中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030402

廣義3階魔方陣之研究

學校名稱：桃園市立青溪國民中學

作者：	指導老師：
國二 曾子耆 國二 簡士源	萬台青

關鍵詞：魔方陣、數列

摘要

一.找出廣義 3 階魔方分 5 型各別計其數 $M_A(t)$，$M_{B_1}(t)$，$M_{B_2}(t)$，$M_C(t)$及 $M_D(t)$ 將排和 t 依序由 0，3，6，…到 144 表列此 5 型數量，及衍生之 H(t)，M(t)，S(t)，$S_B(t)$，$S_C(t)$，$S_D(t)$數量。

二.用二次函數假定或階差數列求和，推測 H(t)及 M(t)公式，導出 S(t)公式。

三.用位元分析：(一)推出 $M_A(t)$，$M_B(t)$及 $M_C(t)$公式。(二)掌握 D 型特徵，但暫用階差數列推測 $M_D(t)$公式。(三)推出 H(t)公式。(四)藉 $M_A(t)$，$M_B(t)$，$M_C(t)$及 H(t)論證 $M_D(t)$公式與(二)的推測吻合。(五)藉 $M_A(t)$，$M_B(t)$，$M_C(t)$，$M_D(t)$ 推出 M(t)公式符合先前推測。(六)附帶推算 $S_B(t)$，$S_C(t)$，$S_D(t)$公式。

四.討論延伸至 4 階魔方的作法，並探索用 3 階建構 6 階及 9 階。

壹.研究動機

從一次方程式的題目中，發現 3 階魔方陣的填字遊戲，當題目條件做各種變化，常產生具有挑戰性的難題，所以激起想要徹底了解 3 階魔方陣的念頭。

貳.研究目的

在特定條件下找所有 3 階魔方陣並推演魔方陣個數的公式。

叁.研究設備及器材

紙、筆、電腦、方格紙

肆.研究方法及步驟

一.介紹

(一)傳統 3 階魔方陣有 8 個，其中最著名的一個是

A=

8	1	6
3	5	7
4	9	2

其餘 7 個可由它翻轉(含旋轉)得到。它還以不同方式出現在洛書中。

(二)定義:A 的每一個數稱作位元〈entry〉,列數〈或行數〉稱為階〈order〉

(三)廣義三階魔方陣〈簡稱魔方〉有一種定義如下:位元限制在非負整數中，使各行、各列、各對角 3 位元的和〈稱排和 line sum〉彼此相等。 註: 1. 傳統魔方排和為 15 2.此定義容許位元數字重複

(四)本文目的在建構上述魔方，並得出計數公式。

(五)我們感謝指導老師的細心指導，他帶領我們逐步了解魔方的世界，不但得到相當的結果，也得到許多研究數學的方法。

二.分析排和 t=0，3，6，9，12 時各型魔方(經翻轉相同則視為同一類型)。

(一)t=0，個數為 1，類型為 1，此型位元皆相同(都是 0)，稱作 A 型，翻轉無法產生新魔方。

(二)t=3，個數為 1+4=5，類型為 1+1=2，

1	1	1
1	1	1
1	1	1

A

及

1	2	0
0	1	2
2	0	1

B_1

2	0	1
0	1	2
1	2	0

B_1

1	0	2
2	1	0
0	2	1

B_1

0	2	1
2	1	0
1	0	2

B_1

後 4 個其位元為 3 數各出現 3 次，稱作 B_1 型，由同一組數字 0，1，2 形成，有一條對稱軸，其中 1 個經翻轉可得另外 3 個，所以以下例子中，此 B_1 型(及它型)同組數字只列出一個，若計翻轉須乘 4 倍。

