中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030406

天馬行空

學校名稱：桃園市立經國國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃煦茗 國二 林禹君	翁敏傑

關鍵詞：賽局理論、演化、策略競爭分析

摘要:

由田忌賽馬的典故當例子，我們想從中研究出如何運用最佳的策略，使往後的策略存活機率最大，可應用於在參加各種比賽時的順序安排，增加其獲勝機率。

我們依照田忌賽馬設計了三種模型分別去討論：

1. 仿照田忌賽馬的故事，討論典故中採用策略與其成功的原因
2. 在田忌賽馬的架構下，給予比賽其中一匹馬增強的可能性後再進行競爭，在作品中我們稱為一次演化多次競爭的方式，進而討論使用何種增強數值的策略能夠獲得較大的得勝機率
3. 帶入生物演化的概念，使增強演化與競爭持續進行，在作品中我們稱為多次演化多次競爭的方式，討論持續的演化與競爭下，找出當中最適合的競爭策略

前言-田忌賽馬

齊國的將軍田忌經常同齊威王賽馬。他們賽馬的規矩是：雙方各下賭注，比賽共設 3 局，兩勝以上為贏家。然而每次比賽，田忌總是輸家。這一天，田忌賽馬又輸給了齊威王。之後，田忌把賽馬的事告訴了孫臏。孫臏聽了田忌談他賽馬總是失利的情況後，說：「下次賽馬你讓我前去觀戰。」

又一次賽馬開始了。孫臏坐在賽馬場邊上，看田忌與齊威王賽馬。第一局，齊威王牽出自己的上駟，田忌也牽出了自己的上駟，結果出爐，田忌的馬稍遜一籌。第二局，齊威王牽出了中駟，田忌也以自己的中駟與之相對。第二局跑完，田忌的中駟也慢了幾步而落後。第三局，兩邊都以下駟參賽，田忌的下駟又未能跑贏齊威王的馬。看完比賽，孫臏對田忌說：「我看你們雙方的馬，若以上、中、下三等對等的比賽，你的馬都相應的差一點，但懸殊並不太大。下次賽馬你按我的意見辦，我保證你必勝無疑，你只管多下賭注就是了。」

這一天到了，田忌與齊威王的賽馬又開始了。第一局，齊威王出上駟，孫臏卻讓田忌出下駟，一局比完，自然是田忌的馬落在後面。可是到第二局形勢就變了，齊威王出以中駟，田忌這邊對以上駟，結果田忌的馬跑在前面，贏了第二局。最後，齊威王剩下了最後一匹下駟，當然被田忌的中駟甩在了後面。這一次，田忌以兩勝一負而取得賽馬勝利。

由於田忌按孫臏的吩咐下了很大的賭注，一次就把以前輸給齊威王的都賺回來了，還略有盈餘。

研究動機

之前無意間聽到數學老師在談論「田忌賽馬」，所以就上網找了一下。接著延伸了許多問題，例：如果齊威王不照順序出馬，接下來會發生什麼事呢？因此，開始了這一連串的研究。

田忌賽馬是一個要學會取捨，才能在競爭中找到優勢的故事。

(一)田忌會贏齊威王是否只是巧合呢？有沒有某種策略的排序是最佳策略？

如果齊威王不照順序出馬，那結果還是田忌贏嗎？有沒有某種特定策略使特定排序是最佳策略，如：(上,中,下)此排法是否為最佳策略呢？還是(上,下,中)？

因此，我們要計算他們的得勝機率，才能知道田忌會贏齊威王是否為巧合。此答案可以運用在遇到相同實力對手時，比對方贏在起跑點上。

我們運用田忌賽馬的方式進行對戰，想要計算哪種策略生存的機率最多，此策略可以運用在往後的比賽中，增加奪冠機率。

(二)如果運用一次演化，多次競爭的方式一直競賽下去，哪種策略的族群分布率最大？什麼時候才有結果呢？

我們加入比較複雜的演化概念，如一段時間後上、中、下駟只能增強其中一駟。因此從上、中、下駟三駟中衍生出三種策略，只增強上駟、只增強中駟、只增強下駟，那麼哪種策略的生存機率是最大的呢？此結果可用在短期培訓、多輪競賽中。

(三)假如使用多次演化，多次競爭的方式一直對戰下去，哪種策略會在世代競爭的族群分布率會完全為 0？到底要對戰幾次後，哪種策略的族群分布率才會增加至最高？什麼時候才有結果及規律呢？

若我們持續進行演化，使策略與策略之間對數值增強效果的影響更加明顯，進而模擬自然界長期演化進行族群內基因的競爭，試著去找出最佳策略使得族群能夠在特定演化下得到最大的族群分布率，這個結果適用於長期培訓、多輪競賽中。

研究設備及器材

一、工具：

尺、筆、紙、計算機、電腦

二、軟體：

Microsoft Office Excel、Word、Publisher

名詞、模型與演算法

(一) 名詞解釋：

1. 數值定義:同田忌賽馬一故事，分為上、中、下駟，並將數值化成

上駟=3、中駟=2、下駟=1，且 3>2>1。

2. S，策略(Strategy)：

策略定義，在經過一次的競爭進行到下一世代時，都會加一數值，則將數值加在數值最大的那一數，我們稱為「強上加強」的策略；將數值加在第二大的數值上我們稱為「增中數值」;將數值加在最小的數值那一數上，此種策略我們稱為「勤能補拙」。

S1，此種策略就是「強上加強」

經過演化後增強一數值於最大值，如(3 , 2 , 1)→(4 , 2 , 1)→(5 , 2 , 1)

S2，此種策略就是「增中數值」

經過演化後增強一數值於中間值，如(3 , 2 , 1)→(3 , 3 , 1)→(3 , 4 , 1)

S3，此種策略就是「勤能補拙」

經過演化後增強一數值於最小值，如(3 , 2 , 1)→(3 , 2 , 2)→(3 , 2 , 3)

3. Gn：世代(Generation):

Gn 為第 n 代，因為三種策略剛開始分給它們的數值皆相同，所以稱作「G0」或初始代，經過競爭產生下一代為 G1，依此類推其他子代至 Gn。

4. 競爭矩陣(Survival Matrix)：假設甲、乙兩者互相競爭，將競爭組合可寫為：

$$\begin{array}{cc} \text{甲/乙} & \begin{pmatrix} S1 & S2 & S3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} S11 & S12 & S13 \\ S21 & S22 & S23 \\ S31 & S32 & S33 \end{bmatrix} \end{array}$$

我們將甲可能使用的策略排在左側，乙可能使用的策略排在上側，其中矩陣內部數值為策略競爭間的存活率，如矩陣內 S23 為甲出策略二，乙出策略三的簡記法，而 S23 數值則為甲出策略二乙出策略三在競爭中的存活率。

5. 存活率：

在競爭中策略所存活下來的比率，在我們的定義之下存活即為勝利加平手的結果，比如說：在一個競爭中，總共六場比賽，在這六場比賽中甲方獲勝加平手共有了五場，那我們就說甲的生存率為$5/6$。

