中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030408

發現三角形「比例點」—歐拉線上又一點

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 姜理元	柯紋娟 藍苔瑛

關鍵詞：比例點、歐拉線

摘要

本研究探討三角形的「比例點」。已知ΔABC，定義「比例點」是滿足比例式$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$的 P 點。研究過程得到作出比例點的方法，並討論三角形的比例點個數、位置及其性質，最後發現三角形的比例點會在歐拉線上，並與三角形的垂心、重心、外心之間存在特定關係。

壹、 研究動機

在學習幾何的過程中，我們都知道三角形有許多的心。而我在一個偶然的機會下，發現了ΔABC會有一個滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$ 的 P 點。身為一個數學人，對科學知識的渴求與熱情，直覺地想要探究這個點的性質，並利用在數學課本第五冊第三章所學的「幾何證明與三角形的心」和第二章「圓形」，著手進行這前所未有的研究。

貳、 研究目的

一、 已知ΔABC，找出平面上所有滿足$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$的 P 點。

二、 找出不同三角形 P 點的個數。

三、 找出不同三角形 P 點的位置。

四、 探討三角形 P 點和三角形其他心之間的關係。

五、 探討三角形 P 點的其他性質。

參、 研究設備及器材

電腦、Geogebra 幾何繪圖軟體、紙、筆、尺

肆、 研究過程或方法

一、 已知ΔABC，找到滿足$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$的 P 點

（一）已知$\overline{AB}$線段和 a, b 兩正數，找出所有滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$的點 P

作法：

1. 在$\overline{AB}$上找一點 M 滿足$\overline{MA}:\overline{MB}=a:b$（內分點），在$\overline{AB}$延長線上另外取一點 N 滿足$\overline{NA}:\overline{NB}=a:b$（外分點）。
2. 以$\overline{MN}$為直徑作一圓 O。
3. 則圓 O 上任意一點 P 滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$，且任何滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$的點 P 都在圓 O 上。

證明如下：

1. 圓 O 上任意一點 P 滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$

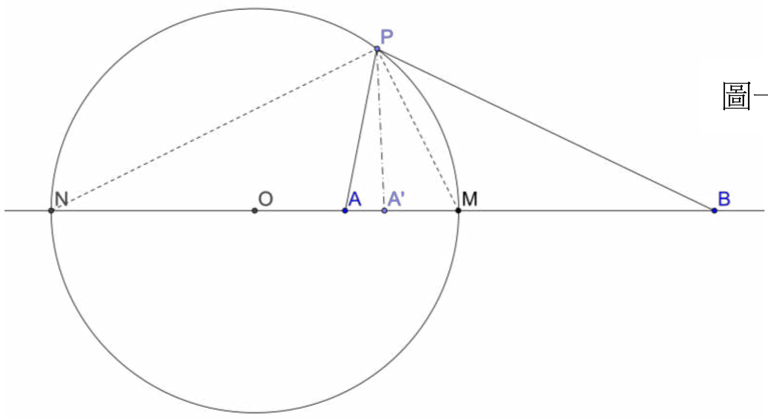
   如圖一，假設 P 點不滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$，即$\angle APM\neq\angle BPM$。

   在$\overleftrightarrow{AB}$上另找一點 A'使得$\angle A'PM=\angle BPM\Rightarrow\overline{PA'}:\overline{PB}=\overline{MA'}:\overline{MB}$

   $\angle\mathrm{NPM}=90°\Rightarrow\overline{PN}$為$\angle A'PB$外角角平分線$\Rightarrow\overline{NA'}:\overline{NB}=\overline{MA'}:\overline{MB}$

   若$\overline{NA'}>\overline{NA}\Rightarrow\overline{MA}>\overline{MA'}\Rightarrow\frac{\overline{NA'}}{\overline{NB}}>\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$，$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}>\frac{\overline{MA'}}{\overline{MB}}$ -----（1）

   若$\overline{NA'}<\overline{NA}\Rightarrow\overline{MA}<\overline{MA'}\Rightarrow\frac{\overline{NA'}}{\overline{NB}}<\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$，$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}<\frac{\overline{MA'}}{\overline{MB}}$ -----（2）



圖一

M, N 滿足 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$（已知），此式合併（1）或（2）兩式可得：

$\frac{\overline{NA'}}{\overline{NB}}>\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}>\frac{\overline{MA'}}{\overline{MB}}$ 或 $\frac{\overline{NA'}}{\overline{NB}}<\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}<\frac{\overline{MA'}}{\overline{MB}}$，這兩種狀況皆和

$\overline{NA'}:\overline{NB}=\overline{MA'}:\overline{MB}$ 矛盾。故$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$。 Q.E.D.

2. 滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$的點 P 都在圓 O 上

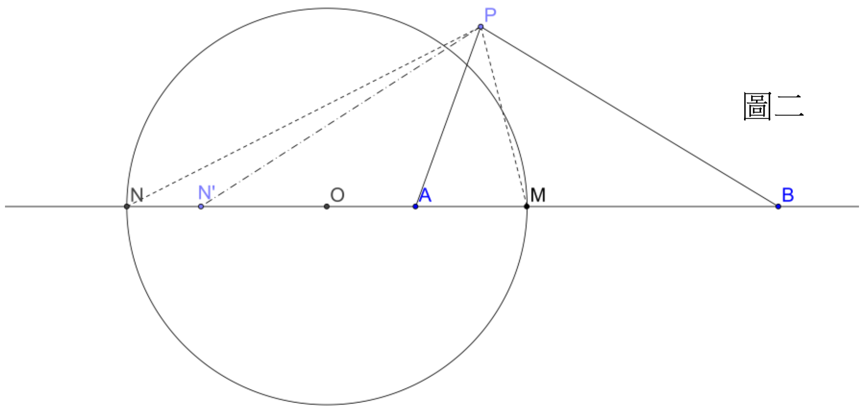
作$\overline{PN'}$垂直$\overline{PM}$，交$\overleftrightarrow{AB}$於 N’。

$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b \Rightarrow \angle APM=\angle BPM \Rightarrow \overline{PN'}$為$\angle APB$外角角平分線

$\Rightarrow \overline{N'A}:\overline{N'B}=\overline{MA}:\overline{MB}$

而 $\overline{NA}:\overline{NB}=\overline{MA}:\overline{MB}$（已知），又 N, N’, A, B 共線，因此

N’即 N⇒ ∠NPM = 90° ⇒ P 在圓 O 上 Q.E.D.



圖二

結論：圓 O 上任意一點 P 滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$，且任何滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$的點 P 都在圓 O 上。

若 a=b，則圓 O 可以看成是半徑無限大的圓，即$\overline{AB}$中垂線。中垂線上的所有點都會滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$，且所有滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=a:b$的 P 點都會在中垂線上。

（二） 已知ΔABC，求平面上所有滿足$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$的 P 點

作法：

1. 作一圓 O_1 使得其上任意一點 X 皆滿足$\overline{XA}:\overline{XB}=\overline{BC}:\overline{AC}$
2. 作一圓 O_2 使得其上任意一點 Y 皆滿足$\overline{YA}:\overline{YC}=\overline{BC}:\overline{AB}$
3. 則 O_1, O_2 交點 P 即為所求

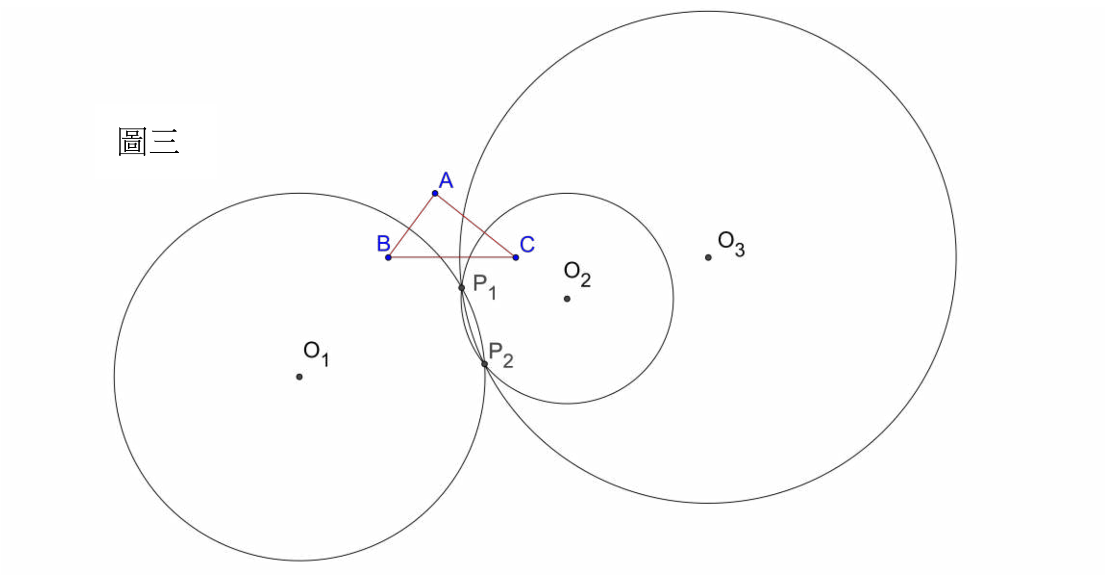
O_1, O_2 交點滿足$\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{BC}:\overline{AC},\ \overline{PA}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AB}$，則$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$，因此圓 O_1, O_2 交點即為所求之 P 點。

