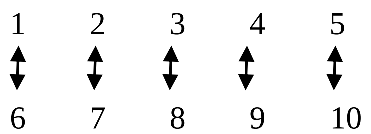
2. 星星結的牽手順序

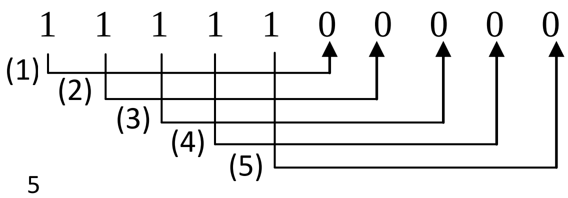
如右圖，先假設這條線是有方向性的，從 A 開始、A 結束，中間每次經過的交錯點，都觀察其上下情形，若在上則記為 1，若在下則記為 0。像右圖線依序經過 ADCBEA，沿著 $\overline{AD}$ 走，遇到了兩個交錯點，都是從交錯點的上方經過，記作「11」，接著沿著 $\overline{DC}$ 走，也經過了兩個交錯點，都是從上方經過，也記作「11」，按照這樣的規則，一直走回到 A，將所有的上下情形列出可記為「1111100000」，這就是此圖形的「牽手順序」，牽手順序為 crossing orientations 的延伸。



3. 星星結的交錯點編碼

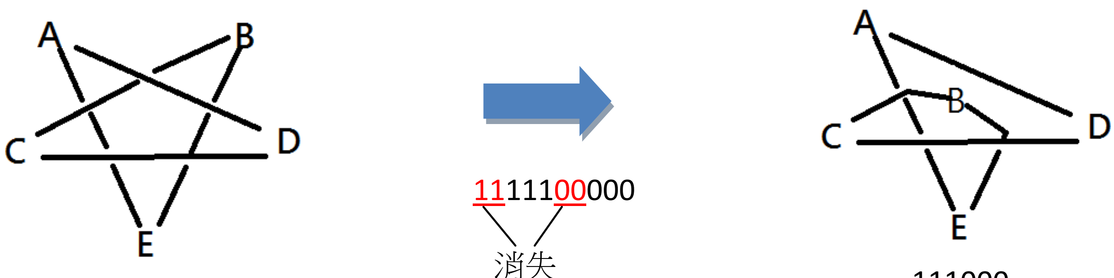
按照牽手順序，可以發現第一個牽手順序碼遇到的交錯點與第六個相同、第二個與第七個相同、第三個與第八個相同、第四個與第九個相同、第五個與第十個相同，也就是說，第一個與第六個的牽手順序碼相反，若第一個是 1，則第六個是 0，依此類推。每一種圖形都會有屬於自己的一對一對應規則。在之後的討論中，將這個方式稱為「交錯點編碼」，而交錯點編碼是 Dowker notation 的延伸。





4. 星星結的簡化

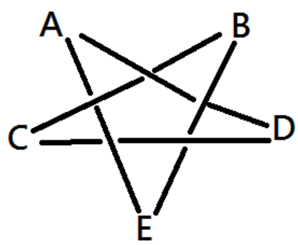
由下圖可看出，當 B 的兩手伸出，兩隻手都在 $\overline{AD}$ 下方，也就是從 C 走到 B 再到 E 的過程中，牽手順序中會有連續兩個 0，$\overline{AD}$ 對應到了這兩個 0，會連續記兩個 1，而這時 B 只要從 $\overline{AD}$ 下方穿過到中間，就會少兩個交錯點，由原本的五個交錯點變成三個交錯點，因此可知當一個人的兩手同在某一條線的上或下時，會有兩個交錯點消失。



1111100000　　111000

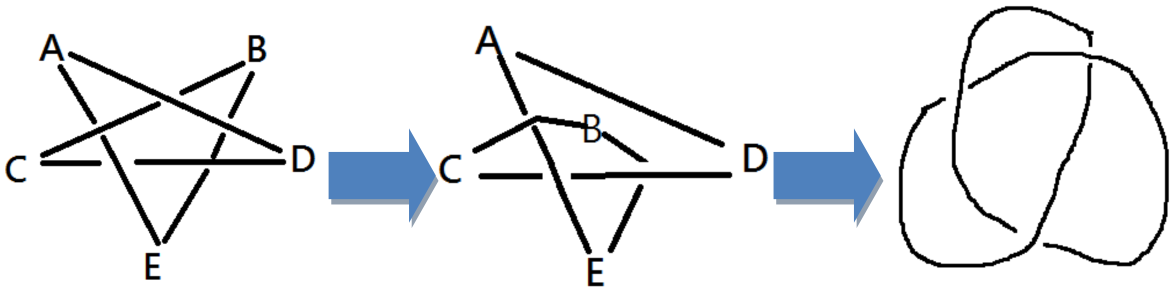
5. 依照簡化後的交錯點數量推論出成結情況

每出現一組「11」和相對應的「00」，就會少兩個交錯點，因此在五角星形中不可能出現四個交錯點的情況，而當沒有任何「11」或「00」的圖形，也就是簡化後為五個交錯點的情況(如右圖)，無法解成一圓。因此五個人的成結情況簡化後可能是三個交錯點或五個交錯點。

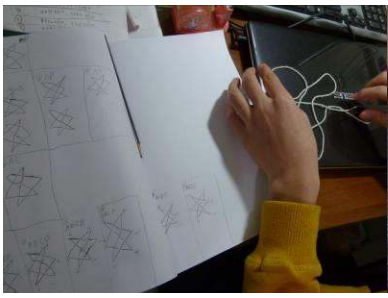
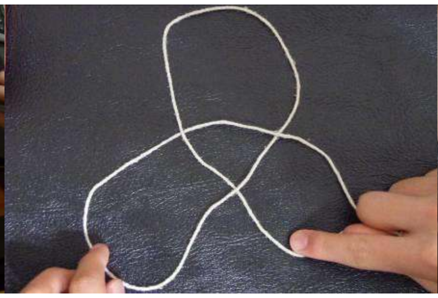
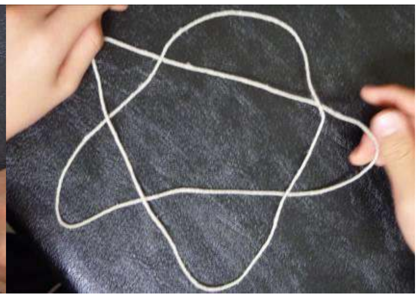


1010101010

簡化後有三個交錯點情況中，牽手順序由 5 個 1、5 個 0 所組成，這 10 個數字只能有一組 11，一組 00(這樣才會有三個交錯點)，依照交錯點編碼的順序，將所有可能的牽手順序列出為 1110100010 和 1101000101(如下圖)，數字順序調換後其實兩串數碼是相同的(可將 1110100010 的第一個 1 換成 1101000101 的最後一個 1)，也由此可知，五個人的牽手情況，有兩種是可以成結的。

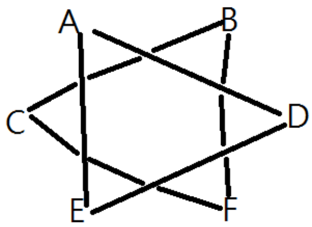


1110100010　　101010　　簡化後形成三葉結

實際使用棉線打出結，並隨時記錄↑　　　　三葉結↑　　　　　　　　星星結↑

(三)六人以上牽手情況



從六人開始，互相面對的三個人可以自行圍成一個三角形，另外三個人也可以圍成三角形(如右圖)，所以除了要探討圍成一封閉曲線的情況，還得探討圍成兩封閉曲線的情況。

1. 六人牽出兩封閉曲線

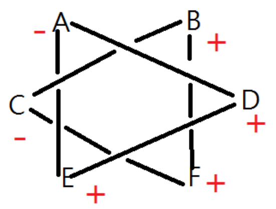
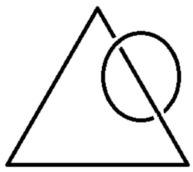
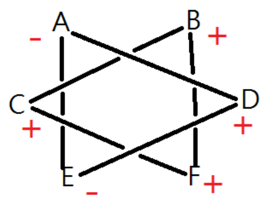
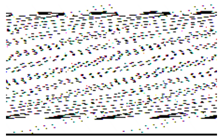
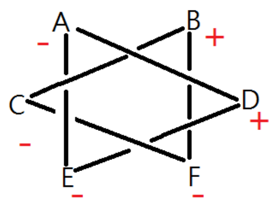
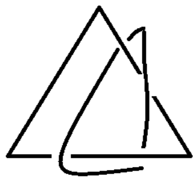
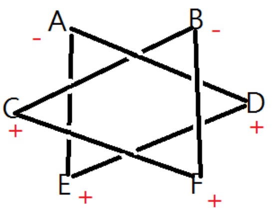
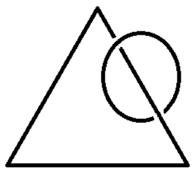
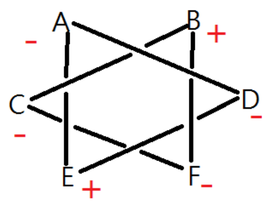
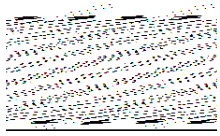
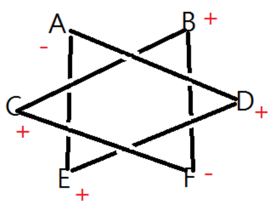
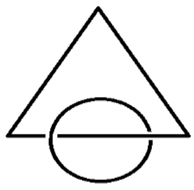
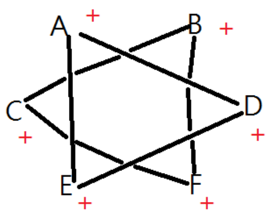
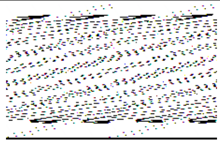
若六人為 A、B、C、D、E、F，則會圍成⊿ADE 和⊿BCF，因為這兩個三角形的上下情形一樣是相對的，所以只需要討論一個三角形的上下情形即可，在這裡我們討論三角形 ADE 的上下情形。

