中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030403

n×*n* 方格中的正方形

學校名稱：連江縣立中山國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳昱廷 國二 陳靖 國二 劉子瑋	陳其光

關鍵詞：數與形之規律、平面圖之正方形個數

摘要

在 n×n 的平面方格內討論邊長、形狀不同的正方形個數，研究過程中將觀察到的規律歸納成一般式。

壹、研究動機

在一次課堂活動中，我們藉由遊戲來增加我們學習的樂趣，在規定的方格中盡可能圍出最多的正方形，正方形不但可依水平線及鉛直線圍，也可以斜著圍，到底最多能圍幾個呢？是否有規律，能快速計算出所有可能的情形呢？隨著研究、討論，我們運用所學數學知識，開始了這次數學之旅。

貳、研究目的

一、尋找 n×n 平面方格所能圍成的不同形狀、邊長的正方形個數。

二、尋找可能的正方形邊長及面積。

三、推導出正方形數量的一般式。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Microsoft Word、GeoGebra、釘板、橡皮筋

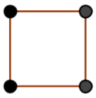
肆、研究過程或方法

定義 1：n×n 方格

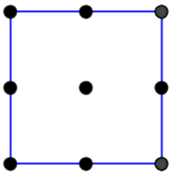
n×n 方格是指邊長單位為 n 的正方形圖形，其每個邊上有（n+1）個點。

例如：1×1 方格是指邊長單位為 1 的正方形圖形，每個邊上有 2 個點，如下圖(1)

2×2 方格是指邊長單位為 2 的正方形圖形，每個邊上有 3 個點，如下圖(2)



圖(1)

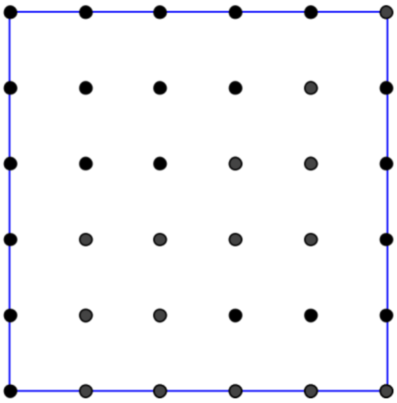


圖(2)

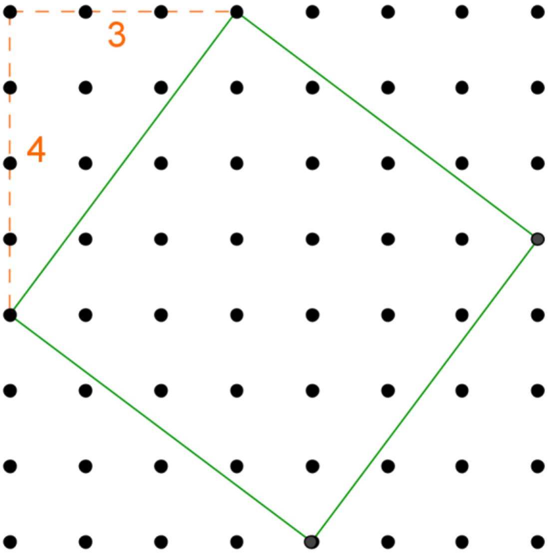
定義 2：斜正方形

n×n 方格中，我們除了可以圍出四邊均為水平線或鉛直線的正方體外，亦可圍出四邊不為水平或鉛直線的正方形，這些有傾斜角度的正方形，我們姑且稱之為斜正方形，即使與正方形的邊長相同，我們仍視為不同款的正方形加以計數。

例如：圖(3)為邊長為 5 的正方形，圖(4)由勾股定理亦可計算出斜邊為 5，我們稱圖(4)為邊長為 5 的斜正方形，視為不同的正方形來計數。



圖(3)



圖(4)

定義 3：最小方格數

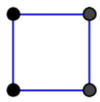
我們稱要圍出這個正方形所需的方格邊長最小值為最小方格數，例如上圖(3)中的正方形在 5×5 以上的方格中可圍出，而上圖(4)中的正方形至少需在 7×7 的方格中才能圍出來。