考慮第三個圓 O_3，圓上之任意一點 Z 皆滿足$\overline{ZB}:\overline{ZC}=\overline{AC}:\overline{AB}$，則第三個圓必通過 P（$O_1, O_2$ 交點），這是因為，若 O_1, O_2 有交點 P，則

$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}\Rightarrow\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{AC}:\overline{AB}\Rightarrow$P 在 O_3 上

於是可以知道，在尋找 P 點時，只需將 O_1, O_2, O_3 三圓的任意兩圓作出，兩圓交點即為所求的 P 點。

本研究從此之後稱這樣滿足$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$的 P 點為「比例點」。



二、 三角形的比例點個數

ΔABC中，令 $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}, c=\overline{AB}$。

將三角形依最長邊的個數分成三種類型討論比例點個數：

（一）三角形有一個最長邊

滿足$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=a:b:c$的比例點 P 可由以下方法找出：

1. 在$\overleftrightarrow{AB}$上取 M_1, N_1 符合$\overline{M_1A}:\overline{M_1B}=\overline{N_1A}:\overline{N_1B}=a:b$

（令 M_1 在$\overline{AB}$上，N_1 在$\overline{AB}$延長線上）

2. 在$\overleftrightarrow{AC}$上取 M_2, N_2 符合$\overline{M_2A}:\overline{M_2B}=\overline{N_2A}:\overline{N_2C}=a:c$

（令 M_2 在$\overline{AC}$上，N_2 在$\overline{AC}$延長線上）

3. 分別以$\overline{M_1N_1}, \overline{M_2N_2}$為直徑做兩圓 O_1, O_2

若兩圓交於兩點，則存在兩個比例點；若兩圓相切，則有唯一的比例點；若兩圓不相交，則不存在比例點

不失一般性，令$\overline{BC}$為最長邊，即 a>b 且 a>c。

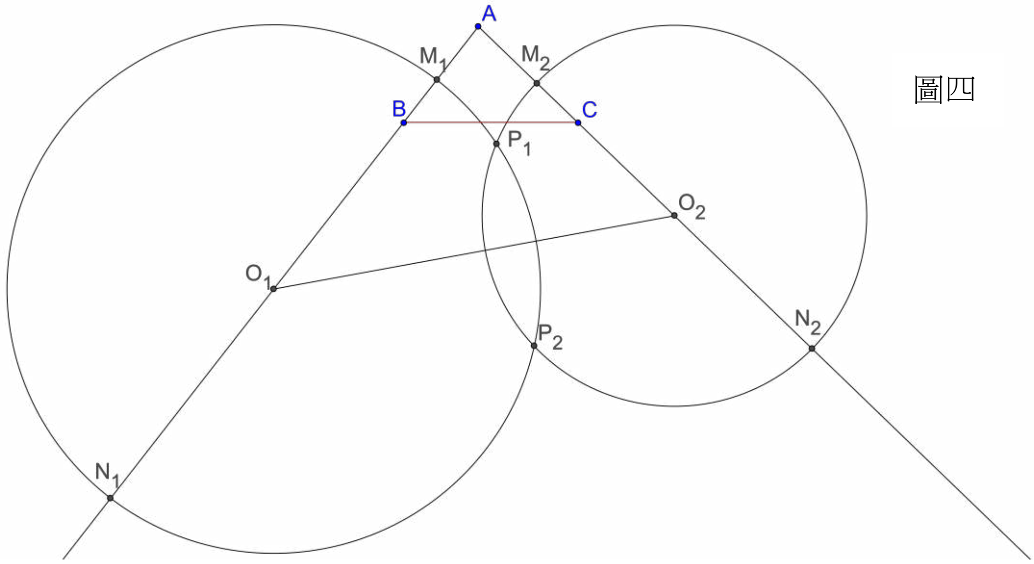
如圖四，令兩圓半徑為 R_1, R_2。

M_1 在$\overline{AB}$上 $\Rightarrow \begin{cases}\overline{AM_1}:\overline{BM_1}=a:b\\ \overline{AM_1}+\overline{BM_1}=c\end{cases} \Rightarrow \overline{AM_1}=\frac{ac}{a+b}$，$\overline{BM_1}=\frac{bc}{a+b}$

N_1 在$\overline{AB}$延長線上 $\Rightarrow \begin{cases}\overline{AN_1}:\overline{BN_1}=a:b\\ \overline{AN_1}=\overline{BN_1}+c\end{cases} \Rightarrow \overline{BN_1}=\frac{bc}{a-b}$

$$\Rightarrow R_1=\frac{1}{2}(\overline{BN_1}+\overline{BM_1})=\frac{abc}{a^2-b^2} \Rightarrow \overline{AO_1}=\overline{AM_1}+R_1=\frac{a^2c}{a^2-b^2}$$

同理，也有 $R_2=\frac{abc}{a^2-c^2}$，$\overline{AO_2}=\frac{a^2b}{a^2-c^2}$



圖四

根據餘弦定理有：

$$\overline{O_1O_2}^2=\overline{AO_1}^2+\overline{AO_2}^2-2\overline{AO_1}\,\overline{AO_2}\cos\angle A$$

$$\overline{O_1O_2}^2=\frac{a^4c^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{a^4b^2}{(a^2-c^2)^2}-\frac{2a^4bc\cos\angle A}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\quad(1)$$

將 $2bc\cos\angle A=b^2+c^2-a^2$ 代入（1）式可得：

$$\overline{O_1O_2}^2=\frac{a^4c^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{a^4b^2}{(a^2-c^2)^2}+\frac{a^4(a^2-(b^2+c^2))}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\quad(2)$$

而

$$(R_1+R_2)^2=\frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{a^2b^2c^2}{(a^2-c^2)^2}+\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\quad(3)$$

為了比較$\overline{O_1O_2}$和 R_1+R_2 的大小，將$(2)-(3)$得到

$$\overline{O_1O_2}^2-(R_1+R_2)^2$$

$$=\frac{a^2c^2(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2}+\frac{a^2b^2(a^2-c^2)}{(a^2-c^2)^2}+\frac{a^2(a^4-a^2b^2-a^2c^2-2b^2c^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$=\frac{a^2(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

則：

1. $\angle A > 90° \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \overline{O_1O_2}^2 > (R_1 + R_2)^2$

$\Leftrightarrow \overline{O_1O_2} > R_1{+}R_2 \Leftrightarrow$ O_1, O_2 外離⇔三角形不存在比例點

即**鈍角三角形沒有比例點**

2. $\angle A = 90° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \overline{O_1O_2}^2 = (R_1 + R_2)^2$

$\Leftrightarrow \overline{O_1O_2} = R_1{+}R_2 \Leftrightarrow$ O_1, O_2 外切⇔三角形有唯一的比例點

即**直角三角形有唯一的比例點**

3. $\angle A < 90° \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \overline{O_1O_2}^2 < (R_1 + R_2)^2$

$\Leftrightarrow \overline{O_1O_2} < R_1{+}R_2 \Leftrightarrow$ O_1, O_2 交於兩點⇔三角形有兩個比例點