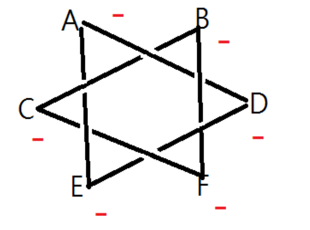
六人兩圈情況會有六個交錯點，對三角形 ADE 來說，每個交錯點的牽手順序碼可能是 1 或是 0，所以總共會有 2^6 種牽手順序，而因為兩個三角形的上下情形相反(像是三角形 ADE 是 111000 時，三角形 BCF 會是 000111)，所以必須再將得到的數字除以二，總共是 2^5=32 種，以下將這 32 種情況的數碼列出：

111110	111100	111010	110010	111000	110110	111111	101010
111101	111001	110101	100101	110001	101101		
111011	110011	101011	001011	100011	011011		
110111	100111	010111	010110				
101111	001111	101110	101100				
011111	011110	011101	011001				

在這 32 種情況中，可以分為 8 類，如上表所示，同一類的數字碼都是代表同一種結，因為這數字碼的起點是可以自行決定的，換個角度看，圖形還是一樣。可以由這些數字碼看出，同一類的數字碼是同一種順序，可是從不同的地方開頭而已。

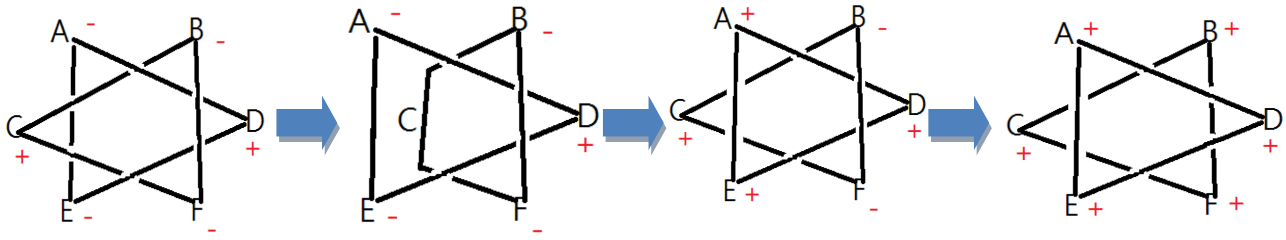
先定義若兩隻手伸出後，兩手都在同一線的上或下，稱為「+」；若兩隻手伸出後，兩手一上一下，稱為「－」，而討論「－」的相對位置，可以分類出結的種類。實際將這七種圖形畫出來，整理如下：

三角形 ADE 牽手順序編碼	圖形	+的數量	一的數量	一的相對位置關係	是否可解	簡化圖及編碼簡化說明
111110		4	2	兩個相鄰	否	 ~~1111~~10→10(鏈)
111100		4	2	分開	是	 ~~111100~~→無
111010		2	4	四個相連	否	 ~~11~~1010→1010(鏈)
110010		4	2	兩個相鄰	否	 ~~1100~~10→10(鏈)
110110		2	4	兩兩相鄰	是	 ~~110110~~→~~00~~→無
111000		4	2	分開，隔兩個+	否	 1~~11~~0~~00~~→10(鏈)
111111		6	0		是	 ~~111111~~→無

101010		0	6	全部相連	否	 101010(鏈)

由上表可知，六人以上牽成兩封閉曲線會有五種情況成結，形成一個「鏈」(link)。可利用牽手順序的數碼將六角星形簡化，並很容易看出是否成結。

(1) 從上表歸納並討論後，發現六人兩封閉曲線情況可以用以下方法化簡：如下圖，在此圖 100100 的情況下，會出現兩個+和四個－，以 C 來看，若將 C 先向內移動，再從 $\overline{AE}$ 的下方穿出，發現 A 和 E 都變成了+，而 C 不變；對 D 重複這個動作，全部的人都變成+了，由此可知這個圖是可以解開的。就像點燈遊戲一樣，只能點+，點了+之後旁邊的－會變成+、+會變成－，而原本點的+依然是+，若能讓所有的人都變成+即可解開。

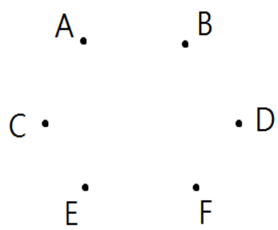


100100

(2) 從另一個角度看，兩個封閉曲線的情況經過簡化後，只需要兩個交錯點即無法解開，如上圖 C 向內移動後可以減少兩個交錯點，依照 100100 的順序來看，是最後兩個交錯點 00 消失，而 D 向內移動是中間的兩個交錯點 00 消失，剩下的 11 可以消掉不算一個交錯點，因此為不成結的圖形。依照這種想法，11 或 00 連在一起即可抵銷不算交錯點，也可以解決六人兩封閉曲線的問題，像圖 101000，僅可消去最後的 00，剩下的 1010 就是簡化後的牽手順序(成結)。

2. 六人牽成一封閉曲線

在六個人的情況下圍成一封閉曲線，首先要找出有幾種可能的圖形(如右圖)。因為不能牽相鄰的人，因此只有三個選擇(如右圖 A 只能牽對面的 D、E、F)。



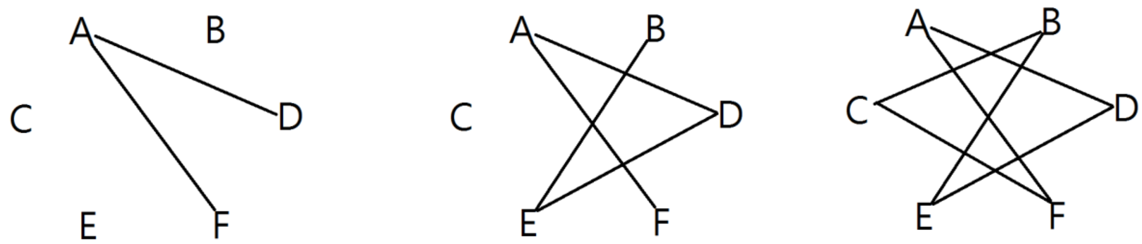
每個人的兩隻手不能牽同一人，先從 A 開始討論，A 可以選擇牽 D 和 F、D 和 E 或 E 和 F，而牽 DF 和 EF 只是鏡射的圖形，畫出來是相同的，因此只討論牽 DF 的情形。接下來一一討論各種牽手的方式：

1. A 連接 D 和 F

(1) A 畫兩線分別到 D、F。

(2) 對 E 來說，可以牽的三人為 A、B、D，但 A 已牽了兩人不能再牽，因此 E 只能牽 B 和 D。

(3) 對 C 來說，可以牽的三人為 B、D、F，但 D 已牽了兩人不能再牽，因此 C 只能牽 B 和 F。



圖一

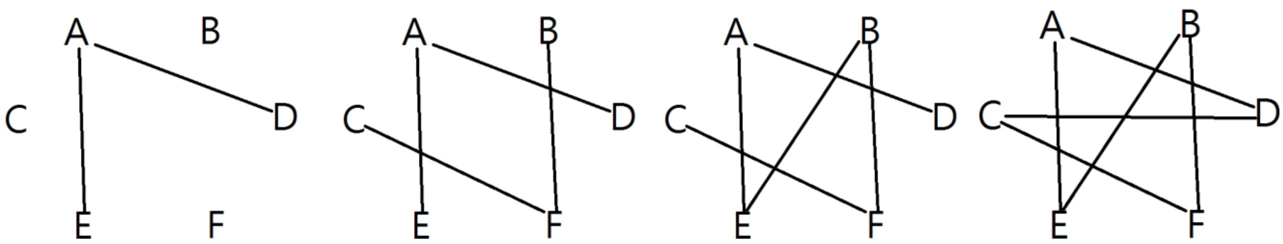
2. A 連接 D 和 E

(1) A 畫兩線分別到 D 和 E。

(2)對 F 來說，可以牽的三人為 A、B、C，但 A 已牽了兩人不能再牽，因此 F 只能牽 B 和 C。

(3)對 E 來說，可以牽的三人為 A、B、D，而 E 只需要再跟 B、D 其中一人牽(因為已經有一手跟 A 牽了)，這時如果選擇與 D 牽，則會出現兩封閉曲線(前面已討論過)，所以只能跟 B 牽。

(4)對 C 來說，可以牽的三人為 B、D、F，因為已與 F 牽，所以只需要再 B 和 D 選一人牽，而 B 兩手都已經牽別人了，所以只能和 D 牽。



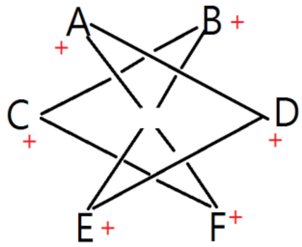
圖二

由上述討論可歸納出在六人一封閉曲線的情況下，可能有兩種圖形(圖一和圖二)，但將這兩種圖形放在一起比較，傾斜角度後可發現兩者是同一種圖形。

將所有情形用+和－的方式討論，發現在六人情況中，可以每個人都是+(即兩手同上或同下)，但若五人同為+則無法畫出，而四人是+又可以畫出來，可歸類為當有偶數或零個人是+時，則圖形可畫出，奇數則不行(其解釋請見「討論」)。以下將這些情形作細部的分類：

(註：由圖形可觀察出，因為兩手伸出後所遇到的交錯點數量不同，因此 A、B、E、F 可視為同一類，C、D 則視為另外一類，下列表格的組合方式會將兩類分開。)

兩手同在上或在下的人數	+的人(每類僅以一種代表)					
6+	ABCDEF					
4+	ABEF	ABCD	ABCE	ABCF	ACDE	BCDE
2+	CD	AB	BD	AD	AE	AF
0+	(無)					



