

# 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 數學科

030404

來自平方的九

學校名稱：桃園市立竹圍國民中學

作者：  國三 洪笙觀  國三 邱兆妤  國三 傅瑋翎	指導老師：  侯蓓菁
---	------------------

關鍵詞：數列規律、循環、集合

## 摘要

延續研究從101開始到10000的數，把數據加廣，探討1到10000之間的數是否有其他變化的可能性，或是否有其它不同的新發現。先將其每一個數平方之後，再連續做其數的「平方的和」以及「和的平方」，經過繁複的計算過程後可推論出每個數的「平方的和」以及「和的平方」，計算結果都會歸到某一個數值；有些數值彼此之間也具有某些規律性。

## 壹、研究動機

我們一群好友對數學非常感興趣，某次在網路上看到有人研究數字間的平方的和、和的平方的循環，隔天到學校馬上和同學展開熱烈的討論，並詢問老師，得到更多相關資訊，希望透過老師的協助，能更深入了解其中的奧妙。

## 貳、研究目的

把 101 至 10000 的數，先將其平方之後，再求各數字間平方後的和，計算過後的結果是否為規律的某些數，以及各數字間相加以後的平方值是否也為規律的某些數，且這些數彼此間會不會有所相關連。

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦軟體 Excel、計算機

## 肆、研究過程或方法

一、我們先將數平方後再開始重複計算：

(一)平方的和：連續算每個數的數字平方之後的和

1. 例如： $101^2=10201$ ， $1^2+0^2+2^2+0^2+1^2=6$ ， $6^2=36$ ， $3^2+6^2=45$ ， $4^2+5^2=41$ ，  
 $4^2+1^2=17$ ， $1^2+7^2=50$ ， $5^2+0^2=25$ ， $2^2+5^2=29$ ， $2^2+9^2=85$ ， $8^2+5^2=89$ ，  
 $8^2+9^2=145$ ， $1^2+4^2+5^2=42$ ， $4^2+2^2=20$ ， $2^2+0^2=4$ ，即計算結果為 4。
2. 例如： $111^2=12321$ ， $1^2+2^2+3^2+2^2+1^2=19$ ， $1^2+9^2=82$ ， $8^2+2^2=68$ ， $6^2+8^2=100$ ，  
 $1^2+0^2+0^2=1$ ， $1^2=1$ ，即計算結果為 1。
3. 發現 1~10000 的數，經過計算後的結果皆為 1 或 4。即平方的和之集合元素有 1

和 4。A={平方的和}={1、4}。

4. 以下列出 1~1000 的數之平方的和計算結果：(其餘的數 1001~10000，列於附錄中)

正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
<b>1</b>	<b>1</b>	21	4	41	4	61	4	81	4
2	4	22	4	42	4	62	4	82	4
3	4	23	4	43	4	63	4	83	4
4	4	24	4	44	4	<b>64</b>	<b>1</b>	84	4
5	4	25	4	45	4	<b>65</b>	<b>1</b>	<b>85</b>	<b>1</b>
6	4	26	4	46	4	<b>66</b>	<b>1</b>	86	4
<b>7</b>	<b>1</b>	27	4	47	4	67	4	87	4
8	4	<b>28</b>	<b>1</b>	48	4	68	4	<b>88</b>	<b>1</b>
9	4	29	4	49	4	69	4	89	4
<b>10</b>	<b>1</b>	30	4	50	4	<b>70</b>	<b>1</b>	90	4
11	4	31	4	51	4	71	4	<b>91</b>	<b>1</b>
12	4	32	4	52	4	72	4	92	4
13	4	33	4	<b>53</b>	<b>1</b>	73	4	93	4
14	4	34	4	54	4	74	4	94	4
15	4	35	4	55	4	75	4	95	4
16	4	36	4	56	4	76	4	96	4
17	4	37	4	57	4	77	4	97	4
18	4	<b>38</b>	<b>1</b>	<b>58</b>	<b>1</b>	78	4	<b>98</b>	<b>1</b>
19	4	<b>39</b>	<b>1</b>	59	4	79	4	99	4
20	4	40	4	60	4	80	4	<b>100</b>	<b>1</b>
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
101	4	<b>121</b>	<b>1</b>	141	4	161	4	181	4
102	4	122	4	142	4	162	4	182	4
103	4	123	4	143	4	163	4	183	4
<b>104</b>	<b>1</b>	124	4	144	4	164	4	184	4
105	4	<b>125</b>	<b>1</b>	145	4	165	4	185	4
106	4	126	4	146	4	<b>166</b>	<b>1</b>	<b>186</b>	<b>1</b>
107	4	127	4	147	4	167	4	187	4
108	4	128	4	148	4	168	4	188	4
109	4	129	4	<b>149</b>	<b>1</b>	<b>169</b>	<b>1</b>	189	4
110	4	130	4	150	4	170	4	190	4
<b>111</b>	<b>1</b>	131	4	<b>151</b>	<b>1</b>	171	4	191	4
112	4	<b>132</b>	<b>1</b>	152	4	<b>172</b>	<b>1</b>	192	4
113	4	133	4	153	4	173	4	193	4