6. 族群分布率：

特定族群佔全人口之比率。在本文中，我們假設族群都會達到環境負荷量，所以定義所有族群分布率加總等於 1，可以推論：

(1) S1 族群分布率+ S2 族群分布率+ S3 族群分布率=1

(2) **0** ≤S1 族群分布率、S2 族群分布率、S3 族群分布率≤1

(二) 競爭模型(Competition Model)

在本文中，策略與策略之間進行競賽，而後存活產生下一個世代，我們採用以下進行模式計算策略競爭後的存活率，分析策略之間的族群分布。

$$\boldsymbol{G0 \rightarrow G1 \rightarrow G2 \rightarrow G3 \rightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots Gn}$$

因研究動機，我們將有三種不同子類型：

i. 同田忌賽馬故事，將上、中、下駟數值化為 3、2、1 進行所有可能組合的一次性競爭

ii. 帶入演化概念後，我們將進行一次演化多次競爭，進而去比較策略與策略優異性，研究何種策略將使族群分布提升

iii. 將演化持續，進行多次演化下的多次競爭，每一個策略所殘留的子世代將繼續演化進行下一次的競爭，進而模擬自然界狀況研究何種策略較具有優勢，或何種策略可能會在演化競爭後遭到淘汰

(三) 演算法

我們假設環境可負荷的族群量為 1(即 100%)，三種策略模式族群分布率為 J、K、L 且$J+K+L=1$，經由競爭計算存活率產生子世代計算族群分布，因策略競爭間也須包含自己與自己相同策略的競爭，S1 策略遭遇到 S1、S2 與 S3 的機率皆為$\frac{1}{3}$，而 S2 與 S3 皆是如此，因此我們可得以下計算公式

$$\frac{1}{3}*J*S11*+\frac{1}{3}*J*S12+\frac{1}{3}*J*S13=\mathrm{M}$$

$$\frac{1}{3}*K*S21+\frac{1}{3}*K*S22+\frac{1}{3}*K*S23=O$$

$$\frac{1}{3}*L*S31*+\frac{1}{3}*L*S32+\frac{1}{3}*L*S33=N$$

此時，經競爭後所存活子代族群分布率 M、O、N 相加必小於 1，為了達到環境負荷量，子代的新族群分布採用以下計算模式

$$\frac{M}{M+O+N}=\mathrm{P}$$

$$\frac{O}{M+O+N}=\mathrm{Q}$$

$$\frac{N}{M+O+N}=\mathrm{R}$$

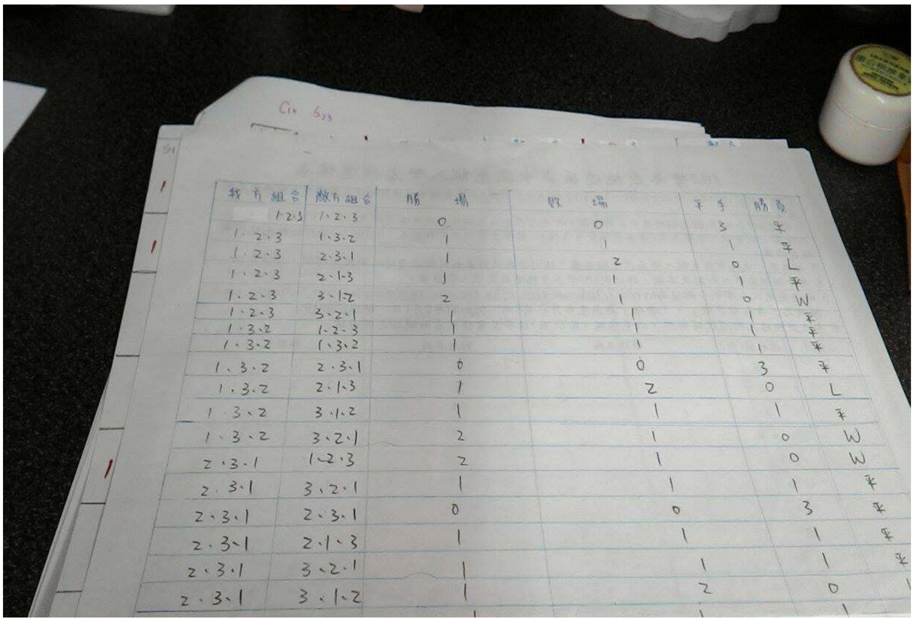
如此一來，我們就可以將 P、Q、R 視為新的族群分布率進行下一次的競爭，整理以上計算，我們則發展新的矩陣演算法

$$\begin{bmatrix} S11 & S12 & S13 \\ S21 & S22 & S23 \\ S31 & S32 & S33 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} * \begin{bmatrix} J \\ K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ O \\ N \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

將以上的演算法寫入 EXCEL 以儲存格進行運算，我們將可以快速計算每一個世代的族群分布率。

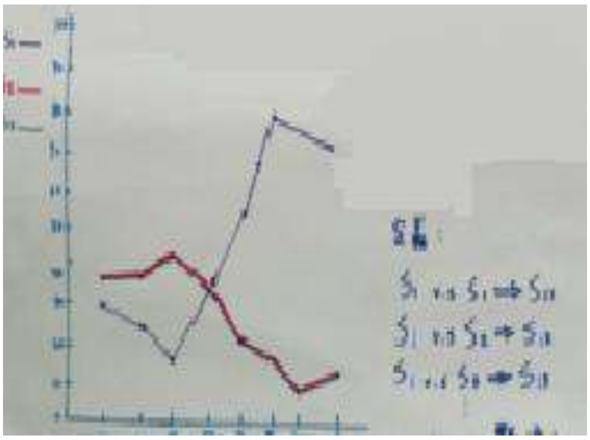
研究方法及過程

剛開始，為了要讓我們快點的進入科展狀況，老師先讓我們用手寫來做計算練習。計算內容為，將田忌和齊威王賽馬可能出馬的順序全列出來，再隨機配對，因為每方都有三匹馬，共有六種排序的可能，所以雙方總計共有計算三十六種可能配對競賽，如下圖〈圖一〉。



〈圖一〉

做完這三十六種可能後，田忌賽馬的基本問題我們已獲得初步的解決，接著我們嘗試將演化的概念帶入，讓策略可以增強某一個數值，進而計算的存活率(包含平手)後再填入九格矩陣中，九宮格再利用定義所述的方式算出百分比，再將其百分比作成一個折線圖，以下〈圖二〉為我們參加校內科展時所做出的折線圖。



〈圖二〉

途中，我們發現單用我們的頭腦和計算機來算的話，是會有錯誤的，且需要非常多的時間，所以老師開始教導我們上電腦來算，如何利用 EXCEL 中編寫程式讓電腦的數據自己跑。