實際將上表的圖形畫出，發現這 14 種圖形中，以+和－分類僅可分類出靠近六人的六個交錯點，中間的交錯點並沒有討論到，而這個交錯點是兩條線疊合而成，會有兩種疊合方法(如右圖，中間空白處有兩種可能的圖形)，也就是每種圖形都還得再多討論一種，即 28 種圖形。

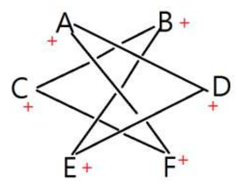
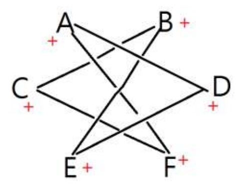
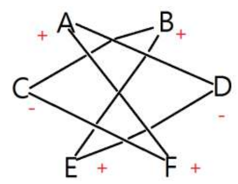
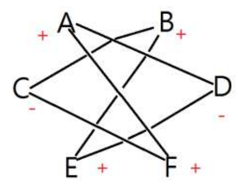
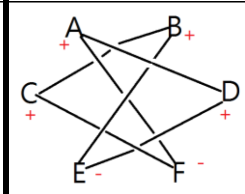
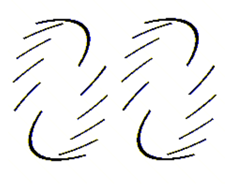
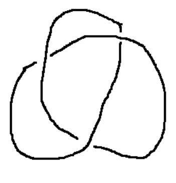
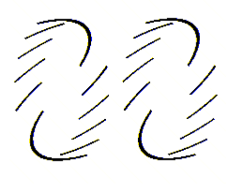
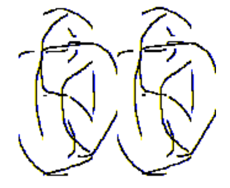
28 種結簡化的方式是遵循以下步驟：

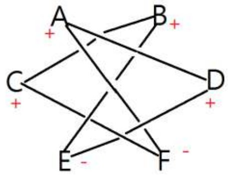
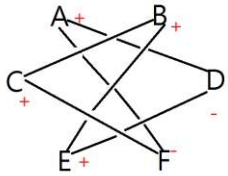
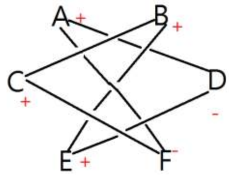
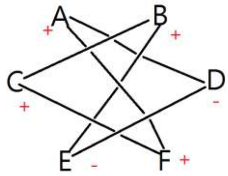
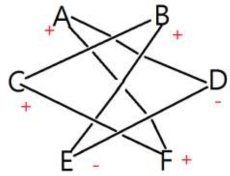
(1)用約 1 米長的棉線擺成如投影圖所示的結。

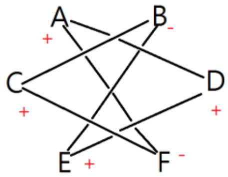
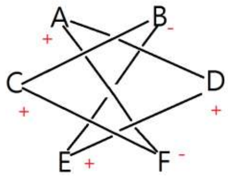
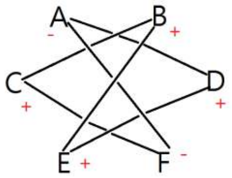
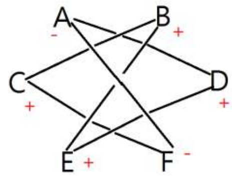
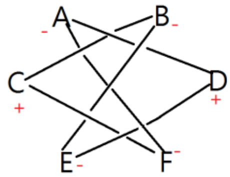
(2)重複尋找是否有 R_1 及 R_2，一直到牽手順序變為 10101010……(1 與 0 完全交錯排列)且沒有任何符合 R_1 及 R_2 所要拉開的線。

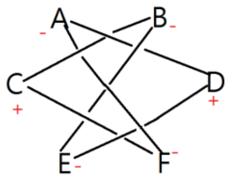
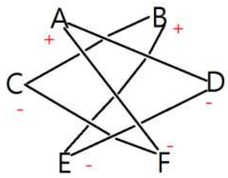
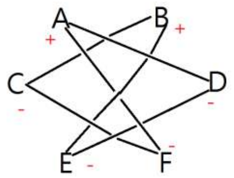
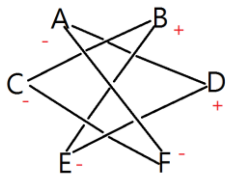
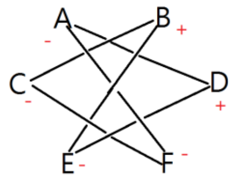
(3)記錄結果。

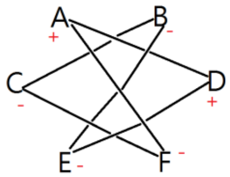
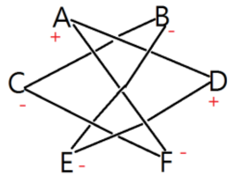
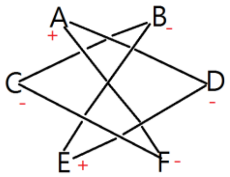
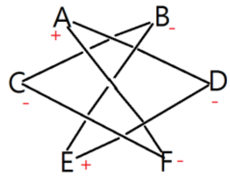
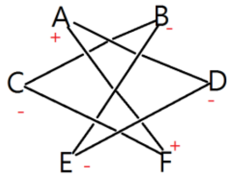
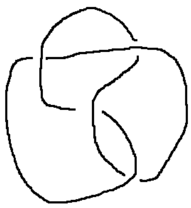
註：因 C 和 D 兩手遇到不同線段，因此不可使用前面所提到的 11 和 00 消去法。

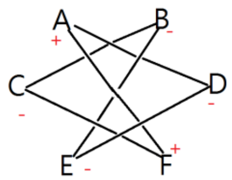
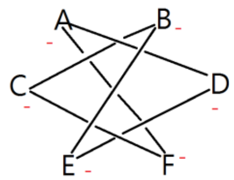
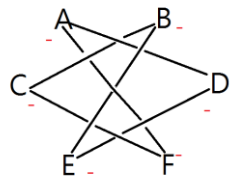
+的人	ABCDEF(1)	ABCDEF(2)	ABEF(1)	ABEF(2)	ABCD(1)
圖形					
牽手順序	11111000000011	11111100000001	11000100011101	11000000011111	11101100001001
是否可解	是	是	否(三葉結)	是	否(八字結)
解完的圖形					

+的人	ABCD(2)	ABCE(1)	ABCE(2)	ABCF(1)	ABCF(2)
圖形					
牽手順序	11101000001011	00100111111000	00100011111010	00110011110010	00110111110000
是否可解	是	是	否(三葉結)	是	是
解完的圖形					

+的人	ACDE(1)	ACDE(2)	BCDE(1)	BCDE(2)	CD(1)
圖形					
牽手順序	01100101111000	01100001111010	00011111000101	00011011000111	10010110110100
是否可解	是	是	否(三葉結)	是	否(六交錯點)
解完的圖形					

+的人	CD(2)	AB(1)	AB(2)	BD(1)	BD(2)
圖形					
牽手順序	10010010110110	11010000010111	11010100010101	00010011010111	00010111010101
是否可解	否(六交錯點)	是	否(五交錯點)	是	否(五交錯點)
解完的圖形					

+的人	AD(1)	AD(2)	AE(1)	AE(2)	AF(1)
圖形					
牽手順序	10010010010111	10010100010101	10100110011001	10100010011011	10110110010001
是否可解	否(八字結)	是	是	否(三葉結)	是
解完的圖形					

+的人	AF(2)	無(1)	無(2)
圖形			
牽手順序	10110010010011	10101110101000	10101010101010
是否可解	是	否(三葉結)	否(七交錯點)
解完的圖形			

由以上表格可以清楚看出在六人牽成一封閉曲線的情況下，所有可能成結的情況。

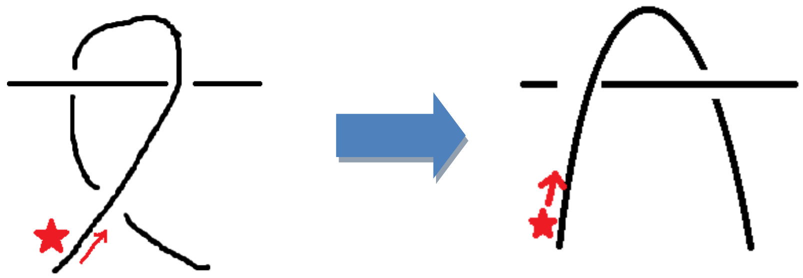
(四) 找出判斷是否成結的依據和簡化結的最快方式

1. 我們發現，在結簡化的過程中，其實就是遵循了參考資料所提到的「Reidemeister moves」的 R_1 及 R_2，利用此兩種最基本的結的移動方式，可以將結最簡化。其中 R_1 減少 1 個交錯點、R_2 減少 2 個交錯點。

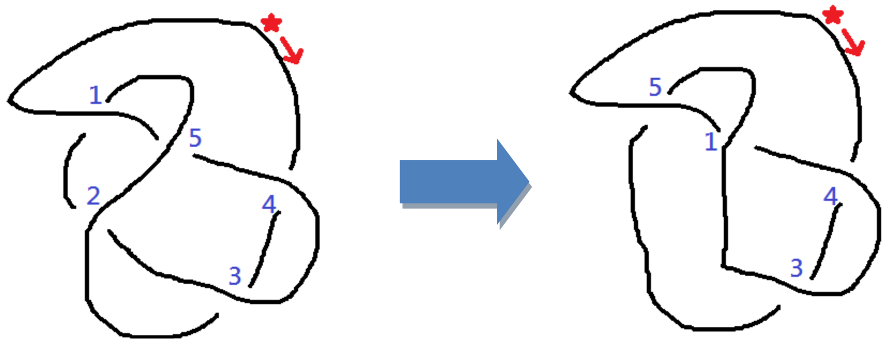
2. 為了用最快的方式簡化結，必須先找到有關此結的資訊，再依照此資訊進行簡化，而從上述的討論中可發現，牽手順序與交錯點編碼是很容易、分別兩結的方法(見討論二)。簡化結應使用 R_1 和 R_2，以下討論除了單純的 R_1 和 R_2 之外，是