一、找出二維平面的 n×n 方格中邊長不同的正方形個數

我們最初的問題是在 5×5 的方格中，最多能找出幾種邊長不同的正方形，我們試著透過仔細觀察，慢慢去找，從最小邊數的方格開始，設法找出其中的規律和公式。

(一)探討 1×1 方格至 10×10 方格中邊長不同的正方形個數

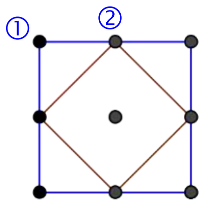
1. 探討 1×1 方格中邊長不同的正方形個數



只有一種，邊長為 1

2. 探討 2×2 方格中邊長不同的正方形個數

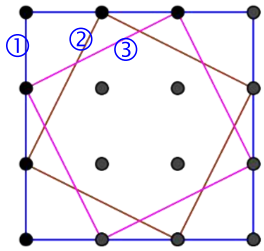
為方便起見，以下僅列出增加的正方形個數。



編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	2	2×2＝4	2×2
②	以 1、1 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	$1^2+1^2=2$	2×2

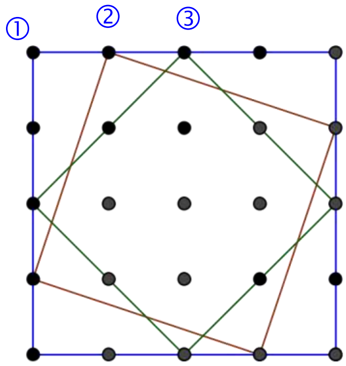
3. 探討 3×3 方格中邊長不同的正方形個數

其中②、③的邊長都是 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以算是同一種。



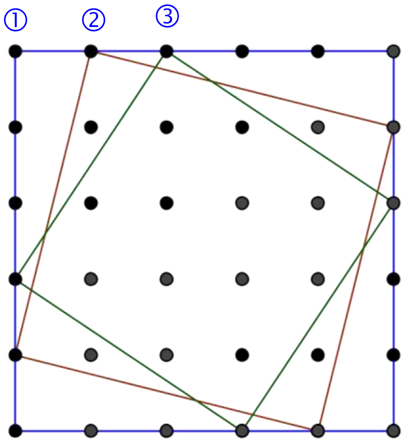
編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	3	3×3＝9	3×3
②	以 1、2 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$	$1^2+2^2=5$	3×3

4. 探討 4×4 方格中邊長不同的正方形個數



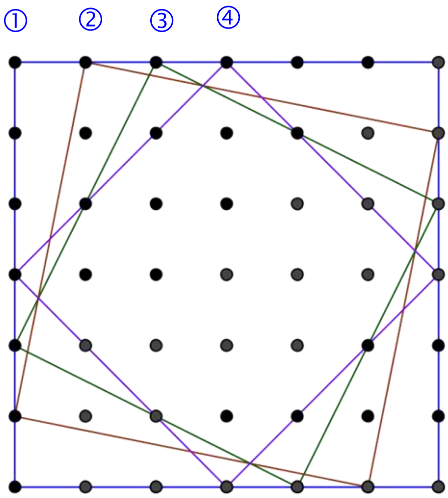
編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	4	4×4＝16	4×4
②	以 1、3 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$	$1^2+3^2=10$	4×4
③	以 2、2 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$	$2^2+2^2=8$	4×4

5. 探討 5×5 方格中邊長不同的正方形個數



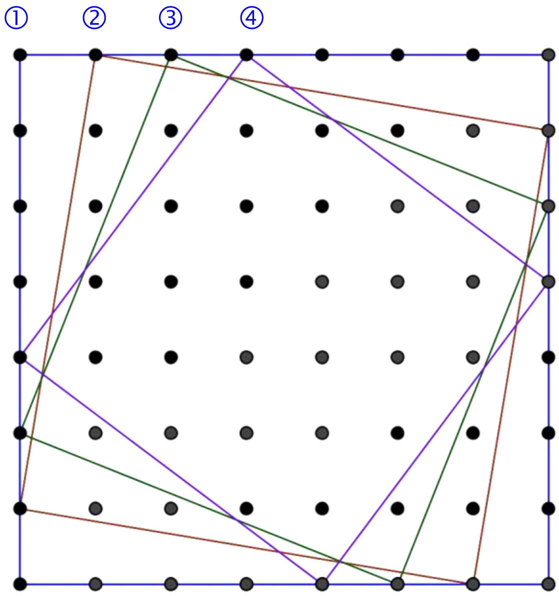
編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	5	5×5＝25	5×5
②	以 1、4 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$	$1^2+4^2=17$	5×5
③	以 2、3 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$	$2^2+3^2=13$	5×5