剛開始是先用 Excel 模仿圖(一)的方式填在 Excel 的格子裡面如例圖。

例圖：

	A	B	C
1	甲	乙	勝負
2	3	3	0
3	2	1	1
4	1	2	-1
5	總和判斷		0

$$勝負判斷\begin{cases} 1, if\ 甲 > 乙 \\ 0, if\ 甲 = 乙 \\ -1, if\ 甲 < 乙 \end{cases}$$

總和判斷=三場勝負值加總

勝負的判斷在 Excel 裡方程式為：

C2=IF((A2-B2)>0,1,IF(A2-B2<0,-1,0))

C3=IF((A3-B3)>0,1,IF(A3-B3<0,-1,0))

C4=IF((A4-B4)>0,1,IF(A4-B4<0,-1,0))

C5=IF(SUM(C2:C4)>0,1,IF(SUM(C2:C4)<0,-1,0))

這個競爭一直做到第二十次競爭停止，再一個個的算出矩陣，然後再由上面定義所述的公式來算百分比，因為剛開始每個策略的族群分布率皆相同，所以機率都為 1/3，我們將分數換算為與矩陣相同的小數且取到小數點後第二位。

最後確認，再用電腦做出折線圖時，我們發現新的折線圖與海報比對之下，竟然不同且差異頗大，後來才發現當時做的其實都有些許錯誤導致海報上的折線圖與原本的差異如此大，若不更改將會使後續的計算完全錯誤。因此，往後的討論與計算過程，我們將採用 EXCEL 進行所有的計算以及繪圖處理

問題討論

問題討論 1

為了計算田忌與齊威王的勝敗率，我們將(3 , 2 , 1)隨機排列，

甲可以排列成 6 種：(3 , 2 , 1)、(3 , 1 , 2)、(2 , 3 , 1)、

(2 , 1 , 3)、(1 , 3 , 2)、(1 , 2 , 3)

乙可以排列成 6 種：(3 , 2 , 1)、(3 , 1 , 2)、(2 , 3 , 1)、

(2 , 1 , 3)、(1 , 3 , 2)、(1 , 2 , 3)

共有 6 種*6 種=36 種的隨機組合，計算過程如下：

甲	乙	勝負
3	3	0
2	2	0
1	1	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
3	3	0
2	1	1
1	2	-1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
3	2	1
2	3	-1
1	1	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
3	2	1
2	1	1
1	3	-1
總和判斷		1

甲	乙	勝負
3	3	0
1	2	-1
2	1	1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
3	3	0
1	1	0
2	2	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
3	2	1
1	3	-1
2	1	1
總和判斷		1

甲	乙	勝負
3	2	1
1	1	0
2	3	-1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	3	-1
3	2	1
1	1	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	3	-1
3	1	1
1	2	-1
總和判斷		-1

甲	乙	勝負
2	2	0
3	3	0
1	1	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	2	0
3	1	1
1	3	-1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	3	-1
1	2	-1
3	1	1
總和判斷		-1

甲	乙	勝負
2	3	-1
1	1	0
3	2	1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	2	0
1	3	-1
3	1	1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	2	0
1	1	0
3	3	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	3	-1
2	2	0
3	1	1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	3	-1
2	1	1
3	2	1
總和判斷		1

甲	乙	勝負
1	2	-1
2	3	-1
3	1	1
總和判斷		-1

甲	乙	勝負
1	2	-1
2	1	1
3	3	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	3	-1
3	2	1
2	1	1
總和判斷		1

甲	乙	勝負
1	3	-1
3	1	1
2	2	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	2	-1
3	3	0
2	1	1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	2	-1
3	1	1
2	3	-1
總和判斷		-1

甲	乙	勝負
3	1	1
2	2	0
1	3	-1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
3	1	1
2	3	-1
1	2	-1
總和判斷		-1

甲	乙	勝負
2	1	1
1	2	-1
3	3	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	1	1
1	3	-1
3	2	1
總和判斷		1

甲	乙	勝負
3	1	1
1	2	-1
2	3	-1
總和判斷		-1

甲	乙	勝負
3	1	1
1	3	-1
2	2	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	1	0
2	2	0
3	3	0
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	1	0
2	3	-1
3	2	1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
2	1	1
3	2	1
1	3	-1
總和判斷		1

甲	乙	勝負
2	1	1
3	3	0
1	2	-1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	1	0
3	2	1
2	3	-1
總和判斷		0

甲	乙	勝負
1	1	0
3	3	0
2	2	0
總和判斷		0

由實驗可知：第一次競爭，隨機配對每一個策略讓它們與每一個策略隨機對戰過(如過程所述不能重複對戰)，勝負結果為：勝場數=6、平手場數=24、敗場數=6，得出勝率為 1/6、平手率 4/6、敗率 1/6。

回到研究動機問題(一)田忌會贏齊威王是否只是巧合？

答案一：不是巧合

由故事可知，田忌賽馬會贏齊威王是因為孫臏先看過了他與齊威王的第一次對戰，而第一次的對戰在雙方都派出同樣等級的馹，田忌的馹卻都略遜一籌。在孫臏提出第二次對戰且會贏齊威王時，孫臏揣測齊威王會以同樣順序派出馹，因此讓田忌犧牲一勝而贏得兩勝，獲得最終勝利，但前提是齊威王要依照第一次比賽時的順序，田忌才能獲得同樣的結果，贏得勝利。

答案二：是巧合

如上所述，若齊威王未照相同順序派出馹，將會依照以上計算所呈現的數據，由於故事中勝利的定義為勝利，不包含平手，所以勝率只有 1/6，小於平手機率，且勝率等於敗率等於 1/6，因此田忌會獲得比賽的勝利將視為巧合。

「有沒有某種策略固定的排序是最佳策略，如：(3 , 2 , 1)此排法是否為最佳策略呢？還是(3 , 1 , 2)？」答案是，沒有。

因為固定排序的策略對上不同排序的策略勝率計算出的結果都是 1/6，敗率也是 1/6，平手的機率理當是 4/6。例如我們採取固定策略(3 , 2 , 1)的方式進行競爭，但是我們不能確定對方可能的排序，如(3 , 2 , 1)、(3 , 1 , 2)、(2 , 3 , 1)、(2 , 1 , 3)、(1 , 3 , 2)、(1 , 2 , 3)，由於我們無法準確猜測對方會用的出馬順序，所以勝率為 1/6、平手率 4/6、敗率 1/6；檢視所有固定排序策略後，我們可以發現，不管如何變換策略排序，只要無法成功預測對方策略下，勝率敗率永遠會是 1/6，而平手機率卻是最大的 4/6

問題討論二

回到研究動機的問題二，如果運用一次演化，多次競爭的方式一直對戰下去，哪種策略的族群分布率最大？

答案是 S2 與 S3。

為了研究出結果，我們要做所有策略的隨機配對，也就是競爭矩陣。

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} S1 & S2 & S3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} S11 & S12 & S13 \\ S21 & S22 & S23 \\ S31 & S32 & S33 \end{bmatrix} \end{array}$$