否還有延伸的簡化方式。

(1) R_1 的產生方式除了「連續兩碼在同個交錯點」，還有另一種產生方式，如下圖，當牽手順序為 1100(或 0011)且兩畫底線數碼為同一交錯點時，可使用 R_1 將兩畫底線數碼消去。



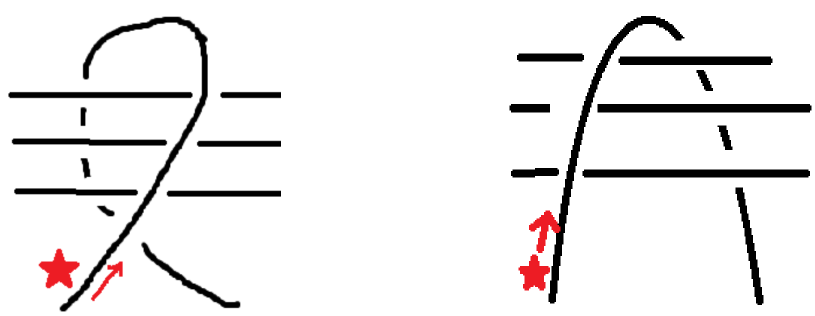
這時要注意的是，圖中橫線雖然沒有減少交錯點，但交錯點「位置改變」,被兩底線所夾的兩碼 1 和 0 分別對到的交錯點必須互換位置。舉例來說，左下圖的牽手順序為 111000，兩畫底線數碼消去後可得右下圖，這時牽手順序變成 **0**1**0**1，粗體數字為交錯點位置改變。



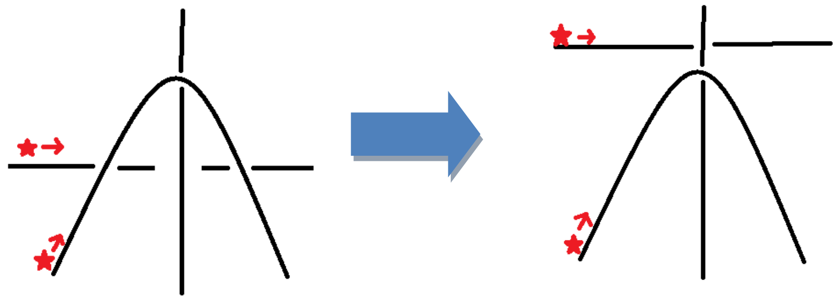
0 0 1 1 0 0 1 1 *0* *1*
(4)(3)(2)(5)(1)(2)(3)(4)*(5)(1)*

0 0 1 0 1 1 1 0
(4)(3)(5)(1)(3)(4)(1)(5)

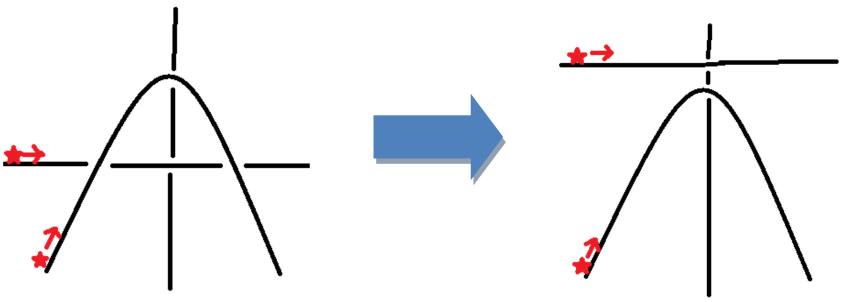
上述簡化法的牽手順序中，最前面的 1 和最後面的 0 中間可以放入 10、1100、111000……，這是因為在一個 R_1 的圖形中可以放入很多條不同的線，如下圖的牽手順序就是 11110000，在 1 和 0 之間放入了 111000。



(2) 若牽手順序中仍出現 11 或 00，就表示這條線還不是最簡的扭結，一定可以再利用 Reidemeister moves 化簡。另外 R_2 還有另外兩種產生方式，如下圖，彎曲線的牽手順序為 111，橫線的牽手順序為 000，畫底線的牽手順序碼在同兩個交錯點，這時可使用 R_2 將這兩個交錯點消除。



下圖的彎曲線牽手順序為 111，橫線牽手順序為 010，畫底線的牽手順序碼在同兩個交錯點，這時可使用 R_2 將這兩個交錯點消除。



若牽手順序為「000」及「101」，一樣可以使用這種簡化方式(因為兩者是鏡射關係)。

進行這兩種簡化時需要注意，直線從上往下走時，牽手順序從 01 變成 10，兩交錯點位置會改變。和 R_1 一樣，在 1 和 0 之間可以放入 10、1100、111000……。

3. 結合研究過程中的簡化方式，歸納出四種最基本簡化結的方式：

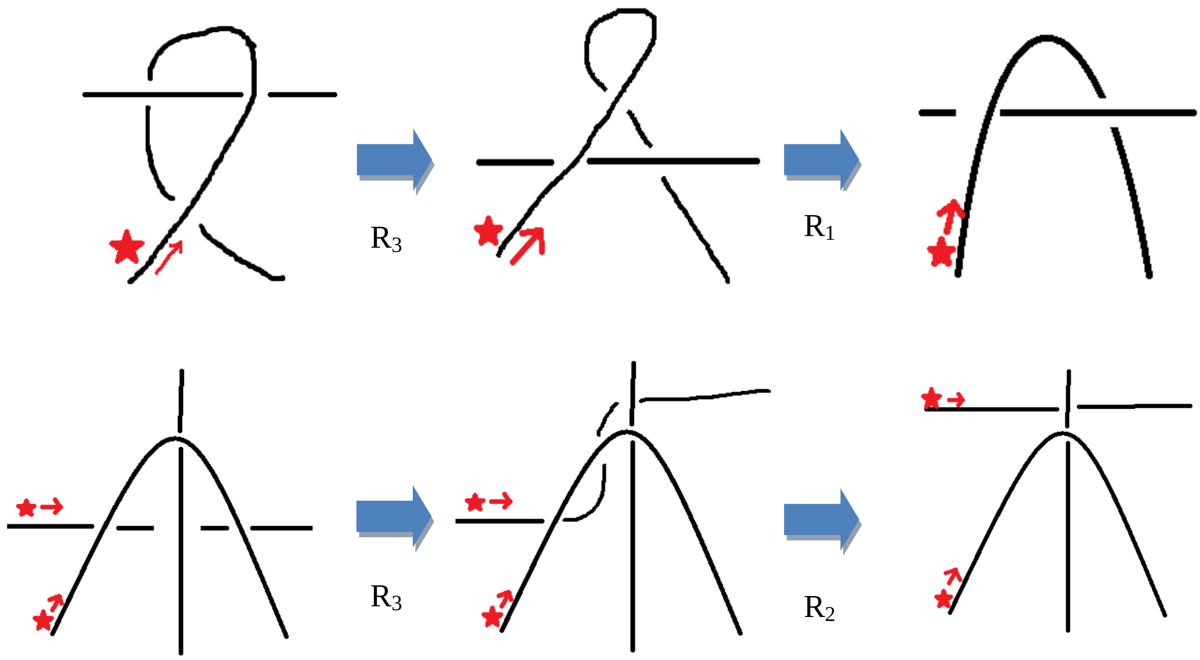
方法一：若牽手順序中出現「11」及「00」且在同樣兩個交錯點，則可以使用 R_2 減少 2 個交錯點。

方法二：若牽手順序中出現「10」且兩數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點。

方法三：若牽手順序中出現「1100」且兩畫底線數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點，並將中間 10 所對到的交錯點數碼互換位置。(中間數碼可以是 10、1100、111000……)

方法四：若牽手順序中出現「111」及「000」、「111」及「010」或「000」及「101」，畫底線數碼在同樣兩個交錯點，可使用 R_2 減少 2 個交錯點，而中間兩數碼所對應到的交錯點數碼互換位置。(中間數碼可以是 11 及 00、111 及 000……)

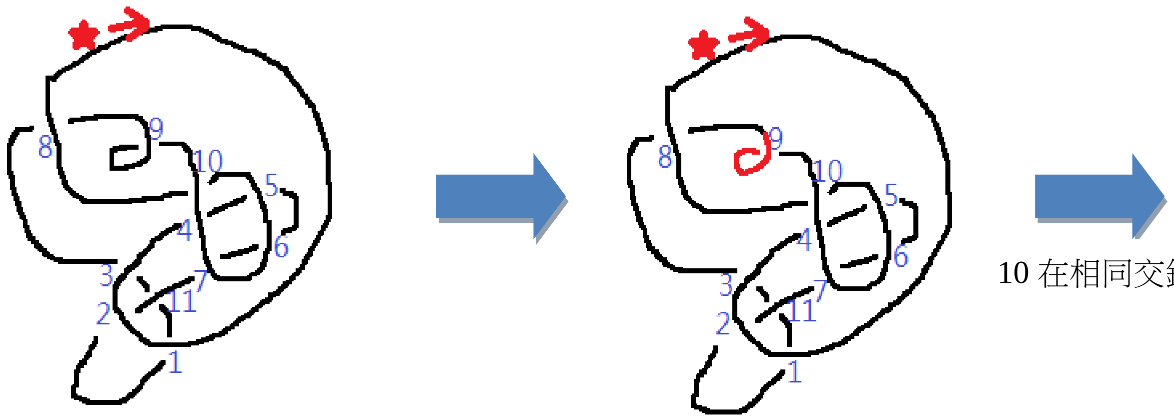
使用這四種方式即可完全簡化一個結，這是因為 Reidemeister moves 是結的基礎變換，若使用其簡化的特性，可以將所有結都完全簡化(對結做有關交錯點增減的過程，都一定是使用 Reidemeister moves)。方法一是 R_2 的簡化，方法二是 R_1 的簡化，方法三是 R_1+R_3，方法四 R_2+R_3。