即**有一最長邊的銳角三角形有兩個比例點**

（二）三角形有兩個最長邊，即兩腰大於底邊的等腰三角形

必為銳角三角形，如圖五，不失一般性，令最長邊為$\overline{AB}$和$\overline{AC}$ 。

比例點 P 符合$\overline{PB}:\overline{PC} = \overline{AC}:\overline{AB} = 1:1$，因此必在$\overline{BC}$中垂線上。

於是找出 P 點的方法可以化簡如下：

1. 作$\overline{BC}$的中垂線 L
2. 在$\overline{AB}$上和其延長線上取 M, N 使得$\overline{MA}:\overline{MB} = \overline{NA}:\overline{NB} = \overline{BC}:\overline{AC}$
3. 以$\overline{MN}$為直徑作圓 O，則圓 O 和 L 之交點即為所求

令$a = \overline{BC},\ b = \overline{AB}$，並在 L 上取一點 H 使得 L⊥ $\overline{OH}$。

令圓 O 之半徑為 R，則根據前面的討論可以知道：

$$\overline{MA} = \frac{ab}{b+a}, \overline{NA} = \frac{ab}{b-a} \Rightarrow R = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{NA}) = \frac{ab^2}{b^2 - a^2}$$

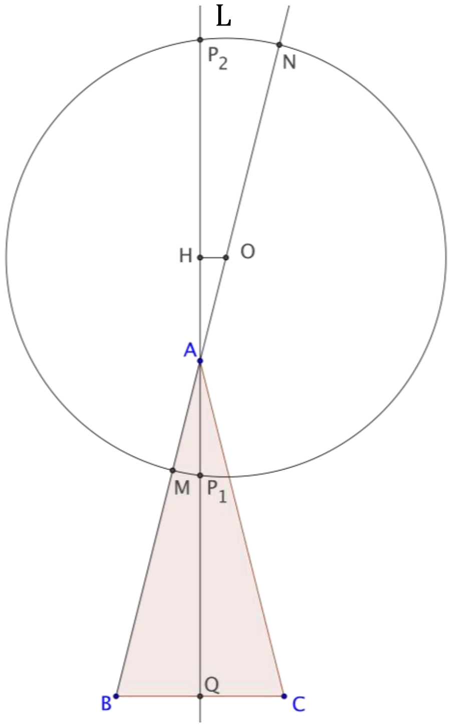
$$\Rightarrow \overline{AO} = R - \overline{MA} = \frac{a^2 b}{b^2 - a^2}$$

而 $\Delta AOH \sim \Delta ABQ \Rightarrow \frac{b}{\frac{1}{2}a} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OH}} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{a^3}{2(b^2-a^2)}$

$$a < b \Rightarrow \frac{a^3}{2(b^2-a^2)} < \frac{ab^2}{b^2-a^2} \Rightarrow \overline{OH} < R \Rightarrow \text{圓}O, L\text{交於兩點}$$

也就是說，**有兩個最長邊的銳角三角形存在兩個比例點**。

圖五



（三）有三個最長邊的三角形

為正三角形。因為三邊等長，比例點 P 使得 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC} = 1:1:1$，**比例點即外心**，因此**正三角形有唯一的比例點**。若將中垂線看作是無窮大的圓，那麼正三角形的第二個比例點，也就是三圓的第二個交點，在無窮遠處。正三角形可視為銳角三角形之特例。

綜合以上三點，我們有以下對於比例點個數的結論：

銳角三角形：	1. 正三角形：1 個
	2. 非等邊銳角三角形：2 個
直角三角形：1 個	
鈍角三角形：0 個	

因為每一種三角形的比例點個數都確定了，因此在知道比例點個數的情況下亦可推測出三角形的種類，也就是

一個比例點⇔直角或正三角形

兩個比例點⇔非等邊銳角三角形

沒有比例點⇔鈍角三角形

三、 比例點的位置

分為非等邊銳角三角形、正三角形、直角三角形討論：

（一）非等邊銳角三角形

定理 3-1

令 P_1, P_2 為 ΔABC 的兩個比例點，那麼有

P_1 在 ΔABC 內部 $\Rightarrow$ P_2 在 ΔABC 外部

證明：

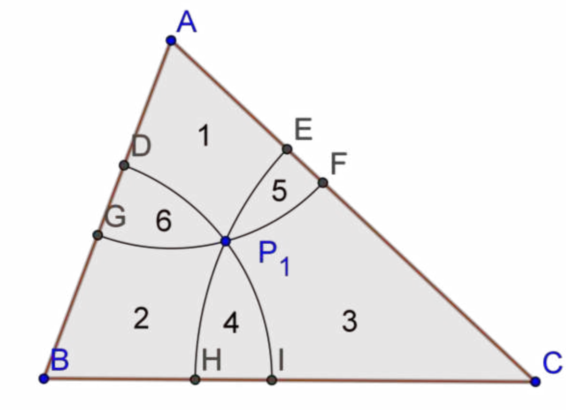
如圖六， P_1 在三角形內部。以 A, B, C 為圓心，$\overline{AP_1}, \overline{BP_1}, \overline{CP_1}$ 為半徑作圓。

若 P_2 位於三角形的內部，則必在 1-6 其中一個區域。

1. 若 P_2 位於 1，則 $\overline{AP_2} < \overline{AP_1}, \overline{BP_2} > \overline{BP_1}$，不可能滿足 $\overline{P_2A} : \overline{P_2B} : \overline{P_2C} = a : b : c$，故 P_2 不在 1。同理，P_2 也不可能位於 2 或 3。

2. 若 P_2 位於 4，則 $\overline{AP_2} > \overline{AP_1}, \overline{BP_2} < \overline{BP_1}$，不可能滿足 $\overline{P_2A} : \overline{P_2B} : \overline{P_2C} = a : b : c$，故 P_2 不在 4。同理，P_2 也不可能位於 5 或 6。

即 P_2 在三角形的外部。 Q.E.D.



圖六

因此比例點的位置可能為：一個在三角形內部，一個在外部；一個在三角形邊上，一個在外部；或兩個都在三角形外部。但不管如何都不可能兩個皆在三角形內部。

定理 3-2

令 P_1, P_2 為 ΔABC 的兩個比例點。P_1 在 ΔABC 內部，P_2 在 ΔABC 外部，ΔABC 最長邊為$\overline{BC}$，外心為 O，$\overline{AB}, \overline{AC}$中垂線 L_1, L_2 交$\overline{BC}$於 X_1, X_2。則 P_1 在ΔOX_1X_2中且 P_2 以$\overline{BC}$為分隔和 A 異側。

證明：

如圖七，令 Q_1, Q_2 為$\overline{AB}$, $\overline{AC}$中點。

在$\overline{AB}$和其延長線上取 M_1, N_1 滿足$\overline{M_1A}:\overline{M_1B} = \overline{N_1A}:\overline{N_1B} = \overline{BC}:\overline{AC}$

在$\overline{AC}$和其延長線上取 M_2, N_2 滿足$\overline{M_2A}:\overline{M_2C} = \overline{N_2A}:\overline{N_2C} = \overline{BC}:\overline{AB}$

以$\overline{M_1N_1}, \overline{M_2N_2}$為直徑作兩圓 O_1, O_2，則交點即為比例點 P。

$$\overline{BC} > \overline{AC}, \overline{BC} > \overline{AB} \Rightarrow \overline{M_1A} > \overline{M_1B}, \overline{M_2A} > \overline{M_2B}$$

而對於中點 Q_1, Q_2 有 $\overline{Q_1A} = \overline{Q_1B}, \overline{Q_2A} = \overline{Q_2B}$