<b>114</b>	<b>1</b>	<b>134</b>	<b>1</b>	154	4	174	4	<b>194</b>	<b>1</b>
115	4	135	4	<b>155</b>	<b>1</b>	175	4	195	4
116	4	136	4	156	4	176	4	196	4
117	4	137	4	157	4	177	4	197	4
118	4	138	4	158	4	178	4	198	4
119	4	139	4	159	4	179	4	199	4
120	4	140	4	160	4	180	4	200	4
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
201	4	221	4	241	4	261	4	281	4
202	4	222	4	242	4	262	4	282	4
203	4	223	4	<b>243</b>	<b>1</b>	263	4	283	4
204	4	224	4	<b>244</b>	<b>1</b>	264	4	284	4
205	4	225	4	245	4	<b>265</b>	<b>1</b>	285	4
206	4	226	4	246	4	266	4	286	4
207	4	227	4	247	4	267	4	287	4
208	4	228	4	248	4	268	4	288	4
209	4	229	4	249	4	269	4	<b>289</b>	<b>1</b>
210	4	230	4	250	4	270	4	290	4
211	4	231	4	251	4	<b>271</b>	<b>1</b>	291	4
212	4	232	4	<b>252</b>	<b>1</b>	<b>272</b>	<b>1</b>	292	4
<b>213</b>	<b>1</b>	<b>233</b>	<b>1</b>	<b>253</b>	<b>1</b>	273	4	293	4
214	4	234	4	254	4	274	4	294	4
215	4	235	4	255	4	<b>275</b>	<b>1</b>	295	4
216	4	<b>236</b>	<b>1</b>	256	4	276	4	296	4
217	4	237	4	257	4	<b>277</b>	<b>1</b>	297	4
218	4	<b>238</b>	<b>1</b>	258	4	278	4	<b>298</b>	<b>1</b>
219	4	239	4	259	4	279	4	299	4
220	4	240	4	260	4	<b>280</b>	<b>1</b>	300	4
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
301	4	321	4	341	4	361	4	381	4
302	4	322	4	342	4	362	4	382	4
303	4	<b>323</b>	<b>1</b>	343	4	363	4	383	4
304	4	324	4	344	4	364	4	384	4
305	4	325	4	345	4	365	4	385	4
306	4	326	4	<b>346</b>	<b>1</b>	366	4	386	4
307	4	327	4	347	4	367	4	387	4
308	4	328	4	<b>348</b>	<b>1</b>	368	4	388	4
309	4	329	4	349	4	369	4	389	4
310	4	330	4	350	4	370	4	<b>390</b>	<b>1</b>
311	4	331	4	<b>351</b>	<b>1</b>	371	4	391	4