(三)t=6，個數為 1+4×3=13，類型為 1+2+1=4，

2	2	2
2	2	2
2	2	2

A

3	1	2
1	2	3
2	3	1

B_1

4	0	2
0	2	4
2	4	0

B_1

及

3	0	3
2	2	2
1	4	1

B_2

B_2 型位元出現 5 種數字，有對稱軸，翻轉得 4 個。

(四) t=9，個數為 1+4×4+8=25，類型為 1+3+1+1=6，

3	3	3
3	3	3
3	3	3

A

3	4	2
2	3	4
4	2	3

B_1

1	5	3
5	3	1
3	1	5

B_1

0	6	3
6	3	0
3	0	6

B_1

2	5	2
3	3	3
4	1	4

B_2

及

1	6	2
4	3	2
4	0	5

C

C 型位元數字有 7 種，翻轉得 8 個。

(五)t=12，個數為 1+4×6+8×2=41，類型為 1+4+2+1+1=9

4	4	4
4	4	4
4	4	4

A

4	5	3
3	4	5
5	3	4

B_1

4	6	2
2	4	6
6	2	4

B_1

4	7	1
1	4	7
7	1	4

B_1

4	8	0
0	4	8
8	0	4

B_1

6	0	6
4	4	4
2	8	2

B_2

5	2	5
4	4	4
3	6	3

B_2

6	1	5
3	4	5
3	7	2

C

及

7	0	5
2	4	6
3	8	1

D

最後一型位元皆相異，翻轉得 8 個，稱作 D 型。

(六)上述魔方在排和 t 時，其中心位元必為 t/3，其一般情形可論證如下: 給定排和為 t 之魔方，取 3 個排和含 e 的等式: $\begin{cases} a+e+i=t \\ d+e+f=t \\ c+e+g=t \end{cases}$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

3 式相加，得(a+d+g)+3e+(i+f+c)=3t，3e=t，即 e=t/3 得證。

註:在對更大的 t 計算時，此性質省力不少，此也顯示 t 必為 3 的非負整數倍。

三.表列數據:對排和 t=0，3，6，…，144，我們已找出所有類型魔方(總型數 10725，限於篇幅僅列出部分於附錄中)，用來推測公式已足夠，至於 t＞144 的例子也可找出，但後續將對任意 t=3n 論證，故不須再多舉例。下表包含:

(一)類型數量:(即不計翻轉)$M_A(t)$，$M_{B1}(t)$，$M_{B2}(t)$，$M_C(t)$及 $M_D(t)$。

(二)型數總和 H(t)。

(三)個數總和 M(t) (即翻轉也算)。

(四)累積個數總和 S(t) (即排和≦t，翻轉也算)。

(五)各型數累積 $S_B(t)$，$S_C(t)$及 $S_D(t)$(其中 B 代表 B_1，B_2的和)。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
t	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
B_2	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11
C	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7
D	0	0	0	0	1	3	4	7	10	13	17	22	26	32	38	44	51	59	66	75	84	93	103	114
M(t)	1	5	13	25	41	61	85	113	145	181	221	265	313	365	421	481	545	613	685	761	841	925	1013	1105
H(t)	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90	100	110	121	132	144	156

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
t	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_1	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
B_2	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
C	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11
D	124	136	148	160	173	187	200	215	230	245	261	278
M(t)	1201	1301	1405	1513	1625	1741	1861	1985	2113	2245	2381	2521
H(t)	169	182	196	210	225	240	256	272	289	306	324	342

n	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
t	108	111	114	117	120	123	126	129	132	135	138	141	144
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_1	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
B_2	18	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24
C	12	12	12	13	13	13	14	14	14	15	15	15	16
D	294	312	330	348	367	387	406	427	448	469	491	514	536
M(t)	2665	2813	2965	3121	3281	3445	3613	3785	3961	4141	4325	4513	4705
H(t)	361	380	400	420	441	462	484	506	529	552	576	600	625

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
S(t)	1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	891	1156	1469	1834	2255
$S_B(t)$	0	1	4	8	14	21	30	40	52	65	80	96	114	133	154
$S_C(t)$	0	0	0	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30
$S_D(t)$	0	0	0	0	1	4	8	15	25	38	55	77	103	135	173

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
t	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81
S(t)	2736	3281	3894	4579	5340	6181	7106	8119	9224	10425	11726	13131	14644
$S_B(t)$	176	200	225	252	280	310	341	374	408	444	481	520	560
$S_C(t)$	35	40	45	51	57	63	70	77	84	92	100	108	117
$S_D(t)$	217	268	327	393	468	552	645	748	862	986	1122	1270	1430

n	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
t	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114
S(t)	16269	18010	19871	21856	23969	26214	28595	31116	33781	36594	39559
$S_B(t)$	602	645	690	736	784	833	884	936	990	1045	1102
$S_C(t)$	126	135	145	155	165	176	187	198	210	222	234
$S_D(t)$	1603	1790	1990	2205	2435	2680	2941	3219	3513	3825	4155

n	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
t	117	120	123	126	129	132	135	138	141	144
S(t)	42680	45961	49406	53019	56804	60765	64906	69231	73744	78449
$S_B(t)$	1160	1220	1281	1344	1408	1474	1541	1610	1680	1752
$S_C(t)$	247	260	273	287	301	315	330	345	360	376
$S_D(t)$	4503	4870	5257	5663	6090	6538	7007	7498	8012	8548