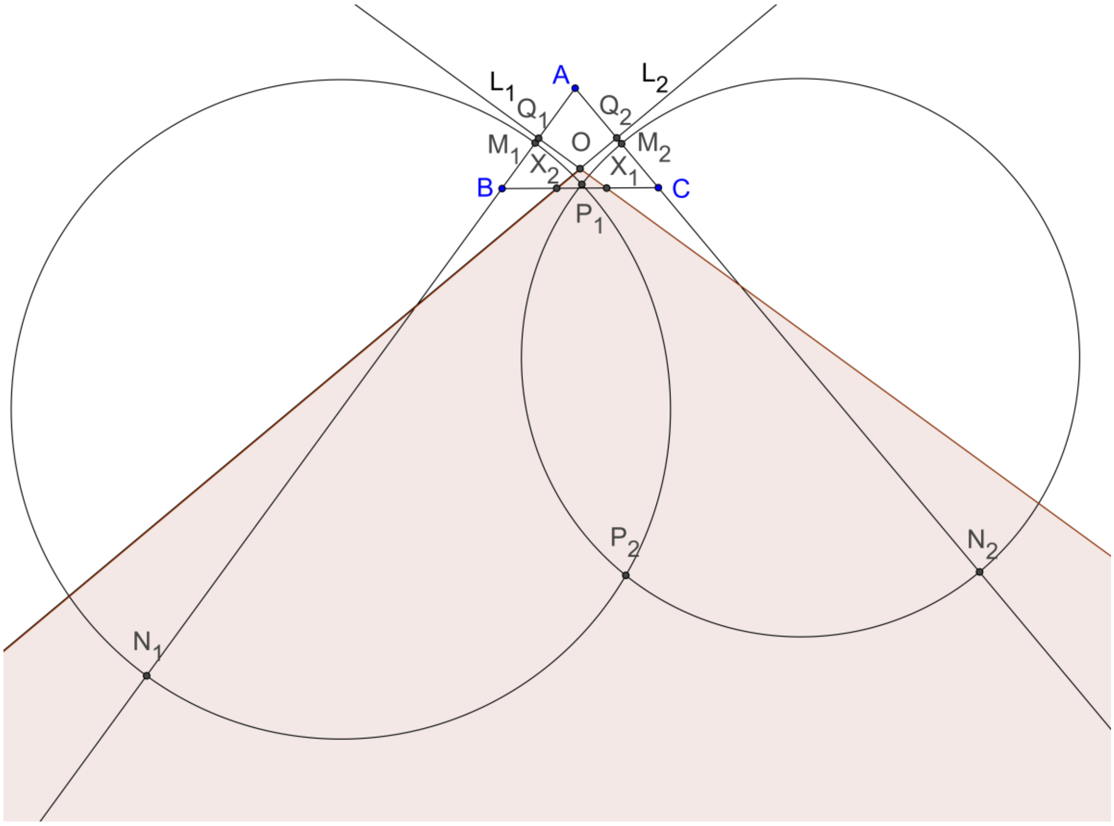
因此 $\overline{M_1A} > \overline{Q_1A}, \overline{M_2A} > \overline{Q_2A}$

也就是說 M_1,N_1 皆以 L_1 為分隔和 A 異側⇒圓 O_1 上任意一點皆以 L_1 為分隔

和 A 異側。同理，圓 O_2 上任意一點皆以 L_2 為分隔和 A 異側。

於是兩圓的交點會落在塗色的範圍內，即 P_1 在ΔOX_1X_2中且 P_2 以$\overline{BC}$為分隔和 A 異側。 Q.E.D.

圖七



定理 3-3

ΔABC中$\overline{BC}$為最長邊，且比例點 P 在三角形的一條邊上。則 P 在$\overline{BC}$上。

證明：

用反證法。如圖八，不失一般性，令 P 在$\overline{AB}$上。

令 $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB},\ \overline{PA} = ar,\ \overline{PB} = br, \overline{PC} = cr$

$$\overline{AB} = \overline{PA} + \overline{PB} \Rightarrow c = (a+b)r \Rightarrow r = \frac{c}{a+b}$$

根據三角形邊長的不等性質有：

$$\overline{PC} + \overline{PB} > \overline{BC} \Rightarrow cr + br > a \Rightarrow r > \frac{a}{b+c}$$

因此可以得到：

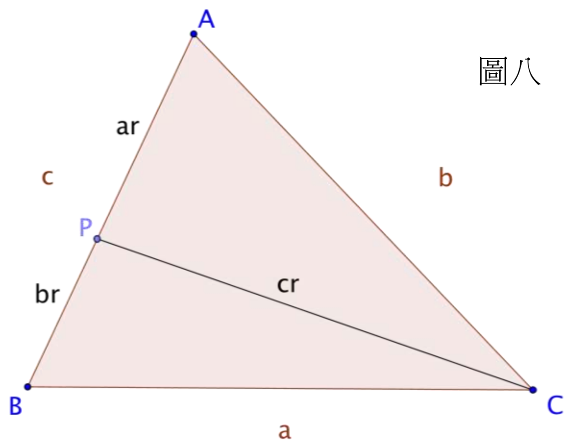
$$r = \frac{c}{a+b} > \frac{a}{b+c} \Rightarrow c^2 + bc > a^2 + ab$$

$$\Rightarrow (\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2) + (\mathrm{ab} - \mathrm{bc}) < 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a-c) < 0$$

$\overline{BC}$為最長邊$\Rightarrow (a-c) > 0$；三邊長為正數$\Rightarrow\ a+b+c > 0$

所以$(a+b+c)(a-c) > 0$，這和$(a+b+c)(a-c) < 0$ 矛盾。 Q.E.D.



圖八

綜合前面的討論可以知道比例點的位置可能為：

1. 一個在三角形內部，一個在三角形外部

2. 一個在三角形最長邊上，一個在三角形外部

3. 兩個皆在三角形的外部

而比例點的位置與三角形三邊長的關係如下：

定理 3-4

令ΔABC中$\overline{BC}=\mathrm{a},\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$，且$\mathrm{a}>\mathrm{b},\mathrm{a}>\mathrm{c}$。

$a^4+a^2bc>(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點皆在三角形外部

$a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔其中一個比例點在邊上

$a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點一個在內部，一個在外部

首先討論其中一個比例點 P 在邊上的情況。

其中一個比例點在邊上⇒ $a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$

證明：

$\mathrm{a}>\mathrm{b},\mathrm{a}>\mathrm{c}$，因此若比例點在邊上，根據「定理 3-3」，P 在$\overline{BC}$上。

令$\overline{PA}=ar,\overline{PB}=br,\overline{PC}=cr$。則 $\mathrm{br}+\mathrm{cr}=\mathrm{a}\Rightarrow \mathrm{r}=\frac{a}{b+c}$ 。

根據餘弦定理有$\begin{cases}(ar)^2+(br)^2-2(ar)(br)\cos\angle APB=c^2\ \ldots(1)\\(ar)^2+(cr)^2-2(ar)(cr)\cos\angle APC=b^2\ \ldots(2)\end{cases}$

$(1)\times c+(2)\times b$ 得

$$[(a^2+bc)(b+c)-2abc(\cos\angle APB+\cos\angle APC)]r^2=b^3+c^3\ \ldots(3)$$

P 在$\overline{BC}$上$\Rightarrow \angle\mathrm{APB}+\angle\mathrm{APC}=180°\Rightarrow\cos\angle APB+\cos\angle APC=0$

再將 $\mathrm{r}=\frac{a}{b+c}$ 代入（3）式得 $a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$ 。 Q.E.D.

而其逆定理亦成立，也就是

$a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$ ⇒其中一個比例點在邊上

證明：

考慮一個ΔDEF，$\overline{DE}=c,\overline{DF}=b,\overline{EF}=a'$，且其比例點 P’位於$\overline{EF}$上。

則有 $a'^4+a'^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$。

由於 $a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$（已知），因此有 $a'=a$。

$\begin{cases}\overline{DE}=\overline{AB}\\ \overline{EF}=\overline{BC}\\ \overline{DF}=\overline{AC}\end{cases}\Rightarrow$ ΔDEF ≅ ΔABC（SSS 全等） ⇒ P 在$\overline{BC}$上 Q.E.D.

在幾何繪圖軟體的動態操作過程中可以發現，當取一個三角形的三邊長符合$a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$時，其中一個比例點在三角形邊上；若不改 b, c 但增加 a（仍維持銳角三角形），則兩個比例點皆在三角形外部；若不改 b, c 但減小 a(a 仍最大)，則兩個比例點將會有一個在三角形內部，於是推測出下面關係：

$a^4+a^2bc>(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點皆在三角形外部

$a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點一個在內部，一個在外部

目前已經證明出以下部分：

比例點一個在內部，一個在外部 ⇒ $a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$

證明：

令$\overline{PA}=ar,\overline{PB}=br,\overline{PC}=cr$。則 $\mathrm{br}+\mathrm{cr}>\mathrm{a}\Rightarrow\mathrm{r}>\frac{a}{b+c}$ 。

由之前的證明過程知

$$[(a^2+bc)(b+c)-2abc(\cos\angle APB+\cos\angle APC)]r^2=b^3+c^3$$

P 在ΔABC內部⇒ $\angle\mathrm{APB}+\angle\mathrm{APC}>180°\Rightarrow\cos\angle APB+\cos\angle APC<0$

於是 $(a^2+bc)(b+c)r^2<b^3+c^3$ 。 再將 $\mathrm{r}>\frac{a}{b+c}$ 代入得

$a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$ 。 Q.E.D.

