中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030407

霧裡看花～誰像誰

學校名稱：新北市立積穗國民中學

作者：	指導老師：
國二 翁敏育 國二 熊芝 國二 鄭博仁	莊志勇 林盈成

關鍵詞：軌跡法、相似形、全等

摘要

本研究主要探討以軌跡法做出平面多邊形的軌跡圖形與原圖形之間的關係。文中主要分成三部分加以分析討論。首先，將三角形以軌跡法做出後，觀察軌跡圖形與原圖形的關係。其次，軌跡圖形與原圖形是否存在一定的規律，對於不同的多邊形是否都存在此一規律？最後，以數學概念證明出軌跡圖形會與原圖形相似或是全等。從中發現在菱形的相似圖形尋找過程中，當原來菱形的內角分別為 60°、120°、60°、120°時，其他兩點的軌跡線所形成的圖形與原圖形具有全等關係。接著更進一步分析與討論此一情形後，歸納出當所選定的軌跡點至定點的距離等於定點至動點的距離，則該軌跡點所形成的軌跡圖形會全等於原圖形;反之，該軌跡點所形成的軌跡圖形會相似於原圖形。

壹、　研究動機

從過往的數學科展中不難發現，幾何是大多數人喜歡研究的主題。剛好平日喜歡數學的我們，看到八年級下學期以後的課程也多與幾何圖形有極大的關聯，因此我們決定接下來的幾何研究。再網路上搜尋近幾年的全國科展時，看到中華民國第 46 屆中小學科學展覽中有一篇名為「內接相似三角形的尺規作圖」的作品，文中列出軌跡法、垂足法、旋轉法等三種尋找內接相似三角形的作圖方式。在經過討論後，我們決定採用軌跡法分別作出多邊形的軌跡圖形，無意間發現這些軌跡圖形與原圖形似乎存在著某種規律，於是燃起我們進一步研究、歸納與證明的想法。

貳、　研究目的

一、決定出做相似圖形的方法。

二、透過 GSP 繪圖軟體找多邊形的軌跡圖形。

三、探討各種多邊形與其軌跡圖形間的關係。

參、　研究設備及器材

一、電腦

二、GSP 繪圖軟體

三、紙

四、筆

肆、　研究過程或方法

一、以軌跡法作圖的方式，運用 GSP 軟體繪製出各種多邊形的軌跡圖形。

二、透過數學的推論，證明出繪製出的軌跡圖形與原圖形是否存在相似或全等的關係。

伍、研究結果

接下來，將討論各種類型的三角形、四邊形、五邊形及六邊形以軌跡法所做出的軌跡圖形與原圖形間的關係，證明兩者間是否存在相似或全等的關係。詳述結果如下:

一、三角形部分

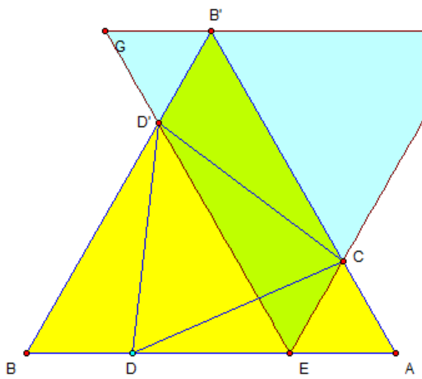


圖 1 正三角形

假設 C 為$\overline{AB'}$上的定點，且 D 為$\Delta ABB'$上的動點，

找一點 D’使$\Delta CDD' \sim \Delta ABB'$，稱點 D’為軌跡點，

當點 D 在$\Delta ABB'$上移動時，點 D’也跟著移動，D’點的移動軌跡圖形即為ΔEFG，

則$\Delta ABB' \cong \Delta EFG$

證明：

因為$\angle CD'D$重合$\angle EFG$，$\Rightarrow \angle CD'D = \angle EFG$

因為$\angle CDD'$重合$\angle FEG$， $\Rightarrow \angle CDD' = \angle FEG$

因為ΔACE和$\Delta CFB'$為正三角，$\overline{AC} = \overline{CE}$，$\overline{B'C} = \overline{FC}$，$\Rightarrow \overline{AB'} = \overline{EF}$

故ΔABB' $\cong$ Δ EFG(ASA)

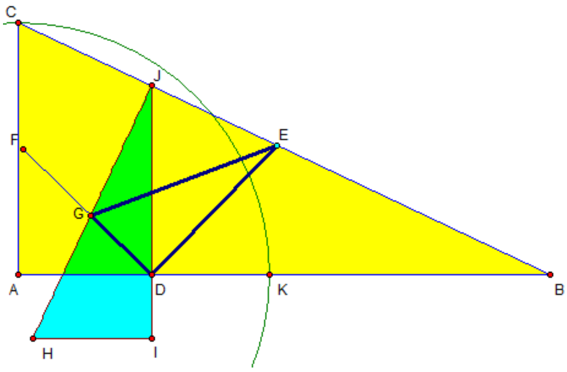


圖 2 直角三角形

假設 D 為$\overline{AB}$上的定點，且 E 為Δ ABC 上的動點

若滿足$\angle GDE = \angle BCA$且點 K 在$\overline{CA}$上滿足$\overline{CK}=\overline{BC}$

另 G 使$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DG}}$

則Δ ABC~Δ IJH

證明：

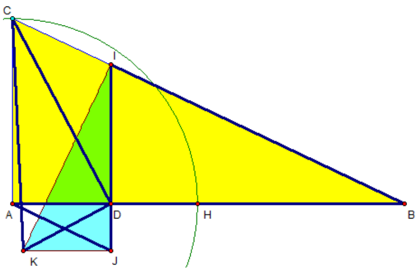


圖 2(a)

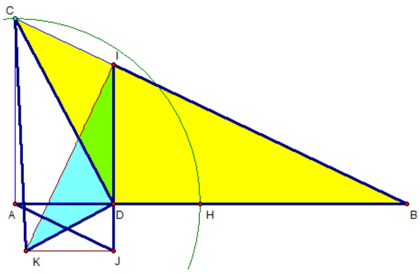


圖 2(b)

已知$\angle CDK = \angle ADJ$

$\Rightarrow \angle CDE = \angle KDJ$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DJ}}$

則Δ CED~Δ KJD(SAS)

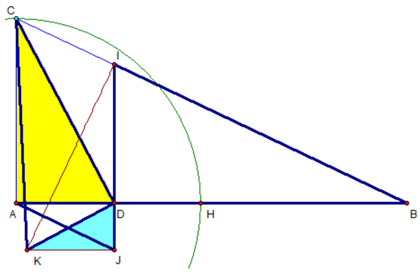


圖 2(c)

已知$\angle BDI = \angle CDG$

$\Rightarrow \angle CDB = \angle IDG$

$\frac{\overline{DB}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DG}}$

則Δ GDI~Δ CDB

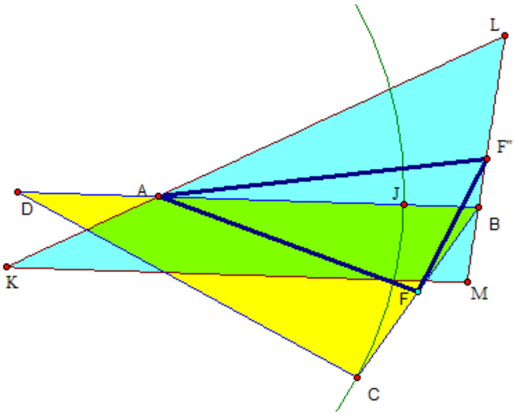


圖 3 鈍角三角形

假設 A 為$\overline{BD}$上的定點，且 F 為Δ BCD 上的動點

若滿足$\angle FAF''=\angle BCD$且點 J 在$\overline{BD}$上滿足$\overline{CD}=\overline{DJ}$

另 F''使$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AF''}}{\overline{AF}}$

則Δ BCD$\sim\Delta$ KLM

證明：

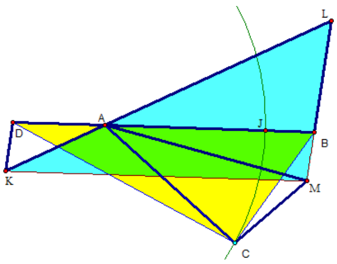


圖 3(a)

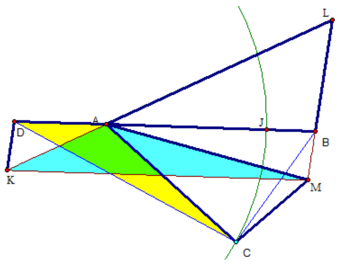


圖 3(b)

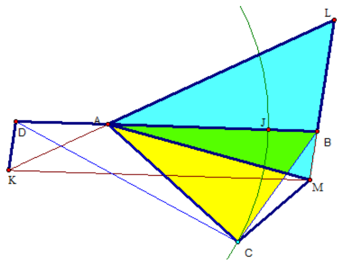


圖 3(c)

已知$\angle DAK=\angle FAF''$

$\Rightarrow \angle DAF=\angle KAF''$

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{AF''}}{\overline{DF}}$$

則Δ ADF$\sim\Delta$ AKM(SAS)

已知$\angle LAB=\angle DAF''$

$\Rightarrow \angle LAM=\angle FAB$

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{AF''}}{\overline{FA}}$$

則Δ ALM$\sim\Delta$ ABF(SAS)

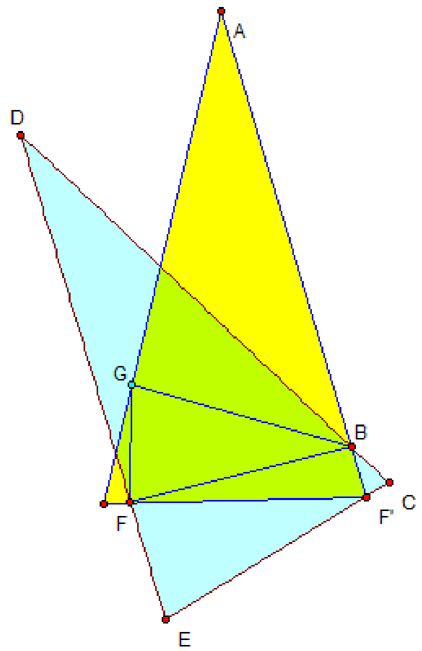


圖 4 等腰三角形

假設 B 為$\overline{CD}$上的定點，且 G 為 Δ AFF' 上的動點

若滿足∠GBF=∠FAF’

則 Δ AFF’≅ Δ DCE

證明：

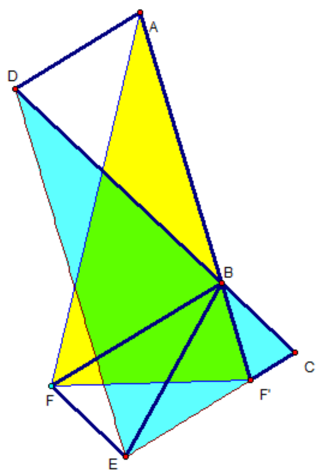


圖 4(a)