312	4	332	4	352	4	372	4	392	4
313	4	333	4	353	4	373	4	393	4
314	4	334	4	354	4	374	4	<b>394</b>	<b>1</b>
315	4	335	4	<b>355</b>	<b>1</b>	<b>375</b>	<b>1</b>	<b>395</b>	<b>1</b>
316	4	336	4	356	4	376	4	396	4
317	4	337	4	<b>357</b>	<b>1</b>	377	4	<b>397</b>	<b>1</b>
<b>318</b>	<b>1</b>	338	4	358	4	378	4	398	4
319	4	339	4	359	4	379	4	399	4
320	4	340	4	360	4	380	4	400	4
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
401	4	421	4	441	4	461	4	481	4
402	4	422	4	442	4	462	4	482	4
403	4	<b>423</b>	<b>1</b>	<b>443</b>	<b>1</b>	463	4	483	4
404	4	424	4	444	4	464	4	<b>484</b>	<b>1</b>
<b>405</b>	<b>1</b>	<b>425</b>	<b>1</b>	445	4	465	4	485	4
406	4	<b>426</b>	<b>1</b>	446	4	466	4	<b>486</b>	<b>1</b>
407	4	427	4	447	4	467	4	487	4
408	4	428	4	448	4	468	4	488	4
409	4	429	4	449	4	469	4	<b>489</b>	<b>1</b>
410	4	430	4	450	4	470	4	490	4
411	4	<b>431</b>	<b>1</b>	451	4	471	4	<b>491</b>	<b>1</b>
412	4	432	4	452	4	472	4	492	4
<b>413</b>	<b>1</b>	433	4	453	4	473	4	493	4
414	4	434	4	454	4	474	4	494	4
415	4	435	4	<b>455</b>	<b>1</b>	475	4	495	4
416	4	436	4	456	4	476	4	496	4
417	4	<b>437</b>	<b>1</b>	457	4	<b>477</b>	<b>1</b>	497	4
418	4	438	4	458	4	478	4	<b>498</b>	<b>1</b>
419	4	439	4	459	4	479	4	499	4
420	4	440	4	460	4	480	4	500	4
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
<b>501</b>	<b>1</b>	521	4	<b>541</b>	<b>1</b>	561	4	581	4
<b>502</b>	<b>1</b>	522	4	542	4	562	4	582	4
503	4	523	4	<b>543</b>	<b>1</b>	563	4	583	4
<b>504</b>	<b>1</b>	524	4	<b>544</b>	<b>1</b>	564	4	584	4
505	4	525	4	545	4	565	4	585	4
506	4	526	4	546	4	566	4	586	4
507	4	527	4	547	4	567	4	587	4
508	4	528	4	548	4	568	4	588	4
509	4	529	4	549	4	569	4	589	4

510	4	530	4	550	4	570	4	590	4
<b>511</b>	<b>1</b>	531	4	551	4	571	4	591	4
512	4	<b>532</b>	<b>1</b>	552	4	572	4	592	4
<b>513</b>	<b>1</b>	533	4	553	4	573	4	593	4
514	4	534	4	554	4	574	4	594	4
515	4	535	4	555	4	575	4	<b>595</b>	<b>1</b>
516	4	536	4	556	4	576	4	<b>596</b>	<b>1</b>
517	4	537	4	557	4	<b>577</b>	<b>1</b>	<b>597</b>	<b>1</b>
<b>518</b>	<b>1</b>	538	4	558	4	578	4	598	4
519	4	539	4	559	4	579	4	599	4
520	4	540	4	560	4	<b>580</b>	<b>1</b>	600	4
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
601	4	621	4	641	4	661	4	681	4
602	4	622	4	642	4	662	4	682	4
603	4	623	4	<b>643</b>	<b>1</b>	663	4	683	4
604	4	624	4	644	4	664	4	<b>684</b>	<b>1</b>
605	4	625	4	<b>645</b>	<b>1</b>	665	4	685	4
606	4	626	4	646	4	666	4	686	4
607	4	627	4	647	4	667	4	687	4
608	4	628	4	648	4	668	4	688	4
609	4	629	4	649	4	669	4	689	4
610	4	630	4	<b>650</b>	<b>1</b>	670	4	690	4
611	4	<b>631</b>	<b>1</b>	<b>651</b>	<b>1</b>	671	4	691	4
612	4	632	4	652	4	672	4	692	4
613	4	633	4	653	4	673	4	693	4
614	4	634	4	654	4	674	4	694	4
615	4	635	4	<b>655</b>	<b>1</b>	675	4	695	4
616	4	636	4	<b>656</b>	<b>1</b>	676	4	696	4
617	4	637	4	657	4	677	4	697	4
618	4	<b>638</b>	<b>1</b>	658	4	678	4	698	4
619	4	639	4	659	4	<b>679</b>	<b>1</b>	699	4
620	4	<b>640</b>	<b>1</b>	<b>660</b>	<b>1</b>	680	4	<b>700</b>	<b>1</b>
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
701	4	<b>721</b>	<b>1</b>	741	4	761	4	781	4
702	4	722	4	742	4	762	4	782	4
703	4	<b>723</b>	<b>1</b>	743	4	763	4	783	4
704	4	724	4	<b>744</b>	<b>1</b>	764	4	784	4
705	4	725	4	745	4	765	4	785	4
706	4	726	4	746	4	<b>766</b>	<b>1</b>	786	4
707	4	<b>727</b>	<b>1</b>	747	4	767	4	787	4