(五)、簡化結的舉例與步驟

1. 一封閉曲線

以下圖為例：(牽手順序為上排的 1 和 0，交錯點編碼為下排的(1)、(2)……且順序可自行訂定，紅色數字代表可消去之交錯點，牽手順序與交錯點編碼的藍色數字代表受影響、必須交換順序的交錯點)



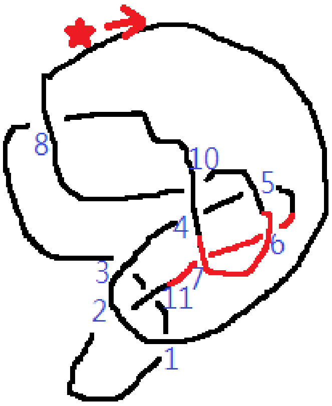
10 在相同交錯點

1 1 1 0 0 0 0　1 0 0　0 0 0 1 0　1 1 1 1 1　0 1

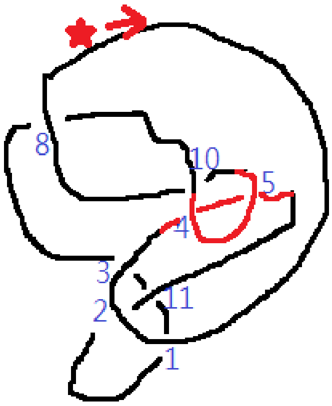
(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(9)(9)(10)(4)(7)(6)(5)(10)(8)

1 1 1 0 0 0 0　1 0 0　0 0 0 1 0　1 1 1 1 1　0 1

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(9)(9)(10)(4)(7)(6)(5)(10)(8)



11 和 00 在相同交錯點



11 和 00 在相同交錯點

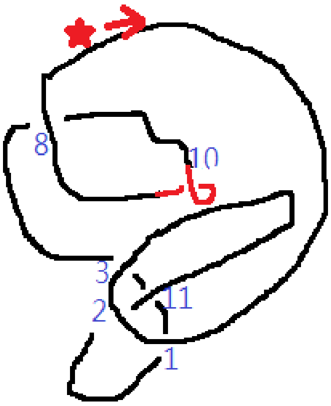
10 在相同交錯點

1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1

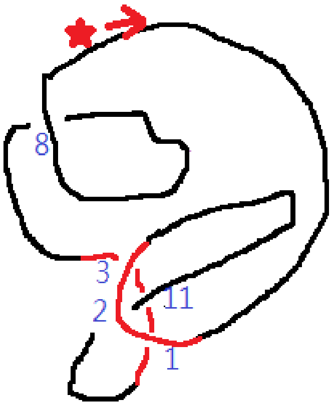
(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(10)(4)(7)(6)(5)(10)(8)

1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1

(1)(2)(3)(4)(5)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(10)(4)(5)(10)(8)



10 在相同交錯點



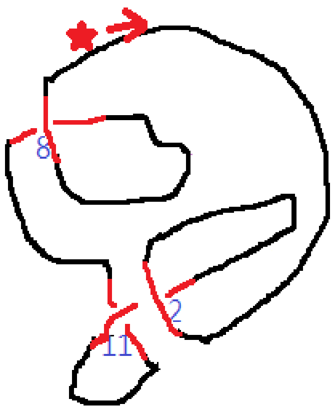
111 和 000 底線數碼分別在相同交錯點

1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1

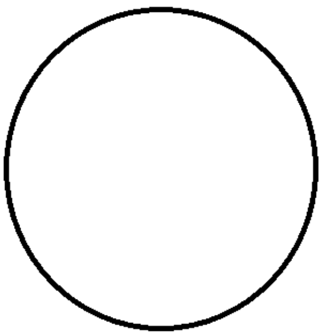
(1)(2)(3)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(10)(10)(8)

1 1 1 *1 0* 0 0 0 0 1

(1)(2)(3)*(11)(2)*(1)(11)(3)(8)(8)



三對 10 分別在相同交錯點



1 0 1 0 0 1

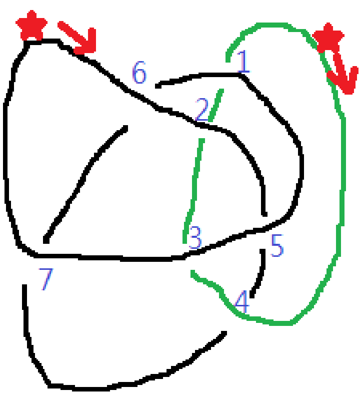
(2)(2)(11)(11)(8)(8)

無

最後得出來的圖形為一個圓， 成功的完全簡化一個結。因此可以運用這套方式，寫出牽手順序和交錯點編碼來判斷一個手結是否成結及如何簡化。

2. 兩個以上封閉曲線

此類圖形必須將每個封閉曲線的牽手順序與交錯點編碼分開來寫，再使用簡化結的四種方式將它簡化，簡化時要將兩組牽手順序與交錯點編碼合起來看，以下圖為例：



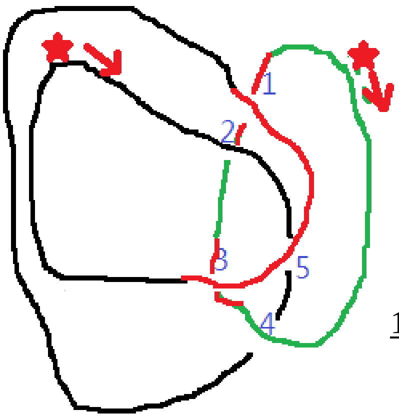
1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
(6)(2)(5)(4)(7)(6)(1)(5)(3)(7)

1 0 0 0
(4)(3)(2)(1)

1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
(6)(2)(5)(4)(7)(6)(1)(5)(3)(7)

1 0 0 0
(4)(3)(2)(1)

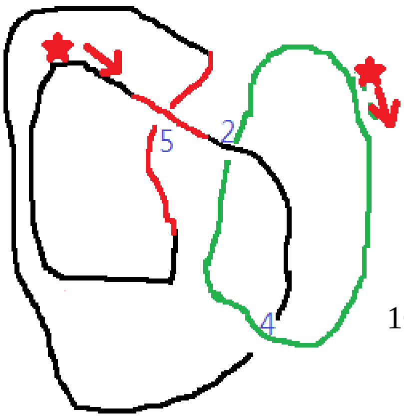
11 和 00 在相同交錯點



1 0 0 1 1 1
(2)(5)(4)(1)(5)(3)

1 0 0 0
(4)(3)(2)(1)

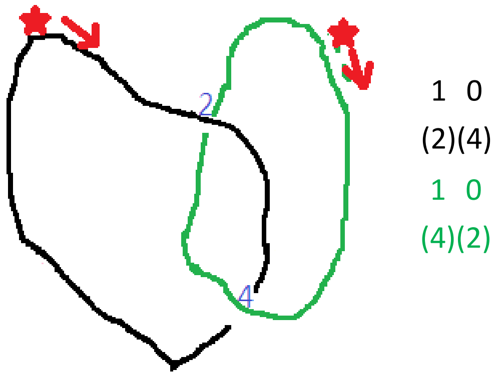
<u>111</u>和<u>000</u>底線數碼分別在相同交錯點



0 1 0 1
(5)(2)(4)(5)

1 0
(4)(2)

10 在相同交錯點



以上就是兩個封閉曲線的簡化過程，在這個例子中，最後結簡化成一個鏈，有兩個交錯點。

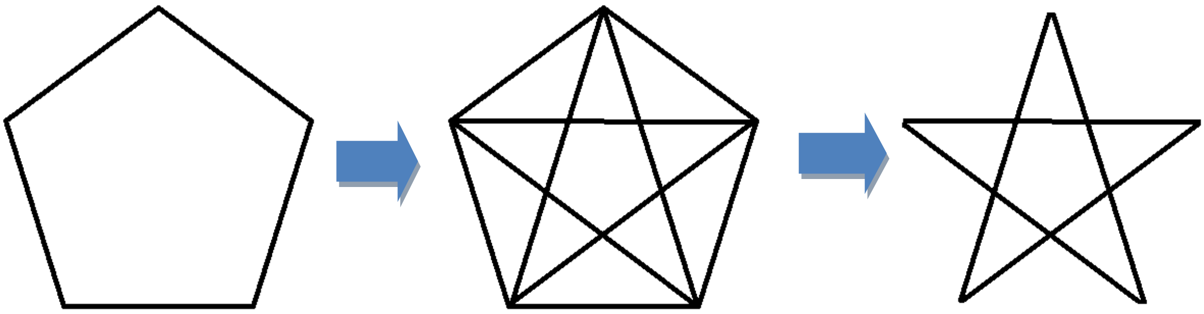
在三個或以上的封閉曲線中，也可以使用相同的方式，將三條封閉曲線的牽手順序與交錯點編碼列出，併在一起看並尋找簡化的步驟。

三、 星星結的討論、實作與簡化

在以上一一找解的過程中，發現其中最有規律並最常在牽手遊戲中牽出的圖形就是「星星結」，星星結的特色就是極有規律，而且同種類的圖形可以用同樣的方式解出，因此讓我們極感興趣，決定研究一些星星結，找出其特定的解法。

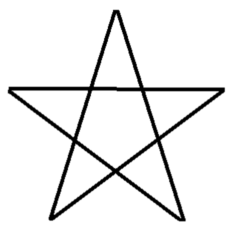
上網查詢有關資料，原來星星結在國外叫做「芒星」或「星多邊形」，有五芒星、六芒星、七芒星、八芒星、九芒星及十芒星等等不同的種類，其中五芒星及六芒星在前面的研究中皆已討論過，因此又增加研究了七芒星、八芒星、九芒星及十芒星，觀察其規律。