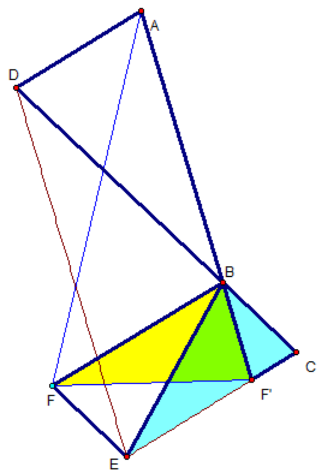


圖 4(b)

已知∠FBE= ∠CBF’

⇒ ∠GBF’= ∠CBE

$\frac{\overline{BE}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF'}}$

則 Δ GBE≅ Δ EBC(SAS)

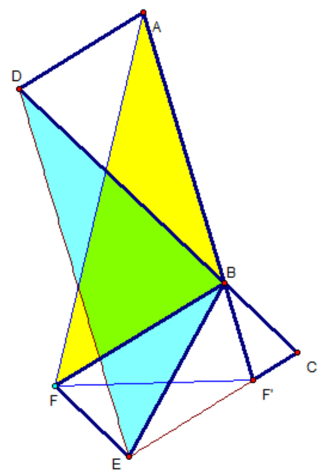


圖 4(c)

已知∠ABD = ∠FBE

⇒ ∠ABG = ∠DBE

$\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}}$

則 Δ ABG≅ Δ DBE(SAS)

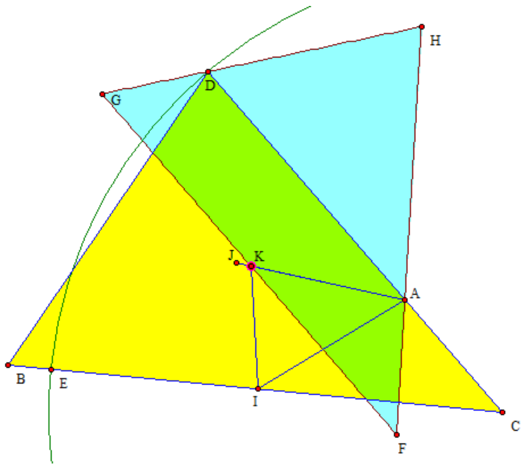


圖 5 任意三角形

假設 A 為$\overline{CD}$上的定點，且 I 為 Δ BCD 上的動點

若滿足∠BCD=∠IAK

且點 E 在$\overline{CD}$上滿足$\overline{CD}=\overline{CE}$

另 K 使$\frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{AJ}}{\overline{AK}}$

則 Δ BCD~ Δ GHF

證明：

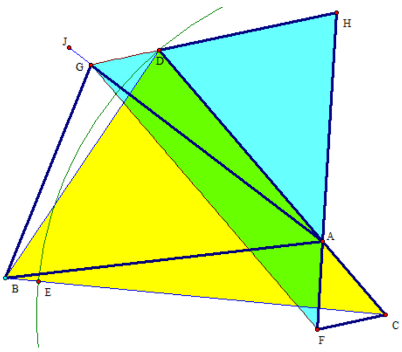


圖 5(a)

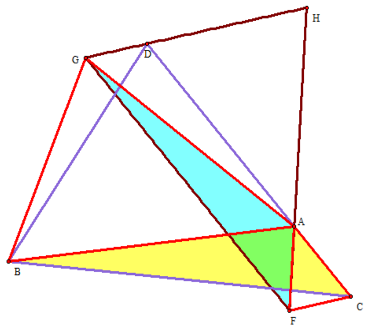


圖 5(b)

已知∠GAB= ∠CAF

⇒ ∠BAC= ∠GAF

$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$

則 Δ CAB~ Δ FAG(SAS)

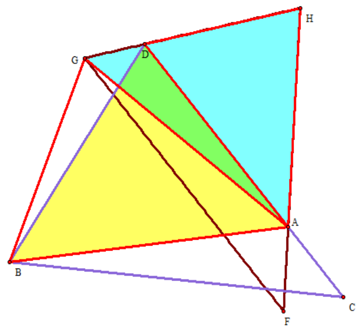


圖 5(c)

已知∠GAB = ∠HAD，

⇒ ∠DAB = ∠HAG

$\frac{\overline{AG}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}$

則 Δ DAB~ Δ HAG(SAS)

三、四邊形部分

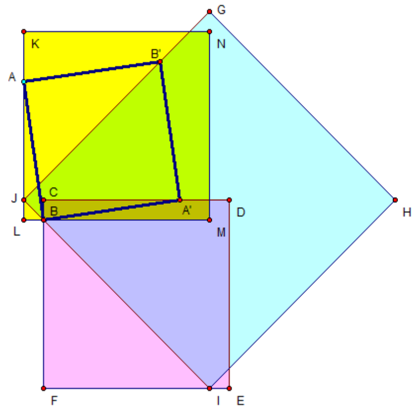


圖 6 正方形

假設 B 為$\overline{KL}$上的定點，且 A 為四邊形 KLMN 上的動點

若滿足∠ABA’ = ∠MLK、∠BAB’=∠MLK

則四邊形 KLMN ~四邊形 GHIJ，四邊形 KLMN≅四邊形 CDEF

證明：

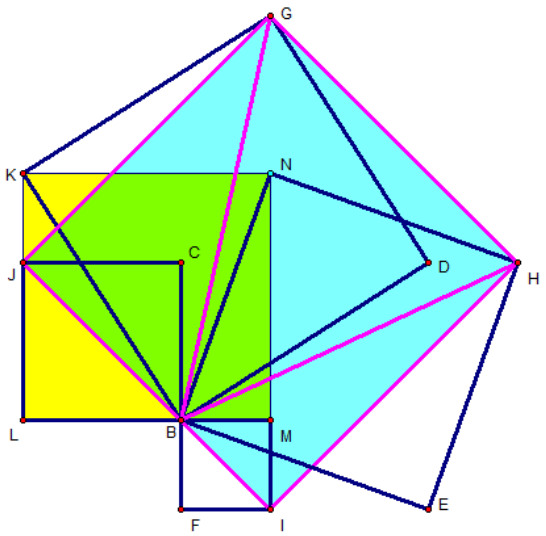


圖 6(a)

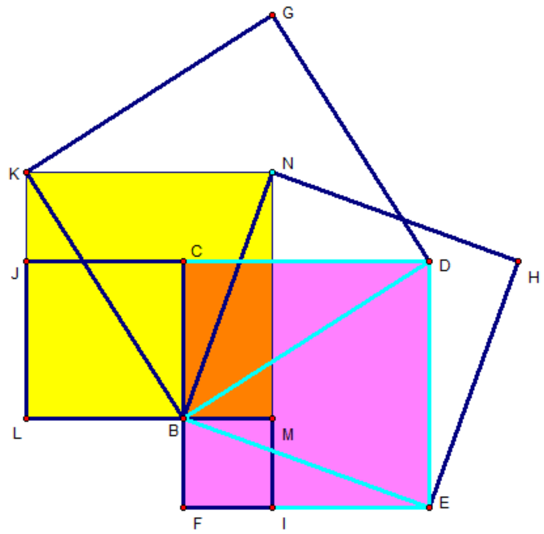


圖 6(b)

證明：

已知四邊形 LJCB、KGDB、NHEB、BFIM 為正方形

因為∠JBL=∠GBK，所以∠KBL=∠GBJ

$\frac{\overline{BJ}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BK}}$， ⇒Δ KBL~Δ GBJ(SAS)

因為∠KBG = ∠NBH，所以∠KBN = ∠GBH

證明：

因為∠LBC=∠KBD，所以∠LBK=∠CBD

$\overline{BC} = \overline{BL}$，$\overline{BD} = \overline{BK}$， ⇒Δ KBL≅Δ DBC(SAS)

因為∠KBD = ∠NBE，所以∠KBN = ∠DBE

$\overline{BK} = \overline{BD}$，$\overline{BN} = \overline{BE}$，⇒Δ KBN≅Δ DBE(SAS)

$\frac{\overline{BG}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{NB}}$，$\Rightarrow \Delta$ KBN～Δ GBH(SAS)

因為∠NBH=∠MBI，所以∠NBM=∠HBI

$\frac{\overline{BH}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BM}}$， $\Rightarrow \Delta$ NBM～Δ HBI(SAS)

因為∠NBE=∠MBF，所以∠NBM=∠EBF

$\overline{BE} = \overline{BN}$，$\overline{BF} = \overline{BM}$， $\Rightarrow \Delta$ NBM≅Δ EBF(SAS)

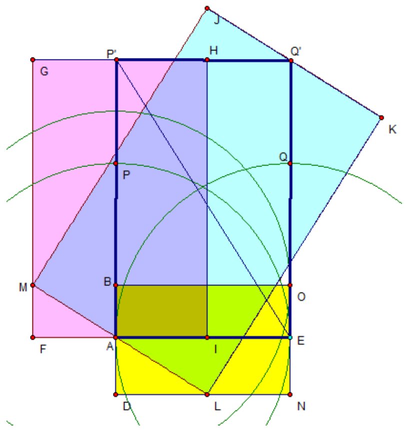


圖 7 長方形

假設 A 為$\overline{BD}$上的定點，且 E 為四邊形 NOBD 上的動點

若滿足∠AEQ = ∠BDN、∠EAP=∠BDN

且點 K 在$\overline{CA}$上滿足$\overline{CK}$=$\overline{BC}$

另 P'和 Q'使$\frac{\overline{DN}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AP'}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{EQ'}}{\overline{EQ}}$

則四邊形 BDNO ~四邊形 JKLM，四邊形 BDNO~四邊形 FIHG

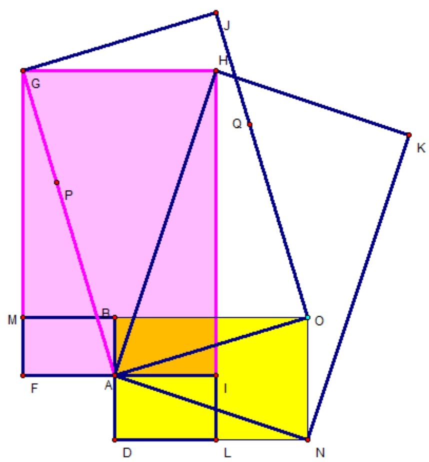


圖 7(a)

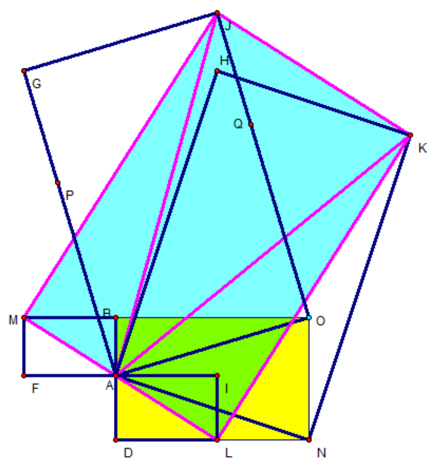


圖 7(b)