<b>708</b>	<b>1</b>	728	4	748	4	768	4	788	4
<b>709</b>	<b>1</b>	<b>729</b>	<b>1</b>	749	4	769	4	789	4
710	4	730	4	750	4	770	4	790	4
711	4	731	4	751	4	771	4	791	4
712	4	732	4	752	4	772	4	792	4
713	4	733	4	753	4	773	4	793	4
714	4	<b>734</b>	<b>1</b>	754	4	774	4	794	4
715	4	735	4	<b>755</b>	<b>1</b>	775	4	795	4
716	4	736	4	756	4	776	4	796	4
717	4	737	4	757	4	777	4	797	4
718	4	738	4	<b>758</b>	<b>1</b>	778	4	798	4
719	4	739	4	759	4	779	4	799	4
720	4	740	4	760	4	780	4	800	4
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
801	4	821	4	841	4	861	4	881	4
802	4	<b>822</b>	<b>1</b>	842	4	862	4	882	4
803	4	823	4	843	4	<b>863</b>	<b>1</b>	883	4
804	4	824	4	844	4	864	4	884	4
805	4	825	4	845	4	865	4	885	4
806	4	<b>826</b>	<b>1</b>	846	4	866	4	886	4
807	4	827	4	847	4	<b>867</b>	<b>1</b>	887	4
808	4	<b>828</b>	<b>1</b>	<b>848</b>	<b>1</b>	<b>868</b>	<b>1</b>	888	4
809	4	829	4	849	4	869	4	889	4
810	4	<b>830</b>	<b>1</b>	<b>850</b>	<b>1</b>	870	4	890	4
811	4	831	4	851	4	871	4	891	4
812	4	832	4	852	4	872	4	892	4
813	4	833	4	<b>853</b>	<b>1</b>	873	4	893	4
814	4	834	4	854	4	874	4	894	4
815	4	835	4	855	4	875	4	<b>895</b>	<b>1</b>
816	4	<b>836</b>	<b>1</b>	856	4	876	4	896	4
817	4	837	4	857	4	877	4	897	4
818	4	838	4	858	4	878	4	898	4
819	4	839	4	<b>859</b>	<b>1</b>	879	4	<b>899</b>	<b>1</b>
<b>820</b>	<b>1</b>	840	4	860	4	<b>880</b>	<b>1</b>	900	4
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
901	4	921	4	941	4	961	4	<b>981</b>	<b>1</b>
902	4	922	4	942	4	962	4	982	4
903	4	923	4	<b>943</b>	<b>1</b>	963	4	983	4
904	4	924	4	<b>944</b>	<b>1</b>	964	4	984	4
905	4	925	4	945	4	965	4	985	4

906	4	<b>926</b>	<b>1</b>	946	4	966	4	986	4
907	4	927	4	<b>947</b>	<b>1</b>	967	4	987	4
908	4	928	4	<b>948</b>	<b>1</b>	968	4	988	4
909	4	929	4	949	4	969	4	989	4
<b>910</b>	<b>1</b>	930	4	950	4	970	4	990	4
911	4	931	4	951	4	971	4	991	4
912	4	932	4	952	4	972	4	992	4
913	4	933	4	<b>953</b>	<b>1</b>	973	4	993	4
914	4	934	4	954	4	974	4	994	4
915	4	935	4	955	4	975	4	995	4
916	4	936	4	956	4	976	4	<b>996</b>	<b>1</b>
917	4	937	4	957	4	977	4	997	4
918	4	938	4	958	4	978	4	998	4
919	4	939	4	959	4	<b>979</b>	<b>1</b>	999	4
920	4	940	4	960	4	<b>980</b>	<b>1</b>	<b>1000</b>	<b>1</b>

(二)和的平方：連續算每個數的數字和後的平方

1.例如： $101^2=10201$ ， $(1+0+2+0+1)^2=16$ ， $(1+6)^2=49$ ， $(4+9)^2=169$ ，即計算結果為 169。

2.例如： $102^2=10404$ ， $(1+0+4+0+4)^2=81$ ， $(8+1)^2=81$ ，即計算結果為 169。

3.例如： $107^2=11449$ ， $(1+1+4+4+9)^2=361$ ， $(3+6+1)^2=100$ ， $(1+0+0)^2=1$ ，即計算結果為 1。

4.發現 1~10000 的數，經過計算後的結果皆為 1 或 81 或 169。即和的平方之集合元素有 1、81 和 169。 $B=\{\text{和的平方}\}=\{1、81、169\}$ 。

5.以下列出 1~1000 的數之平方的和計算結果：(其餘的數 1001~10000，列於附錄中)