星星結的畫法很容易，先畫出一個正多邊形，從某些頂點開始以有規律的走法將每個頂點都走過，畫完後再將原多邊形外框擦掉，就完成了(如下圖五芒星)。



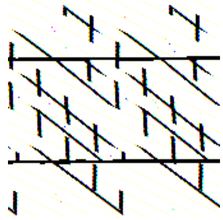
(一) 五芒星及六芒星的簡化法

如右圖，當五芒星及六芒星的最外面的頂點(以下全部簡稱頂點)，當兩手同在上或同在下，頂點向內移動後可以減少兩個交錯點，列出牽手順序並將相對應的 11 或 00 刪除後，剩下的數字即為此圖形化簡最終的圖形。一封閉曲線的結至少要三個交錯點才能成結，兩封閉曲線只需



五芒星

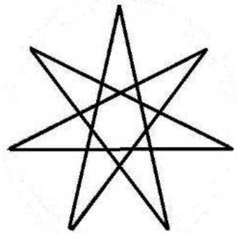
要兩個。



六芒星

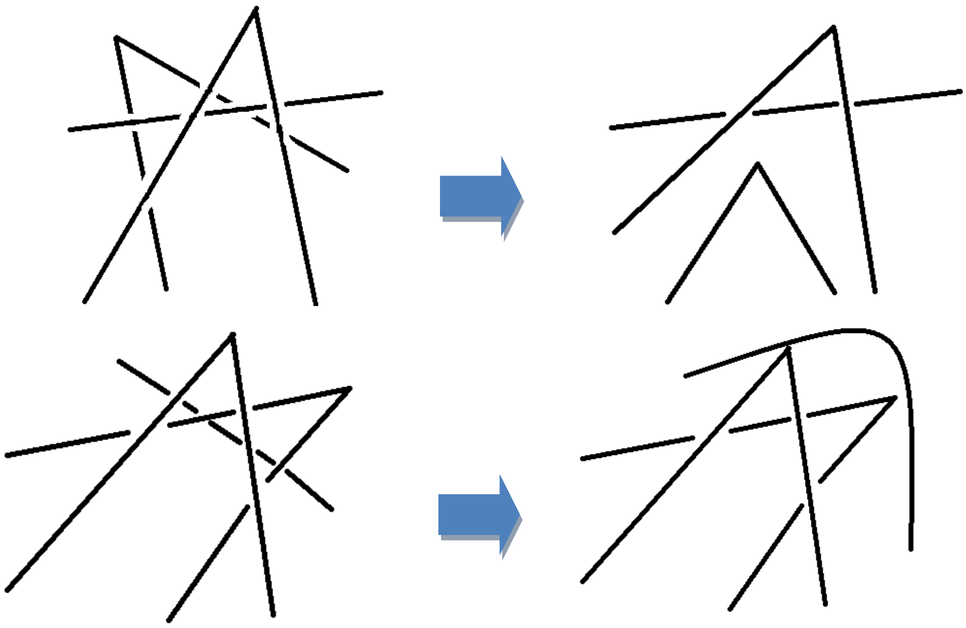
(二)　七芒星

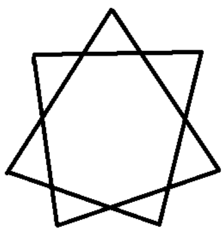
如右圖七芒星(1)，發現這與五芒星和六芒星的解法不同，這是因為每一個頂點所伸出的兩線交錯於兩條不同的線(雖然是同一大條牽手的線，卻是由不同的兩組頂點所連接)，因此儘管兩手同在上或同在下，並不能直接向內移動而減少交錯點。



七芒星(1)

由簡化方法 4 可知，若牽手順序中出現「111」及「000」且畫底線數碼在同樣兩個交錯點，可減少 2 個交錯點，在這一類的星星結中，因為其規律(如下圖)導致若出現連續 3 碼相同，可消去前後 2 碼，重複一樣的方法後，最後得到的即為化簡過後的結。連續使用兩次簡化方法 4，可以減少 4 個交錯點，因此當此圖中有 4 個牽手順序碼相同時，可以直接消除(如下圖)。



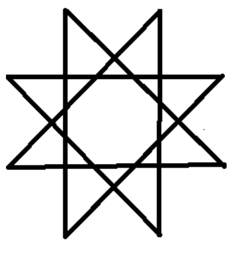


七芒星(2)

而七芒星(2)，與五芒星和六芒星相同，每個頂點若雙手同在上或在下，則可以消除兩個交錯點，依此方式找出化簡後的圖形。

(三)　八芒星

八芒星(1)有著與七芒星(1)相同的性質，每個頂點所伸出的兩線並不交於同一條直線，觀察兩者異同並實際用棉線擺過後，得出其實兩者簡化方式相同：若出現連續 3 碼相同，可將其中 2 碼消除；如果連續 4 碼相同，則可以全部消除。



八芒星(1)

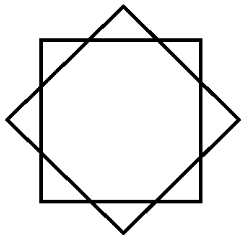
八芒星(2)屬於與五芒星及六芒星同種類的結，化簡方式與五芒星和六芒星相同，不再贅述。

(四) 九芒星

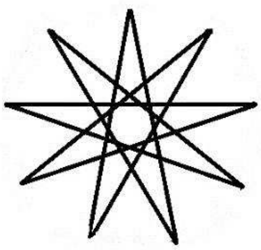
九芒星(1)的化簡方式則與五芒星及六芒星相同。

九芒星(2)也有著與七芒星(1)相同的性質。而且因為它是由三個封閉曲線所構成，任兩個封閉曲線就像六芒星一樣，可以運用「+－消去法」來討論是否成結，運用此規則，將三條封閉曲線兩兩討論(也就是討論三次)，找出哪幾條封閉曲線會互相成結，就可以知道整個圖形是否成結。

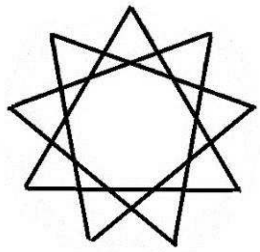
九芒星(3)有著與七芒星(1)相同的性質。



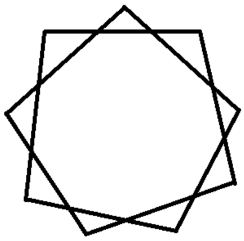
八芒星(2)



九芒星(3)



九芒星(2)

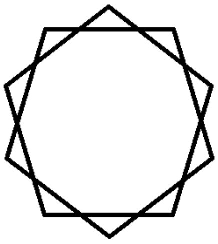


九芒星(1)

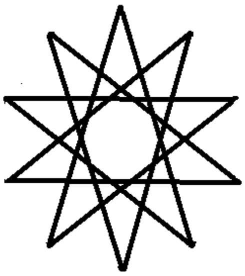
(五) 十芒星

十芒星(1)的化簡方式與五芒星及六芒星相同。

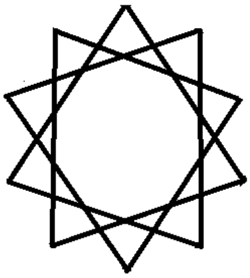
十芒星(2)和十芒星(3)的簡化方式與七芒星(1)相同。



十芒星(1)



十芒星(2)



十芒星(3)

另外，我們也討論了星星結所有可能的情況。假設一星星結有 x 個頂點，可牽出$\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil - 2$種星星結，因為不管剛開始在畫圖型的時候，是利用什麼規律，伸出去的兩手都只可能是遇到同一線段或遇到不同線段，因此可以知道星星結的簡化方式只有兩種，並且可以不看交錯點編碼，是最簡便的簡化方式。

四、 利用前述研究推廣較特別的遊戲方式

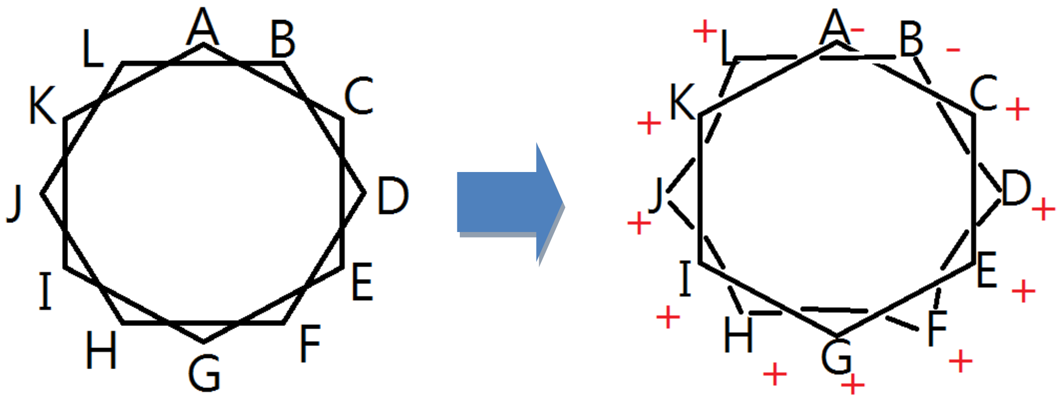
在較特別的遊戲中，可能希望讓所有人牽成多封閉曲線並互相連接在一起(也就是鏈)，接下來要討論這樣的牽法是否有一定的規則。

(一) 牽成兩封閉曲線並成結

1. 分組：為了使最後得出來的手結呈現多個封閉曲線，必須要將人分組，若

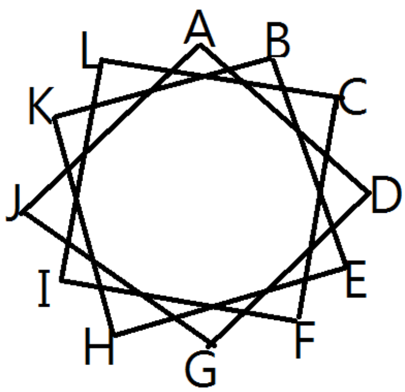
有 12 個人參與遊戲並希望牽成兩封閉曲線並成結(形成一個鏈)，可分成 A、C、E、G、I、K 一組，B、D、F、H、J、L 一組。