證明：

已知四邊形 JABM、AGJE、AHKN、AILD 為長方形

因為∠FAB=∠GAE，所以∠FAG=∠BAE

$\frac{\overline{AF}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}$， $\Rightarrow \Delta$ GAF～Δ EAB(SAS)

因為∠GAE = ∠HAN，所以∠GAH = ∠EAN

$\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AN}}$，$\Rightarrow \Delta$ GAH～Δ EAN(SAS)

因為∠DAI=∠HAN，所以∠HAI=∠DAN

$\frac{\overline{AH}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{AD}}$， $\Rightarrow \Delta$ DAN～Δ HAI(SAS)

證明：

因為 BAM=∠JAE，所以∠EAB=∠MAJ

$\frac{\overline{AM}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{AJ}}{\overline{AE}}$，則Δ JAM～Δ EAB(SAS)

因為∠JAE = ∠NAK，所以∠JAK = ∠EAN

$\frac{\overline{AJ}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{AN}}$，則Δ JAK～Δ EAN(SAS)

因為∠KAN=∠DAL，所以∠KAN=∠DAN

$\frac{\overline{AK}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{AD}}$，則Δ DAN～Δ LAK(SAS)

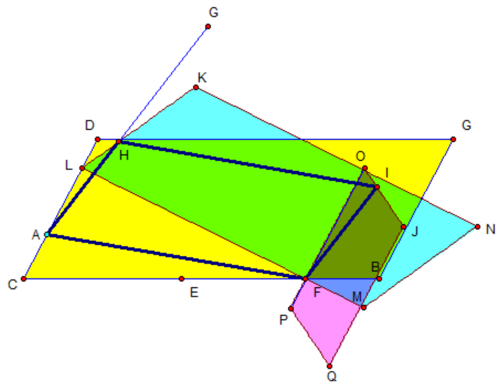


圖 8 平行四邊形

假設 F 為$\overline{CD}$上的定點，且 A 為四邊形 BCDG 上的動點

若滿足∠BCD = ∠FAP

且點 E 在$\overline{BC}$上滿足$\overline{CE}=\overline{CD}$

令 H 使$\frac{\overline{DN}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AH}}$

故$\overline{HI} \parallel \overline{AF}$，$\overline{FI} \parallel \overline{AH}$

則四邊形 BCDG~四邊形 MLKN，四邊形 BCDG~四邊形 JIHO

證明：

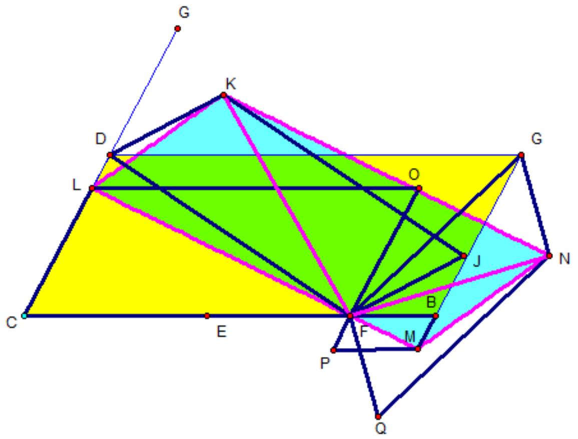


圖 8(a)

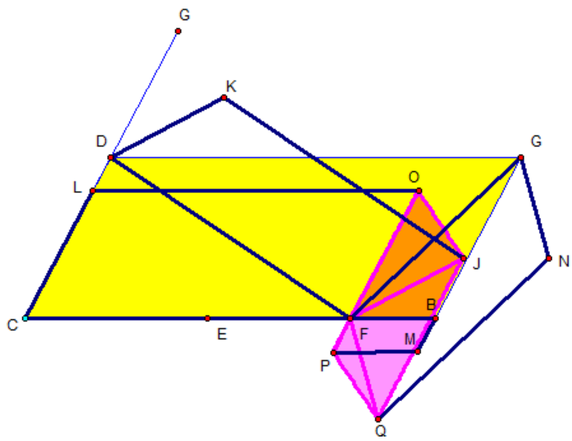


圖 8(b)

證明：

已知四邊形 CLOF、DKJF、GNQF、BMPF 為平行四邊形

因為∠CFL=∠KFD，所以∠CFD =∠KFL

$\frac{\overline{FH}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{GF}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{DFC} \sim \Delta\,\mathrm{KFL}(\mathrm{SAS})$

因為$\angle \mathrm{DFK}=\angle \mathrm{GFN}$，所以$\angle \mathrm{DFG}=\angle \mathrm{KFN}$

$\frac{\overline{KF}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{FN}}{\overline{FG}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{DFG} \sim \Delta\,\mathrm{KFN}(\mathrm{SAS})$

因為∠GFN=∠PFM，所以∠GFB=∠NFM

$\frac{\overline{FN}}{\overline{FG}}=\frac{\overline{FM}}{\overline{BF}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{GFB} \sim \Delta\,\mathrm{NFM}(\mathrm{SAS})$

證明：

因為∠CFO=∠DFJ，所以∠CFD=∠OFJ

$\frac{\overline{FI}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{FJ}}{\overline{DF}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{DFC} \sim \Delta\,\mathrm{JFO}(\mathrm{SAS})$

因為$\angle \mathrm{DFJ}=\angle \mathrm{GFQ}$，所以$\angle \mathrm{DFG}=\angle \mathrm{JFQ}$

$\frac{\overline{JF}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{FQ}}{\overline{FG}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{DFG} \sim \Delta\,\mathrm{JFQ}(\mathrm{SAS})$

因為∠GFQ=∠BFP，所以∠GFB=∠QFP

$\frac{\overline{FQ}}{\overline{FG}}=\frac{\overline{FP}}{\overline{BF}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{GFB} \sim \Delta\,\mathrm{QFP}(\mathrm{SAS})$

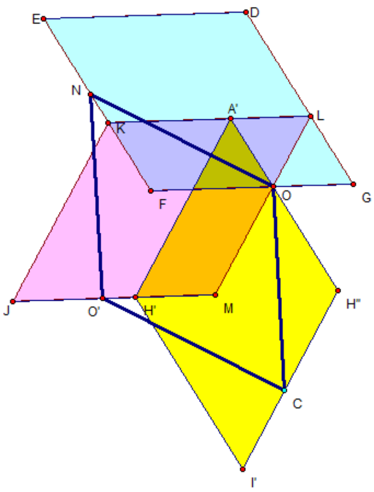


圖 9 菱形

假設 O 為$\overline{A'H''}$上的定點，且 C 為四邊形 A'H'I'H''上的動點

若滿足$\angle OCO' = \angle H'A'H''$、$\angle CON=\angle A'H'I'$

則四邊形 A'H'I' H"~四邊形 EFGD，四邊形 A'H'I'H"~四邊形 JKLM

證明：

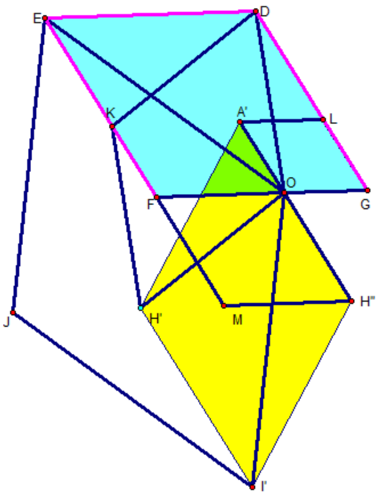


圖 9(a)

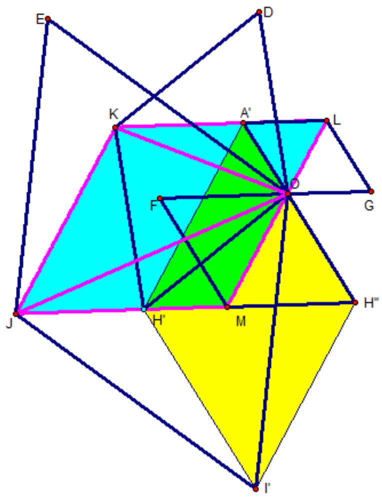


圖 9(b)

證明：

已知四邊形 A'LGO、DKH'O、EJI'O、FMH"O 為菱形

因為$\angle FOH''=\angle EOI'$，所以$\angle H''OI' =\angle FOE$

$\frac{\overline{OF}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OI'}}$， $\Rightarrow \Delta H''OI' \sim \Delta FOE$(SAS)

$\because \angle EOI' = \angle DOH'$， $\therefore \angle H'OI' = \angle DOE$

證明：

因為$\angle MOH''=\angle JOI'$，所以$\angle I'OH''=\angle JOK$

$\frac{\overline{OM}}{\overline{OH''}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OI'}}$， $\Rightarrow \Delta I'OH'' \sim \Delta JOM$(SAS)

因為$\angle I'OJ = \angle H'OK$，所以$\angle H'OI' = \angle KOJ$

$\frac{\overline{OK}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OI'}}$，$\Rightarrow \Delta H'OI' \sim \Delta KOJ$(SAS)

$\frac{\overline{DO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OI'}}$，∴ Δ H′OI′～ Δ DOE(SAS)

∵ ∠H′OD=∠A′OG，∴ ∠H′OA′=∠DOG

$\frac{\overline{OD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{GO}}$， ∴ Δ H′OA′～ Δ DOG(SAS)

因為∠H′OK=∠A′OL，所以∠H′OA′=∠KOL

$\frac{\overline{OK}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{OL}}{\overline{OA}}$， ⇒ Δ H′OA′～ Δ KOL(SAS)

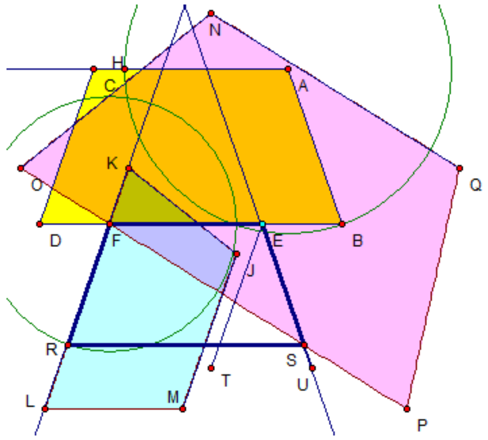


圖 10 等腰梯形

假設 F 為 $\overline{BD}$ 上的定點，且 E 為四邊形 ACDB 上的動點

若滿足∠FEU = ∠BAC

且點 H 在 $\overline{AC}$ 上滿足 $\overline{AB} = \overline{AH}$

另 S 使 $\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ES}}{\overline{EU}}$

則四邊形 ABDC~四邊形 QPON，四邊形 ABDC~四邊形 MLKJ

證明：

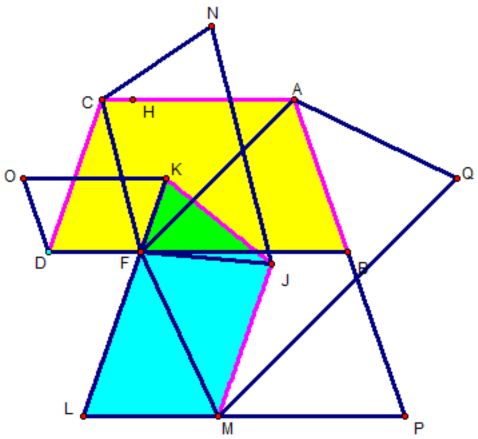


圖 10(a)