假設每過一次演化後 3、2、1 只能增強其中一數，可從中衍生出 3 種策略。就如定義所述，S1 (強上加強)的意思是只加最強的數值；S2 (增中數值)的意思是只加第二強的數值；S3(勤能補拙)的意思是只加最弱的數值，由此我們可以推算不同策略對數值的影響：

S1：(3 , 2 , 1)→(4 , 2 , 1)

S2：(3 , 2 , 1)→(3 , 3 , 1)

S3：(3 , 2 , 1)→(3 , 2 , 2)

我們做了隨機配對競爭(詳細競爭矩陣計算可參閱附錄)，期望可以計算出各種策略在競爭後的族群分布率。

S11 計算：(4 , 2 , 1)v.s.(4 , 2 , 1)

甲可排出 6 種：(4,2,1)、(4,1,2)、(2,4,1)、(2,1,4)、(1,4,2)、(1,2,4)

乙可排出 6 種：(4,2,1)、(4,1,2)、(2,4,1)、(2,1,4)、(1,4,2)、(1,2,4)

共有 6 種*6 種=36 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 6 個；敗場數有 6 個；平手場數有 24 個，所以 S11 存活率約為 0.83

S12 計算：(4 , 2 , 1)v.s.(3 , 3 , 1)

甲可排出 6 種：(4,2,1)、(4,1,2)、(2,4,1)、(2,1,4)、(1,4,2)、(1,2,4)

乙可排出 3 種：(3,3,1)、(3,1,3)、(1,3,3)

共有 6 種*3 種=18 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 6 個；敗場數有 6 個；平手場數有 6 個，所以 S12 存活率約為 0.67

S13 計算：(4 , 2 , 1)v.s.(3 , 2 , 2)

甲可排出 6 種：(4,2,1)、(4,1,2)、(2,4,1)、(2,1,4)、(1,4,2)、(1,2,4)

乙可排出 3 種：(3,2,2)、(2,3,2)、(2,2,3)

共有 6 種*3 種=18 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 0 個；敗場數有 6 個；平手場數有 12 個，所以 S13 存活率約為 0.67

S21 計算：(3 , 3 , 1)v.s.(4 , 2 , 1)

甲可排出 3 種：(3,3,1)、(3,1,3)、(1,3,3)

乙可排出 6 種：(4,2,1)、(4,1,2)、(2,4,1)、(2,1,4)、(1,4,2)、(1,2,4)

共有 3 種*6 種=18 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 10 個；敗場數有 4 個；平手場數有 4 個，所以 S21 存活率約為 0.67

S22 計算：(3 , 3 , 1)v.s.(3 , 3 , 1)

甲可排出 3 種：(3,3,1)、(3,1,3)、(1,3,3)

乙可排出 3 種：(3,3,1)、(3,1,3)、(1,3,3)

共有 3 種*3 種=9 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 0 個；敗場數有 0 個；平手場數有 9 個，所以 S22 存活率是 1

S23 計算：(3 , 3 , 1)v.s.(3 , 2 , 2)

甲可排出 3 種：(3,3,1)、(3,1,3)、(1,3,3)

乙可排出 3 種：(3,2,2)、(2,3,2)、(2,2,3)

共有 3 種*3 種=9 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 3 個；敗場數有 0 個；平手場數有 6 個，所以 S23 存活率是 1

S31 計算：(3 , 2 , 2)v.s.(4 , 2 , 1)

甲可排出 3 種：(3,2,2)、(2,3,2)、(2,2,3)

乙可排出 6 種：(4,2,1)、(4,1,2)、(2,4,1)、(2,1,4)、(1,4,2)、(1,2,4)

共有 3 種*6 種=18 種隨機組合

經計算後得到，勝場數有 6 個；敗場數的有 0 個；平手場數有 12 個，所以 S31 存活率是 1

S32 計算：(3 , 2 , 2)v.s.(3 , 3 , 1)

甲可排出 3 種：(3,2,2)、(2,3,2)、(2,2,3)

乙可排出 3 種：(3,3,1)、(3,1,3)、(1,3,3)

共有 3 種*3 種=9 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 0 個；敗場數有 3 個；平手場數有 6 個，所以 S32 存活率約為 0.67

S33 計算：(3 , 2 , 2)v.s.(3 , 2 , 2)

甲可排出 3 種：(3,2,2)、(2,3,2)、(2,2,3)

乙可排出 3 種：(3,2,2)、(2,3,2)、(2,2,3)

共有 3 種*3 種=9 種隨機組合。

經計算後得到，勝場數有 0 個；敗場數有 0 個；平手場數有 9 個，所以 S33 存活率是 1

利用演化計算方式，我們可以得到第一次演化下策略與策略之間的競爭矩陣數值：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}(S1 & S2 & S3)\end{array} \\ \begin{pmatrix}S1\\S2\\S3\end{pmatrix} & \begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}\end{array}$$

接著，我們為了要回答「哪種策略的族群分布率最大？什麼時候才有結果？」此問題，因此預計一直做到族群分布率平衡或穩定為止。

我們引入演算法進行 G1 到 G15 來做實驗得到每一個世代的族群分布率：

$$G1：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.33333\\0.33333\\0.33333\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.23833\\0.29333\\0.29333\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.28889\\0.35556\\0.35556\end{bmatrix}$$

$$G2：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.28889\\0.35556\\0.35556\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.20864\\0.31605\\0.31605\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.24816\\0.37592\\0.37592\end{bmatrix}$$

$$G3：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.24816\\0.37592\\0.37592\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.17823\\0.33415\\0.33415\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.21147\\0.39427\\0.39427\end{bmatrix}$$

$$G4：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.21147\\0.39427\\0.39427\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.15273\\0.35046\\0.35046\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.17891\\0.41054\\0.41054\end{bmatrix}$$

$$G5：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.17891\\0.41054\\0.41054\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.12921\\0.36492\\0.36492\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.15041\\0.42479\\0.42479\end{bmatrix}$$

$$G6：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.15041\\0.42479\\0.42479\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.10863\\0.37759\\0.37759\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.12576\\0.43712\\0.43712\end{bmatrix}$$

$$G7：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.12576\\0.43712\\0.43712\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.09083\\0.38855\\0.38855\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.10465\\0.44768\\0.44768\end{bmatrix}$$

$$G8：\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.10465\\0.44768\\0.44768\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.07558\\0.39794\\0.39794\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.08673\\0.45664\\0.45664\end{bmatrix}$$

$$\text{G9：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.08673\\0.45664\\0.45664\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.06264\\0.40590\\0.40590\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.07163\\0.46418\\0.46418\end{bmatrix}$$

$$\text{G10：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.07163\\0.46418\\0.46418\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.05173\\0.41260\\0.41260\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.05899\\0.47050\\0.47050\end{bmatrix}$$

$$\text{G11：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.05899\\0.47050\\0.47050\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.04260\\0.41822\\0.41822\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.04847\\0.47577\\0.47577\end{bmatrix}$$