6. 探討 6×6 方格中邊長不同的正方形個數



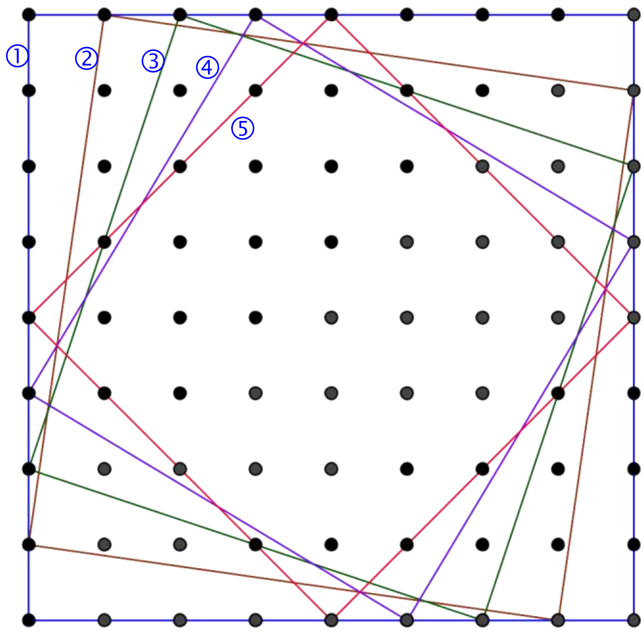
編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	6	6×6＝36	6×6
②	以 1、5 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$	$1^2+5^2=26$	6×6
③	以 2、4 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$	$2^2+4^2=20$	6×6
④	以 3、3 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$	$3^2+3^2=18$	6×6

7. 探討 7×7 方格中邊長不同的正方形個數



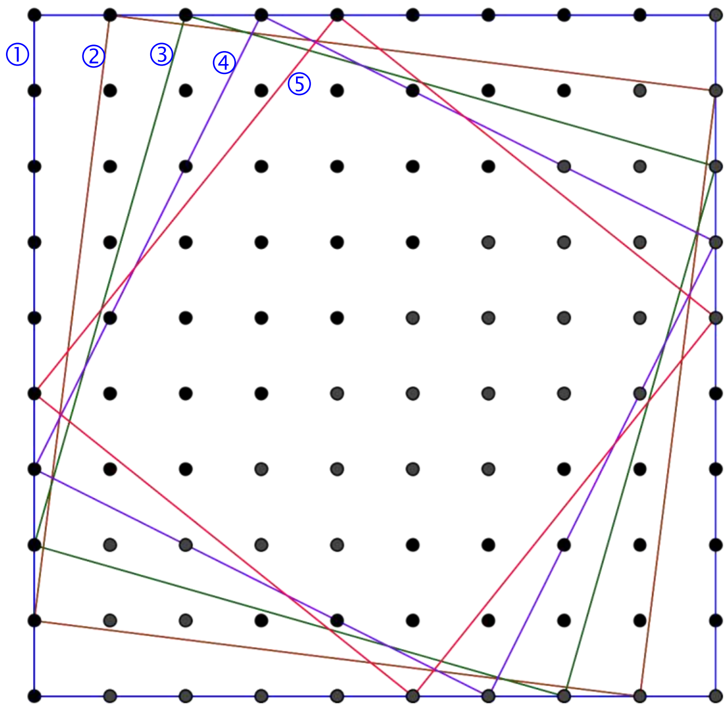
編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	7	7×7＝49	7×7
②	以 1、6 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$	$1^2+6^2=37$	7×7
③	以 2、5 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$	$2^2+5^2=29$	7×7
④	以 3、4 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{3^2+4^2}=5$	$3^2+4^2=25$	7×7