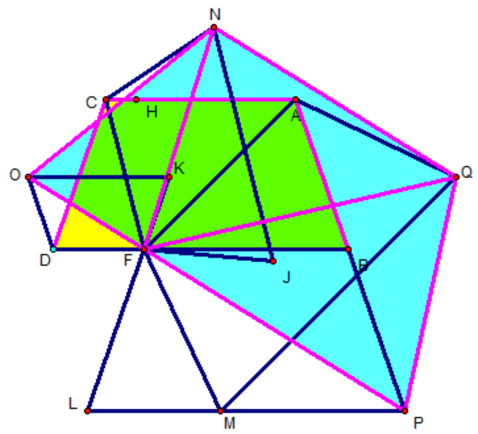


圖 10(b)

證明：

已知四邊形 DOKF、CNJF、AQMF、LPBF 為等腰梯形

因為∠DFO=∠CFN，所以∠DFC=∠OFN

$\frac{\overline{FO}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{FC}}$， ⇒ Δ DFC～ Δ OFN(SAS)

因為∠DFK=∠CFJ，所以∠DFC=∠KFJ

$\frac{\overline{FK}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{FJ}}{\overline{FC}}$， $\Rightarrow \Delta$ DFC∼ Δ KFJ(SAS)

因為∠CFJ = ∠AFM，所以∠CFA = ∠JFM

$\frac{\overline{FJ}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{FM}}{\overline{FA}}$，$\Rightarrow \Delta$ CFA∼ Δ JFM(SAS)

因為∠AFM=∠LFB，所以∠AFB=∠MFL

$\frac{\overline{FM}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{FL}}{\overline{FB}}$， $\Rightarrow \Delta$ AFB∼ Δ MF (SAS)

因為∠CFN = ∠AFS，所以∠CFA = ∠NFS

$\frac{\overline{FN}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$，$\Rightarrow \Delta$ CFA∼ Δ NFS(SAS)

因為AFS=∠BFP，所以∠AFB=∠SFP

$\frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{FP}}{\overline{FB}}$， $\Rightarrow \Delta$ AFB∼ Δ SFP(SAS)

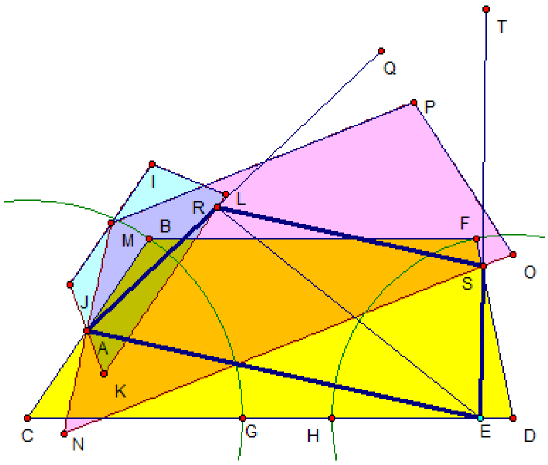


圖 11 任意梯形

假設 A 為$\overline{BC}$上的定點，且 E 為四邊形 BCDF 上的動點

若滿足∠AET = ∠CDF、∠EAQ=∠DCB

且點 G 和點 H 在$\overline{CA}$上滿足$\overline{BC}$=$\overline{CG}$，$\overline{FD}$=$\overline{DH}$

另點 R 和點 S 使$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}$，$\frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{ES}}{\overline{ET}}$

則四邊形 BCDF~四邊形 JKLI，四邊形 BCDF~四邊形 MNOP

證明：

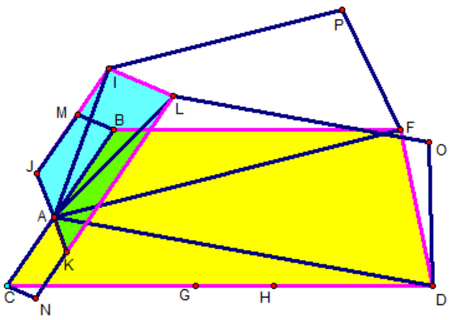


圖 11(a)

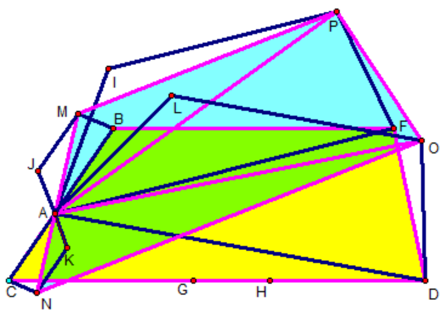


圖 11(b)

證明：

已知四邊形 BMJA、FPIA、DFLA、CNKA 為任意梯形

因為∠JAB=∠IAF，所以∠JAI=∠BAF

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AJ}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AI}}$， $\Rightarrow \Delta$ JAI～Δ BAF(SAS)

因為$\angle IAF=\angle FAD$，所以$\angle IAL=\angle FAD$

$\frac{\overline{AF}}{\overline{AI}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AL}}$，$\Rightarrow \Delta$ IAL～Δ FAD(SAS)

因為∠CAK=∠LAD，所以∠CAD=∠KAL

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AK}}$， $\Rightarrow \Delta$ CAD～Δ KALSAS)

因為∠BAM=∠FAP，所以∠MAP=∠BAF

$\frac{\overline{AM}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AF}}$， $\Rightarrow \Delta$ MAP～Δ BAF(SAS)

因為$\angle PAF=\angle OAD$，所以$\angle PAO=\angle FAD$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{AD}}$，$\Rightarrow \Delta$ PAO～Δ FAD(SAS)

因為∠CAN=∠OAD，所以∠CAD=∠NAO

$\frac{\overline{AL}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$， $\Rightarrow \Delta$ CAD～Δ NAO(SAS)

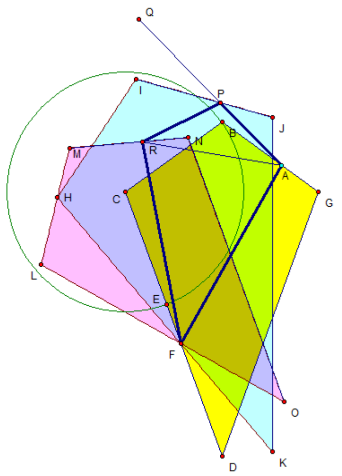


圖 12 鳶形

假設 F 為$\overline{CD}$上的定點，且 A 為四邊形 BCDG 上的動點

若滿足$\angle AFR=\angle CDG$、∠FAQ=∠DGB

且點 E 在$\overline{CD}$上滿足$\overline{CE}=\overline{BC}$

另 P 使$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$

則四邊形 BCDG~四邊形 IHJK，四邊形 BCDG ~四邊形 MNOL

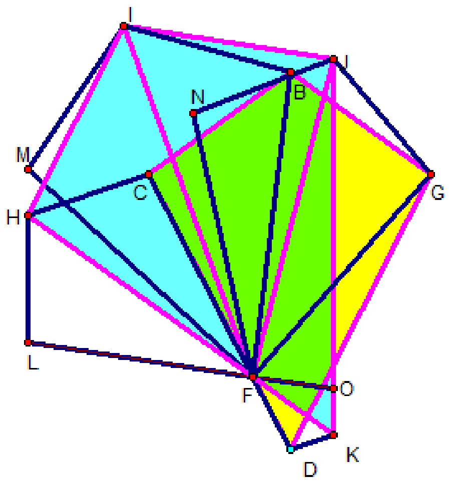


圖 12(a)

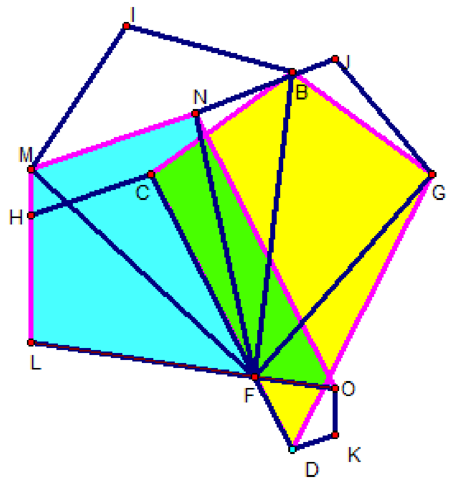


圖 12(b)

證明：

已知四邊形 DKNF、GJNF、BIMF、CHLF 為鳶形

因為∠HFC=∠BFI，所以∠HFI=∠CFB

$\frac{\overline{FH}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{FI}}{\overline{FB}}$， $\Rightarrow \Delta\,HFI \sim \Delta\,CFB(SAS)$

因為$\angle BFI=\angle GFJ$，所以$\angle IFJ=\angle BFG$

$\frac{\overline{FI}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{FR}}{\overline{FA}}$，$\Rightarrow \Delta\,IFJ \sim \Delta\,BFG(SAS)$

因為∠GFJ=∠DFK，所以∠GFD=∠JFK

$\frac{\overline{FR}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{FD}}$， $\Rightarrow \Delta\,GFD \sim \Delta\,JFK(SAS)$

因為∠LFC=∠BFM，所以∠LFM=∠CFB

$\frac{\overline{FL}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{FM}}{\overline{FB}}$， $\Rightarrow \Delta\,LFM \sim \Delta\,CFB(SAS)$

因為$\angle BFM=\angle GFN$，所以$\angle MFN=\angle BFG$

$\frac{\overline{FM}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{FN}}{\overline{FA}}$，$\Rightarrow \Delta\,MFN \sim \Delta\,BFG(SAS)$

因為$\because$∠GFN=∠DFO，所以∠GFD=∠NFO

$\frac{\overline{FN}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{FO}}{\overline{FD}}$， $\Rightarrow \Delta\,GFD \sim \Delta\,NFO(SAS)$

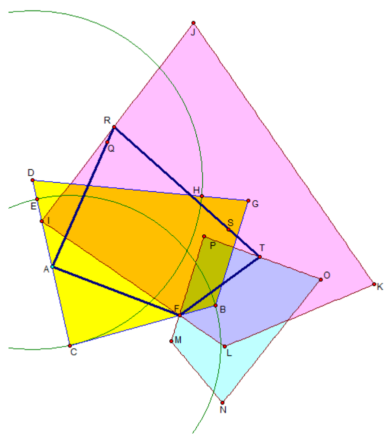


圖 13 任意四邊形

假設 F 為$\overline{BC}$上的定點，且 A 為四邊形 BCDG 上的動點

若滿足$\angle AFR=\angle CDG$、∠FAQ=∠DGB

且點 E 在$\overline{CD}$上滿足$\overline{CE}=\overline{BC}$

另 Q 使$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}}$

則四邊形 BCDG~四邊形 LIJK，四邊形 BCDG ~四邊形 MPON

證明：

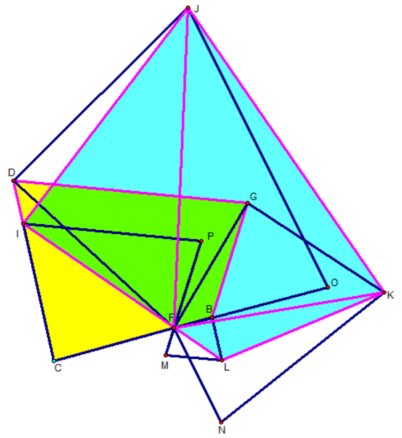


圖 13(a)