$$\text{G12：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.04847\\0.47577\\0.47577\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.03501\\0.42291\\0.42291\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.03974\\0.48013\\0.48013\end{bmatrix}$$

$$\text{G13：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.03974\\0.48013\\0.48013\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.02870\\0.42678\\0.42678\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.03253\\0.48373\\0.48373\end{bmatrix}$$

$$\text{G14：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.03253\\0.48373\\0.48373\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.02349\\0.42998\\0.42998\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.02659\\0.48670\\0.48670\end{bmatrix}$$

$$\text{G15：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.02659\\0.48670\\0.48670\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01920\\0.43262\\0.43262\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.02171\\0.48914\\0.48914\end{bmatrix}$$

$$\text{G16：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.02171\\0.48914\\0.48914\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01568\\0.43479\\0.43479\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.01771\\0.49114\\0.49114\end{bmatrix}$$

$$\text{G17：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.01771\\0.49114\\0.49114\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01279\\0.43657\\0.43657\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.01444\\0.49278\\0.49278\end{bmatrix}$$

$$\text{G18：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.01444\\0.49278\\0.49278\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01043\\0.43803\\0.43803\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.01176\\0.49412\\0.49412\end{bmatrix}$$

$$\text{G19：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.01176\\0.49412\\0.49412\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.00850\\0.43922\\0.43922\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.00958\\0.49521\\0.49521\end{bmatrix}$$

$$\text{G20：}\begin{bmatrix}0.83333 & 0.66667 & 0.66667\\0.66667 & 1.00000 & 1.00000\\1.00000 & 0.66667 & 1.00000\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.00958\\0.49521\\0.49521\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.00692\\0.44019\\0.44019\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.00780\\0.49610\\0.49610\end{bmatrix}$$

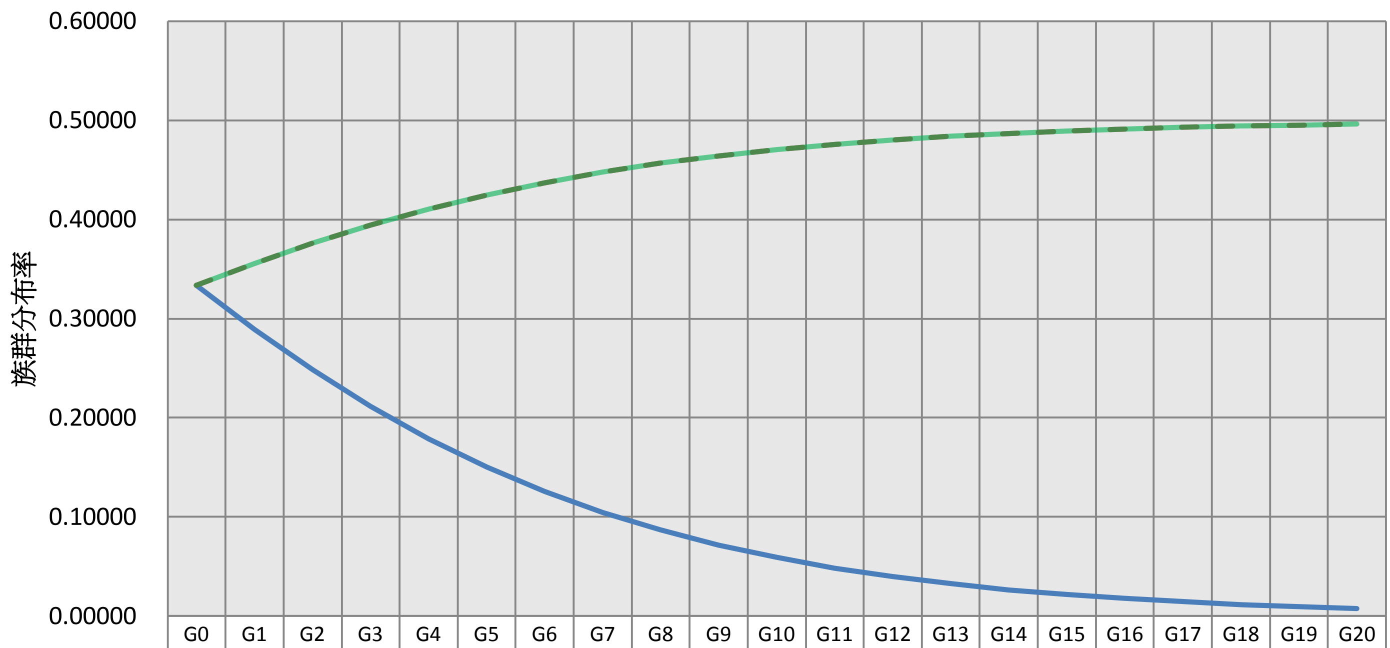
最後，我們發現到 G13 開始出現平衡，到 G15 才有較明顯的成果，為了讓數據可以更完整的呈現，於是我們決定做到 G20。

進而將 G1 到 G15 的族群分布率列出來並畫成折線圖：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \text{G1} & \text{G2} & \text{G3} & \text{G4} & \text{G5} & \text{G6} & \text{G7} \\
\begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.28889 \\ 0.35556 \\ 0.35556 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.24816 \\ 0.37592 \\ 0.37592 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.21147 \\ 0.39427 \\ 0.39427 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.17891 \\ 0.41054 \\ 0.41054 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.15041 \\ 0.42479 \\ 0.42479 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.12576 \\ 0.43712 \\ 0.43712 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.10465 \\ 0.44768 \\ 0.44768 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \text{G8} & \text{G9} & \text{G10} & \text{G11} & \text{G12} & \text{G13} & \text{G14} \\
\begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.08673 \\ 0.45664 \\ 0.45664 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.07163 \\ 0.46418 \\ 0.46418 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.05899 \\ 0.47050 \\ 0.47050 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.04847 \\ 0.47577 \\ 0.47577 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.03974 \\ 0.48013 \\ 0.48013 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.03253 \\ 0.48373 \\ 0.48373 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.02659 \\ 0.48670 \\ 0.48670 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \text{G15} & \text{G16} & \text{G17} & \text{G18} & \text{G19} & \text{G20} \\
\begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.02171 \\ 0.48914 \\ 0.48914 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.01771 \\ 0.49114 \\ 0.49114 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.01444 \\ 0.49278 \\ 0.49278 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.01176 \\ 0.49412 \\ 0.49412 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.00958 \\ 0.49521 \\ 0.49521 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.00780 \\ 0.49610 \\ 0.49610 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



	G0	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16	G17	G18	G19	G20
S1	0.333	0.288	0.248	0.211	0.178	0.150	0.125	0.104	0.086	0.071	0.058	0.048	0.039	0.032	0.026	0.021	0.017	0.014	0.011	0.009	0.007
S2	0.333	0.355	0.375	0.394	0.410	0.424	0.437	0.447	0.456	0.464	0.470	0.475	0.480	0.483	0.486	0.489	0.491	0.492	0.494	0.495	0.496
S3	0.333	0.355	0.375	0.394	0.410	0.424	0.437	0.447	0.456	0.464	0.470	0.475	0.480	0.483	0.486	0.489	0.491	0.492	0.494	0.495	0.496