8. 探討 8×8 方格中邊長不同的正方形個數



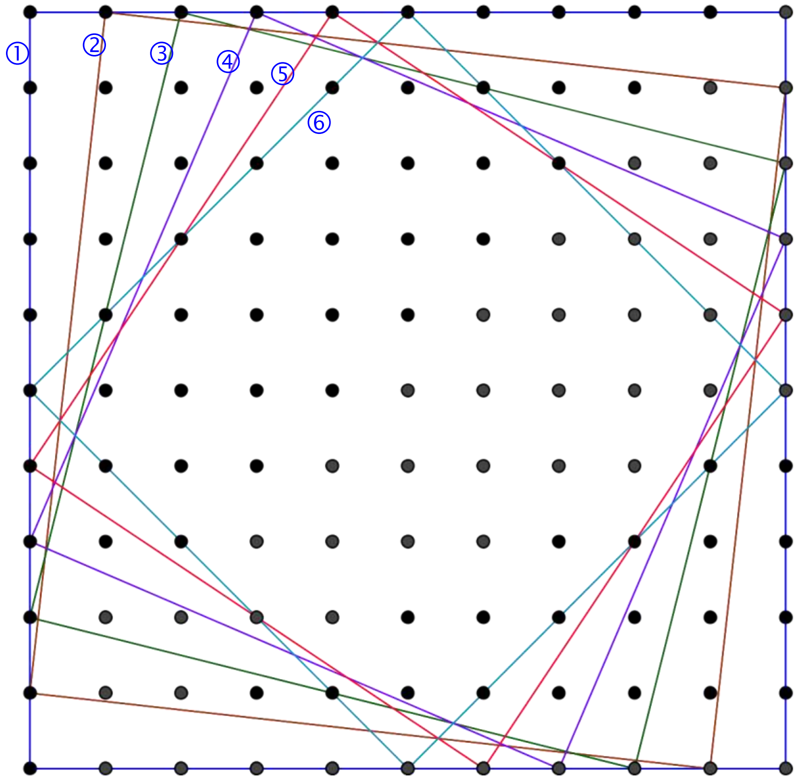
編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	8	8×8＝64	8×8
②	以 1、7 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$	$1^2+7^2=50$	8×8
③	以 2、6 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$	$2^2+6^2=40$	8×8
④	以 3、5 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$	$3^2+5^2=34$	8×8
⑤	以 4、4 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}$	$4^2+4^2=32$	8×8

9. 探討 9×9 方格中邊長不同的正方形個數



編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	9	9×9＝81	9×9
②	以 1、8 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$	$1^2+8^2=65$	9×9
③	以 2、7 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$	$2^2+7^2=53$	9×9
④	以 3、6 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$	$3^2+6^2=45$	9×9
⑤	以 4、5 為兩股的直角三角形斜邊，即 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$	$4^2+5^2=41$	9×9

10. 探討 10×10 方格中邊長不同的正方形個數



編號	正方形邊長	正方形面積	最小方格數需求
①	10	10×10＝100	10×10
②	以 1、9 為兩股的直角三角形斜邊，即$\sqrt{1^2+9^2}=\sqrt{82}$	$1^2+9^2=82$	10×10
③	以 2、8 為兩股的直角三角形斜邊，即$\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}$	$2^2+8^2=68$	10×10
④	以 3、7 為兩股的直角三角形斜邊，即$\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}$	$3^2+7^2=58$	10×10
⑤	以 4、6 為兩股的直角三角形斜邊，即$\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$	$4^2+6^2=52$	10×10
⑥	以 5、5 為兩股的直角三角形斜邊，即$\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}$	$5^2+5^2=50$	10×10

(二)推測 n×n 方格中邊長不同的正方形個數

將以上的數據資料整理如下：

	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
增加的正方形數	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
正方形總數	1	3	5	8	**11**	15	19	24	29	**35**

1.當 n 為奇數時，n×n 方格中可圍成的正方形數較 (n－1)×(n－1) 方格增加$(\frac{n+1}{2})$個正方形，與前項相同，所以正方形總數為

$$1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+......+\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}$$

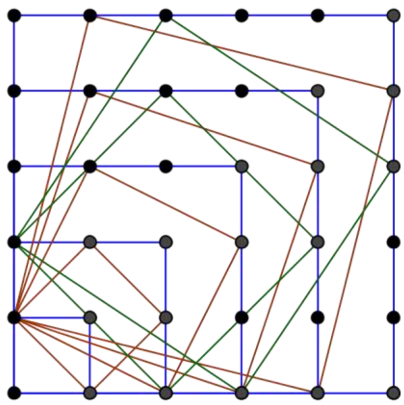
$$=（1+2+3+4+5+6+......+\frac{n+1}{2}）+（2+3+4+5+6+......+\frac{n+1}{2}）$$

$$=2\times（1+2+3+4+5+6+......+\frac{n+1}{2}）-1$$ 兩個等差級數

$$=2\times\frac{\frac{n+1}{2}(\frac{n+1}{2}+1)}{2}-1$$ 等差級數和的公式

$$=\frac{n+1}{2}\times\frac{n+3}{2}-1$$

例如 1：n＝5 時，5×5 的方格中共可圍出$\frac{5+1}{2}\times\frac{5+3}{2}-1=11$個邊長相異的正方形，如下圖所示



2.當 n 為偶數時，n×n 方格中可圍成的正方形數較 $(n-1)\times(n-1)$ 方格增加 $(\frac{n}{2}+1)$ 個正方形，較前項多 1，所以正方形總數為

$$1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+\ldots\ldots+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}+1)$$

$$=(1+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+\frac{n}{2})+(2+3+4+5+6+\ldots\ldots+\frac{n}{2})+(\frac{n}{2}+1)$$