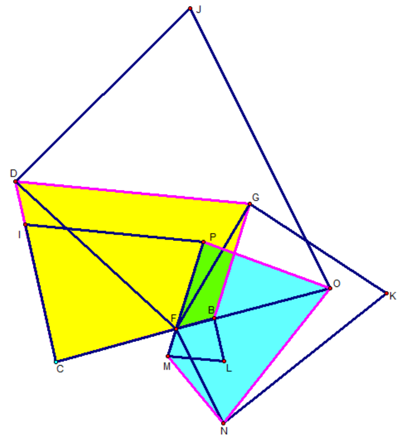


圖 13(b)

證明：

已知四邊形 PICF、OJDF、NKGF、MLBF 為任意四邊形

因為∠CFI=∠DFJ，所以∠CFD=∠IFJ

$\frac{\overline{FI}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{FJ}}{\overline{FD}}$， $\Rightarrow \Delta\,\mathrm{CFD} \sim \Delta\,\mathrm{IFJ}$(SAS)

因為$\angle\mathrm{DFJ} = \angle\mathrm{GFK}$，所以$\angle\mathrm{DFG} = \angle\mathrm{JFK}$

$\frac{\overline{FJ}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{FG}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{DFG} \sim \Delta\,\mathrm{JFK}$(SAS)

因為∠GFK=∠BFL，所以∠GFB=∠KFL

$\frac{\overline{FK}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{FL}}{\overline{FB}}$， $\Rightarrow \Delta\,\mathrm{GFB} \sim \Delta\,\mathrm{KFL}$(SAS)

因為∠CFT=∠DFO，所以∠CFD=∠TFO

$\frac{\overline{FP}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FD}}$，則$\Delta\,\mathrm{CFD} \sim \Delta\,\mathrm{TFO}$(SAS)

因為$\angle\mathrm{DFO} = \angle\mathrm{GFN}$，所以$\angle\mathrm{DFG} = \angle\mathrm{OFN}$

$\frac{\overline{FO}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{FG}}$，$\Rightarrow \Delta\,\mathrm{DFG} \sim \Delta\,\mathrm{OFN}$(SAS)

因為∠GFN=∠BFM，所以∠GFB=∠NFM

$\frac{\overline{FN}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{FM}}{\overline{FB}}$， $\Rightarrow \Delta\,\mathrm{GFB} \sim \Delta\,\mathrm{NFM}$(SAS)

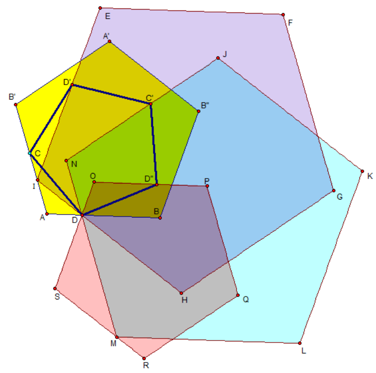


圖 14 正五邊形

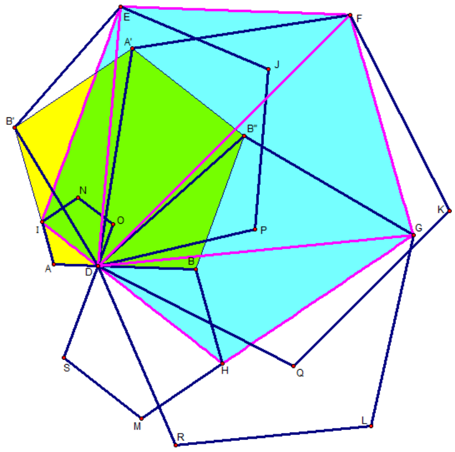


圖 14(a)

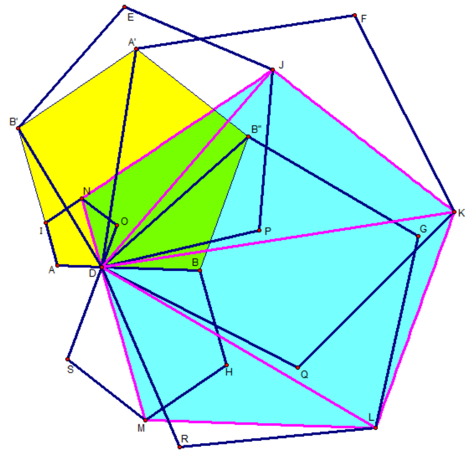


圖 14(b)

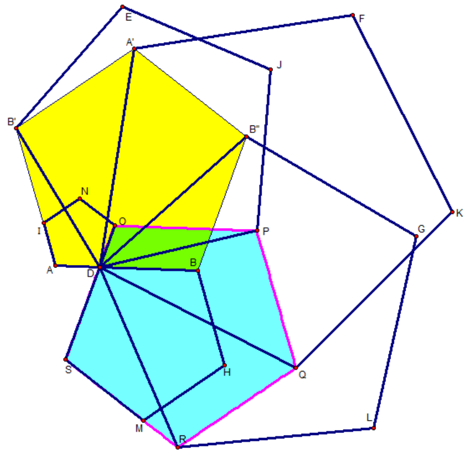


圖 14(c)

在原圖 ABA'B'A"與

軌跡圖形 EFGHI 中

$\because \angle ADI=\angle A''DE$

$\therefore \angle ADA'' = \angle IDE$

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DA''}}$$

得 Δ ADA"～Δ IDE(SAS)

$\because \angle A''DE=\angle B'DF$

$\therefore \angle A''DB' = \angle EDF$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DA''}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DB'}}$$

得 Δ A"DB'～Δ EDF(SAS)

$\because \angle B'DF=\angle A'DG$

$\therefore \angle B'DA' = \angle FDG$

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DB'}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{DA'}}$$

得 Δ B'DA'～Δ FDG(SAS)

$\because \angle A'DG=\angle BDH$

在原圖 ABA'B'A"與

軌跡圖形 JKLMN 中

$\because \angle ADN=\angle A''DJ$

$\therefore \angle ADA'' = \angle NDJ$

$$\frac{\overline{DN}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DJ}}{\overline{DA''}}$$

得 Δ ADA"～Δ NDJ(SAS)

$\because \angle A''DJ=\angle B'DK$

$\therefore \angle A''DB' = \angle JDK$

$$\frac{\overline{DJ}}{\overline{DA''}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{DB'}}$$

得 Δ A"DB'～Δ JDK(SAS)

$\because \angle B'DK=\angle A'DL$

$\therefore \angle B'DA' = \angle KDL$

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{DB'}}=\frac{\overline{DL}}{\overline{DA'}}$$

得 Δ B'DA'～Δ KDL(SAS)

$\because \angle A'DL=\angle BDM$

在原圖 ABA'B'A"與

軌跡圖形 OPQRS 中

$\because \angle ADO=\angle A''DP$

$\therefore \angle ADA'' = \angle ODP$

$$\frac{\overline{DO}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{DA''}}=1$$

得 Δ ADA"～Δ ODP(SAS)

$\because \angle A''DP=\angle B'DQ$

$\therefore \angle A''DB' = \angle PDQ$

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DA''}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{DB'}}=1$$

得 Δ A"DB'～Δ PDQ(SAS)

$\because \angle B'DQ=\angle A'DR$

$\therefore \angle B'DA' = \angle QDR$

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{DB'}}=\frac{\overline{DR}}{\overline{DA'}}=1$$

得 Δ B'DA'～Δ QDR(SAS)

$\because \angle A'DR=\angle BDS$

∴∠A'DB = ∠GDH

$\frac{\overline{DG}}{\overline{DA'}}=\frac{\overline{DH}}{\overline{DB}}$

得Δ A'DB~Δ GDH(SAS)

∴∠A'DB = ∠LDM

$\frac{\overline{DL}}{\overline{DA'}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{DB}}$

得Δ A'DB~Δ LDM(SAS)

∴∠A'DB = ∠RDS

$\frac{\overline{DR}}{\overline{DA'}}=\frac{\overline{DS}}{\overline{DB}}$

得Δ A'DB~Δ RDS(SAS)

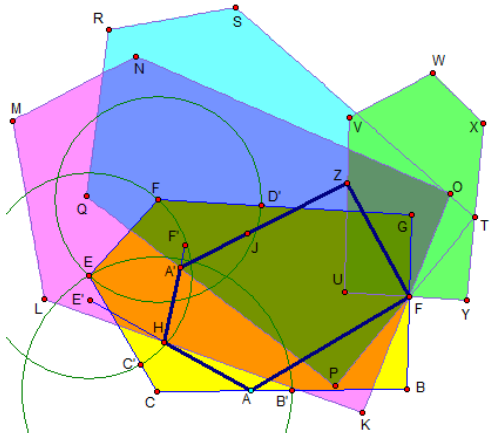


圖 15 任意五邊形

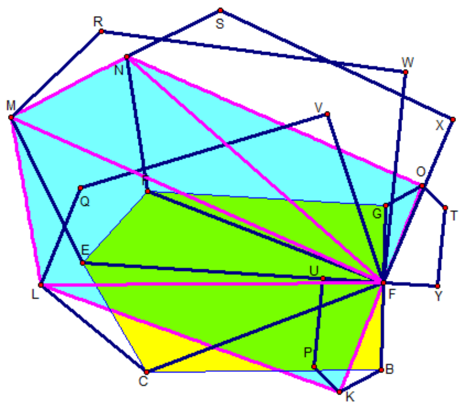


圖 15(a)

在原圖 BCEFG 與

軌跡圖形 KLMNO 中

∵ ∠BDK=∠CDL

∴∠BDC = ∠KDL

$\frac{\overline{DK}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DL}}{\overline{DC}}$

得Δ BDC~Δ KDL(SAS)

∵ ∠CDL=∠EDM

∴∠CDE = ∠LDM

$\frac{\overline{DL}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{DE}}$

得Δ CDE~Δ LDM(SAS)

∵ ∠EDM=∠FDN

∴∠EDF = ∠MDN

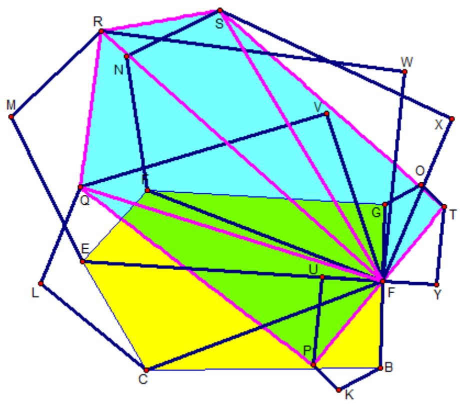


圖 15(b)

