中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030405

三角形邊長指數與線性轉換存在與否論證

學校名稱：新北市私立南山高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 李柏佑	王志偉
國二 陳品鈞	
國二 蕭宇辰	

關鍵詞：畢氏定理、餘弦定理、嚴格單調函數

摘　要

本次的科展研究，分別探討等腰及任意的銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形，其三邊長經過指數轉換：$\sqrt{T}$ ，T^{-1} ，T^{n} 及線性轉換：$sT+r$ 後，新三角形存在性的探討，是**必然存在**亦或是**條件式存在**，並且利用餘弦定理檢視新三角形的最大內角，進一步判斷為何種三角形。另外，我們讓變數 n 或 s 或 r 分別遞增，發現新三角形的變化會有一定的趨勢。

壹、研究動機

在國一升上國二的暑假中，數學老師交代了一份暑假作業，就是每組針對一位數學家的生平典故，去做深入的了解探討，並於開學時上台報告呈現這位數學家的豐功偉業，我們這組經過搜尋後決定報告『畢達哥拉斯』，他有眾多的事蹟，耳熟能詳的非『畢氏定理』莫屬。話說畢達哥拉斯有次應邀參加餐會，餐廳地板鋪著美麗的正方形大理石地磚，這位善於觀察和理解的數學家凝視腳下這些排列規則的方形磁磚，想到它們和『數』之間的關係，於是拿了畫筆並且蹲在地板上，選了一塊磁磚以它的對角線為邊，畫了一個正方形，他發現這個正方形面積恰好等於兩塊磁磚的面積和。他很好奇，於是再以兩塊磁磚拼成的矩形之對角線作另一個正方形，他發現這個正方形之面積等於 5 塊磁磚的面積，也就是以兩股為邊作正方形面積之和。至此畢達哥拉斯作了大膽的假設：『任何直角三角形，其斜邊的平方恰好等於另兩邊平方之和。』亦即『 $a^2+b^2=c^2$ 』，正當我們報告到此並舉例三邊長為$3,4,5$的直角三角形，其$3^2+4^2=5^2$，結果有位剛剛打瞌睡的同學搞不清楚狀況，以為我們說三角形三邊長為$3^2,4^2,5^2$，就問：「三角形應該要兩短邊長之和大於最大邊長，那麼$9,16,25$就不能構成三角形呀！」的確是不行，正因為這個陰錯陽差，讓我們開始思考「$3,4,5$是直角三角形，但$3^2,4^2,5^2$卻連三角形都無法構成，那有沒有某個三角形將三邊長各自平方後還可以是三角形？」當然很容易就讓我們找到例子像$4,5,6$，但是否有規則可循呢？總不能找一個是一個吧！因此我們決定深入探索其中的奧秘。經過一番的探索，發現 2001 年 ARML 的試題有在探討類似主題，我們就加以延伸討論各種類型的三角形，並將三邊長取平方、n次方、平方根、倒數、甚至線性轉換後，看看新的三角形是否存在？是什麼三角形？如何變動？我們很有耐心地逐一思索分析，都得到不錯的結果與規則性，讓我們信心大增。

貳、研究目的

1. 等腰銳角、等腰直角、等腰鈍角三角形經過指數轉換：$\sqrt{T}$，T^{-1}，T^n 或是線性轉換：$sT+r$ 後，分別是何種三角形？
2. 任意銳角、任意直角、任意鈍角三角形經過指數轉換：$\sqrt{T}$，T^{-1}，T^n 或是線性轉換：$sT+r$ 後，分別是何種三角形？
3. 若指數轉換的n次方與線性轉換的s或r變大時，則新三角形會如何變化？

參、研究設備及器材

尺、筆、紙、電腦、幾何繪圖軟體(The Geometer's Sketchpad V4，縮寫 GSP)。

肆、研究過程與結果

一、符號說明

我們要研究三角形的三邊長經過指數轉換與線性轉換後是否依舊還能是三角形，為了方便說明，令$T=T(a\ ,\ b\ ,\ c)$表示一個三邊長$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$的ΔABC，且不失一般性假設$a\le b\le c$，並滿足$a+b>c$。我們定義$T^n=T\left(a^n\ ,\ b^n\ ,\ c^n\right)$表示一個三邊長由$T=T(a\ ,\ b\ ,\ c)$的三邊長分別取$n$次方的$\Delta A^nB^nC^n$，即$\overline{B^nC^n}=a^n$，$\overline{C^nA^n}=b^n$，$\overline{A^nB^n}=c^n$，對於所有$n$為正整數均成立。又$\sqrt{T}=T\left(\sqrt{a}\ ,\ \sqrt{b}\ ,\ \sqrt{c}\right)$表示一個三邊長由$T=T(a\ ,\ b\ ,\ c)$的三邊長分別取平方根的$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$；$T^{-1}=T\left(\frac{1}{a}\ ,\ \frac{1}{b}\ ,\ \frac{1}{c}\right)$表示一個三邊長由$T=T(a\ ,\ b\ ,\ c)$的三邊長分別取倒數的$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$；$sT+r=T(sa+r\ ,\ sb+r\ ,\ sc+r)$表示一個三邊長由$T=T(a\ ,\ b\ ,\ c)$的三邊長分別做線性轉換先乘$s$倍再加$r$的$\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ $(s\ ,\ r>0)$。

二、指數轉換：$\sqrt{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{T}\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\ ,\ \sqrt{\boldsymbol{b}}\ ,\ \sqrt{\boldsymbol{c}}\right)$

【定理一】

假設$\sqrt{T}=T\left(\sqrt{a}\ ,\ \sqrt{b}\ ,\ \sqrt{c}\right)$表示一個三邊長由$T=T(a\ ,\ b\ ,\ c)$的三邊長分別取平方根的$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$，

(一) 若ΔABC為正三角形，則$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，則不論$a<b=c$或$a=b<c$，$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為等腰銳角三角形。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，則$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為銳角三角形。

(四) 若ΔABC為任意(等腰)直角三角形，則$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為(等腰)銳角三角形。

(五) 若ΔABC為任意(等腰)鈍角三角形，則$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為(等腰)銳角三角形。

【證明】

(一) 若ΔABC為正三角形，假設$a=b=c$，則等長三邊經過$\sqrt{T}=T\left(\sqrt{a}\,,\,\sqrt{b}\,,\,\sqrt{c}\right)$的轉換後

還是等長，即$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必還是正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$\sqrt{a}<\sqrt{b}=\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為三角形

又因為 $\cos\left(\sqrt{C}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\dfrac{a}{2\sqrt{ac}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{c}}>0$，

所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$為等腰銳角三角形。

2. 假設$a=b<c$，則$\sqrt{a}=\sqrt{b}<\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{a}>\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad c<4a$