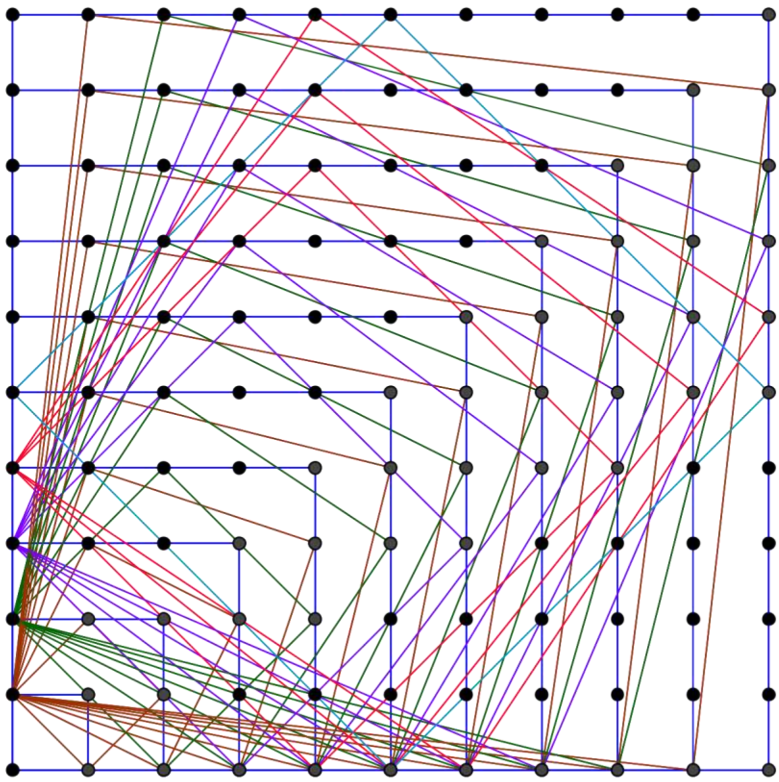
$$=2\times(1+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+\frac{n}{2})+\frac{n}{2}$$ 兩個等差數數

$$=2\times\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2}+\frac{n}{2}$$ 等差級數和的公式

$$=\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)+\frac{n}{2}$$

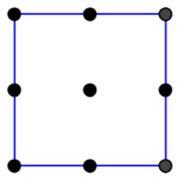
$$=\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+2)$$

例如 2：n＝10 時，10×10 的方格中共可圍出 $\frac{10}{2}(\frac{10}{2}+2)=35$ 個邊長相異的正方形，如下圖所示

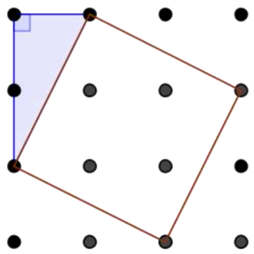


二、尋找可能的正方形邊長及面積。

另外我們也發現，能夠在方格中圍出來的正方形，其邊長必定是正整數或兩股為整數的直角三角形斜邊，如下圖是邊長為 2 的正方形



邊長為以 1、2 為兩股的直角三角形斜邊，此斜正方形的面積為此三角形的兩股平方和，最小方格數需求為 1+2=3，即 3×3 方格。



因此以 10×10 方格中所能拼出的所有斜正方形，資料如下：

兩股長	以兩股長為邊長的正方形面積	斜邊（正方形邊長）	正方形面積	最小方格數需求
1、1	1、1	$\sqrt{2}$	2	2
2、1	4、1	$\sqrt{5}$	5	3
2、2	4、4	$\sqrt{8}$	8	4
3、1	9、1	$\sqrt{10}$	10	4
3、2	9、4	$\sqrt{13}$	13	5
4、1	16、1	$\sqrt{17}$	17	5
3、3	9、9	$\sqrt{18}$	18	6
4、2	16、4	$\sqrt{20}$	20	6
5、1	25、1	$\sqrt{26}$	26	6
4、3	16、9	$\sqrt{25}$	25	7
5、2	25、4	$\sqrt{29}$	29	7
6、1	36、1	$\sqrt{37}$	37	7
4、4	16、16	$\sqrt{32}$	32	8
5、3	25、9	$\sqrt{35}$	35	8
6、2	36、4	$\sqrt{40}$	40	8
7、1	49、1	$\sqrt{50}$	50	8