在原圖 BCEFG 與

軌跡圖形 PQRST 中

∵ ∠BDP=∠CDQ

∴∠BDC = ∠PDQ

$\frac{\overline{DP}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{DC}}$

得Δ BDC~Δ PDQ(SAS)

∵ ∠CDQ=∠EDR

∴∠CDE = ∠QDR

$\frac{\overline{DQ}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{DR}}{\overline{DE}}$

得Δ CDE~Δ QDR(SAS)

∵ ∠EDR=∠FDS

∴∠EDF = ∠RDS

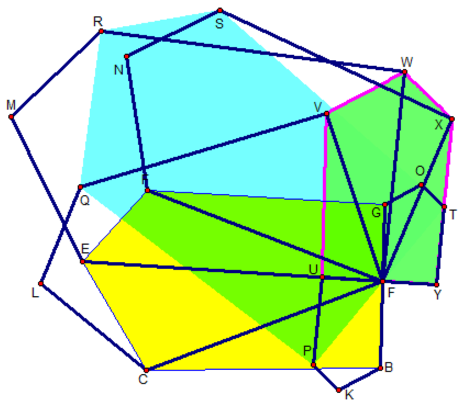


圖 15(c)

在原圖 BCEFG 與

軌跡圖形 UVWXY 中

∵ ∠BDU=∠CDV

∴∠BDC = ∠UDV

$\frac{\overline{DU}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DV}}{\overline{DC}}$

得Δ BDC~Δ EDW(SAS)

∵ ∠CDV=∠EDW

∴∠CDE = ∠VDW

$\frac{\overline{DV}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{DW}}{\overline{DE}}$

得Δ CDE~Δ VDW(SAS)

∵ ∠EDW=∠FDX

∴∠EDF = ∠WDX

$\frac{\overline{DM}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DN}}{\overline{DF}}$

得 Δ EDF～Δ MDN(SAS)

∵ ∠FDN=∠GDO

∴∠FDG = ∠NDO

$\frac{\overline{DN}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{DO}}{\overline{DG}}$

得 Δ FDG～Δ NDO(SAS)

$\frac{\overline{DR}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DS}}{\overline{DF}}$

得 Δ EDF～Δ RDS(SAS)

∵ ∠FDS=∠GDT

∴∠FDG = ∠SDT

$\frac{\overline{DS}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{DT}}{\overline{DG}}$

得 Δ FDG～Δ SDT(SAS)

$\frac{\overline{DW}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DX}}{\overline{DF}}$

得 Δ EDF～Δ WDX(SAS)

∵ ∠FDX=∠XDY

∴∠FDG = ∠XDY

$\frac{\overline{DX}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{DY}}{\overline{DG}}$

得 Δ FDG～Δ XDY(SAS)

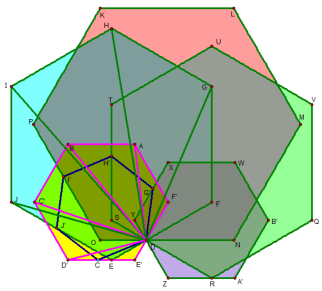


圖 16 正六邊形

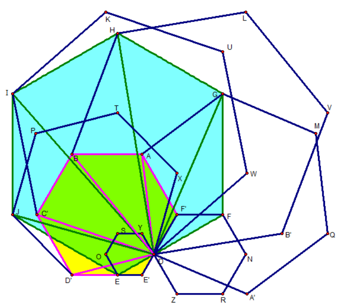


圖 16(a)

在原圖 ABC’D’E’F’與

軌跡圖形 EFGHIJ 中

∵ ∠EDE′=∠D'DJ

∴∠D'DE' = ∠JDE

$\frac{\overline{DE}}{\overline{DE'}}=\frac{\overline{DJ}}{\overline{DD'}}$

得 Δ D'DE'～Δ JDE(SAS)

∵ ∠JDD′=∠IDC'

∴∠C'DD' = ∠IDJ

$\frac{\overline{DJ}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{DJ}}{\overline{DC'}}$

得 Δ C'DD'～Δ IDJ(SAS)

∵ ∠C′DI=∠BDH

∴∠C'DB = ∠IDH

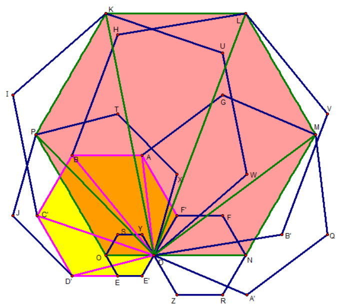


圖 16(b)

在原圖 ABC’D’E’F’與

軌跡圖形 KLMNOP 中

∵ ∠ODE′=∠D'DP

∴∠D'DE' = ∠PDO

$\frac{\overline{DO}}{\overline{DE'}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{DD'}}$

得 Δ D'DE'～Δ PDO(SAS)

∵ ∠PDD′=∠KDC'

∴∠C'DD' = ∠KDP

$\frac{\overline{DP}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{DC'}}$

得 Δ C'DD'～Δ KDP(SAS)

∵ ∠C′DK=∠BDL

∴∠C'DB = ∠KDL

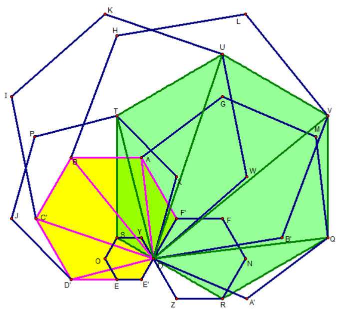


圖 16(c)

在原圖 ABC’D’E’F’與

軌跡圖形 QRSTUV 中

∵ ∠SDE′=∠D'DT

∴∠D'DE' = ∠TDS

$\frac{\overline{DS}}{\overline{DE'}}=\frac{\overline{DT}}{\overline{DD'}}$

得 Δ D'DE'～Δ TDS(SAS)

∵ ∠TDD′=∠UDC'

∴∠C'DD' = ∠UDT

$\frac{\overline{DT}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{DU}}{\overline{DC'}}$

得 Δ C'DD'～Δ UDT(SAS)

∵ ∠C′DU=∠BDV

∴∠C'DB = ∠UDV

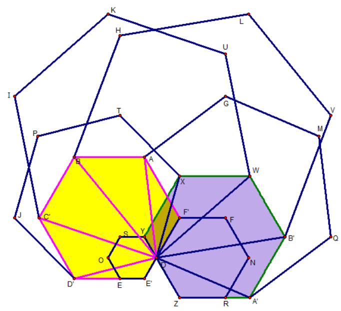


圖 16(d)

在原圖 ABC’D’E’F’與

軌跡圖形 WXYZA’B’中

∵ ∠YDE′=∠D'DX

∴∠D'DE' = ∠XDY

$\frac{\overline{DY}}{\overline{DE'}}=\frac{\overline{DX}}{\overline{DD'}}=1$

得 Δ D'DE'≅Δ XDY(SAS)

∵ ∠XDD′=∠WDC'

∴∠C'DD' = ∠WDX

$\frac{\overline{DX}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{DW}}{\overline{DC'}}=1$

得 Δ C'DD' ≅ Δ WDX(SAS)

∵ ∠C′DW=∠BDB'

∴∠C'DB = ∠WDB′

$\frac{\overline{DW}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}}=1$

$\frac{\overline{DI}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{DH}}{\overline{DB}}$

得Δ C’DB~Δ IDH(SAS)

∵ ∠BDH=∠ADG

∴∠BDA = ∠HDG

$\frac{\overline{DH}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{DA}}$

得Δ BDA~Δ HDG(SAS)

∵ ∠ADG=∠F'DF

∴∠ADF' = ∠GDF

$\frac{\overline{DG}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DF'}}$

得Δ ADF’~Δ GDF(SAS)

$\frac{\overline{DK}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{DL}}{\overline{DB}}$

得Δ C’DB~Δ KDL(SAS)

∵ ∠BDL=∠ADM

∴∠BDA = ∠LDM

$\frac{\overline{DL}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}$

得Δ BDA~Δ LDM(SAS)

∵ ∠ADM=∠F'DN

∴∠ADF' = ∠MDN

$\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DN}}{\overline{DF'}}$

得Δ ADF’~Δ MDN(SAS)

$\frac{\overline{DU}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{DV}}{\overline{DB}}$

得Δ C’DB~Δ UDV(SAS)

∵ ∠BDV=∠ADQ

∴∠BDA = ∠VDQ

$\frac{\overline{DV}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{DA}}$

得Δ BDA~Δ VDQ(SAS)

∵ ∠ADQ=∠F'DR

∴∠ADF' = ∠QDR

$\frac{\overline{DQ}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DR}}{\overline{DF'}}$

得Δ ADF’~Δ QDR(SAS)

得Δ C’DB≅Δ WDB’(SAS)

∵ ∠BDB'=∠ADA'

∴∠BDA = ∠B′DA′

$\frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DA'}}{\overline{DA}}$=1

得Δ BDA≅Δ B’DA’(SAS)

∵ ∠ADA'=∠F'DZ

∴∠ADF' = ∠A′DZ

$\frac{\overline{DA'}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DZ}}{\overline{DF'}}$=1

得Δ ADF’~Δ A’DZ(SAS)

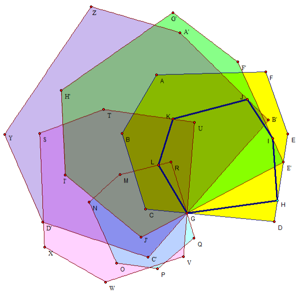


圖 17 任意六邊形

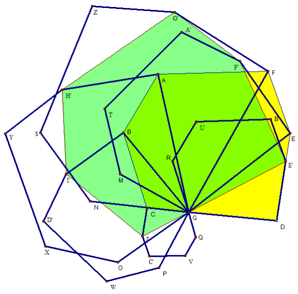


圖 17(a)

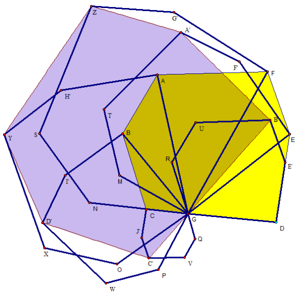


圖 17(b)

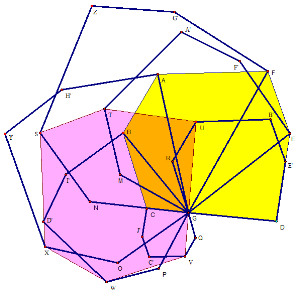


圖 17(c)

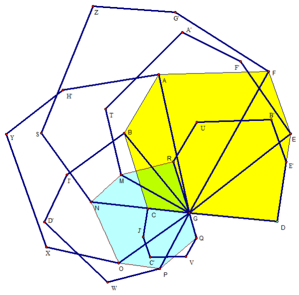


圖 17(d)

在原圖 DEFABC 與

軌跡圖形 E’F’G’H’I’J’

∵ ∠DGE′=∠EGF'