因為 $\begin{cases} a+b>c \;\Rightarrow\; 2a>c \\ a^2+b^2>c^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{2}a>c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c<\sqrt{2}a$ ，所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為三角形

又因為 $\cos\left(\sqrt{C}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\dfrac{2a-c}{2a}=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)>1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{a}\right)=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，

所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$為等腰銳角三角形。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，假設$a<b<c$，則$\sqrt{a}<\sqrt{b}<\sqrt{c}$。

因為$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}>a+b>c \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$，所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$必為三角形。

又因為 $\cos\left(\sqrt{C}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\dfrac{a+b-c}{2\sqrt{ab}}>0$ ，

所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 為銳角三角形。

(四) 若ΔABC為任意直角三角形，假設$a<b<c$ ，則$\sqrt{a}<\sqrt{b}<\sqrt{c}$ 。

證明同任意銳角三角形，所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為三角形且為銳角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰直角三角形，假設$a=b<c$ ，則$\sqrt{a}=\sqrt{b}<\sqrt{c}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{a}>\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad c<4a$

因為 $\begin{cases} a+b>c \ \Rightarrow \ 2a>c \\ a^2+b^2=c^2 \ \Rightarrow \ \sqrt{2}a=c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{2}a$ ，所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為三角形

又因為 $\cos\left(\sqrt{C}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\dfrac{2a-c}{2a}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$

所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 為等腰銳角三角形。

(五) 若ΔABC為任意鈍角三角形，假設$a<b<c$ ，則$\sqrt{a}<\sqrt{b}<\sqrt{c}$ 。

證明同任意銳角三角形，所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為三角形且為銳角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰鈍角三角形，假設$a=b<c$ ，則$\sqrt{a}=\sqrt{b}<\sqrt{c}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{a}>\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad c<4a$

因為 $\begin{cases} a+b>c \ \Rightarrow \ 2a>c \\ a^2+b^2<c^2 \ \Rightarrow \ \sqrt{2}a<c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}a<c<2a$ ，所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為三角形

又因為 $\cos\left(\sqrt{C}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\dfrac{2a-c}{2a}=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)>1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{a}\right)=1-1=0$

所以$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 為等腰銳角三角形。

三、指數轉換：$\boldsymbol{T^{-1}=T\left(\frac{1}{a}\text{ , }\frac{1}{b}\text{ , }\frac{1}{c}\right)}$

【定理二】

假設 $T^{-1}=T\left(\frac{1}{a}\text{ , }\frac{1}{b}\text{ , }\frac{1}{c}\right)$ 表示一個三邊長由 $T=T(a\text{ , }b\text{ , }c)$ 的三邊長分別取倒數的 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$，

(一) 若 ΔABC 為正三角形，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 必為正三角形。

(二) 若 ΔABC 為等腰銳角三角形，

1. 假設 $a<b=c$ ：(1) 若 $c<\sqrt{2}a$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為等腰銳角三角形。

(2) 若 $c=\sqrt{2}a$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為等腰直角三角形。

(3) 若 $\sqrt{2}a<c<2a$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為等腰鈍角三角形。

2. 假設 $a=b<c$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 必為等腰銳角三角形。

(三) 若 ΔABC 為任意銳角三角形，且 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\frac{ca}{c-a}\text{ , c}\right)$，

(1) 若 $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>\frac{1}{a^2}$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為銳角三角形。

(2) 若 $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為直角三角形。

(3) 若 $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2}$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為鈍角三角形。

(四) 若 ΔABC 為任意直角三角形，且 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\frac{ca}{c-a}\text{ , c}\right)$，

(1) 若 $a^2c^2>b^4$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為銳角三角形。

(2) 若 $a^2c^2=b^4$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為直角三角形。

(3) 若 $a^2c^2<b^4$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為鈍角三角形。

特別地，當 ΔABC 為等腰直角三角形，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 必為等腰銳角三角形。

(五) 若 ΔABC 為任意鈍角三角形，且 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\frac{ca}{c-a}\text{ , c}\right)$，

(1) 若 $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>\frac{1}{a^2}$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為銳角三角形。

(2) 若$\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為直角三角形。

(3) 若$\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}<\dfrac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為鈍角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰鈍角三角形，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$必為等腰銳角三角形。

【證明】

(一) 若ΔABC為正三角形，假設$a=b=c$，則等長三邊經過$T^{-1}=T\left(\dfrac{1}{a}\text{，}\dfrac{1}{b}\text{，}\dfrac{1}{c}\right)$的轉換後還是等長，即$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$必還是正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{c}>\frac{1}{a}\quad\Leftrightarrow\quad 2a>c\quad\Leftrightarrow\quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}\text{為三角形}$$

又因為 $\cos A^{-1}=\dfrac{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2}{2\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}}=\dfrac{\frac{2}{c^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{2}{c^2}}=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^2$ ，所以

(1) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^2>0\quad\Leftrightarrow\quad c<\sqrt{2}a\quad\Leftrightarrow\quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為等腰銳角三角形

(2) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=0\quad\Leftrightarrow\quad c=\sqrt{2}a\quad\Leftrightarrow\quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為等腰直角三角形

(3) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^2<0\quad\Leftrightarrow\quad c>\sqrt{2}a\ \left(\text{即 }\sqrt{2}a<c<2a\right)\quad\Leftrightarrow\quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為等腰鈍角三角形

2. 假設$a=b<c$，則$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}\quad\Rightarrow\quad\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$必為三角形

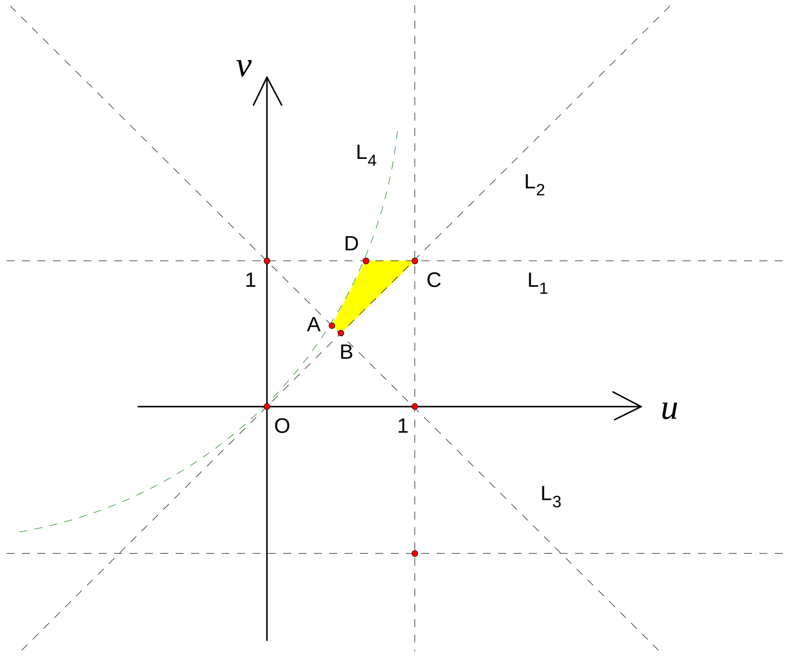
又因為 $\cos A^{-1}=\dfrac{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2}{2\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}}=\dfrac{\frac{1}{c^2}}{\frac{2}{ac}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c}\right)>0$ ，