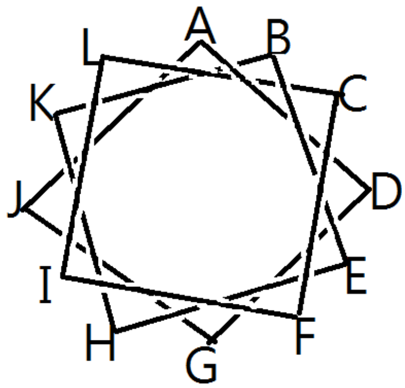
2. 牽手方式：由「柒、討論」中的第一點，配合前述研究過程的六人兩封閉曲線中可知，若要讓多封閉曲線的手結成結，最快的方法是「只有一人或兩人是－，其他都是+」，在偶數人時必須 2 個人是－並相連，奇數人時有 1 個人是－，這樣一定會成結。這不是唯一方法，但卻是本研究所討論出最簡便的方法。



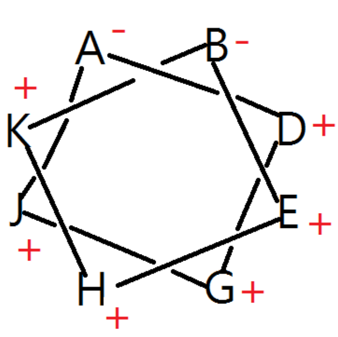
(二) 牽成三個以上封閉曲線並成結

1. 分組：最好的方式是每組人數相同，但若人數不同也沒關係，只是較難控制牽手順序。以 12 人牽出三個封閉曲線為例，A、D、G、 J 為一組(群組 A)，B、E、H、K 為一組(群組 B)，C、F、I、L 為一組(群組 C)。
2. 牽手方式：由於這是四個人一封閉曲線的圖形，兩兩合併討論共有八人，也就是要有兩人為「－」，六人為「+」，且這兩個「－」要相鄰。以群組 A 和群組 B 來說，若 A 和 B 是－，其它是+，則群組 A 和群組 B 會成結。同理，若 C 也是－，其他是+，則群組 A 和群組 C、群組 B 和群組 C 都會成結。
3. 依照上面的推論，可知道在三個以上封閉曲線並成結的圖形中，只要每一組都僅有一人為「－」，且「－」的人相鄰，則此圖形成結。

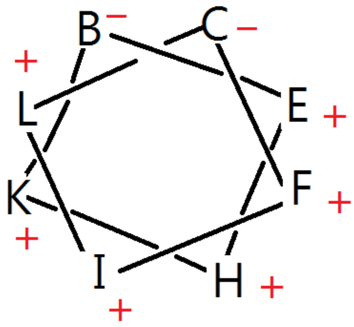




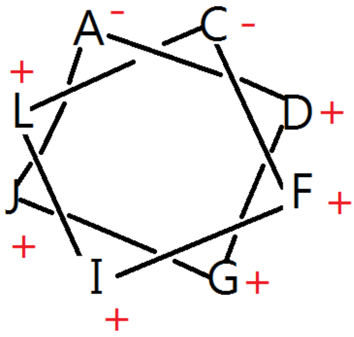
成結圖形



群組 A 和群組 B



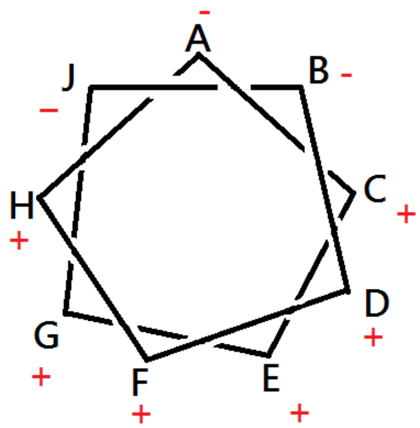
群組 B 和群組 C



群組 A 和群組 C

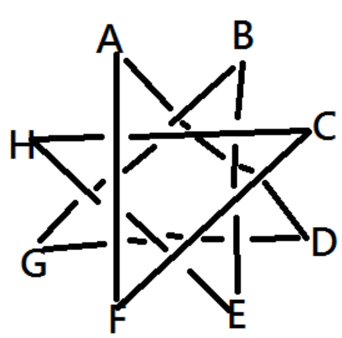
(三) 牽成一封閉曲線並成結

1. 運用原理：如果要讓一個一封閉曲線成結，最少需要 3 個交錯點；奇數人牽成星星結(所有人的兩手都遇到同一線段)時，會有奇數個－；一個－會造成兩個交錯點，+不會造成交錯點，兩個－相連會造成三個交錯點。
2. 牽手方式：一樣使用星星結的方式，讓所有人牽成星星結(每個人的兩手都遇到同一線段)之後，奇數人時讓 3 個－相連(這樣才會超過 3 個交錯點)。



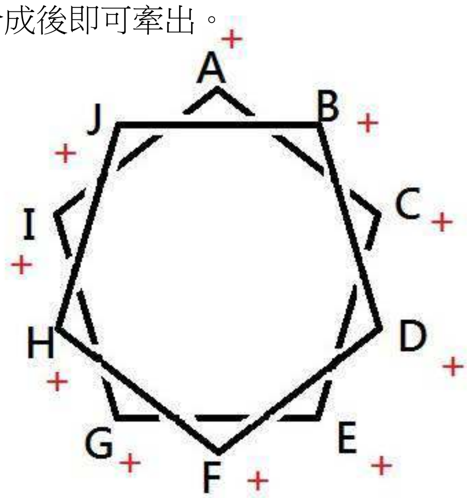
(四) 牽成一個封閉曲線並不成結

1. 原理：假設有一條棉線，固定其中一端後，拉另一端並隨意纏繞，只要沒有穿插的動作，這個結就必定不成結。
2. 牽手方式：利用上述的想法，假設下圖的八芒星(1)中固定 A 點，經由 A→F→C→H→E→B→G→D→A 的順序牽手，每此經過前面已牽過的線段時就從下方經過，依序牽完後，這個結不會成結。



(五)牽成多封閉曲線並不成結

1. 分組：先分成適合人數的牽手方式，組數和每組的人數為總人數的因數。以 12 人牽出三個封閉曲線為例，可將 A、D、G、Ｊ為一組(群組 A)，B、E、H、K 為一組(群組 B)，C、F、I、L 為一組(群組 C)。
2. 原理：利用前面「牽成一個封閉曲線並不成結」的結論可以發現到，只要能讓線段一層一層的交疊而沒有交錯的話，便可以不成結。假設有一個牽手情形是多個封閉曲線並不成結，那就代表每一個封閉曲線都不成結。於是只要我們將每一個封閉曲線拉出來討論並確定它不成結，便可以確定那個牽手情形是多個封閉曲線且不成結。
3. 牽手方式: 首先將所有封閉區線分開來並使之不成結(讓所有人都變成+)，再將此圖形合成後即可牽出。



陸、 研究結果

一、 在符合兩個規則：兩手牽著不同人(規則一)、不可以牽旁邊(相鄰)的人(規則二)的情況下，可以從最少人數、牽手順序及交錯點數量來判斷一結是否成結。因為人可以算是線上一點，一條線上可以有無限多人，所以同一種結可能由不同的人數所牽成。

二、 三人遊戲、四人遊戲皆無法成結；五人遊戲有兩種情況會成結；六人一封閉曲線有 12 種情況會成結；六人二封閉曲線有 5 種情況會成結(圖形詳見研究過程)。

三、 在討論是否成結的過程中，可以使用「找出+與－」及「排出牽手順序」來找出哪些可成結，那些不能。如在五人遊戲和六人遊戲的討論中，就是分別使用「排出牽手順序」及「找出+與－」，便可以用很快的方式整理出成結與否。

四、 可利用兩資訊：牽手順序及交錯點編碼，直接看出手結是否成結，並證明了可以運用以下四種結的簡化方式直接從牽手順序中簡化，並化成最簡的圖形。

方法一：若牽手順序中出現「11」及「00」且在同樣兩個交錯點，則可以使用 R_2 減少

2 個交錯點。

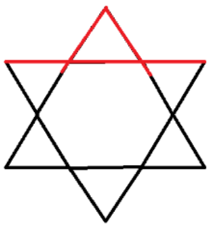
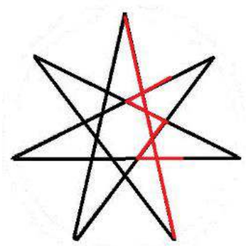
方法二：若牽手順序中出現「10」且兩數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點。

方法三：若牽手順序中出現「1100」且兩畫底線數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點，並將中間 10 所對到的交錯點數碼互換位置。(中間數碼可以是 10、1100、111000……)