∴∠DGE = ∠E′GF′

$\frac{\overline{GE'}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{GF'}}{\overline{GE}}$

得Δ DGE~Δ E’GF’(SAS)

∵ ∠EGF′=∠FGG'

∴∠EGF = ∠F'GG'

在原圖 DEFABC 與

軌跡圖形 B’A’ZYD’C’

∵ ∠DGB′=∠EGA'

∴∠DGE = ∠B’GA’

$\frac{\overline{GB'}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{GA'}}{\overline{GE}}$

得Δ DGE~Δ B’GA’(SAS)

∵ ∠EGA′=∠FGG'

∴∠EGF = ∠A'GZ

在原圖 DEFABC 與

軌跡圖形 UTSXWV

∵ ∠DGU=∠EGT

∴∠DGE = ∠UGT

$\frac{\overline{GU}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{GT}}{\overline{GE}}$

得Δ DGE~Δ UGT(SAS)

∵ ∠EGT=∠FGS

∴∠EGF = ∠TGS

在原圖 DEFABC 與

軌跡圖形 RMNOPQ

∵ ∠DGR=∠EGM

∴∠DGE = ∠RGM

$\frac{\overline{GR}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{GM}}{\overline{GE}}$

得Δ DGE~Δ RGM(SAS)

∵ ∠EGM=∠FGN

∴∠EGF = ∠MGN

$\frac{\overline{GF'}}{\overline{GE}}=\frac{\overline{GG'}}{\overline{GF}}$

得 $\Delta EGF \sim \Delta F'GG'(SAS)$

$\because \angle FGG' = \angle AGH'$

$\therefore \angle FGA = \angle G'GH'$

$\frac{\overline{GG'}}{\overline{GF}}=\frac{\overline{GH'}}{\overline{GA}}$

得 $\Delta FGA \sim \Delta G'GH'(SAS)$

$\because \angle AGH' = \angle BGI'$

$\therefore \angle AGB = \angle H'GI'$

$\frac{\overline{GH'}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GI'}}{\overline{GB}}$

得 $\Delta AGB \sim \Delta H'GI'(SAS)$

$\because \angle BGI' = \angle CGJ'$

$\therefore \angle BGC = \angle I'GJ'$

$\frac{\overline{GI'}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GJ'}}{\overline{GC}}$

得 $\Delta BGC \sim \Delta I'GJ'(SAS)$

$\frac{\overline{GA}}{\overline{GE}}=\frac{\overline{GZ}}{\overline{GF}}$

得 $\Delta EGF \sim \Delta A'GZ(SAS)$

$\because \angle FGZ = \angle AGH'$

$\therefore \angle FGA = \angle ZGY$

$\frac{\overline{GZ}}{\overline{GF}}=\frac{\overline{GY}}{\overline{GA}}$

得 $\Delta FGA \sim \Delta ZGY(SAS)$

$\because \angle AGY = \angle BGI'$

$\therefore \angle AGB = \angle YGD'$

$\frac{\overline{GY}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GD'}}{\overline{GB}}$

得 $\Delta AGB \sim \Delta YGD'(SAS)$

$\because \angle BGD' = \angle CGJ'$

$\therefore \angle BGC = \angle D'GC'$

$\frac{\overline{GD'}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}$

得 $\Delta BGC \sim \Delta D'GC'(SAS)$

$\frac{\overline{GT}}{\overline{GE}}=\frac{\overline{GS}}{\overline{GF}}$

得 $\Delta EGF \sim \Delta TGS(SAS)$

$\because \angle FGS = \angle AGX$

$\therefore \angle FGA = \angle SGX$

$\frac{\overline{GS}}{\overline{GF}}=\frac{\overline{GX}}{\overline{GA}}$

得 $\Delta FGA \sim \Delta SGX(SAS)$

$\because \angle AGX = \angle BGW$

$\therefore \angle AGB = \angle XGW$

$\frac{\overline{GX}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GW}}{\overline{GB}}$

得 $\Delta AGB \sim \Delta XGW(SAS)$

$\because \angle BGW = \angle CGV$

$\therefore \angle BGC = \angle WGV$

$\frac{\overline{GW}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GV}}{\overline{GC}}$

得 $\Delta BGC \sim \Delta WGV(SAS)$

$\frac{\overline{GM}}{\overline{GE}}=\frac{\overline{GN}}{\overline{GF}}$

得 $\Delta EGF \sim \Delta MGN(SAS)$

$\because \angle FGN = \angle AGO$

$\therefore \angle FGA = \angle NGO$

$\frac{\overline{GN}}{\overline{GF}}=\frac{\overline{GO}}{\overline{GA}}$

得 $\Delta FGA \sim \Delta NGO(SAS)$

$\because \angle AGO = \angle BGP$

$\therefore \angle AGB = \angle OGP$

$\frac{\overline{GO}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GP}}{\overline{GB}}$

得 $\Delta AGB \sim \Delta OGP(SAS)$

$\because \angle BGP = \angle CGQ$

$\therefore \angle BGC = \angle PGQ$

$\frac{\overline{GP}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GQ}}{\overline{GC}}$

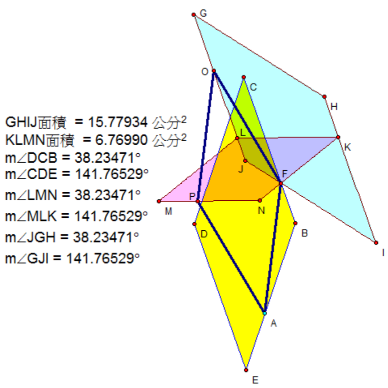
得 $\Delta BGC \sim \Delta PGQ(SAS)$

陸、分析與討論

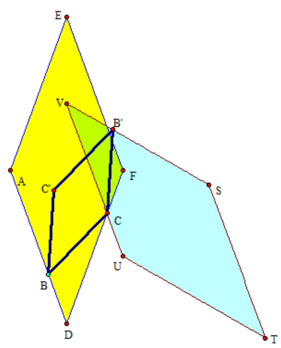
一、從各種三角形及四邊形的作圖中，發現當動點移動時，其他點的軌跡線所形成的圖形與原始圖形相似。

二、從菱形的相似圖形尋找過程中，發現當內角為 60°、120°、60°、120°時，其他兩點的軌跡線所形成的圖形彼此全等。而當內角為 38°、142°、38°、142°時，其他兩點的軌跡線所形成的圖形彼此相似。