如上圖所示，如果只演化一次，且進行多次競爭，會得到這樣的結果：原本三種策略的族群分布率都是 0.33333，到最後 S1 的族群分布率會呈逐漸下降的趨勢，接近於 0；相反的，S2 跟 S3 的族群分布率重疊且呈現逐漸上升的趨勢，並

趨近於 0.5。三種策略的族群分布率從 G15 開始趨於穩定，為了確保數據的精確性，我們決定做到 G20 進行觀察。

觀察初始代 G0 到 G20，我們可以發現強上加強 S1 這個策略在競爭中是相對弱勢，其族群分布率一路向下，完全沒有翻轉的跡象；而 S2 與 S3 在族群分布率上會意外的產生重疊現象，因此我們重頭檢視計算過程並提出解釋。

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} (S1 & S2 & S3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0.83333 & 0.66667 & 0.66667 \\ 0.66667 & 1.00000 & 1.00000 \\ 1.00000 & 0.66667 & 1.00000 \end{bmatrix} \end{array}$$

我們可以輕易的看出，當 S2 分別遭遇 S1、S2 以及 S3 的競爭存活率分別為 0.66667、1.00000、1.00000；同時 S3 分別遭遇 S1、S2 以及 S3 的競爭存活率分別為 1.00000、0.66667、1.00000，比較兩個策略競爭存活率，只是順序上的改換以外並沒有其他的不同，所以才導致 S2 與 S3 的族群分布率會完全的重疊，由競爭矩陣中我們也可以觀察到，S1 與 S2、S3 相比之下，存活率總和都來的比較低，因此 S1 的族群分布率呈現一路下滑的狀態，且並沒有翻轉的可能。

問題討論三

假如使用多次演化多次競爭的方式一直對戰下去，哪種策略會在世代競爭的族群分布率會完全為 0？到底要對戰幾次後，哪種策略的族群分布率才會增加至最高？什麼時候才有結果及規律呢？

我們在最後的討論使用多次演化多次競爭，不同的策略對數值的影響，可以得到：

S1，(3 , 2 , 1)→(4 , 2 , 1)→(5 , 2 , 1)→(6 , 2 , 1)

S2，(3 , 2 , 1)→(3 , 3 , 1)→(4 , 3 , 2)→(4 , 4 , 2)

S3，(3 , 2 , 1)→(3 , 2 , 2)→(3 , 3 , 2)→(3 , 3 , 3)

實驗結果最後得到的三個族群分布率的數字就是下面矩陣的數字，因計算過程分常龐大，所以我們將如何計算每一世代矩陣之過程省略，只呈現世代競爭的族群分布率計算過程，如下：

$$G1:\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.67\\0.67 & 1.00 & 1.00\\1.00 & 0.67 & 1.00\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.33333\\0.33333\\0.33333\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.24111\\0.29666\\0.29666\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.28895\\0.35553\\0.35553\end{bmatrix}$$

$$G2:\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.33\\0.67 & 0.83 & 1.00\\1.00 & 0.67 & 1.00\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.28895\\0.35553\\0.35553\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.17658\\0.29627\\0.31642\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.22373\\0.37537\\0.40090\end{bmatrix}$$

$$G3:\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 1.00\\0.83 & 1.00 & 1.00\\1.00 & 0.00 & 1.00\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.22373\\0.37537\\0.40090\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.11186\\0.33408\\0.26727\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.15684\\0.46842\\0.37474\end{bmatrix}$$

$$G4:\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.00\\0.67 & 0.83 & 1.00\\1.00 & 0.33 & 1.00\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.15684\\0.46842\\0.37474\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.07842\\0.39035\\0.29105\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.10321\\0.51374\\0.38305\end{bmatrix}$$

$$G5:\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.00\\0.67 & 1.00 & 1.00\\1.00 & 0.00 & 1.00\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.10321\\0.51374\\0.38305\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.05161\\0.45723\\0.25536\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.06753\\0.59831\\0.33416\end{bmatrix}$$

$$G6:\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.00\\0.67 & 0.83 & 1.00\\1.00 & 0.00 & 1.00\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.06753\\0.59831\\0.33416\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.03376\\0.49859\\0.22277\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.04471\\0.66027\\0.29501\end{bmatrix}$$

$$G7: \begin{bmatrix} 0.67 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.04471 \\ 0.66027 \\ 0.29501 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01997 \\ 0.58764 \\ 0.19667 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.02483 \\ 0.73064 \\ 0.24453 \end{bmatrix}$$

$$G8: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 0.83 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.02483 \\ 0.73064 \\ 0.24453 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01386 \\ 0.60706 \\ 0.16254 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.01769 \\ 0.77485 \\ 0.20746 \end{bmatrix}$$

$$G9: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 0.83 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.01769 \\ 0.77485 \\ 0.20746 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00884 \\ 0.64571 \\ 0.13831 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.01115 \\ 0.81440 \\ 0.17444 \end{bmatrix}$$

$$G10: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.01115 \\ 0.81440 \\ 0.17444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00558 \\ 0.72482 \\ 0.11630 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00659 \\ 0.85606 \\ 0.13735 \end{bmatrix}$$

$$G11: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 0.83 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00659 \\ 0.85606 \\ 0.13735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00329 \\ 0.71338 \\ 0.09157 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00407 \\ 0.88263 \\ 0.11329 \end{bmatrix}$$

$$G12: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00407 \\ 0.88263 \\ 0.11329 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00204 \\ 0.78554 \\ 0.07553 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00236 \\ 0.91013 \\ 0.08751 \end{bmatrix}$$

$$G13: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 0.83 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00236 \\ 0.91013 \\ 0.08751 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00118 \\ 0.75844 \\ 0.05834 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00144 \\ 0.92724 \\ 0.07132 \end{bmatrix}$$

$$G14: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00144 \\ 0.92724 \\ 0.07132 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00072 \\ 0.82524 \\ 0.04755 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00083 \\ 0.94474 \\ 0.05443 \end{bmatrix}$$

$$G15: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 0.83 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00083 \\ 0.94474 \\ 0.05443 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00041 \\ 0.78728 \\ 0.03629 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00050 \\ 0.95546 \\ 0.04404 \end{bmatrix}$$

$$G16: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00050 \\ 0.95546 \\ 0.04404 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00025 \\ 0.85036 \\ 0.02936 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00028 \\ 0.96635 \\ 0.03337 \end{bmatrix}$$

$$G17: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 0.83 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00028 \\ 0.96635 \\ 0.03337 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00014 \\ 0.80529 \\ 0.02224 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00017 \\ 0.97295 \\ 0.02687 \end{bmatrix}$$

$$G18: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00017 \\ 0.97295 \\ 0.02687 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00009 \\ 0.86593 \\ 0.01792 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00010 \\ 0.97963 \\ 0.02027 \end{bmatrix}$$

$$G19: \begin{bmatrix} 0.83 & 0.67 & 0.00 \\ 0.67 & 0.83 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} * \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.00010 \\ 0.97963 \\ 0.02027 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00005 \\ 0.81636 \\ 0.01351 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.00006 \\ 0.98366 \\ 0.01628 \end{bmatrix}$$