四.令 t=3n，n=0，１，２…，推測基礎公式 H(3n)，M(3n)，S(3n)及 E(6n):

(一) H(3n):

1. 1.n=2k 時，其數列為 1，4，9…，625，公式可推測為

$H[3(2k)]=(k+1)^2=k^2+2k+1$

2.n=2k+1 時，其數列為 2，6，12，…，600，公式可推測為

$H[3(2k+1)]=(k+1)(k+2)=k^2+3k+2$

註:此 2 式可整合為 $H[3(2k)]=k^2+(h+2)k+(h+1)$，h=0，1，稍後將論證。

(二)M(3n):數列為 1，5，13，25，…，4705，其 1 階差為等差數列 4，8，12，…192，直接假定 $M(3n)=an^2+bn+c$，代入 M(0)=1，M(3)=5，M(6)=13，得 c=1，a+b+c=5，4a+2b+c=13，解出 a=2，b=2，即 $M(t)=M(3n)=2n^2+2n+1$ 或$\frac{2}{9}t^2+\frac{2}{3}t+1$，將 n=0，1，2，…，48 代入皆成立，故可推測此公式對非負整數 n 皆成立。(稍後將論證)

(三)S(3n):

$S(3n)=\sum_{r=0}^{n} M(3r)=2\sum_{r=0}^{n} r^2+2\sum_{r=0}^{n} r+\sum_{r=0}^{n} 1=2[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]+2[\frac{n(n+1)}{2}]$

$+(n+1)=\frac{2}{3}n^3+2n^2+\frac{7}{3}n+1$

(四)E(6n):定義為限定位元為偶數(故排和為 6n)，翻轉也算。將位元皆除以 2，則得排和為 3n 之不限偶數者，故 E(6n)=M(3n)。

五.藉位元分析論證 $M_A(t)$，$M_B(t)$及 $M_C(t)$公式，並推測 $M_D(t)$公式:令 t=3n，n=0、1、2…

(一) $M_A(3n)$: A 型位元皆為 n，故 $M_A(3n)=1$

(二) $M_B(3n)$:1. B_1 型:位元為 3 數 n-d、n、n+d 各出現 3 次(見圖 1)，d 值可為 1、2…n，故 $M_{B1}(3n)=n$。

2. B_2 型:位元為 n 出現 3 次，n-d 及 n+d 各 2 次，n-2d 及 n+2d 各一次(見圖 2)，當(1)n=2k 時，d 值可為 1、2…、n/2。

(2) n=2k+1 時，d 值可為 1、2…(n-1)/2。可整合為 $M_{B2}(3n)=\lfloor n/2 \rfloor$，其中〔 〕為高斯符號(即〔x〕代表不大於x之最大整數)。

3.再將 B_1，B_2 整合為 B，即 $M_B(3n)= M_{B1}(3n)+ M_{B2}(3n)= n+\lfloor n/2 \rfloor$ 。

(三) $M_C(3n)$: C 型位元數字組合為 n-d 及 n+d 各出現 2 次，而 n、n-2d、n+2d、n-3d 及 n+3d 各一次(見圖 3)。分三種情形:

1. 在 n=3k 時，d 值可為 1、2、…k，此因在 d=k 時，最小位元 n-3d=0，而當 d>k，則出現負數。同理

2. n=3k+1 時，d 值可為 1、2、…k。

3.在 n=3k+2 時，d 值可為 1、2、…k。將其整合為 $M_C(3n)=\lfloor n/3 \rfloor$。

n	n+d	n-d
n-d	n	n+d
n+d	n-d	n

圖 1.B_1型

n+d	n-2d	n+d
n	n	n
n-d	n+2d	n-d

圖 2.B_2 型

n+2d	n-3d	n+d
n-d	n	n+d
n-d	n+3d	n-2d

圖 3.C 型

(四) $M_D(3n)$: D 型位元皆相異，令 a、b 為正整數，此型一般式可呈現如圖 4

n-a	n+a+b	n-b
n+a-b	n	n-a+b
n+b	n-a-b	n+a

圖 4.D 型

其位元需滿足下列條件:

1. 設定 a<b，以免因翻轉不計而重複計數。
2. 因共有 9 位元且又相異，其中位數排第 5 為 n，故排第 1 之最小位元 n-a-b 與 n 必相差至少 4，即 n-a-b≤n-4，得 a+b≥4。
3. 最大位元 n+a+b 加上中心位元 n，不能大於排和 3n，故 a+b≤n。
4. 因互不相等，故 n-a+b≠n-b 及 n+a，且 n+a-b≠n+b 及 n-a，推得 a≠2b 及 b≠2a，其他情形因 0< $a < b$顯然不相等。

將條件綜合為: 0< $a < b$，4≤a+b≤n 及 b≠2a。對 n=0，1，2，⋯，48，可驗證(n，a，b)組合數恰好等於 $M_D(3n)$，以 n=12 為例，其 (a，b)　組合為:(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)，(1，7)，(1，8)　，(1，9)，　(1，　10)，(1，11)，(2，3)，(2，5)，(2，6)，(2，7)，(2，8) (2，9)，(2，10)，(3，4)，(3，5)，(3，7)，(3，8)，(3，9)，(4，5)，(4，6)，(4，7)，(5，6)，(5，7)，總數 26 正好是 $M_D(36)$。

從組合數論證公式不容易，故先從數列趨勢推測，稍後再設法迂迴論證。

註:同一組數字對應一個類型魔方，此現象有待更嚴謹論證。

(五).藉階差數列推測 $M_D(3n)$公式: $M_D(3n)$數列 0,0,0,0,1,3,4,7,10,13,⋯

乍看無規律。再看其 1 階差數列 0,0,0,1,2,1,3,3,3,4,5,4⋯，

每隔 6 次呈現有規律的變化，例如第 1，7，13，⋯項為 0，3，6，⋯，故須將 n 分成 6k，6k+1，⋯，6k+5 共 6 種情形。

1. n=6k 時，令 $M_D[3(6k)]=a_k$，$b_i=a_i-a_{i-1}$，得 a_i 為 0，4，26，66，⋯536 而

b_i 為公差為 18 的等差數列 4，22，40，⋯，130，故

$\frac{k[8+18(k-1)]}{2}=\sum_{i=1}^{k} b_i=\sum_{i=1}^{k}(a_i-a_{i-1})$=$a_k$-$a_0$，即 $M_D[3(6k)]=9k^2-5k$

將 k=0，1，2，⋯7 代入皆成立。

2. n=6k+1 時，令 $M_D[3(6k)]=a_k$，其為數列 0，7，32，⋯，427，1 階差數列為 7，25，43，⋯115，直接假定 $M_D[3(6k+1)]=ak^2+bk+c$，將 a_0，a_1，a_2 前 3 組對應帶入得 c=0，a+b+c=7，4a+2b+c=32，解得 a=9，b=-2，c=0，即 $M_D[3(6k+1)]=9k^2-2k$，將 k=0，1，2，⋯，7 代入皆成立。

3. 仿用上述階差數列或二次函數假定，得到另 4 個推測如下:

(1) $M_D[3(6k+2)]=9k^2+k$ (2) $M_D[3(6k+3)]=9k^2+4k$

(2) $M_D[3(6k+4)]=9k^2+7k+1$ (4) $M_D[3(6k+5)]=9k^2+10k+3$

4. 這 6 個推測可整合為 $M_D[3(6k+h)]=9k^2+(3h-5)k+[(h-\frac{8}{5})^2/3]$，h=0，1，2，3，4，5，其作法是:分別觀察 k 值係數及常數項對 h 之函數對應，前者為線型，後者則是拼湊出來的。

六.論證 M(3n)公式：令 t=3n，n=0,1,2,....。

(一)論證 H(3n)：重新檢視圖 4. D 型之一般式，若放寬 a,b 的條件為：$0\le a\le b$ 及 $a+b\le n$，則可涵蓋 A,B_1,B_2,C,D 5 型，故(a,b)組合數即 H(3n)，分成兩種情形計算：