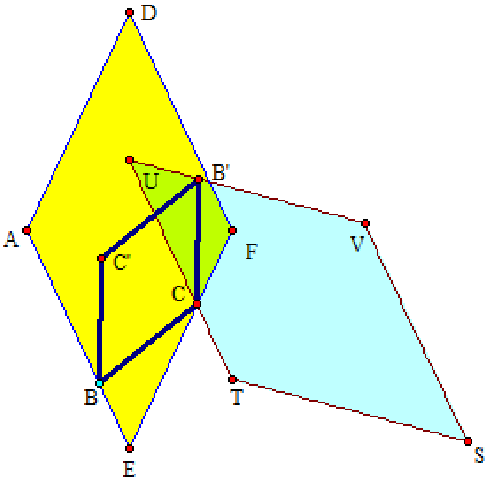
任意菱形



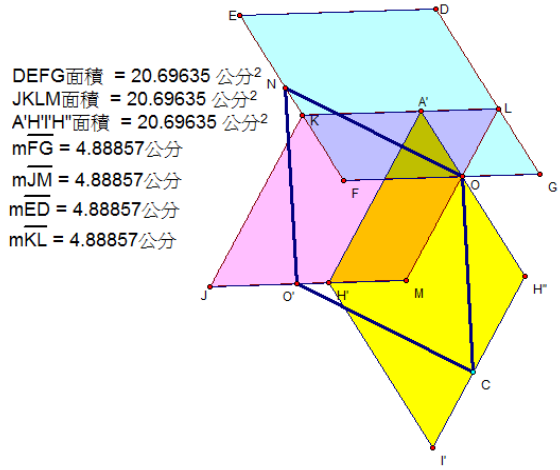
菱形的內角分別為 40°、140°、40°、140°



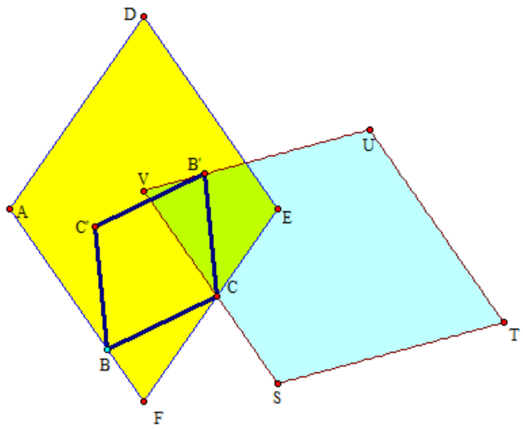
菱形的內角分別為 50°、130°、50°、130°



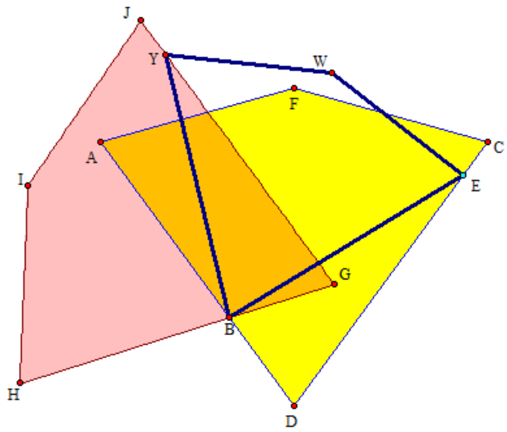
菱形的內角分別為 60°、120°、60°、120°



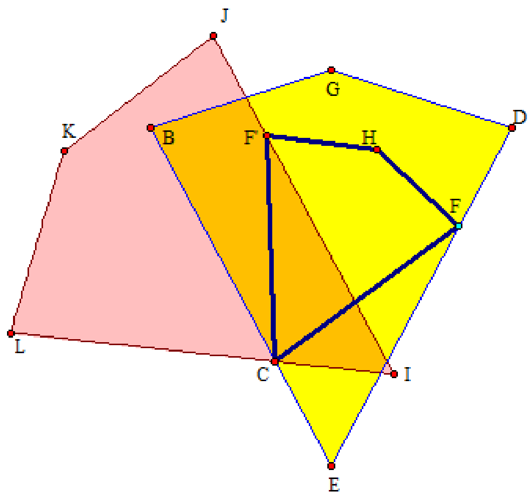
菱形的內角分別為 70°、110°、70°、110°



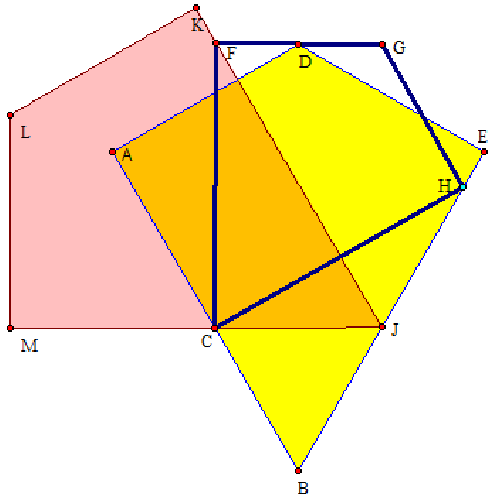
鳶形的∠A、∠C分別為 70°、70°



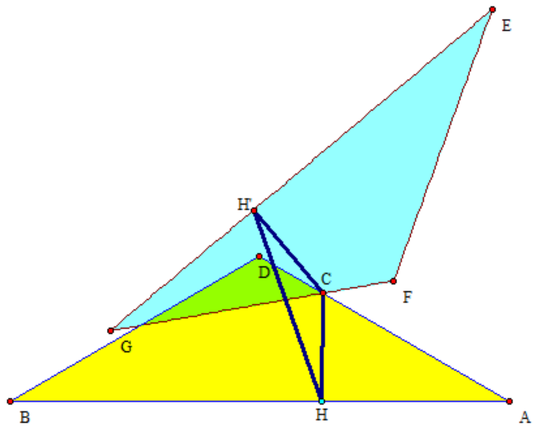
鳶形的∠B、∠D分別為 80°、80°



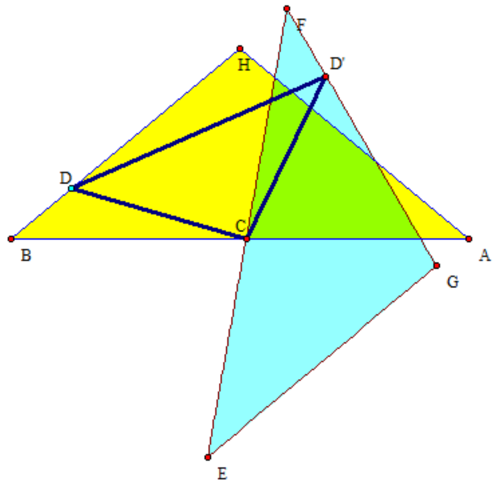
鳶形的∠A、∠E分別為 90°、90°



等腰三角形的內角分別為 30°、30°、120°



等腰三角形的內角分別為 40°、40°、100°



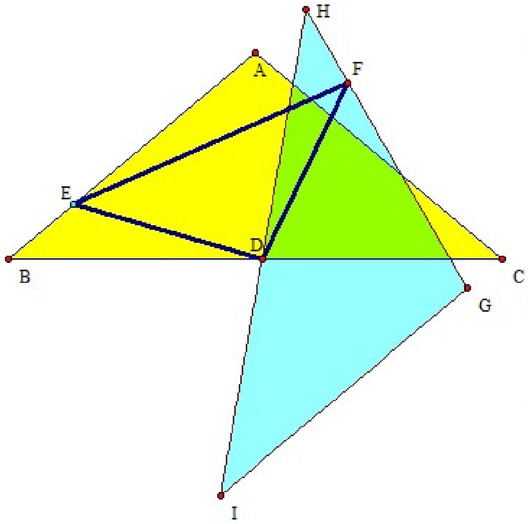
以上這些圖皆為軌跡圖形全等於原圖形，在移動點的角度等於軌跡點的角度時，軌跡圖形與原圖形兩者就會全等。

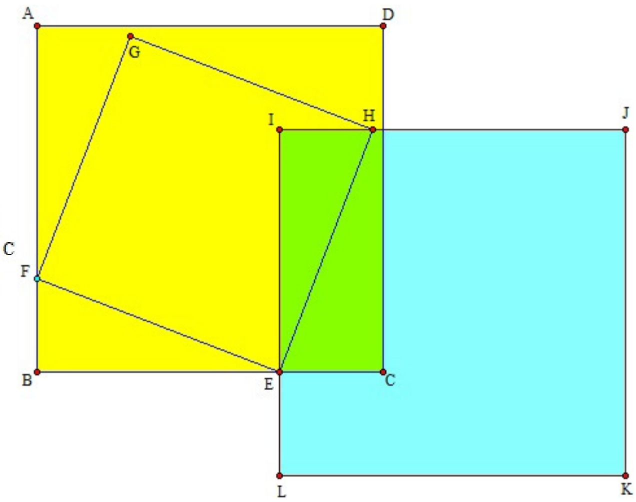
柒、結論

一、在做各種類型三角形的相似軌跡圖形時，

（一） 任意三角形所做出的軌跡圖形會相似於原圖形。

（二） 若ΔABC~ΔDEF，以 D 點為固定點，E 點為移動點，F 點為軌跡點，(1)當$\overline{DE}=\overline{DF}$時，F 點所形成的軌跡圖形會全等於原圖形; (2)當$\overline{DE}\neq\overline{DF}$時，F 點所形成的軌跡圖形會相似於原圖形。



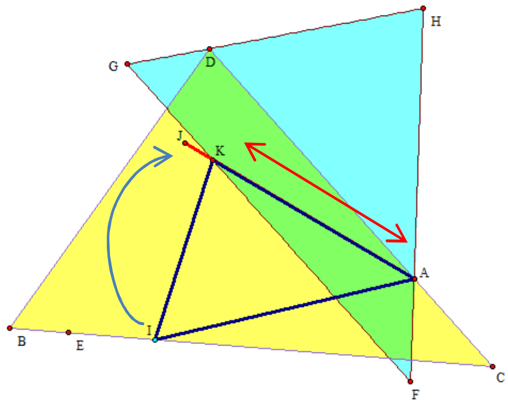


二、在做各種類型四邊形的相似軌跡圖形時，

（一） 任意的四邊形所做的軌跡圖形會相似於原圖形。

（二） 四邊形 ABCD~四邊形 EFGH，以 E 點為固定點，F 點為移動點，H 點為軌跡點，當$\overline{EF}=\overline{EH}$時，H 點所形成的軌跡圖形會全等於原圖形; (2)當$\overline{EF}\neq\overline{EH}$時，H 點所形成的軌跡圖形會相似於原圖形。

三、由上述結論可以發現，若存在一軌跡點至定點的距離等於定點至動點的距離，則該軌跡點所形成的軌跡圖形會全等於原圖形;否則，當定點至軌跡點的距離不等於定點至動點的距離，則該軌跡點所形成的軌跡圖形會相似於原圖形，詳如下圖所示及說明。



我們可將此一結論推論至任意 N 邊形的軌跡圖形，可視為先旋轉後縮放所得的圖形。以三角形為例，過程如下：

1.把$\overline{AI}$旋轉一定的角度後，得到 $\overline{AJ}$，使$\angle IAJ = \angle BCD$。

2.再將$\overline{AJ}$縮放一定的比例，得到 $\overline{AK}$，使$\overline{AK} = \overline{AJ} \times \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$。

所以當兩邊長相異時，點 K 形成的軌跡圖形一定會相似於原圖形，當兩邊長相等時，點 K 軌跡圖形則會全等於原圖形。

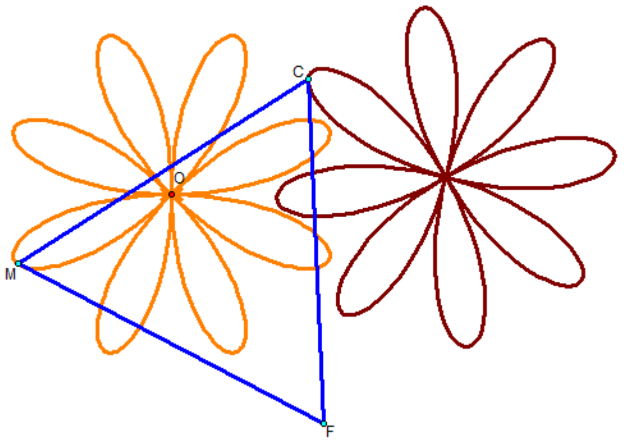
捌、未來發展方向

為了使此主題內容更加完備，未來將作以下的延伸研究:

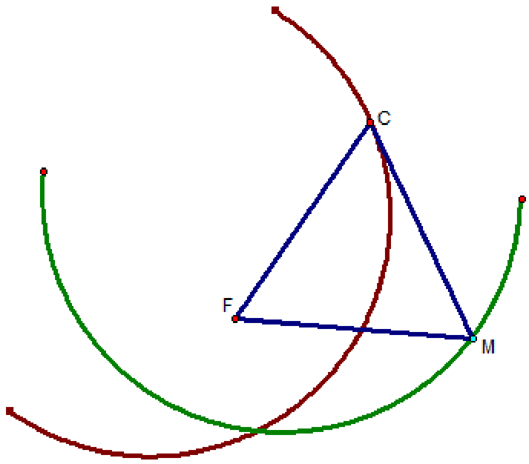
(一) 我們初步觀察出對於封閉曲線(例如:玫瑰曲線)、非封閉曲線或當正多邊形的邊數趨近於無限(該圖形將會近似於圓形)時，都可以利用軌跡法做出相似或全等的軌跡圖形。希望未來能充分延伸此一推論並加以證明。

(二) 由下列三個例子，我們發現利用軌跡法做軌跡圖形時，動點(M)需選在原圖形上，固定點(F)與軌跡點(C)可訂於原圖形外的平面上，且固定點(F)、動點(M)、軌跡點(C)三者於移動前所形成的圖形，會與移動中此三點所形成的圖形需保持相似，則(1)當$\overline{FM} = \overline{FC}$時，可做出與原圖形全等的軌跡圖形; (2)當$\overline{FM} \neq \overline{FC}$時，可做出與原圖形相似的軌跡圖形。

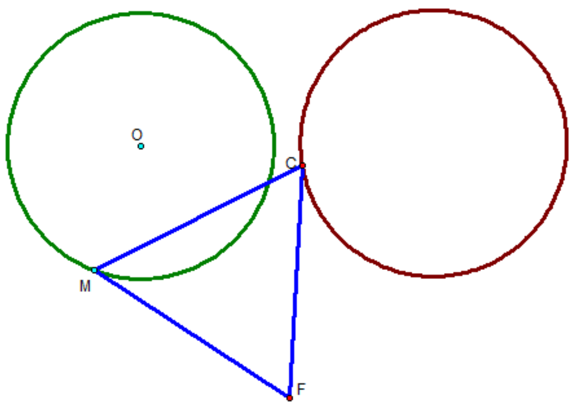
封閉(玫瑰)曲線



非封閉曲線



圓形



玖、參考資料及其他

1.中華民國第 46 屆中小學科學展覽，國中組數學科 030416，內接相似三角形的尺規作圖。

2.http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030416.pdf

【評語】030407

本文討論多邊形與其衍生之多邊形的關係。建議作者研讀位似旋轉與相關工具。惟整體的敘述有點凌亂。作者們應該嘗試著用比較清楚的方式來呈現整個結果。以三角形為例，我們從那個三角形出發，動點所衍生的三角形是哪一個，我們要說明的結果是什麼都需要交代。如果能把這些事都寫清楚，作品看起來會更好。(第3頁的直角三角形的部分說明和圖像對不起來啊！)