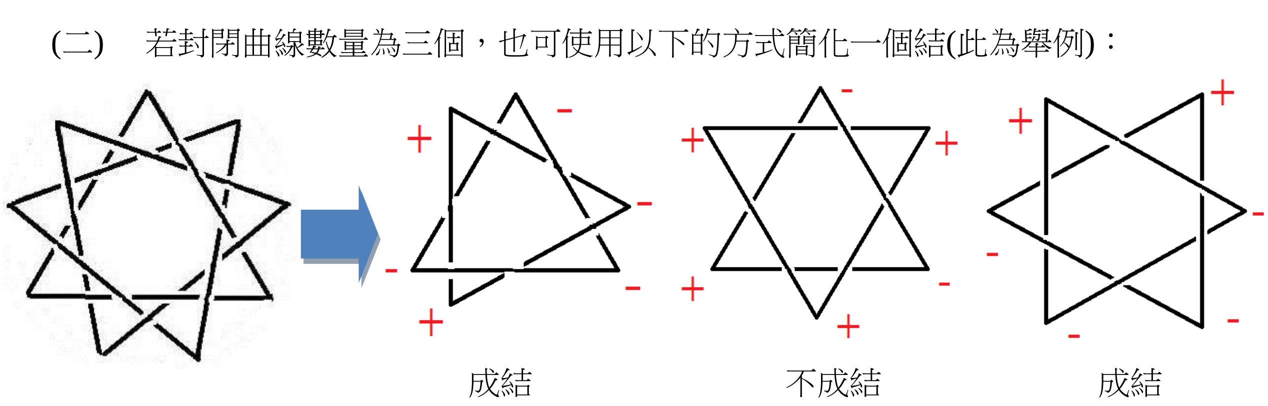
方法四：若牽手順序中出現「111」及「000」、「111」及「010」或「000」及「101」，畫底線數碼在同樣兩個交錯點，可使用 R_2 減少 2 個交錯點，而中間兩數碼所對應到的交錯點數碼互換位置。中間數碼可以是 11 及 00、111 及 000……)

五、「星星結」(又稱「芒星」或「星多邊形」)是從一個正多邊形的某些頂點開始，有規律的連完所有頂點，再將正多邊形的輪廓擦掉，即可繪出。這些結有一定的簡化規律性，在簡化時只需要看千手順序，部需要管交錯點編碼。以下為兩種不同條件的圖形分別的簡化方式：

(一) 若封閉曲線數量為一個或兩個，則會有兩種不同簡化法的圖形，如下表所示：

	種類 1——每個從最外面的頂點發出的兩線相交於同一條由兩個最外面頂點相連的線。	種類 2——每個從最外面的頂點發出的兩線相交於不同條由兩個最外面頂點相連的線。
圖形舉例		
說明	牽手順序中可將 11 或 00 消去化簡。	牽手順序連續 3 碼相同，可消除其中 2 碼 (如 111 變成 ~~1~~1~~1~~)。若連續 4 碼相同則全部消除。

(二) 若封閉曲線數量為三個，也可使用以下的方式簡化一個結(此為舉例)：

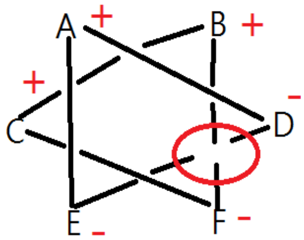


成結 101001　　不成結 110000　　成結 110101

可由上述的分解得到：這個三條封閉曲線的手結成結。

柒、 討論

一、在六人以上牽手情況中，分成兩種不同種類的圖(一封閉曲線及兩封閉曲線)，我們運用全部列舉法的方式找出所有不同的圖形，發現了其中+與－的順序是有一定規律的，在六人兩封閉曲線的討論中，可直接從列出的表格中發現+和－的人數皆是偶數，這是因為在六人情況下，若+和－的人數是奇數的話，會無法打出(如下圖為例)。



設兩手同在一線上方的有 x 人，兩手同在一線下方的有 y 人，一手上方一手下方的有 z 人。由交錯點的性質可列出以下關係式：

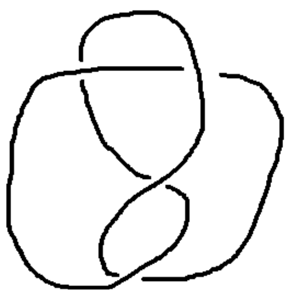
∵ $x+y+z=2x+z=2y+z=$ 交錯點數量

∴ $x=y$

x+y 一定是偶數，所以+的人數一定為偶數。由此可知，在任何情況下，+的人數都為偶數，而－的人數則要依總人數而定。

二、原想利用容易找到的牽手順序來觀察一手結是否成結，並直接利用牽手順序使一結化簡，但我們卻找到了一組「相同牽手順序，結果不同」的圖形，證明了不可能僅看牽手順序就能推出是否成結。這一組圖形如下：

11001100 不成結



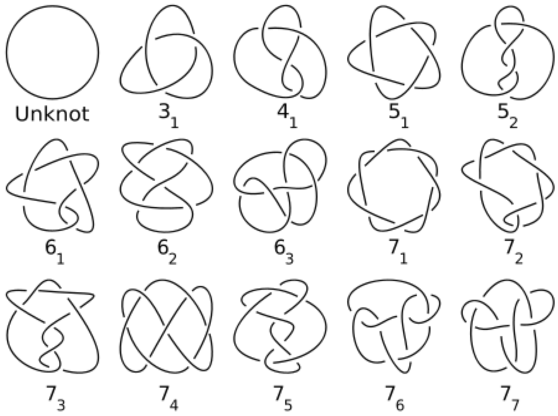
11001100 成結(三葉結)

因此可以推論，若要找出直接看出是否成結的方式，不能只看牽手順序，還必須參考其他有關此結的資訊，例如：交錯點編碼。

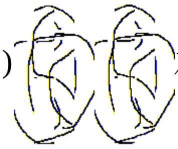
三、在六人一封閉曲線的簡化圖中，許多結無法解開，在簡化過後成為最簡的結，對照「素扭結」圖，可發現其實這些結都屬於扭結，驗證了「利用 Reidemeister moves 的基礎變換可完全簡化一個結」一說，而因為兩種同樣的結長相不一定一樣，因此又使用了 Reidemeister moves 的基本變換來使一結轉換至另一結，驗證了基本變換

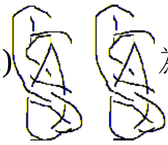
可使一結轉換成另一結。以下列出在六人一封閉曲線中簡化過後的扭結，並配合素扭結圖，做成對照表。

素扭結(Prime knot)：是指不能分解的扭結。素扭結不能表示為兩個扭結相加，而兩個扭結相加成的扭結稱為「複合扭結」。下圖是七個交錯點以下的素扭結，每個圖下面較大的數字代表這個圖形的交錯點數量。

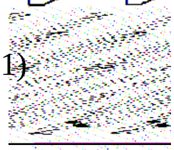


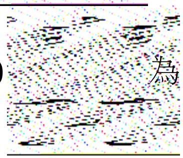
(一) ABEF(1)  為圖 3_1。

(二) ABCD(1)  為圖 4_1。

(三) AB(2)  為圖 5_2。

(四) BD(2)  為圖 5_2。

(五) CD(1)  為圖 6_1。

(六) CD(2)  為圖 6_1。

(七) 無(2)  為圖 7_4。

四、 若想在剛牽好時就直接看出這個手結所圍成的是多少個封閉曲線？最簡單方式是「從一人開始，將這圈封閉曲線走完，看要走幾次才能將所有人都走遍」，由此衍伸出的檢驗方式是「從一個人開始，右手捏牽的人，被捏的人再用另一隻手捏下一個人，直到捏回原本的人才停止」，若所有人都被捏到了則是一封閉曲線，若不是則為多個封閉曲線。此方法供參考，提供給想牽出指定數目封閉曲線的玩家們一種容易的檢驗方式。

捌、 結論與未來展望

一、 這次的研究完成了一大部分的牽手遊戲討論，從最少人數開始，慢慢增加結的複雜度與交錯點數目，找出更多扭結形式，最後發現可以從「找出+與－」及「排出牽手順序」來整理所有的牽手情形，並從「牽手順序」和「交錯點編碼」直接判斷一結是否可解，並從牽手順序中最簡化一圖形。

二、 從五人及六人的討論中發現，其實每個化簡的步驟都是使用 Reidemeister moves 的三種基本變換，當化簡到無法再使用 Reidemeister moves 並且牽手順序形成 1 和 0 完全交錯組合時，則可確定此結已化簡完畢。

三、 從特別的「星星結」中找出了規律性，並從此規律性推導更快速的化簡方式，共分成兩種，提供玩家多一種解結方式。

四、 從討論中可得知，「+和－的數量」也是有規律的(詳見討論一)，若可以善用此規律性，在整理分類結的過程中可以省去許多步驟。

五、 本研究成功討論出牽手遊戲解結方式與整理、化簡技巧，若將牽手順序搭配交錯點編碼，即可討論需要幾個步驟能將結完全化簡，並看出需用幾個 Reidemeister moves 的基本變換來完全化簡一個結。未來希望可再進一步的用更簡便的方式看出是否成結，並發展特別的牽手方式，這樣就可以從最簡單的條件中知道遊戲結果，將此遊戲解剖透徹。

玖、 參考資料及其他

1. 金華國小・結的解析・台北市第 41 屆中小學科學展覽會・數學科國小組。

2. 姜伯駒(2011 年 5 月 1 日)・繩圈的數學・大連理工大學出版社。

3. Peter Cromwell (2004 年) ・ Knots and Links・ Cambridge University Press

4. 郎一全・幾種古典的結不變量・中研院數學研究所・取自 http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d252/25204.pdf

5. 國立馬祖高級中學・中國藝『數』－由雙錢結不變量來探討結其性質・第 48 屆全國中小學科學博覽會・數學科高中組。

6. Dominic Goulding(2010 年 4 月)・Knot Theory: The Yang-Baxter Equation, Quantum Groups and Computation of the Homfly Polynomial・Durham University

7. 國立板橋高級中學‧盤根錯結‧第 35 屆全國中小學科學博覽會‧數學科高中組。

8. V. O. Manturov‧Knot Theory‧取自 www.varf.ru/rudn/manturov/book.pdf

【評語】030410

探討依據簡單牽手規則連接圍成一圈的人，在何種情況下，可以藉由移動變成一個依順序圍成的大圓的問題。藉由 knot theory 的一些想法,針對人數較少的情況做了完整的分析。對一般的人數，也給出了一些化簡問題的想法。作者所考慮的問題在轉化為數學模型後，是一個典型的 knot theory 所考慮的問題。作者給出了一些分析的技巧，想法上還是依據傳統處理此類問題所會引用的技巧來的。在人數較少時，作者確實給出了答案，但在一般的情況下，由於太過複雜，也只能透過化簡技巧來化約，有點美中不足。