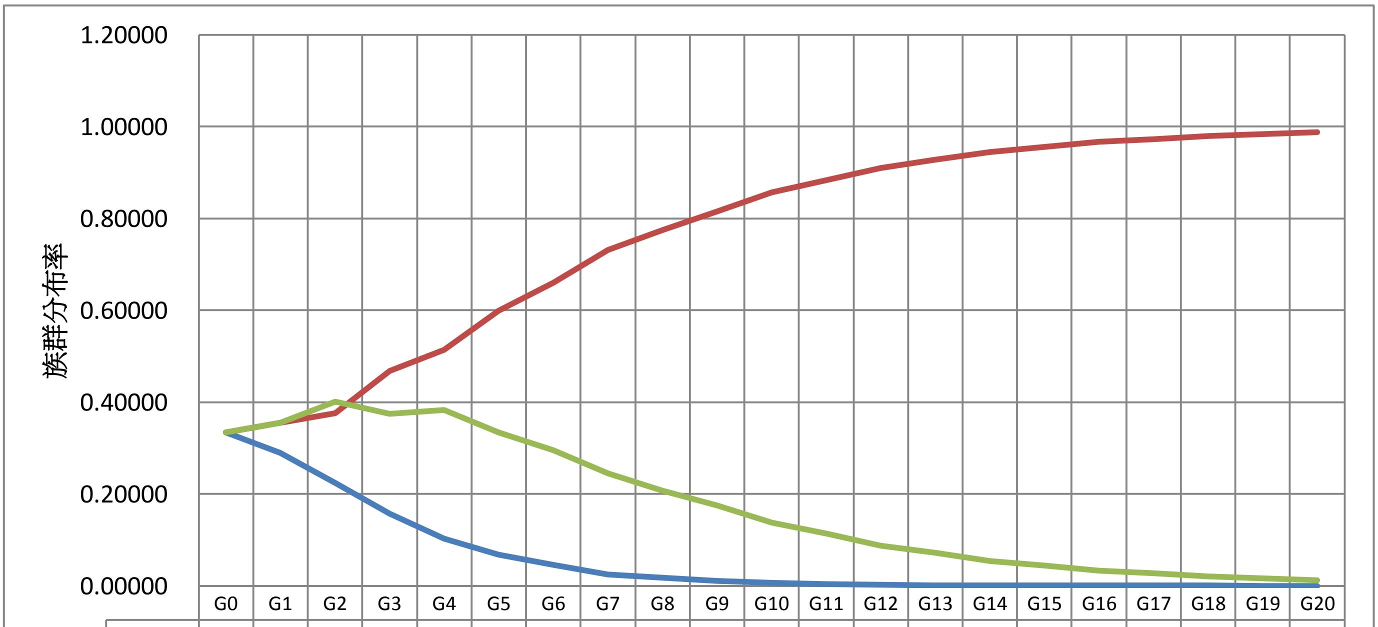
$$G20:\begin{bmatrix}0.83&0.67&0.00\\0.67&1.00&1.00\\1.00&0.00&1.00\end{bmatrix}*\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0.00006\\0.98366\\0.01628\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.00003\\0.87546\\0.01085\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.00003\\0.98772\\0.01225\end{bmatrix}$$

以下是得出族群分布率後統整的結果：

$$\begin{array}{cccccccc} & G1 & G2 & G3 & G4 & G5 & G6 & G7\\ \begin{pmatrix}S1\\S2\\S3\end{pmatrix} & \begin{bmatrix}0.28895\\0.35553\\0.35553\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.22373\\0.37537\\0.40090\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.15684\\0.46842\\0.37474\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.10321\\0.51374\\0.38305\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.06753\\0.59831\\0.33416\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.04471\\0.66027\\0.29501\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.02483\\0.73064\\0.24453\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & G8 & G9 & G10 & G11 & G12 & G13 & G14\\ \begin{pmatrix}S1\\S2\\S3\end{pmatrix} & \begin{bmatrix}0.01769\\0.77485\\0.20746\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.01115\\0.81440\\0.17444\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00659\\0.85606\\0.13735\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00407\\0.88263\\0.11329\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00236\\0.91013\\0.08751\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00144\\0.92724\\0.07132\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00083\\0.94474\\0.05443\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & G15 & G16 & G17 & G18 & G19 & G20\\ \begin{pmatrix}S1\\S2\\S3\end{pmatrix} & \begin{bmatrix}0.00050\\0.95546\\0.04404\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00028\\0.96635\\0.03337\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00017\\0.97295\\0.02687\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00010\\0.97963\\0.02027\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00006\\0.98366\\0.01628\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0.00003\\0.98772\\0.01225\end{bmatrix}\end{array}$$



	G0	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16	G17	G18	G19	G20
S1	0.333	0.288	0.223	0.156	0.103	0.067	0.044	0.024	0.017	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
S2	0.333	0.355	0.375	0.468	0.513	0.598	0.660	0.730	0.774	0.814	0.856	0.882	0.910	0.927	0.944	0.955	0.966	0.972	0.979	0.983	0.987
S3	0.333	0.355	0.400	0.374	0.383	0.334	0.295	0.244	0.207	0.174	0.137	0.113	0.087	0.071	0.054	0.044	0.033	0.026	0.020	0.016	0.012

如上圖所示，我們進行了多次演化多次競爭，可以得到這樣的結果：原本三種族群分布率都是 0.33333，到後來 S1 與 S2 的族群分布率會呈現逐漸下降的情形，且趨近於 0；相反的，S3 的族群分布率會呈現逐漸上升的狀態，最後接近於

1。S1、S3 的族群分布率減少及 S2 的族群分布率上升趨勢漸緩，最後接近平衡，三種族群分布率若只取到小數點後第二位會從第十一代開始趨於穩定，為了確保數據的精確性，我們將做到 G20 進行觀察。

第一個問句，依實驗結果「假如使用多次演化，多次競爭的方式一直對戰下去，哪種策略會在世代競爭的族群分布率會完全為 0？」，此問題的解答是，沒有一個世代會完全被消滅，從以上計算可以看出最後結果 S1 和 S2 趨近於零。

第二個問句，依實驗結果分析出「到底要對戰幾次後，哪種策略的族群分布率才會增加至最高？」，在實驗中最高族群分布率約為 0.98，可知達到最高峰的策略為 S2；而 S2 的族群分布率在 G15 時就已接近穩定狀態且趨近於 1，最後結果是由 S2 獲得壓倒性的勝利。