正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
1	1	21	81	41	169	61	169	81	81
2	169	22	169	42	81	62	1	82	1
3	81	23	169	43	169	63	81	83	169
4	169	24	81	44	1	64	1	84	81
5	169	25	169	45	81	65	169	85	169
6	81	26	1	46	1	66	81	86	169
7	169	27	81	47	169	67	169	87	81
8	1	28	1	48	81	68	169	88	169
9	81	29	169	49	169	69	81	89	1
10	1	30	81	50	169	70	169	90	81
11	169	31	169	51	81	71	1	91	1
12	81	32	169	52	169	72	81	92	169



13	169	33	81	53	1	73	1	93	81
14	169	34	169	54	81	74	169	94	169
15	81	35	1	55	1	75	81	95	169
16	169	36	81	56	169	76	169	96	81
17	1	37	1	57	81	77	169	97	169
18	81	38	169	58	169	78	81	98	1
19	1	39	81	59	169	79	169	99	81
20	169	40	169	60	81	80	1	100	1
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
101	169	121	169	141	81	161	1	181	1
102	81	122	169	142	169	162	81	182	169
103	169	123	81	143	1	163	1	183	81
104	169	124	169	144	81	164	169	184	169
105	81	125	1	145	1	165	81	185	169
106	169	126	81	146	169	166	169	186	81
107	1	127	1	147	81	167	169	187	169
108	81	128	169	148	169	168	81	188	1
109	1	129	81	149	169	169	169	189	81
110	169	130	169	150	81	170	1	190	1
111	81	131	169	151	169	171	81	191	169
112	169	132	81	152	1	172	1	192	81
113	169	133	169	153	81	173	169	193	169
114	81	134	1	154	1	174	81	194	169
115	169	135	81	155	169	175	169	195	81
116	1	136	1	156	81	176	169	196	169
117	81	137	169	157	169	177	81	197	1
118	1	138	81	158	169	178	169	198	81
119	169	139	169	159	81	179	1	199	1
120	81	140	169	160	169	180	81	200	169
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
201	81	221	169	241	169	261	81	281	169
202	169	222	81	242	1	262	1	282	81
203	169	223	169	243	81	263	169	283	169
204	81	224	1	244	1	264	81	284	169
205	169	225	81	245	169	265	169	285	81
206	1	226	1	246	81	266	169	286	169
207	81	227	169	247	169	267	81	287	1
208	1	228	81	248	169	268	169	288	81
209	169	229	169	249	81	269	1	289	1

210	81	230	169	250	169	270	81	290	169
211	169	231	81	251	1	271	1	291	81
212	169	232	169	252	81	272	169	292	169
213	81	233	1	253	1	273	81	293	169
214	169	234	81	254	169	274	169	294	81
215	1	235	1	255	81	275	169	295	169
216	81	236	169	256	169	276	81	296	1
217	1	237	81	257	169	277	169	297	81
218	169	238	169	258	81	278	1	298	1
219	81	239	169	259	169	279	81	299	169
220	169	240	81	260	1	280	1	300	81
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
301	169	321	81	341	1	361	1	381	81
302	169	322	169	342	81	362	169	382	169
303	81	323	1	343	1	363	81	383	169
304	169	324	81	344	169	364	169	384	81
305	1	325	1	345	81	365	169	385	169
306	81	326	169	346	169	366	81	386	1
307	1	327	81	347	169	367	169	387	81
308	169	328	169	348	81	368	1	388	1
309	81	329	169	349	169	369	81	389	169
310	169	330	81	350	1	370	1	390	81
311	169	331	169	351	81	371	169	391	169
312	81	332	1	352	1	372	81	392	169
313	169	333	81	353	169	373	169	393	81
314	1	334	1	354	81	374	169	394	169
315	81	335	169	355	169	375	81	395	1
316	1	336	81	356	169	376	169	396	81
317	169	337	169	357	81	377	1	397	1
318	81	338	169	358	169	378	81	398	169
319	169	339	81	359	1	379	1	399	81
320	169	340	169	360	81	380	169	400	169
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
401	169	421	169	441	81	461	169	481	169
402	81	422	1	442	1	462	81	482	169
403	169	423	81	443	169	463	169	483	81
404	1	424	1	444	81	464	169	484	169
405	81	425	169	445	169	465	81	485	1
406	1	426	81	446	169	466	169	486	81