$a^4+a^2bc>(b+c)(b^3+c^3)$ ⇒比例點皆在三角形外部

證明：

用反證法，如果為「其中一個比例點在邊上」之情況，則等號成立，矛盾；

如果為「其中一個比例點在三角形內部」之情況，則為

$a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$，矛盾。故比例點皆在三角形的外部。

Q.E.D.

如果可以證明出「比例點皆在三角形外部 ⇒ $a^4+a^2bc>(b+c)(b^3+c^3)$」

或者是「其中一個比例點在三角形內部⇒ $a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$」，

那麼再根據三一律，便可得

$a^4+a^2bc>(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點皆在三角形外部
$a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔其中一個比例點在邊上
$a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點一個在內部，一個在外部

雖然目前無法證明所有的雙向對應關係，但從動態幾何繪圖軟體的操作過程中可以發現有這樣的性質。希望未來能夠證出這個結果。

（二）正三角形

正三角形的比例點即外心，在三角形的內部。

（三）直角三角形

定理 3-5

$\Delta\mathrm{ABC}$中，$\angle\mathrm{B}=90°$。則有 PABC 為矩形 ⇔ P 為 $\Delta\mathrm{ABC}$ 比例點 。

證明：

（1）$PABC$ 為矩形 $\Rightarrow \overline{PA}=\overline{BC},\overline{PB}=\overline{AC},\overline{PC}=\overline{AB}$

$\Rightarrow \overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$，即 P 為比例點。

（2）直角三角形有唯一的比例點，因此使 PABC 為矩形的 P 點是唯一的比例點，也就是

PABC 不為矩形 ⇒ P 不為比例點，於是有 P 為比例點⇒ PABC 為矩形。

Q.E.D.

四、比例點的 r 值

根據比例點的定義，定義 $r_1=\frac{\overline{P_1A}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{P_1B}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{P_1C}}{\overline{AB}}$, $r_2=\frac{\overline{P_2A}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{P_2B}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{P_2C}}{\overline{AB}}$ 。

定理 4-1

銳角三角形：1. 正三角形：$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 非等邊銳角三角形：$\frac{\sqrt{3}}{3}<r_1<1<r_2$

直角三角形：$r=1$

（一）正三角形

三邊等長，比例點即外心，故得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。 Q.E.D.

（二）非等邊銳角三角形

1. $r>\frac{\sqrt{3}}{3}$

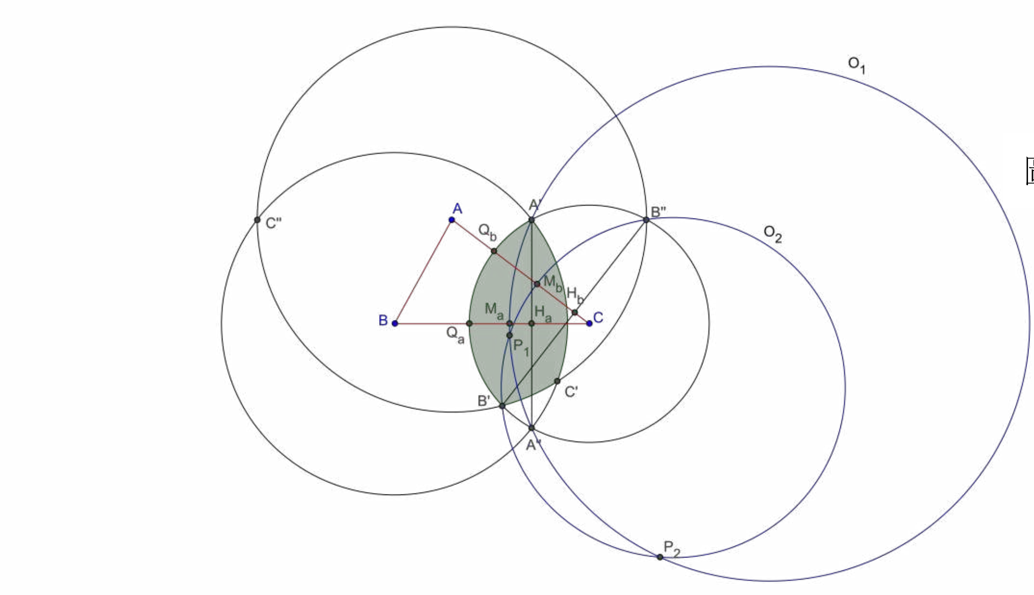
透過動態幾何繪圖軟體的操作發現正三角形的 r 有最小值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，且僅發生在正三角形的時候。其他三角形皆有 $r>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

2. $r_1 < 1 < r_2$

如圖九。令圓 O_1 上任意一點皆滿足$\overline{PB}:\overline{PC} = b:c$，圓 O_2 上任意一點皆滿足$\overline{PA}:\overline{PC} = a:c$。令$a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$。

以 a, b, c 為半徑，A, B, C 為圓心作圓 O_A, O_B, O_C。

O_B, O_C 交於 A', A''，O_A, O_C 交於 B', B''，O_A, O_B 交於 C', C''；O_C 交$\overline{BC}, \overline{AC}$於 Q_a, Q_b；$\overline{A'A''}, \overline{B'B''}$交$\overline{BC}, \overline{AC}$於 H_a, H_b；O_1, O_2 交$\overline{BC}, \overline{AC}$於 M_a, M_b。



圖九

$$b + c > a \Rightarrow bc + c^2 > ac \Rightarrow c > \frac{ac}{b+c} = \overline{CM_a}$$

也就是說：$\overline{CQ_a} > \overline{CM_a} > \overline{CH_a}$，同理：$\overline{CQ_b} > \overline{CM_b} > \overline{CH_b}$。

可以知道：圓 O_1 之 $A'M_aA''$ 在圓 O_C 弓形 $A'Q_aA''$內，圓 O_2 之 $B'M_bB''$ 在圓 O_C 弓形 $B'Q_bB''$內。

而 $A'M_aA''$，$B'M_bB''$交點為比例點，於是必有一個比例點在圓 O_C 弓形 $A'Q_aA''$、圓 O_C 弓形 $B'Q_bB''$重疊區域內。

如果比例點在塗色區域內則 $r < 1$，而弓形的重疊區域包含在塗色區域內，因此必有一個比例點的 r 值為 $r < 1$。

A', B', A'', B''四點共圓且 $\overline{A'A''}, \overline{B'B''}$ 交於一點 $\Rightarrow$ $\mathrm{A'M_a A''}$， $\mathrm{B'M_b B''}$ 只交於一點。也就是：

只有一個比例點為 $\mathrm{r} < 1 \Rightarrow$ 另外一個比例點為 $\mathrm{r} > 1 \Rightarrow r_1 < 1 < r_2$

Q.E.D.

（三）直角三角形

PABC 為矩形$\Rightarrow \overline{PA} = \overline{BC} \Rightarrow r = \frac{\overline{PA}}{\overline{BC}} = 1$ 。 Q.E.D.

此時的比例點 P 可以看作是銳角三角形 P_1, P_2 不斷靠近，最後重合的結果。

五、比例點與歐拉線及外心、垂心的關係

定理 5-1

P_1, P_2 為ΔABC比例點，O 為外心，則 O, P_1, P_2 三點共線。

證明：

根據比例點與 r 的定義知

$$\overline{P_1A} = ar_1, \overline{P_2A} = ar_2, \overline{P_1B} = ar_1, \overline{P_2B} = br_2, \overline{P_1C} = cr_1, \overline{P_2C} = cr_2$$

$$\Rightarrow \overline{P_1A}:\overline{P_2A} = \overline{P_1B}:\overline{P_2B} = \overline{P_1C}:\overline{P_2C} = r_1:r_2$$

前面證明了所有到兩點之距離比為定值的點組成一個圓，而三點可以確定一個圓，於是過 A, B, C 的圓，即外接圓，上面任意一點 X 皆有$\overline{XA}:\overline{XB} = r_1:r_2$。而由前面的討論亦可知，這樣子的圓的圓心會在兩點連線組成之線段的延長線上，於是 O 會在 $\overline{P_1P_2}$ 延長線上，即 O, P_1, P_2 三點共線。

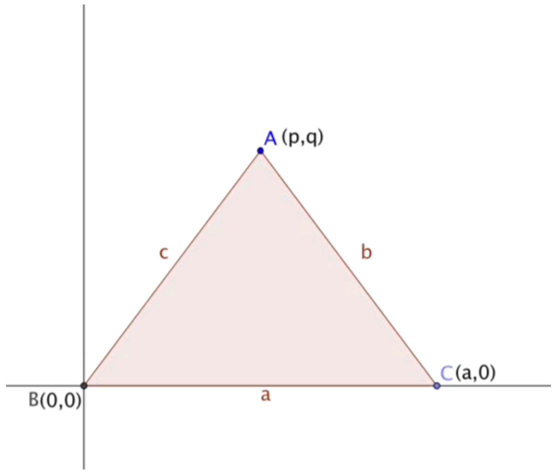
Q.E.D.