所以$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為等腰銳角三角形。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，假設$a<b<c$，則$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$。

因為 $a+b>c \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}>1$ 又 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{c}{a}-\dfrac{c}{b}<1$

假設 $u=\dfrac{a}{c}$ ，$v=\dfrac{b}{c}$ $(0<u<v<1)$，則 $u+v>1$ 且 $\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}<1$



$L_1: v=1$ ， $L_2: u-v=0$ ， $L_3: u+v=1$ ，

$L_4: \dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}=1 \quad \Leftrightarrow \quad uv+u-v=0 \quad \Leftrightarrow \quad u(v+1)-(v+1)=-1 \quad \Leftrightarrow \quad (u-1)(v+1)=-1$

$\therefore$ L_4為雙曲線

$\begin{cases} 0<u<v<1 \\ \dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}<1 \\ u+v>1 \end{cases}$ 所圍區域為上圖黃色區塊$ABCD$，找出A點，即求解$\begin{cases} (u-1)(v+1)=-1 \\ u+v=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad v=1-u$ 代入得 $u^2-3u+1=0 \quad \Rightarrow \quad u=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ $\because$ $u<1$ $\therefore$ $u=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $A\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ $\therefore$ $u>\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 且 $v<\dfrac{u}{1-u}$ $\left(\text{即 } \dfrac{a}{c}>\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ 且 } \dfrac{b}{c}<\dfrac{a}{c-a}\right)$

所以 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\dfrac{ca}{c-a}, c\right) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為三角形

又因為 $\cos A^{-1}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2-\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}{2\times\dfrac{1}{b}\times\dfrac{1}{c}}=\dfrac{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{2}{bc}}$ ，所以

(1) $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>\frac{1}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為銳角三角形

(2) $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為直角三角形

(3) $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為鈍角三角形

(四) 若ΔABC為任意直角三角形，假設$a<b<c$，則$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$。

$\Rightarrow \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\frac{ca}{c-a}\ ,\ \mathrm{c}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為三角形

又因為 $\cos A^{-1}=\dfrac{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2}{2\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}}=\dfrac{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{2}{bc}}=\frac{bc}{2}\times\dfrac{a^2\left(a^2+b^2\right)+a^2b^2-b^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}$

$=\dfrac{bc\left(a^4+a^2b^2-b^4\right)}{2a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}=\dfrac{bc\left(a^2c^2-b^4\right)}{2a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}$，所以

(1) $a^2c^2-b^4>0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2c^2>b^4 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為銳角三角形

(2) $a^2c^2-b^4=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2c^2=b^4 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為直角三角形

(3) $a^2c^2-b^4<0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2c^2<b^4 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為鈍角三角形

特別地，當ΔABC為等腰直角三角形，假設$a=b<c$，則$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}>\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$

$\Rightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$必為三角形

又因為 $\cos A^{-1}=\dfrac{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2}{2\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}}=\dfrac{\frac{1}{c^2}}{\frac{2}{ac}}=\frac{\sqrt{2}}{4}>0$，

所以$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為等腰銳角三角形。

(五) 若ΔABC為任意鈍角三角形，假設$a<b<c$，則$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$。

證明與結果同任意銳角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰鈍角三角形，假設$a=b<c$，則$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}>\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$

$\Rightarrow \quad \Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$必為三角形

又因為 $\cos A^{-1}=\dfrac{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2}{2\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}}=\dfrac{\frac{1}{c^2}}{\frac{2}{ac}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c}\right)>0$，

所以$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為等腰銳角三角形。

四、指數轉換：$\boldsymbol{T^n=T\left(a^n\ ,\ b^n\ ,\ c^n\right)}$

【定理三】

假設 $T^n=T\left(a^n\ ,\ b^n\ ,\ c^n\right)$ 表示一個三邊長由 $T=T\left(a\ ,\ b\ ,\ c\right)$ 的三邊長分別取 n 次方的 $\Delta A^nB^nC^n$，

(一) 若ΔABC為正三角形，則$\Delta A^nB^nC^n$必為正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$\Delta A^nB^nC^n$必為等腰銳角三角形。

   再者，當n逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大遠離$60°$。

2. 假設$a=b<c$：(1) 若$c<\sqrt[2n]{2}a$，則$\Delta A^nB^nC^n$為等腰銳角三角形。

   再者，當n逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大遠離$60°$。

   (2) 若$c=\sqrt[2n]{2}a$，則$\Delta A^nB^nC^n$為等腰直角三角形。

   (3) 若$\sqrt[2n]{2}a<c<\sqrt[n]{2}a$，則$\Delta A^nB^nC^n$為等腰鈍角三角形。

   再者，當n逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大接近$180°$。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，

(1) 若$a^{2n}+b^{2n}>c^{2n}$，則$\Delta A^nB^nC^n$為銳角三角形。

(2) 若$a^{2n}+b^{2n}=c^{2n}$，則$\Delta A^nB^nC^n$為直角三角形。

(3) 若$a^{2n}+b^{2n}<c^{2n}$，則$\Delta A^nB^nC^n$為鈍角三角形。

(四) 若ΔABC為任意(等腰)直角三角形，則$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

(五) 若ΔABC為任意(等腰)鈍角三角形，則$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

【證明】

(一) 若ΔABC為正三角形，假設$a=b=c$，則等長三邊經過$T^n=T\left(a^n，b^n，c^n\right)$的轉換後還是等長，即$\Delta A^nB^nC^n$必還是正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$a^n<b^n=c^n \quad \Rightarrow \quad a^n+b^n>c^n \quad \Rightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$必為三角形

又因為 $\cos\left(C^n\right)=\dfrac{\left(a^n\right)^2+\left(b^n\right)^2-\left(c^n\right)^2}{2a^nb^n}=\dfrac{a^{2n}}{2a^nc^n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c}\right)^n>0$，

所以$\Delta A^nB^nC^n$為等腰銳角三角形。

觀察上述式子發現，因為$0<\dfrac{a}{c}<1$，所以$f\left(n\right)=\cos\left(C^n\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c}\right)^n$為嚴格遞減函數，那麼$\angle C^n$為嚴格遞增函數，又因為$\cos\left(C^n\right)<\dfrac{1}{2}$，所以$\angle C^n>60°$，即當$n$逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大遠離$60°$。