407	169	427	169	447	81	467	1	487	1
408	81	428	169	448	169	468	81	488	169
409	169	429	81	449	1	469	1	489	81
410	169	430	169	450	81	470	169	490	169
411	81	4311	1	451	1	471	81	491	169
412	169	432	81	452	169	472	169	492	81
413	1	433	1	453	81	473	169	493	169
414	81	434	169	454	169	474	81	494	1
415	1	435	81	455	169	475	169	495	81
416	169	436	169	456	81	476	1	496	1
417	81	437	169	457	169	477	81	497	169
418	169	438	81	458	1	478	1	498	81
419	169	439	169	459	81	479	169	499	169
420	81	440	1	460	1	480	81	500	169
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
501	81	521	1	541	1	561	81	581	169
502	169	522	81	542	169	562	169	582	81
503	1	523	1	543	81	563	169	583	169
504	81	524	169	544	169	564	81	584	1
505	1	525	81	545	169	565	169	585	81
506	169	526	169	546	81	566	1	586	1
507	81	527	169	547	169	567	81	587	169
508	169	528	81	548	1	568	1	588	81
509	169	529	169	549	81	569	169	589	169
510	81	530	1	550	1	570	81	590	169
511	169	531	81	551	169	571	169	591	81
512	1	532	1	552	81	572	169	592	169
513	81	533	169	553	169	573	81	593	1
514	1	534	81	554	169	574	169	594	81
515	169	535	169	555	81	575	1	595	1
1516	81	536	169	556	169	576	81	596	169
517	169	537	81	557	1	577	1	597	81
518	169	538	169	558	81	578	169	598	169
519	81	539	1	559	1	579	81	599	169
520	169	540	81	560	169	580	169	600	81
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
601	169	621	81	641	169	661	169	681	81
602	1	622	1	642	81	662	169	682	169
603	81	623	169	643	169	663	81	683	1

604	1	624	81	644	169	664	169	684	81
605	169	625	169	645	81	665	1	685	1
606	81	626	169	646	169	666	81	686	169
607	169	627	81	647	1	667	1	687	81
608	169	628	169	648	81	668	169	688	169
609	81	629	1	649	1	669	81	689	169
610	169	630	81	650	169	670	169	690	81
611	1	631	1	651	81	671	169	691	169
612	81	632	169	652	169	672	81	692	1
613	1	633	81	653	169	673	169	693	81
614	169	634	169	654	81	674	1	694	1
615	81	635	169	655	169	675	81	695	169
616	169	636	81	656	1	676	1	696	81
617	169	637	169	657	81	677	169	697	169
618	81	638	1	658	1	678	81	698	169
619	169	639	81	659	169	679	169	699	81
620	1	640	1	660	81	680	169	700	169
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
701	1	721	1	741	81	761	169	781	169
702	81	722	169	742	169	762	81	782	1
703	1	723	81	743	169	763	169	783	81
704	169	724	169	744	81	764	1	784	1
705	81	725	169	745	169	765	81	785	169
706	169	726	81	746	1	766	1	786	81
707	169	727	169	747	81	767	169	787	169
708	81	728	1	748	1	768	81	788	169
709	169	729	81	749	169	769	169	789	81
710	1	730	1	750	81	770	169	790	169
711	81	731	169	751	169	771	81	791	1
712	1	732	81	752	169	772	169	792	81
713	169	733	169	753	81	773	1	793	1
714	81	734	169	754	169	774	81	794	169
715	169	735	81	755	1	775	1	795	81
716	169	736	169	756	81	776	169	796	169
717	81	737	1	757	1	777	81	797	169
718	169	738	81	758	169	778	169	798	81
719	1	739	1	759	81	779	169	799	169
720	81	740	169	760	169	780	81	800	1
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果