定理 5-2

令ΔABC比例點為 P_1, P_2，且垂心為 H、重心為 G、外心為 O，則 H, G, O, P_1, P_2 共線，即比例點在歐拉線上。

證明：

如圖十一，令 A 的座標為(p, q)，B 的座標為(0, 0)，C 的座標為(a, 0)。



圖十一

由於$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=a:b:c$，因此 P_1, P_2 座標為下列方程式的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{a}{b}\\[2ex]\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\dfrac{b}{c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2(x^2+y^2)=b^2(x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2)\\c^2(x^2+y^2)=b^2(x^2-2ax+a^2+y^2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a^2-b^2)(x^2+y^2)=b^2(p^2+q^2-2px-2qy)------(1)\\(c^2-b^2)(x^2+y^2)=b^2(a^2-2ax)------(2)\end{cases}$$

將 $(1)\times(c^2-b^2)-(2)\times(a^2-b^2)$ 得

$$b^2(p^2+q^2-2px-2qy)(c^2-b^2)=b^2(a^2-2ax)(a^2-b^2)$$

將 $c^2=p^2+q^2$ 與 $b^2=(p-a)^2+q^2$ 代入上式並化簡後可得：

$$y=\frac{3p^2+q^2-3ap}{q(a-2p)}x+\frac{p(a^2-p^2-q^2)}{q(a-2p)}------(3)$$

此即 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 之直線方程式。

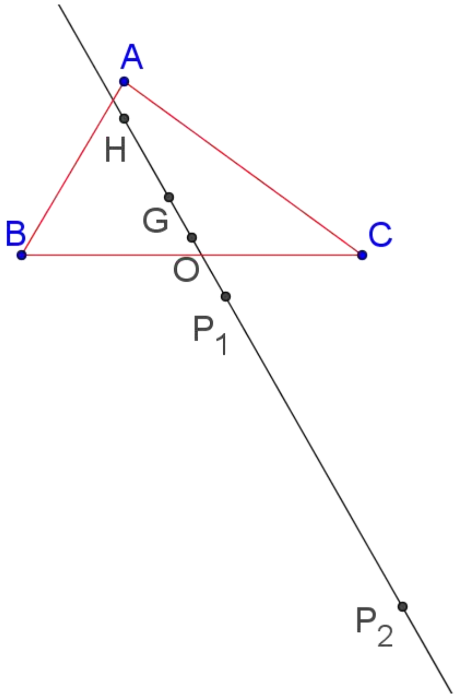
而重心和外心的座標分別是：$G(\frac{1}{3}(p+a),\frac{1}{3}q), O(\frac{1}{2}a,\frac{p^2+q^2-ap}{2q})$

令$\overleftrightarrow{GO}$之直線方程式為$y=kx+h$，並將$(\frac{1}{3}(p+a),\frac{1}{3}q), (\frac{1}{2}a,\frac{p^2+q^2-ap}{2q})$兩點代

入可得 $\begin{cases}\frac{1}{3}q=\frac{1}{3}(p+a)k+h\\ \frac{p^2+q^2-ap}{2q}=\frac{1}{2}ak+h\end{cases}$ ，於是得到 $\begin{cases}k=\frac{3p^2+q^2-3ap}{q(a-2p)}\\ h=\frac{p(a^2-p^2-q^2)}{q(a-2p)}\end{cases}$ 。

即歐拉線$\overleftrightarrow{GO}$的方程式為 $y=\frac{3p^2+q^2-3ap}{q(a-2p)}x+\frac{p(a^2-p^2-q^2)}{q(a-2p)}$，

和（3）式 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 方程式相同，故 P_1, P_2 在歐拉線上。 Q.E.D.



圖十二

如圖十二，H 為三角形的垂心，G 為三角形的重心，O 為三角形的外心，P_1, P_2 則為三角形的比例點。H, G, O, P_1, P_2 共線，即比例點在歐拉線上。

正三角形時 H, G, O, P 重合，在此討論有最大邊的情況：

定理 5-3

歐拉線上的點有以下位置關係：

H→G→O→P（P_1→P_2）

證明：

令$\overline{BC}$為最大邊（可能是唯一或兩個最大邊的其中一個）。

$\overrightarrow{GO}$指向最長邊$\overline{BC}$，又如前面「定理 3-2」的討論，P 點落在塗色範圍內。

故得 H→G→O→P 的位置關係。 Q.E.D.

定理 5-4

ΔABC的比例點為 P_1, P_2，O 為外心，則：

$\Delta OP_1A \sim \Delta OAP_2,\quad \Delta OP_1B \sim \Delta OBP_2,\quad \Delta OP_1C \sim \Delta OCP_2$

證明：

如圖十三，外接圓 O 與 $\overline{P_1P_2}$ 交於 Q。根據定理 5-1 的討論可知 Q 滿足

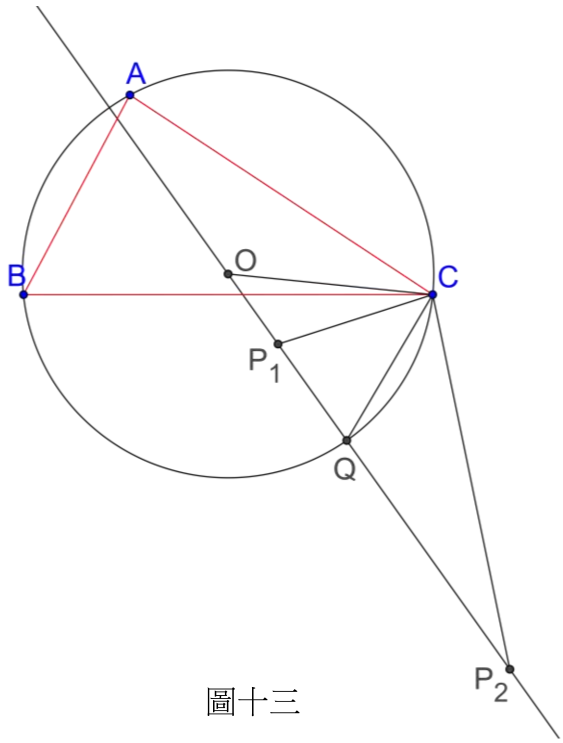
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{QP_1}}{\overline{QP_2}} = \frac{\overline{CP_1}}{\overline{CP_2}} \Rightarrow \angle P_1CQ = \angle P_2CQ \ldots.(*)$$

而 $\angle CP_2O + \angle P_2CQ = \angle OQC,\ \angle OCP_1 + \angle P_1CQ = \angle OCQ$

$\overline{OQ} = \overline{OC} \Rightarrow \angle OQC = \angle OCQ$，代入上式再根據(*)得$\angle CP_2O = \angle P_1CO$。

$\begin{cases} \angle P_1OC = \angle COP_2(\text{共用角}) \\ \angle CP_2O = \angle P_1CO \end{cases} \Rightarrow \Delta OP_1C \sim \Delta OCP_2$（AA 相似）

同理，$\Delta OP_1A \sim \Delta OAP_2,\ \Delta OP_1B \sim \Delta OBP_2$　　　Q.E.D.