2. 假設$a=b<c$，則$a^n=b^n<c^n$

$\Rightarrow \quad a^n+b^n>c^n \quad \Leftrightarrow \quad 2a^n>c^n \quad \Leftrightarrow \quad c<\sqrt[n]{2}a \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$為三角形

又因為 $\cos\left(C^n\right)=\dfrac{\left(a^n\right)^2+\left(b^n\right)^2-\left(c^n\right)^2}{2a^nb^n}=\dfrac{2a^{2n}-c^{2n}}{2a^{2n}}=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^{2n}$，所以

(1) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^{2n}>0 \quad \Leftrightarrow \quad c<\sqrt[2n]{2}a \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$為等腰銳角三角形

觀察上述式子發現，因為$\dfrac{c}{a}>1$，所以$f\left(n\right)=\cos\left(C^n\right)=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^{2n}$為嚴格遞減函數，那麼$\angle C^n$為嚴格遞增函數，又因為$0<\cos\left(C^n\right)<\dfrac{1}{2}$，所以$60°<\angle C^n<90°$，即當$n$逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大遠離$60°$。

(2) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}\right)^{2n}=0 \quad \Leftrightarrow \quad c=\sqrt[2n]{2}a \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$為等腰直角三角形

(3) $1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}<0 \quad \Leftrightarrow \quad c>\sqrt[2n]{2}a \quad \left(\text{即 } \sqrt[2n]{2}a<c<\sqrt[n]{2}a\right) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$ 為等腰鈍角三角形

觀察上述式子發現，因為$\frac{c}{a}>1$，所以 $f(n)=\cos\left(C^n\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}$ 為嚴格遞減函數，那麼$\angle C^n$為嚴格遞增函數，又因為$-1<\cos\left(C^n\right)<0$，所以$90°<\angle C^n<180°$，即當$n$逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大接近$180°$。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，假設$a<b<c$，則$a^n<b^n<c^n$

$\Rightarrow \quad a^n+b^n>c^n \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$ 為三角形

又因為 $\cos\left(C^n\right)=\frac{\left(a^n\right)^2+\left(b^n\right)^2-\left(c^n\right)^2}{2a^nb^n}=\frac{a^{2n}+b^{2n}-c^{2n}}{2a^nb^n}$，所以

(1) $a^{2n}+b^{2n}-c^{2n}>0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{2n}+b^{2n}>c^{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$ 為銳角三角形

(2) $a^{2n}+b^{2n}-c^{2n}=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{2n}+b^{2n}=c^{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$ 為直角三角形

(3) $a^{2n}+b^{2n}-c^{2n}<0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{2n}+b^{2n}<c^{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A^nB^nC^n$ 為鈍角三角形

(四) 若ΔABC為任意直角三角形，假設$a<b<c$，則$a^n<b^n<c^n$。

因為 $\left(c^n\right)^2=\left(c^2\right)^n=\left(a^2+b^2\right)^n=a^{2n}+b^{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}C_k^n\left(a^2\right)^k\left(b^2\right)^{n-k}>a^{2n}+b^{2n}+2a^nb^n=\left(a^n+b^n\right)^2$

$\Rightarrow \quad c^n>a^n+b^n$，所以$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

特別地，當ΔABC為等腰直角三角形，假設$a=b<c$，則$a^n=b^n<c^n$

$\Rightarrow \quad a^n+b^n>c^n \quad \Rightarrow \quad 2a^n>c^n \quad \Rightarrow \quad c<\sqrt[n]{2}a$

因為 $\begin{cases} a+b>c \quad \Rightarrow \quad 2a>c \\ a^2+b^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}a=c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{2}a$，所以$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

(五) 若ΔABC為任意鈍角三角形，假設$a<b<c$，則$a^n<b^n<c^n$。

因為 $\left(c^n\right)^2=\left(c^2\right)^n>\left(a^2+b^2\right)^n=a^{2n}+b^{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}C_k^n\left(a^2\right)^k\left(b^2\right)^{n-k}>a^{2n}+b^{2n}+2a^nb^n=\left(a^n+b^n\right)^2$

$\Rightarrow \quad c^n>a^n+b^n$，所以$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

特別地，當ΔABC為等腰鈍角三角形，假設$a=b<c$，則$a^n=b^n<c^n$

$\Rightarrow \quad a^n+b^n>c^n \quad \Rightarrow \quad 2a^n>c^n \quad \Rightarrow \quad c<\sqrt[n]{2}a$

因為 $\begin{cases} a+b>c \;\Rightarrow\; 2a>c \\ a^2+b^2<c^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{2}a<c \end{cases} \Rightarrow \quad \sqrt{2}a<c<2a$ ，所以$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

五、線性轉換：$sT+r=T(sa+r\,,\,sb+r\,,\,sc+r)$

【定理四】

假設$sT+r=T(sa+r\,,\,sb+r\,,\,sc+r)$表示一個三邊長由$T=T(a\,,\,b\,,\,c)$的三邊長分別做線性轉換先乘$s$倍再加$r$的$\Delta_s A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ $(s\,,\,r>0)$，

(一) 若ΔABC為正三角形，則$\Delta_s A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$必為正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$\Delta A^nB^nC^n$必為等腰銳角三角形。

   再者，(1) 假設s為定值，則當r逐漸變大時，最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變小接近$60°$。

   (2) 假設r為定值，則當s逐漸變大時，最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變大遠離$60°$。

   (3) 當s與r同時逐漸變大時，

   (i) $\dfrac{r_2}{s_2}>\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變小接近$60°$。

   (ii) $\dfrac{r_2}{s_2}=\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會維持不變。

   (iii) $\dfrac{r_2}{s_2}>\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變大遠離$60°$。

2. 假設$a=b<c$，則$\Delta A^nB^nC^n$必為等腰銳角三角形。

   再者，(1) 假設s為定值，則當r逐漸變大時，最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變小接近$60°$。

   (2) 假設r為定值，則當s逐漸變大時，最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變大遠離$60°$。

   (3) 當s與r同時逐漸變大時，

   (i) $\dfrac{r_2}{s_2}>\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變大遠離$60°$。

   (ii) $\dfrac{r_2}{s_2}=\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會維持不變。

(iii) $\frac{r_2}{s_2} > \frac{r_1}{s_1}$ $\Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變小接近$60°$。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，所以$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$必為銳角三角形。

(四) 若ΔABC為任意直角三角形，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$必為銳角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰直角三角形，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$必為等腰銳角三角形。

(五) 若ΔABC為任意鈍角三角形，

(1) 若$2sr(a+b-c)+r^2 > s^2(c^2-a^2-b^2)$，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$為銳角三角形。

(2) 若$2sr(a+b-c)+r^2 = s^2(c^2-a^2-b^2)$，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$為直角三角形。

(3) 若$2sr(a+b-c)+r^2 < s^2(c^2-a^2-b^2)$，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$為鈍角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰鈍角三角形，