801	81	821	169	841	169	861	81	881	1
802	1	822	81	842	169	862	169	882	81
803	169	823	169	843	81	863	1	883	1
804	81	824	169	844	169	864	81	884	169
805	169	825	81	845	1	865	1	885	81
806	169	826	169	846	81	866	169	886	169
807	81	827	1	847	1	867	81	887	169
808	169	828	81	848	169	868	169	888	81
809	1	829	1	849	81	869	169	889	169
810	81	830	169	850	169	870	81	890	1
811	1	831	81	851	169	871	169	891	81
812	169	832	169	852	81	872	1	892	1
813	81	833	169	853	169	873	81	893	169
814	169	834	81	854	1	874	1	894	81
815	169	835	169	855	81	875	169	895	169
816	81	836	1	856	1	876	81	896	169
817	169	837	81	857	169	877	169	897	81
818	1	838	1	858	81	878	169	898	169
819	81	839	169	859	169	879	81	899	1
820	1	840	81	860	169	880	169	900	81
正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果	正整數	計算結果
901	1	921	81	941	169	961	169	981	81
902	169	922	169	942	81	962	1	982	1
903	81	923	169	943	169	963	81	983	169
904	169	924	81	944	1	964	1	984	81
905	169	925	169	945	81	965	169	985	169
906	81	926	1	946	1	966	81	986	169
907	169	927	81	947	169	967	169	987	81
908	1	928	1	948	81	968	169	988	169
909	81	929	169	949	169	969	81	989	1
910	1	930	81	950	169	970	169	990	81
911	169	931	169	951	81	971	1	991	1
912	81	932	169	952	169	972	81	992	169
913	169	933	81	953	1	973	1	993	81
914	169	934	169	954	81	974	169	994	169
915	81	935	1	955	1	975	81	995	169
916	169	936	81	956	169	976	169	996	81
917	1	937	1	957	81	977	169	997	169
918	81	938	169	958	169	978	81	998	1

919	1	939	81	959	169	979	169	999	81
920	169	940	169	960	81	980	1	1000	1

## 伍、研究結果

- 一、平方的和：連續算每個數(1~10000)的數字平方後的和，計算結果為 1 或 4。
- 二、和的平方：連續算每個數(1~10000)的數字和後的平方，計算結果為 1 或 81 或 169。

## 陸、討論

- 一、平方的和：經過計算的結果均會為 1 或 4。

(一)哪些數的平方之和經過計算的結果會為1? 他們之間有何特別關係?

結果： 1~ 1000 之中有 140 個數，1001~2000 之中有 136 個數，  
 2001~3000 之中有 137 個數，3001~4000 之中有 118 個數，  
 4001~5000 之中有 108 個數，5001~6000 之中有 148 個數，  
 6001~7000 之中有 112 個數，7001~8000 之中有 130 個數，  
 8001~9000 之中有 127 個數，9001~10000 之中有 164 個數的計算結果為 1。

每一個區間的數，大都有一百多個數計算結果為 1，但這些數彼此沒有特別關係。

(二)哪些數的和之平方經過計算的結果為4。? 他們之間有何特別關係?

結果：每一個區間的數，計算的結果為4的數比計算的結果為1的數還要來的多，但這些數彼此沒有特別關係。

(三)在計算的過程中可以發現，數值之間有著些許關聯，將數值之間的關係以下圖表示：

1. 經過計算的結果為1：

								23											
								↓											
								13	←	32	←	44							
								↓											
7	→	49	→	97	→	130	→	10	→	1									
								↑		↑									
								31		100	←	68	←	82	←	19			
												↑							
												28							

2. 經過計算的結果為4：

								3	→	9	←	30								
										↓										
										81	←	90	←	39						
										↓										
						22		18	→	65	←	47								
						↓		↑		↓										
						8		33		61										
						↓				↓										
			48	→	80	→	64			37	←	16	←	40	←	26	←	15		
						↓				↓										
						52	←	46		58	←	73	←	38						
						↓				↓		↑								
			14			29	→	85	→	89		83						2	←	11
			↓			↑				↓								↓		
41	→	17	→	50	→	25	←	43		145	→	42	→	20	→	4				
↑					↗	↑								↑						
45		35	→	34		5	←	12						24						
↑				↑		↑														
36				53		21														
↑				↑																
6				27																

二、和的平方：經過計算的結果均會為1或81或169。

(一) 哪些數的和之平方經過計算的結果會為1? 他們之間有何特別關係?

1. 經過計算的結果會為 1 的數，形成間隔差距為 2 和 7 的數列。

1、8、10、17、19、26 ..... 9980、9982、9989、9991、9998、10000

∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

7 2 7 2 7 2 7 2 7 2

2. 若將上列數列分成兩群，皆可形成公差為 9 的等差數列。

(1) 1、10、19.....9980、9989、9998  $\Rightarrow$  一般式： $a_n = 1+(n-1) \times 9 = 9n-8$

∨ ∨ ∨ ∨  
9 9 9 9

(2) 8、17、26.....9982、9991、10000  $\Rightarrow$  一般式： $a_n = 8+(n-1) \times 9 = 9n-1$

∨ ∨ ∨ ∨  
9 9 9 9

(二)那些數的和之平方經過計算的結果會為81? 他們之間有何特別關係?