圖十三

定理 5-5

P_1, P_2 為 ΔABC 比例點、O 為外心、R 為外接圓半徑，則 $\overline{OP_1}\cdot\overline{OP_2}=R^2$

證明：

由「定理 5-4」可知

$$\Delta OP_1A \sim \Delta OAP_2 \Rightarrow \overline{OP_1}:\overline{OC}=\overline{OC}:\overline{OP_2} \Rightarrow \overline{OP_1}\cdot\overline{OP_2}=R^2$$

Q.E.D.

定理 5-6

銳角三角形的兩個比例點，一個在外接圓內部，一個在外部；
直角三角形的比例點在外接圓上。

證明：

設 Q 在 $\overline{P_1P_2}$ 上且滿足 $\overline{QP_1}:\overline{QP_2}=r_1:r_2$，由「定理 5-4」的證明過程可以知道外接圓必定通過 Q，於是 P_1, P_2 一個在外接圓內部，一個在外部。

直角三角形的比例點 P 使得 PABC 為矩形，因此在外接圓上。 Q.E.D.

定理 5-7

定義 $r_1=\frac{\overline{P_1A}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{P_1B}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{P_1C}}{\overline{AB}},\ r_2=\frac{\overline{P_2A}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{P_2B}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{P_2C}}{\overline{AB}}$

P_1, P_2 為 ΔABC 比例點、O 為外心，則 $\frac{r_1}{r_2}=\sqrt{\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}}$

證明：

由「定理 5-4」與「定理 5-5」可知

$$\Delta OP_1A \sim \Delta OAP_2 \Rightarrow \frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_2A}}=\frac{\overline{OP_1}}{R}=\sqrt{\frac{\overline{OP_1}^2}{\overline{OP_1}\,\overline{OP_2}}}=\sqrt{\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}}$$

$$而\quad \frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_2A}}=\frac{\frac{\overline{P_1A}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{P_2A}}{\overline{BC}}}=\frac{r_1}{r_2}\Rightarrow\frac{r_1}{r_2}=\sqrt{\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}}$$

Q.E.D.

定理 5-8

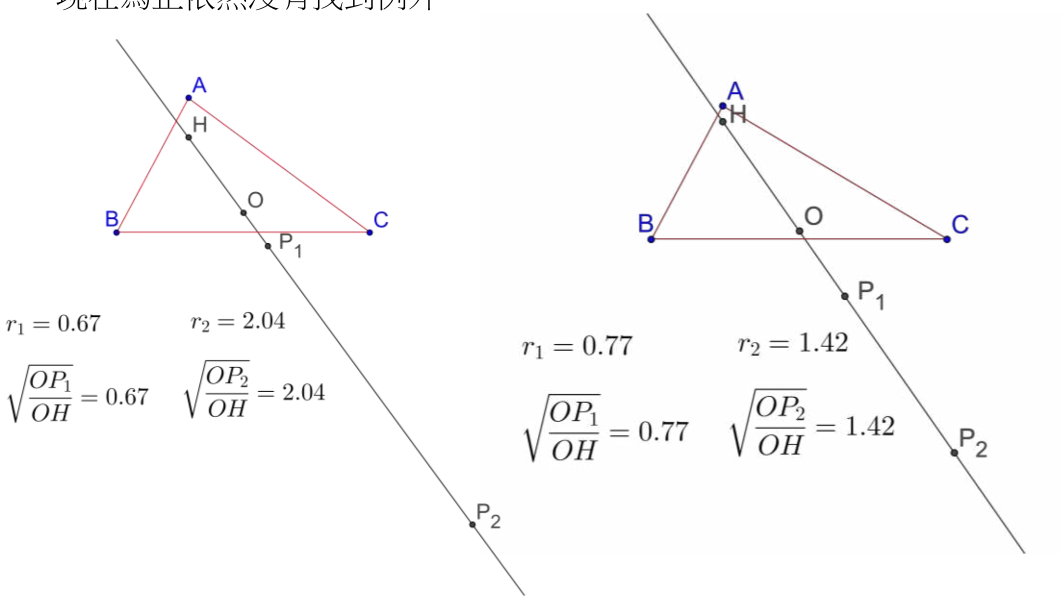
P_1, P_2 為ΔABC比例點，O 為外心，H 為垂心

定義 $r_1=\frac{\overline{P_1A}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{P_1B}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{P_1C}}{\overline{AB}},\ r_2=\frac{\overline{P_2A}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{P_2B}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{P_2C}}{\overline{AB}}$，則

$$r_1=\sqrt{\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OH}}},\qquad r_2=\sqrt{\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OH}}}$$

由「定理 5-7」知道我們可以設 $r_1=\sqrt{\overline{OP_1}}k,\ r_2=\sqrt{\overline{OP_2}}k$。

而在直角三角形時 $k=\frac{1}{\sqrt{\overline{OH}}}$，於是我利用幾何繪圖軟體的動態操作過程檢驗是否對於每一個三角形皆有 $k=\frac{1}{\sqrt{\overline{OH}}}$，如圖十四。對於這個猜測，直到現在為止依然沒有找到例外。



圖十四

結論：因此我推測 $r_1=\sqrt{\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OH}}},\ r_2=\sqrt{\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OH}}}$ 。

伍、研究結果與結論

一、已知ΔABC，找出比例點的方法如下：

1. 在$\overline{AB}$和其延長線上取 M_1, N_1 滿足$\overline{M_1A}:\overline{M_1B}=\overline{N_1A}:\overline{N_1B}=\overline{BC}:\overline{AC}$
2. 在$\overline{AC}$和其延長線上取 M_2, N_2 滿足$\overline{M_2A}:\overline{M_2C}=\overline{N_2A}:\overline{N_2C}=\overline{BC}:\overline{AB}$
3. 以$\overline{M_1N_1},\overline{M_2N_2}$為直徑作兩圓 O_1, O_2
4. O_1, O_2 交點即為所求

二、三角形的比例點個數：

銳角三角形：1. 正三角形：1 個

2. 非等邊銳角三角形：2 個

直角三角形：1 個

鈍角三角形：0 個

三、比例點的位置

（一）非等邊銳角三角形

1. P_1, P_2 不會都在三角形內部

2. P_1 在三角形內部、P_2 在三角形外部，三角形最長邊為$\overline{BC}$，外心為 O，$\overline{AB},\overline{AC}$中垂線 L_1, L_2 交$\overline{BC}$於 X_1, X_2。則 P_1 在ΔOX_1X_2中且 P_2 以$\overline{BC}$為分隔和 A 異側。

3. 令$a=\overline{BC},b=\overline{AC},c=\overline{AB}$，且$a>b,a>c$，則有

$a^4+a^2bc>(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點皆在三角形外部

$a^4+a^2bc=(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔其中一個比例點在邊上

$a^4+a^2bc<(b+c)(b^3+c^3)$ ⇔比例點一個在內部，一個在外部

（二）正三角形

比例點為外心，在三角形內部。

（三）直角三角形

ΔABC中，$\angle B=90°$。則 PABC 為矩形 ⇔ P 為 ΔABC 比例點 。

四、三角形的種類和 r 值有以下關係：

銳角三角形：1. 正三角形：$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 非等邊銳角三角形：$\frac{\sqrt{3}}{3}<r_1<1<r_2$

直角三角形：$r=1$

五、比例點 P_1, P_2 在歐拉線上，位置關係為 H→G→O→P_1→P_2，且有以下性質：

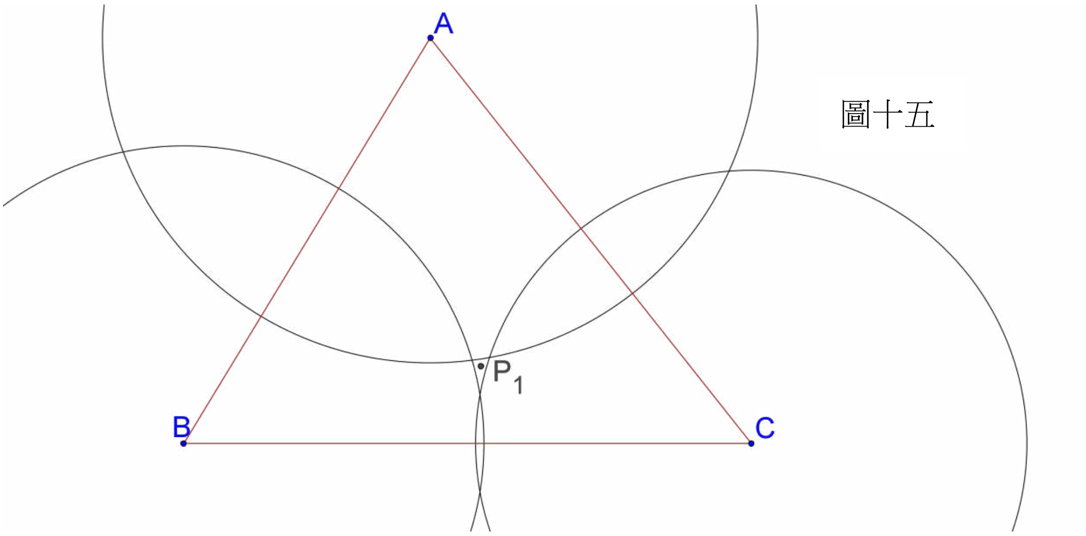
（一）$\overline{OP_1}\,\overline{OP_2}=R^2$