(1) 若$\sqrt{2}a < c < \min\left(\sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r}{s}\ ,\ 2a\right)$，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$為等腰銳角三角形。

(2) 若$\sqrt{2}a < c = \sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r}{s} < 2a$，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$為等腰直角三角形。

(3) 若$\sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r}{s} < c < 2a$，則$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$為等腰鈍角三角形。

【證明】

(一) 若ΔABC為正三角形，假設$a=b=c$，則等長三邊經過$sT+r=T(sa+r\ ,\ sb+r\ ,\ sc+r)$的轉換後還是等長，即$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$必還是正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$sa+r<sb+r=sc+r$，其中$s>0$，$r>0$

$\Rightarrow$ $(sa+r)+(sb+r)>(sc+r)$ $\Rightarrow$ $\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$必為三角形

又因為 $\cos\left({}_sC_{+r}\right)=\dfrac{(sa+r)^2+(sb+r)^2-(sc+r)^2}{2\times(sa+r)\times(sb+r)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{sa+r}{sc+r}\right)>0$，

所以$\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$為等腰銳角三角形。

觀察上述式子發現，我們可以針對兩個變數s與r分別進行三角形變動的討論。

(1) 假設 s 為定值，則函數 $f(r)=\cos({}_sC_{+r})=\frac{1}{2}\left(\frac{sa+r}{sc+r}\right)$，令 $r_2>r_1>0$，

因為 $f(r_2)-f(r_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{sa+r_2}{sc+r_2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{sa+r_1}{sc+r_1}\right)=\left[\frac{(sa+r_2)(sc+r_1)-(sa+r_1)(sc+r_2)}{2(sc+r_2)(sc+r_1)}\right]$

$$=\frac{sar_1+scr_2-sar_2-scr_1}{2(sc+r_2)(sc+r_1)}=\frac{s(c-a)(r_2-r_1)}{2(sc+r_2)(sc+r_1)}>0$$

所以 $f(r)$ 為嚴格遞增函數，那麼 $\angle_s C_{+r}$ 為嚴格遞減函數，又因為 $0<\cos({}_sC_{+r})<\frac{1}{2}$，所以 $60^\circ<\angle_s C_{+r}<90^\circ$，即當 r 逐漸變大時，則最大角 $\angle_s C_{+r}$ 會逐漸變小接近 60°。

(2) 假設 r 為定值，則函數 $f(s)=\cos({}_sC_{+r})=\frac{1}{2}\left(\frac{sa+r}{sc+r}\right)$，令 $s_2>s_1>0$，

因為 $f(s_2)-f(s_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{s_2a+r}{s_2c+r}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{s_1a+r}{s_1c+r}\right)=\left[\frac{(s_2a+r)(s_1c+r)-(s_1a+r)(s_2c+r)}{2(s_2c+r)(s_1c+r)}\right]$

$$=\frac{s_2ar+s_1cr-s_1ar-s_2cr}{2(s_2c+r)(s_1c+r)}=\frac{r(c-a)(s_1-s_2)}{2(s_2c+r)(s_1c+r)}<0$$

所以 $f(s)$ 為嚴格遞減函數，那麼 $\angle_s C_{+r}$ 為嚴格遞增函數，又因為 $0<\cos({}_sC_{+r})<\frac{1}{2}$，所以 $60^\circ<\angle_s C_{+r}<90^\circ$，即當 s 逐漸變大時，則最大角 $\angle_s C_{+r}$ 會逐漸變大遠離 60°。

(3) 假設多變數函數 $f(s,r)=\cos({}_sC_{+r})=\frac{1}{2}\left(\frac{sa+r}{sc+r}\right)$，令 $s_2>s_1>0$ 且 $r_2>r_1>0$，

因為 $f(s_2,r_2)-f(s_1,r_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{s_2a+r_2}{s_2c+r_2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{s_1a+r_1}{s_1c+r_1}\right)$

$$=\left[\frac{(s_2a+r_2)(s_1c+r_1)-(s_1a+r_1)(s_2c+r_2)}{2(s_2c+r_2)(s_1c+r_1)}\right]$$

$$=\frac{s_2ar_1+s_1cr_2-s_1ar_2-s_2cr_1}{2(s_2c+r_2)(s_1c+r_1)}$$

$$=\frac{(c-a)(s_1r_2-s_2r_1)}{2(s_2c+r_2)(s_1c+r_1)}\quad,$$

所以

(i) $s_1r_2-s_2r_1>0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{r_2}{s_2}>\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow \quad f(s,r)$ 為嚴格遞增函數，

即最大角 $\angle_s C_{+r}$ 會逐漸變小接近 $60°$ 。

(ii) $s_1r_2-s_2r_1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{r_2}{s_2}=\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow \quad f(s,r)$ 不變，即最大角 $\angle_s C_{+r}$ 會維持不變。

(iii) $s_1r_2-s_2r_1<0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{r_2}{s_2}<\dfrac{r_1}{s_1} \quad \Leftrightarrow \quad f(s,r)$ 為嚴格遞減函數，

即最大角 $\angle_s C_{+r}$ 會逐漸變大遠離 $60°$ 。

2. 假設 $a=b<c$ ，則 $sa+r=sb+r<sc+r$ ，其中 $s>0$ ，$r>0$

$$\Rightarrow \quad (sa+r)+(sb+r)>(sc+r) \quad \Rightarrow \quad 2(sa+r)>sc+r$$

因為 $\begin{cases} a+b>c \ \Rightarrow \ 2a>c \\ a^2+b^2>c^2 \ \Rightarrow \ \sqrt{2}a>c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c<\sqrt{2}a$ ，所以 $\Delta_s A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 必為三角形。

又因為 $\cos({}_sC_{+r})=\dfrac{(sa+r)^2+(sb+r)^2-(sc+r)^2}{2\times(sa+r)\times(sb+r)}=\dfrac{2(sa+r)^2-(sc+r)^2}{2(sa+r)^2}$ ，

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{sc+r}{sa+r}\right)^2>1-\frac{1}{2}\left(\frac{s\sqrt{2}a+r}{sa+r}\right)^2>1-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}(sa+r)}{sa+r}\right]^2=1-1=0$$

所以 $\Delta_s A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 為等腰銳角三角形。

觀察上述式子發現，我們可以針對兩個變數 s 與 r 分別進行三角形變動的討論。

(1) 假設 s 為定值，則函數 $f(r)=\cos({}_sC_{+r})=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{sc+r}{sa+r}\right)^2$ ，令 $r_2>r_1>0$ ，