第三問句，如上表格的實驗結果來看「什麼時候才有結果及規律呢？」，答案是：在 G11 開始時競爭矩陣已出現規律性重複現象如下：

$$\text{G11:}\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.00\\0.67 & 0.83 & 1.00\\1.00 & 0.00 & 1.00\end{bmatrix}\quad \text{G12:}\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.00\\0.67 & 1.00 & 1.00\\1.00 & 0.00 & 1.00\end{bmatrix}$$

$$\text{G13:}\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.00\\0.67 & 0.83 & 1.00\\1.00 & 0.00 & 1.00\end{bmatrix}\quad \text{G14:}\begin{bmatrix}0.83 & 0.67 & 0.00\\0.67 & 1.00 & 1.00\\1.00 & 0.00 & 1.00\end{bmatrix}$$

我們可以在上述的矩陣中看出，G11、G13 等奇數次競爭矩陣皆相同；G12、G14 等偶數次競爭矩陣皆相同，所以，我們可以推測，往後族群分布率變化將具有一定規律及可預測性；而到了 G15 時，S2 的族群分布率已達到 0.95，成長空間有限，族群分布率的變化則趨於穩定，不再有其他變動。

結論

結論一：

田忌贏得比賽的關鍵在於，孫臏揣測齊威王並不會更換順序，且田忌的馴都略遜一籌齊威王，所以孫臏才會想到讓田忌犧牲一勝換取兩勝之方法來贏得這場比賽；相對的，如果齊威王採用隨機排序的策略，那田忌和齊威王的勝率都是1/6、敗率是 1/6、平手是 4/6。在勝敗機率都一樣的情況下，因為平手機率皆大於勝率及敗率，所以產生勝負的機率較小，在這種情況下，要獲得勝利就需要靠一些運氣了。

我們可以知道，在不能獲知對手的實力之前，猜測對方所使用的策略是非常重要的，如果我們能夠獲得相關資訊，就可能大大提高自己的勝率進而擊敗對手，這也是我們常說的「知己知彼，百戰百勝」。

結論二：

若數值只做一次演化多次競爭，如(4,2,1)、(3,3,1)、(3,2,2)隨機排序進行配對競爭，採用定義中的運算方法做計算，一直做到平衡為止，到最後，S1 的族群分布率呈現趨近於 0 的狀態；反之，S2、S3 的族群分布率則是呈現上升且兩兩重疊的狀態，將近於 0.5；我們發現，只在演化一次的情況下，S2 與 S3 的表現一樣好，而 S1 的表現就顯得較為劣勢，在不斷的競爭下，族群分布率呈現穩定下降，最終可能導致該基因的族群滅亡，所以我們的結論可以運用在培訓時間較短，不容易大幅度提升各項能力時，我們應該優先採取訓練或將資源投注在表現中等或較差的選手上，如此一來在整體表現上較容易增加獲勝機率。

結論三：

如果策略進行多次演化多次繼續競爭，得出的結果為 S1、S3 的族群分布率快速下降且趨近於 0，S2 的族群分布率呈現持續上升狀態至最高族群分布率接近0.9。綜合以上結論，得知 S1 不管怎麼做，就算改變順序，都無法贏得兩勝；而

S2 勝率最高，不管怎麼做都一定可獲得兩勝；S3 勝率為中下等，雖然無法每次都會得兩勝，但是勝率仍比 S1 大一些。由以上結論可知，沒有一個策略是會全勝的：

- 「強上加強」的策略一告訴我們不能完全的指望強者，應該適當的平均分配資源，即使剛開始是加強者的策略略占上風，但到最後策略一的其他較弱數值會成為累贅，使得策略毫無勝算。
- 「增中數值」的策略二告訴我們犧牲爭取最大數值進而換得三戰兩勝的贏面，雖然剛開始沒處在上風或下風，而最後仍然能得到最大的勝出率。
- 「勤能補拙」的策略三告訴我們有時候不能都只顧好或壞，有時候應該適時的放下才能增進全體的利益。

展望

未來，我們對於田忌賽馬典故的擴充有幾個期望：

第一，我們在這次的研究中發現，增中數值的策略都遠比強上加強或勤能補拙這兩個策略都來的好，所以也引發了後續幾個問題與想像，如果一樣是三匹馬，增強的點數由原本可增強 1 點改為增強 2 點，這增強 2 點的點數分配哪個才會是最好？若我們將增強點數分別增強在最強、中間以及最弱者可以整理出以下六個策略：(1 , 1 , 0)、(0 , 1 , 1)、(1 , 0 , 1)、(2 , 0 , 0)、(0 , 2 , 0)、(0 , 0 , 2)；例如(1 , 0 , 1)就是增強在最強與最弱兩者各一點，會是一個好的競爭策略嗎？其實我們已經開始著手研究中，因時間與計算過程過於龐大，至第 20 代並沒有一個明顯的趨勢與方向。另外我們也發想了第二個問題，如果田忌賽馬故事加以擴張成有五匹馬，只能增強 1 點應該是什麼策略會是最好，若增強 2 點時又該是哪種策略才會有最大的優勢呢？

第二，我們希望將模型設定精緻化，使模型增添了一些複雜度，期望能夠應用研究結果在現實中狀況，如生物演化、球賽球員訓練、國家外交政策分析等，或許更能應證研究的方向是否吻合於現況，使研究結果更有價值。

參考書目

1. 趙淑妙(譯)(2009)。自私的基因(原作者：Richard Dawkins)。台北市，天下文化
2. 賽局理論 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA
3. 國立台灣科學教育館網站 http://www.ntsec.gov.tw/User/Query.aspx?q=%E7%A7%91%E5%B1%95

【評語】030406

本作品是由田忌賽馬延伸而出的一個進化版的題材，動機值得肯定，建議作者可閱讀賽局理論。作者們從田忌賽馬的故事發想，給出了一個問題，建立適當的數學模型並且給出了觀察結果，創意十足。比較美中不足的是，沒能看到所處理問題的核心。問題的分析方式和矩陣的運算沒有太大的關聯，由遞迴關係著手會容易的多。如果作者能以這樣的觀點來看這個問題，應該可以導出(a_n, b_n, c_n)的通式為$\left(\frac{1}{2\left(\frac{16}{13}\right)^n+1}, \frac{\left(\frac{16}{13}\right)^n}{2\left(\frac{16}{13}\right)^n+1}, \frac{\left(\frac{16}{13}\right)^n}{2\left(\frac{16}{13}\right)^n+1}\right)$。由此，可以容易的看出最後的收斂趨勢，有點可惜了。後一部份的演化模型很有趣，是不是可以有聰明的想法找出一般式呢？如果有，會是很棒的結果。(16 頁 S21 的計算結果應為 6 勝、6 平、6 負。24 頁最後一段話 S2 和 S3 應該是弄混了。)(可參考 2014 年台灣國際科展作品『田忌賽馬問題的研究與推廣』)