（二）$\frac{r_1}{r_2}=\sqrt{\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}}$

（三）$r=\sqrt{\frac{\overline{OP}}{\overline{HO}}}$

陸、討論

一、對於 $r > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的證明已有初步的想法。以 A, B, C 為圓心，$\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BC}, \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AC}, \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$畫圓。根據比例點的定義我們可以知道，P 只會同時在三圓內或是同時在三圓外。而我透過幾何繪圖軟體的動態操作過程發現三個圓沒有交集，也就是說 P 不可能同時在三圓內部。因此如果可以說明三圓沒有交集，那麼比例點會位於三圓的外部（如圖十五），即 $r > \frac{\sqrt{3}}{3}$。希望未來能夠成功證明之。

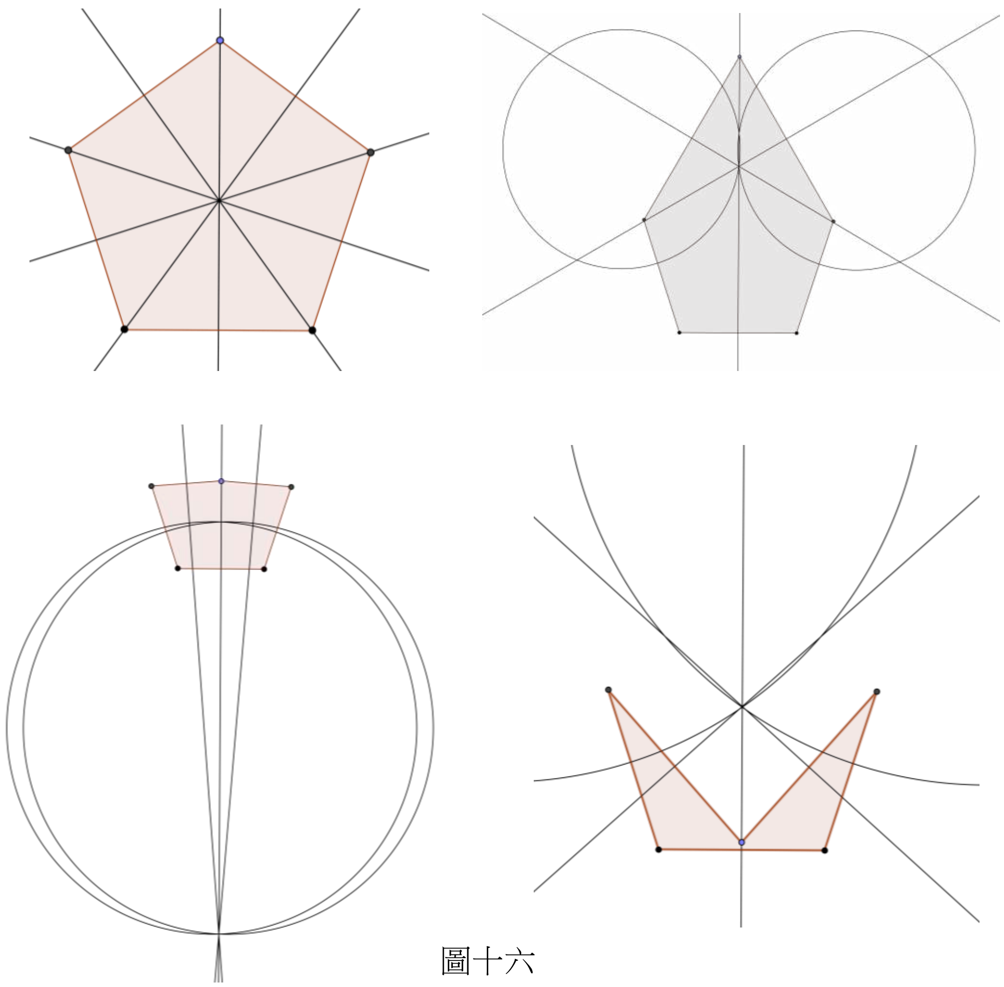


圖十五

二、令人感到驚喜的是，研究中發現比例點也在歐拉線上，也發現了比例點和三角形其他心之間的關係。但目前尚有未證明的部分（$r = \sqrt{\frac{\overline{OP}}{\overline{HO}}}$），希望在未來能夠有所突破。

三、可以將平面上的比例點推廣至空間的狀況。從前面的研究可以知道平面上滿足$\overline{PA}:\overline{PB} = a:b$的 P 點之軌跡是一個圓。根據這樣的結果，我們可以推知在空間中滿足 $\overline{PA}:\overline{PB} = a:b$的 P 點之軌跡會是一顆球。於是我們可以利用這樣的軌跡找出三角形在空間中的比例點。鈍角三角形的三球沒有交點，因此沒有比例點；直角三角形的三球相切，有唯一的比例點；銳角三角形三球的交點會形成一個圓，因此有無限多個比例點。

四、我發現不是所有多邊形皆有比例點。首先，偶數邊多邊形無法定義比例點，這是因為只有奇數邊的情況才有對邊。然而也不是所有的奇數邊多邊形都有比例點。比方說，在等邊多邊形當中只有正多邊形才有比例點，這是因為等邊多邊形的比例點是它的外心，而當中只有正多邊形存在外心；另外，透過幾何繪圖軟體的動態操作過程觀察一些對稱的五邊形是否存在比例點時，也發現不是所有對稱五邊形皆存在比例點。操作過程如下：從正五邊形開始，以其中一邊的中垂線為對稱軸，讓五邊形其中一個頂點在對稱軸上移動，發現過程中總共有四個五邊形存在比例點（包含三個凸五邊形與一個凹五邊形，如圖十六），希望在未來能夠判別任意對稱五邊形是否存在比例點。探討五邊形的邊、角和比例點存在性、個數之間的關係，是未來值得發展的目標。



圖十六

柒、參考資料

一、笹部貞市郎（1996）‧幾何學辭典‧臺北市：九章出版社。

二、數學題解辭典 平面幾何‧上海辭書出版社。

三、張景中（1990）‧平面幾何新路‧臺北市：九章出版社。

四、余文卿、康明昌、鄭國順（1991）‧高級中學基礎數學 第二冊‧牛頓出版股份有限公司。

【評語】030408

1. 本作品為有趣的作品。作者們從探討如何在平面上找一個點，使得點到給定的三角形的三個頂點的距離比恰等於三邊長的比開始，先討論這樣的點的存在性，再逐步的討論這樣的點具有的性質。作者們給出了一些十分有意思的結果，說明的過程不止清楚而且頗為精簡，非常難得。有部分未能給出清楚論證的結果被放在定理中，這是比較不適當的表示方式（雖然作者們有清楚的說明這部分還無法給出證明）。或許放在猜想中，為未來的工作留下一個伏筆會更好。(作品中之第 14 頁的逆定理證明有點小問題：如何保證在給定的情況下，我們總是可以找到一個三角形，三邊長為，而比例點會落在某個邊上呢？)（定理 4.1 的證明第一部份應該不算完成吧？用軟體觀察到的現象不能當結論啊！雖然在討論的部分有針對此特別說明，但未經證明的結果放在定理中是不太適當的。同樣的問題也發生在定理 5.8。)（作品中之第 18 頁應該是才對。)（作品中之第 2 頁所給出的圓其實是所謂的 Apollonius circle（阿波羅尼斯圓））

2. 本文並討論歐拉線上的特定點，並與三角形諸多性質相連結，作品展現作者對相關幾何知識的了解。