因為 $\dfrac{sc+r_2}{sa+r_2}-\dfrac{sc+r_1}{sa+r_1}=\dfrac{(sc+r_2)(sa+r_1)-(sc+r_1)(sa+r_2)}{(sa+r_2)(sa+r_1)}=\dfrac{scr_1+sar_2-scr_2-sar_1}{(sa+r_2)(sa+r_1)}$

$$=\frac{s(c-a)(r_1-r_2)}{2(sa+r_2)(sa+r_1)}<0$$

所以 $\dfrac{sc+r}{sa+r}$ 為嚴格遞減函數，則 $f(r)$ 為嚴格遞增函數，那麼 $\angle_s C_{+r}$ 為嚴格遞減函數，又因為 $0<\cos({}_sC_{+r})<\dfrac{1}{2}$ ，所以 $60°<\angle_s C_{+r}<90°$ ，即當 r 逐漸變大時，則最大角 $\angle_s C_{+r}$ 會逐漸變小接近 $60°$ 。

(2) 假設r為定值，則函數 $f(s)=\cos({}_sC_{+r})=1-\frac{1}{2}\left(\frac{sc+r}{sa+r}\right)^2$，令$s_2>s_1>0$，

因為 $\frac{s_2c+r}{s_2a+r}-\frac{s_1c+r}{s_1a+r}=\frac{(s_2c+r)(s_1a+r)-(s_1c+r)(s_2a+r)}{(s_2a+r)(s_1a+r)}=\frac{s_2cr+s_1ar-s_1cr-s_2ar}{(sa+r_2)(sa+r_1)}$

$$=\frac{r(c-a)(s_2-s_1)}{2(sa+r_2)(sa+r_1)}>0$$

所以$\frac{sc+r}{sa+r}$為嚴格遞增函數，則$f(r)$為嚴格遞減函數，那麼$\angle_sC_{+r}$為嚴格遞增函數，又因為$0<\cos({}_sC_{+r})<\frac{1}{2}$，所以$60°<\angle_sC_{+r}<90°$，即當$s$逐漸變大時，則最大角$\angle_sC_{+r}$會逐漸變大遠離$60°$。

(3) 假設多變數函數 $f(s,r)=\cos({}_sC_{+r})=1-\frac{1}{2}\left(\frac{sc+r}{sa+r}\right)^2$，令$s_2>s_1>0$且$r_2>r_1>0$，

因為 $\frac{s_2c+r_2}{s_2a+r_2}-\frac{s_1c+r_1}{s_1a+r_1}=\frac{(s_2c+r_2)(s_1a+r_1)-(s_1c+r_1)(s_2a+r_2)}{(s_2a+r_2)(s_1a+r_1)}$

$$=\frac{s_2cr_1+s_1ar_2-s_1cr_2-s_2ar_1}{(s_2a+r_2)(s_1a+r_1)}=\frac{(c-a)(s_2r_1-s_1r_2)}{(s_2a+r_2)(s_1a+r_1)}$$

(i) $s_2r_1-s_1r_2>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{r_2}{s_2}<\frac{r_1}{s_1} \quad\Leftrightarrow\quad f(s,r)$為嚴格遞減函數，

即最大角$\angle_sC_{+r}$會逐漸變大遠離$60°$。

(ii) $s_2r_1-s_1r_2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1}{s_1} \quad\Leftrightarrow\quad f(s,r)$不變，即最大角$\angle_sC_{+r}$會維持不變。

(iii) $s_2r_1-s_1r_2<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{r_2}{s_2}>\frac{r_1}{s_1} \quad\Leftrightarrow\quad f(s,r)$為嚴格遞增函數，

即最大角$\angle_sC_{+r}$會逐漸變小接近$60°$。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，假設$a<b<c$，則$sa+r<sb+r<sc+r$，其中$s>0$，$r>0$。

$\Rightarrow \quad (sa+r)+(sb+r)>(sc+r) \quad \Rightarrow \quad \Delta_sA_{+r}\,{}_sB_{+r}\,{}_sC_{+r}$必為三角形

又因為 $\cos\left({}_{s}C_{+r}\right)=\dfrac{(sa+r)^2+(sb+r)^2-(sc+r)^2}{2\times(sa+r)\times(sb+r)}=\dfrac{s^2\left(a^2+b^2-c^2\right)+2sr(a+b-c)+r^2}{2(sa+r)(sb+r)}>0$，

所以 $\Delta_{s}A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 為銳角三角形。

(四) 若 ΔABC 為任意直角三角形，假設 $a<b<c$，則 $sa+r<sb+r<sc+r$ ，其中 $s>0$，$r>0$。

$\Rightarrow\quad (sa+r)+(sb+r)>(sc+r)\quad\Rightarrow\quad \Delta_{s}A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 必為三角形

又因為 $\cos\left({}_{s}C_{+r}\right)=\dfrac{(sa+r)^2+(sb+r)^2-(sc+r)^2}{2\times(sa+r)\times(sb+r)}=\dfrac{2sr(a+b-c)+r^2}{2(sa+r)(sb+r)}>0$

所以 $\Delta_{s}A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 為銳角三角形。

特別地，當 ΔABC 為等腰直角三角形，假設 $a=b<c$，則 $sa+r=sb+r<sc+r$ ，其中

$s>0$，$r>0\quad\Rightarrow\quad (sa+r)+(sb+r)>(sc+r)\quad\Rightarrow\quad 2(sa+r)>sc+r$

因為 $\begin{cases} a+b>c \ \Rightarrow\ 2a>c \\ a^2+b^2=c^2 \ \Rightarrow\ \sqrt{2}a=c \end{cases}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{2}a$ ，所以 $\Delta_{s}A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 必為三角形。

又因為 $\cos\left({}_{s}C_{+r}\right)=\dfrac{(sa+r)^2+(sb+r)^2-(sc+r)^2}{2\times(sa+r)\times(sb+r)}=\dfrac{2(sa+r)^2-(sc+r)^2}{2(sa+r)^2}$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{s\sqrt{2}a+r}{sa+r}\right)^2>1-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}(sa+r)}{sa+r}\right]^2=1-1=0$$

所以 $\Delta_{s}A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 為等腰銳角三角形。

(五) 若 ΔABC 為任意鈍角三角形，假設 $a<b<c$，則 $sa+r<sb+r<sc+r$ ，其中 $s>0$，$r>0$。

$\Rightarrow\quad (sa+r)+(sb+r)>(sc+r)\quad\Rightarrow\quad \Delta_{s}A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ 必為三角形

又因為 $\cos\left({}_{s}C_{+r}\right)=\dfrac{(sa+r)^2+(sb+r)^2-(sc+r)^2}{2\times(sa+r)\times(sb+r)}=\dfrac{s^2\left(a^2+b^2-c^2\right)+2sr(a+b-c)+r^2}{2(sa+r)(sb+r)}$ ，

且 $a+b>c$，且 $a^2+b^2<c^2$ ，

所以

(1) $s^2\left(a^2+b^2-c^2\right)+2sr\left(a+b-c\right)+r^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2sr\left(a+b-c\right)+r^2>s^2\left(c^2-a^2-b^2\right)$