◎都是3的倍數，可形成公差為3的等差數列。

3、6、9、12.....9990、9993、9996、9999

∨ ∨ ∨ ∨ ∨  
3 3 3 3 3

$\Rightarrow$  一般式： $a_n = 3n$

(三) 哪些數的和之平方經過計算的結果會為169? 他們之間有何特別關係?

1. 可形成以下規律的數列。

2、 4、 5、 7、 11、 13.....9986、 9988、 9992、 9994、 9995、 9997

$\begin{array}{cccccccccccc} \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}$

2. 若將上列數列分成四群，皆可形成公差為9的等差數列。

(1) 2、 11、 20.....9974、 9983、 9992  $\Rightarrow$  一般式： $a_n = 2+(n-1)\times 9=9n-7$

$\begin{array}{cccc} \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$

(2) 4、 13、 22.....9976、 9985、 9994  $\Rightarrow$  一般式： $a_n = 4+(n-1)\times 9=9n-5$

$\begin{array}{cccc} \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$

(3) 5、 14、 23.....9977、 9986、 9995  $\Rightarrow$  一般式： $a_n = 5+(n-1)\times 9=9n-4$

$\begin{array}{cccc} \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$

(4) 7、 16、 25.....9979、 9988、 9997  $\Rightarrow$  一般式： $a_n = 7+(n-1)\times 9=9n-2$

$\begin{array}{cccc} \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle & \sphericalangle \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$

(四) 觀察 1~10000 之間經過計算的結果，我們發現這些結果，每 9 個數字循環一次，以下

是他們各自的循環：

1. 1~1000 : 1、 169、 81、 169、 169、 81、 169、 1、 81
2. 1001~2000 : 169、 81、 169、 169、 81、 169、 1、 81、 1
3. 2001~3000 : 81、 169、 169、 81、 169、 1、 81、 1、 169
4. 3001~4000 : 169、 169、 81、 169、 1、 81、 1、 169、 81
5. 4001~5000 : 169、 81、 169、 1、 81、 1、 169、 81、 169
6. 5001~6000 : 81、 169、 1、 81、 1、 169、 81、 169、 169
7. 6001~7000 : 169、 1、 81、 1、 169、 81、 169、 169、 81
8. 7001~8000 : 1、 81、 1、 169、 81、 169、 169、 81、 169
9. 8001~9000 : 81、 1、 169、 81、 169、 169、 81、 169、 1



10. 9001~10000 : 1、169、81、169、169、81、169、1、81

(五)先將 1~10000 的數平方，再把平方後每一位數加起來，經過統計之後，共出現三種結果。

1. 平方後每一位數加起來可出現 1、10、19、28、37、46，這六個數經計算後結果為 1，而這六個數剛好形成公差 9 的等差數列。
2. 平方後每一位數加起來可出現 9、18、24、27、36，這五個數經計算後結果為 81，而這五個數皆為 9 的倍數，24 除外。
3. 平方後每一位數加起來可出現 7、13、16、21、22、25、31、32、34、40、43，這十一個數經計算後結果為 169。

## 柒、結論

在 1~10000 的數字中，我們尋找和的平方、平方的和之關係。發現「平方的和」中經過計算後的結果為 1 或 4，但沒有發現規律；「和的平方」中經過計算後的結果為 1 或 81 或 169，有其一定的規律。大多呈現等差數列的型態，特別是出現多個以 9 為公差的等差數列，我們更發現當中的計算後的數值會以 9 個數為一個循環。很巧的是無論是循環數，還是等差數列的公差都與「9」有關係。

## 捌、參考資料及其他

◎宜蘭縣壯圍國中 102 年度數學科展作品：『真環』傳。

◎《等差數列》：國中選修數學課本第四冊第一章，南一版，民國一零二年二月。

## 【評語】 030404

關於 happy number 的討論。作者們針對 1 到 10000 的數字做了大量的計算，得出了每一個初始數字再經過有限次操作後，結果不是 1，就是落入一個以數字 4 開始的一串循環數字鏈的結論。針對另一個類似的問題，作者們也根據觀察，歸納出結論。兩個問題其實都已經有結果了(關於 happy number 的分布是個困難的問題，還沒有結論)。作者們能透過歸納推論出結論，已經踏出了從事研究工作的第一步。如果能進一步的思考潛藏在規律背後的道理，並給出清楚的論述，將會更好。(事實上，任給一個初始數字，我們應該可以很快說明在經過一次操作後，得出的新數字是會比原來的數字小的。因為當時...)(可以參考 46 屆全國中小學科展國中組作品「漩渦鳴人-次方和黑洞的探討」)