兩股長	以兩股長為邊長的正方形面積	斜邊（正方形邊長）	正方形面積	最小方格數需求
5、4	25、16	$\sqrt{41}$	41	9
6、3	36、9	$\sqrt{45}$	45	9
7、2	49、4	$\sqrt{53}$	53	9
8、1	64、1	$\sqrt{65}$	65	9
5、5	25、25	$\sqrt{50}$	50	10
6、4	36、16	$\sqrt{52}$	52	10
7、3	49、9	$\sqrt{58}$	58	10
8、2	64、4	$\sqrt{68}$	68	10
9、1	81、1	$\sqrt{82}$	82	10

並不是所有整數面積的正方形都能在方格中圍出來，例如面積是 3，邊長是$\sqrt{3}$的正方形就圍不出來，能夠在方格中圍出來的正方形面積，除本身就是一個完全平方數外，如：1、4、9、16、25、…等數，若能拆成兩個完全平方數的和，則亦可在方格中圍出來，如：面積為 41 的正方形，因 41=16＋25，而 16 和 25 都是完全平方數，所以能在方格中圍出面積為 41 的正方形，又 $\sqrt{16}=4$ ，$\sqrt{25}=5$ ，4＋5＝9，所以需要 9×9 的方格，才能圍出面積為 41 的正方形。

伍、研究結果

一、在 n×n 的方格中，能夠圍出許多大小不同的正方形，有些邊長為整數，有些邊長為無理數。

二、在 n×n 的方格中，能夠圍出許多大小不同的正方形，其數量有其規律性：

(一)當 n 為奇數時，能夠圍出 $\frac{n+1}{2}\times\frac{n+3}{2}-1$ 個正方形。

(二)當 n 為偶數時，能夠圍出 $\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+2)$ 個正方形

三、不是所有整數面積的正方形都能在方格中圍出來，必需符合下列其中之一，才能在方格中圍出相應面積的正方形。

(一)面積為完全平方數，則邊長為正整數。

(二)面積能分成兩個完全平方數的和。

四、圍成一個斜正方形，往往需要比它邊長更大的方格，若 a、b 為正整數，要圍出一個面積為 a^2+b^2 的正方形，則最少需要（a+b）×（a+b）的方格，才能完成。

陸、討論

一、看似平凡的方格，也能有神奇的效果，圍出許多邊長為無理數的正方形，研究過程中，我們循序漸進，順利發現其中的規律，也得到數量的一般式，讓我們感到開心。過程中，我們計算不同大小的正方形面積，然而我們也發現斜正方形的面積有可能剛好是完全平方數，如$3^2+4^2=5^2$，這樣就會發生面積相同的情形，為使規律明確，我們將之視為不同的正方形來計數，若視為相同的正方形，那麼規律將有所改變，這將是我們需再努力的地方。

二、n×n 的方格中不僅可以圍出正方形，也可圍出其他常見的幾何點形，如三角形、長方形、平行四邊形、梯形等，這或許可以是我們未來研究討論的方向。

柒、結論

研究結果讓我們在 n×n 的方格中圍出不同正方形有了明確的依據與方法，也解決了心中的一些疑惑，雖然又產生了一些其他的疑惑，但這也是促使我們繼續追求新知的動力。

捌、參考資料及其他

翰林版國中數學第三冊、第四冊

【評語】030403

探討正方形內，依特殊規定分類出的正方形的種類數。對此問題給出了解答。問題稍嫌簡單，定義也讓人有點糊塗。在作者們的定義中，兩正方形即使邊長相同，只要擺放的傾斜角度不同就被視為不同（例如：在邊長 8 的子正方形中，邊長為 50 的斜正方形，和邊長 10 的正方形中，邊長為 50 的斜正方形，被視為不同的正方形），這樣的定義有點怪，也大大降低了問題的難度。去除掉這個限制後的問題雖然難度提高了許多，但也更有挑戰性和研究價值，如果能朝這樣的方向努力會更好。