$\Leftrightarrow \quad \Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$ 為銳角三角形

(2) $s^2\left(a^2+b^2-c^2\right)+2sr\left(a+b-c\right)+r^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2sr\left(a+b-c\right)+r^2=s^2\left(c^2-a^2-b^2\right)$

$\Leftrightarrow \quad \Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$ 為直角三角形

(3) $s^2\left(a^2+b^2-c^2\right)+2sr\left(a+b-c\right)+r^2<0 \quad \Leftrightarrow \quad 2sr\left(a+b-c\right)+r^2<s^2\left(c^2-a^2-b^2\right)$

$\Leftrightarrow \quad \Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$ 為鈍角三角形

特別地，當 ΔABC 為等腰鈍角三角形，假設 $a=b<c$ ，則 $sa+r=sb+r<sc+r$ ，其中

$s>0$，$r>0 \quad \Rightarrow \quad (sa+r)+(sb+r)>(sc+r) \quad \Rightarrow \quad 2(sa+r)>sc+r$

因為 $\begin{cases} a+b>c \quad \Rightarrow \quad 2a>c \\ a^2+b^2<c^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}a<c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}a<c<2a$ ，所以 $\Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$ 必為三角形。

又因為 $\cos\left({}_sC_{+r}\right)=\dfrac{(sa+r)^2+(sb+r)^2-(sc+r)^2}{2\times(sa+r)\times(sb+r)}=\dfrac{2(sa+r)^2-(sc+r)^2}{2(sa+r)^2}=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{sc+r}{sa+r}\right)^2$ ，

所以

(1) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{sc+r}{sa+r}\right)^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}a<c<\min\left(\sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{r}{s}\ ,\ 2a\right)$

$\Leftrightarrow \quad \Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$ 為等腰銳角三角形

(2) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{sc+r}{sa+r}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}a<c=\sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{r}{s}<2a$

$\Leftrightarrow \quad \Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$ 為等腰直角三角形

(3) $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{sc+r}{sa+r}\right)^2<0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{r}{s}<c<2a$

$\Leftrightarrow \quad \Delta_s A_{+r\ s} B_{+r\ s} C_{+r}$ 為等腰鈍角三角形

伍、討論

這次的數學研究，我們花了很多心力自我突破，從一開始的亂無章法，在與老師逐週討論後，慢慢有了架構，先從三角形去做分類，分成銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形，以及等腰與否，再制定三邊長指數轉換：$\sqrt{T}$ ，T^{-1} ，T^{n} 與線性轉換：$sT+r$ 的模式，先開始判斷新的三角形是否存在？是必然存在還是要在某些條件下才會存在？那是何種三角形？且若變數 n 或 s 或 r 遞增，則新三角形的變化趨勢又為何？我們逐步地一一突破，克服難題。在通過市展的淬鍊後，與會教授給予我們些許的建議指導，要我們針對邊長轉換函數去做分類，並把有相同結果的進行整合，我們便開始大幅度修改作品說明書，期待可以呈現出更清楚的架構以便進行比較。當中有部分推論內容很繁複尚待突破，期待複審前能有所進展。我們之後還想研究四邊形的邊長轉換後，看看會變成什麼樣子，或許可以將四邊形對角線劃開成兩個三角形的想法下手，再去組合我們的研究結果。

陸、結論

一、指數轉換：$\sqrt{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{T}\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\text{ , }\sqrt{\boldsymbol{b}}\text{ , }\sqrt{\boldsymbol{c}}\right)$

假設 $\sqrt{T}=T\left(\sqrt{a}\text{ , }\sqrt{b}\text{ , }\sqrt{c}\right)$ 表示一個三邊長由 $T=T(a\text{ , }b\text{ , }c)$ 的三邊長分別取平方根的 $\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ ，

(一) 若 ΔABC 為正三角形，則 $\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為正三角形。

(二) 若 ΔABC 為等腰銳角三角形，則不論 $a<b=c$ 或 $a=b<c$ ，$\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為等腰銳角三角形。

(三) 若 ΔABC 為任意銳角三角形，則 $\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為銳角三角形。

(四) 若 ΔABC 為任意(等腰)直角三角形，則 $\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為(等腰)銳角三角形。

(五) 若 ΔABC 為任意(等腰)鈍角三角形，則 $\Delta\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C}$ 必為(等腰)銳角三角形。

二、指數轉換：$\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}\text{ , }\frac{1}{\boldsymbol{b}}\text{ , }\frac{1}{\boldsymbol{c}}\right)$

假設 $T^{-1}=T\left(\frac{1}{a}\text{ , }\frac{1}{b}\text{ , }\frac{1}{c}\right)$ 表示一個三邊長由 $T=T(a\text{ , }b\text{ , }c)$ 的三邊長分別取倒數的 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ ，

(一) 若 ΔABC 為正三角形，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 必為正三角形。

(二) 若 ΔABC 為等腰銳角三角形，

1. 假設 $a<b=c$ ：(1) 若 $c<\sqrt{2}a$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為等腰銳角三角形。

   (2) 若 $c=\sqrt{2}a$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為等腰直角三角形。

   (3) 若 $\sqrt{2}a<c<2a$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 為等腰鈍角三角形。

2. 假設 $a=b<c$ ，則 $\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 必為等腰銳角三角形。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，且$\frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\frac{ca}{c-a}\ ,\ \mathrm{c}\right)$，

(1) 若$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>\frac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為銳角三角形。

(2) 若$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為直角三角形。

(3) 若$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為鈍角三角形。

(四) 若ΔABC為任意直角三角形，且$\frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\frac{ca}{c-a}\ ,\ \mathrm{c}\right)$，

(1) 若$a^2c^2>b^4$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為銳角三角形。

(2) 若$a^2c^2=b^4$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為直角三角形。

(3) 若$a^2c^2<b^4$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為鈍角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰直角三角形，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$必為等腰銳角三角形。

(五) 若ΔABC為任意鈍角三角形，且$\frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<b<\min\left(\frac{ca}{c-a}\ ,\ \mathrm{c}\right)$，

(1) 若$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>\frac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為銳角三角形。

(2) 若$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為直角三角形。

(3) 若$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}<\frac{1}{a^2}$，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$為鈍角三角形。

特別地，當ΔABC為等腰鈍角三角形，則$\Delta A^{-1}B^{-1}C^{-1}$必為等腰銳角三角形。

三、指數轉換：$\boldsymbol{T^n=T\left(a^n\ ,\ b^n\ ,\ c^n\right)}$

假設$T^n=T\left(a^n\ ,\ b^n\ ,\ c^n\right)$表示一個三邊長由$T=T\left(a\ ,\ b\ ,\ c\right)$的三邊長分別取$n$次方的$\Delta A^nB^nC^n$，

(一) 若ΔABC為正三角形，則$\Delta A^nB^nC^n$必為正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$\Delta A^nB^nC^n$必為等腰銳角三角形。

   再者，當n逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大遠離$60°$。

2. 假設$a=b<c$：(1) 若$c<\sqrt[2n]{2}a$，則$\Delta A^nB^nC^n$為等腰銳角三角形。

再者，當n逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大遠離60°。

(2) 若$c=\sqrt[2n]{2}a$，則$\Delta A^nB^nC^n$為等腰直角三角形。

(3) 若$\sqrt[2n]{2}a<c<\sqrt[n]{2}a$，則$\Delta A^nB^nC^n$為等腰鈍角三角形。

再者，當n逐漸變大時，則最大角$\angle C^n$會逐漸變大接近180°。

(三) 若ΔABC為任意銳角三角形，

(1) 若$a^{2n}+b^{2n}>c^{2n}$，則$\Delta A^nB^nC^n$為銳角三角形。

(2) 若$a^{2n}+b^{2n}=c^{2n}$，則$\Delta A^nB^nC^n$為直角三角形。

(3) 若$a^{2n}+b^{2n}<c^{2n}$，則$\Delta A^nB^nC^n$為鈍角三角形。

(四) 若ΔABC為任意(等腰)直角三角形，則$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

(五) 若ΔABC為任意(等腰)鈍角三角形，則$\Delta A^nB^nC^n$必不為三角形。

四、線性轉換：$\boldsymbol{sT+r=T\left(sa+r\text{ , }sb+r\text{ , }sc+r\right)}$

假設$sT+r=T\left(sa+r\text{ , }sb+r\text{ , }sc+r\right)$表示一個三邊長由$T=T\left(a\text{ , }b\text{ , }c\right)$的三邊長分別做線性轉換先乘$s$倍再加$r$的$\Delta_s A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$ $\left(s\text{ , }r>0\right)$，

(一) 若ΔABC為正三角形，則$\Delta_s A_{+r\ s}B_{+r\ s}C_{+r}$必為正三角形。

(二) 若ΔABC為等腰銳角三角形，

1. 假設$a<b=c$，則$\Delta A^nB^nC^n$必為等腰銳角三角形。

再者，(1) 假設s為定值，則當r逐漸變大時，最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變小接近60°。

(2) 假設r為定值，則當s逐漸變大時，最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變大遠離60°。

(3) 當s與r同時逐漸變大時，

(i) $\dfrac{r_2}{s_2}>\dfrac{r_1}{s_1}$ $\Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變小接近60°。

(ii) $\dfrac{r_2}{s_2}=\dfrac{r_1}{s_1}$ $\Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會維持不變。

(iii) $\dfrac{r_2}{s_2}>\dfrac{r_1}{s_1}$ $\Leftrightarrow$ 即最大角$\angle_s C_{+r}$會逐漸變大遠離60°。

2. 假設$a=b<c$，則$\Delta A^nB^nC^n$必為等腰銳角三角形。

再者，(1) 假設 s 為定值，則當 r 逐漸變大時，最大角 $\angle {}_sC_{+r}$ 會逐漸變小接近 60°。

(2) 假設 r 為定值，則當 s 逐漸變大時，最大角 $\angle {}_sC_{+r}$ 會逐漸變大遠離 60°。

(3) 當 s 與 r 同時逐漸變大時，

(i) $\dfrac{r_2}{s_2} > \dfrac{r_1}{s_1}$ $\Leftrightarrow$ 即最大角 $\angle {}_sC_{+r}$ 會逐漸變大遠離 60°。

(ii) $\dfrac{r_2}{s_2} = \dfrac{r_1}{s_1}$ $\Leftrightarrow$ 即最大角 $\angle {}_sC_{+r}$ 會維持不變。

(iii) $\dfrac{r_2}{s_2} > \dfrac{r_1}{s_1}$ $\Leftrightarrow$ 即最大角 $\angle {}_sC_{+r}$ 會逐漸變小接近 60°。

(三) 若 ΔABC 為任意銳角三角形，所以 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 必為銳角三角形。

(四) 若 ΔABC 為任意直角三角形，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 必為銳角三角形。

特別地，當 ΔABC 為等腰直角三角形，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 必為等腰銳角三角形。

(五) 若 ΔABC 為任意鈍角三角形，

(1) 若 $2sr\left(a+b-c\right)+r^2 > s^2\left(c^2-a^2-b^2\right)$，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 為銳角三角形。

(2) 若 $2sr\left(a+b-c\right)+r^2 = s^2\left(c^2-a^2-b^2\right)$，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 為直角三角形。

(3) 若 $2sr\left(a+b-c\right)+r^2 < s^2\left(c^2-a^2-b^2\right)$，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 為鈍角三角形。

特別地，當 ΔABC 為等腰鈍角三角形，

(1) 若 $\sqrt{2}a < c < \min\left(\sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{r}{s}\ ,\ 2a\right)$，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 為等腰銳角三角形。

(2) 若 $\sqrt{2}a < c = \sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{r}{s} < 2a$，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 為等腰直角三角形。

(3) 若 $\sqrt{2}a+\left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{r}{s} < c < 2a$，則 $\Delta\, {}_sA_{+r}\, {}_sB_{+r}\, {}_sC_{+r}$ 為等腰鈍角三角形。

柒、參考資料及其他

1. 蔡聰明 (民 91)。 第七章：從畢氏定理到餘弦定理；第八章：餘弦定理的追尋；第九章：畢氏定理的故事。 **數學的發現趣談。** 台北市：三民書局。
2. 許志農 (民 99)。 第二章 2-4：二項式定理。 **高中數學第二冊。** 新北市：龍騰文化。
3. 許志農 (民 100)。 第一章：三角。 **高中數學第三冊。** 新北市：龍騰文化。
4. 許志農 (民 100)。 第四章 3-3：雙曲線。 **高中數學第四冊。** 新北市：龍騰文化。
5. 美國 ARML 命題委員會 (民 96)。 ARML2001 年思考賽試題。 **ARML 美國高中數學競賽歷屆試題暨詳解。** 新北市：建興文化。

【評語】030405

作者自一個無心插曲中發想此問題，探討三角形邊長經過轉換後是否仍為三角形，動機值得肯定。此問題很有趣，只是討論的部分有點複雜。作者們可以試著將一些重複的論述合成一些小的引理，這樣作品應該會更為簡潔。作著們可能沒注意到數字在經過指數運算後的變化會具有何種特性，讓整個論述失去了一些直觀性，有點可惜。如果能利用一些代數運算和一些簡單的不等式，整個討論會更為精簡，結果看起來也會更好。(第 3 頁中關於就足夠了。事實上，給定一三角形，如果我們將三邊長開根號，以得出的三個數字為三角形的三邊必能構成一個三角形，這點可以獨立。論述稍嫌複雜了。)