1.n=2k 時

a	b	(a,b)數
0	0,1,…,n	n+1
1	1,2,…,n-1	n-1
•	•	•
•	•	•
n/2	n/2	1

$H(6k)=H(3n)=(n+1)+(n-1)+\ldots+1$

$=(\frac{n}{2}+1)(n+1+1)/2=\frac{(n+2)^2}{4}=k^2+2k+1$

(符合推測)。

2.n=2k+1 時

a	b	(a,b)數
0	0,1,…,n	n+1
1	1,2,…,n-1	n-1
•	•	•
•	•	•
(n-1)/2	(n-1)/2,(n+1)/2	2

$H(6k+3)=H[3(2k+1)]=H(3n)=(n+1)+(n-1)$

$+\ldots+2=(\frac{n-1}{2}+1)(n+1+2)/2=\frac{(n+1)(n+3)}{4}$

$=k^2+3k+2$ (符合推測)。

(二)論證 $M_D(3n)$：分 6 種情形，利用 $M_D(3n)=H(3n)-M_A(3n)-M_B(3n)-M_C(3n)$。

1. n=6k 時，$M_D[3(6k)]=[(3k)^2+2(3k)+1]-1-(6k+[6k/2])-[6k/3]$

$=9k^2+6k-6k-3k-2k=9k^2-5k$，符合推測。註：$H[3(6k)]=H[6(3k)]$

2.n=6k+1 時，$M_D[3(6k+1)]=[(3k)^2+3(3k)+2]-1-\{(6k+1)+[(6k+1)/2]\}-[(6k+1)/3]$

$=9k^2+9k+2-1-6k-1-3k-2k=9k^2-2k$，符合。註：$H[3(6k+1)]=H[6(3k)+3]$

3.n=6k+2 時，$M_D[3(6k+2)]=[(3k+1)^2+2(3k+1)+1]-1-\{(6k+2)+[(6k+2)/2]\}$

$-[(6k+2)/3]=9k^2+6k+1+6k+2+1-1-6k-2-3k-1-2k=9k^2+k$，符合。

註：$H[3(6k+2)]=H[6(3k+1)]$

4.n=6k+3 時，$M_D[3(6k+3)]=[(3k+1)^2+3(3k+1)+2]-1-\{(6k+3)+[(6k+3)/2]\}$

$-[(6k+3)/3]=9k^2+6k+1+9k+3+2-1-6k-3-3k-1-2k-1=9k^2+4k$，符合。

5.n=6k+4 時，$M_D[3(6k+4)]=[(3k+2)^2+2(3k+2)+1]-1-\{(6k+4)+[(6k+4)/2]\}$

$-[(6k+4)/3]=9k^2+12k+4+6k+4+1-1-6k-4-3k-2-2k-1=9k^2+7k+1$，符合。

6.n=6k+5 時，$M_D[3(6k+5)]=[(3k+2)^2+3(3k+2)+2]-1-\{(6k+5)+[(6k+5)/2]\}$

$-[(6k+5)/3]=9k^2+12k+4+9k+6+2-1-6k-5-3k-2-2k-1=9k^2+10k+3$，符合。

(三) 論證 $M(3n)$：利用 $M(3n)=M_A(3n)+4M_B(3n)+8M_C(3n)+8M_D(3n)$，分 6 種情形

1. $n=6k$ 時，$M(3n)=1+4(6k+3k)+8(2k)+8(9k^2-5k)=72k^2+12k+1$

   $=2(6k)^2+2(6k)+1=2n^2+2n+1$，符合推測。

2. $n=6k+1$ 時，$M(3n)=1+4(6k+1+3k)+8(2k)+8(9k^2-2k)=72k^2+36k+5$

   $=2(6k+1)^2+2(6k+1)+1=2n^2+2n+1$，符合。

3. $n=6k+2$ 時，$M(3n)=1+4(6k+2+3k+1)+8(2k)+8(9k^2+k)=72k^2+60k+13$

   $=2(6k+2)^2+2(6k+2)+1=2n^2+2n+1$，符合。

4. $n=6k+3$ 時，$M(3n)=1+4(6k+3+3k+1)+8(2k+1)+8(9k^2+4k)=72k^2+84k+25$

   $=2(6k+3)^2+2(6k+3)+1=2n^2+2n+1$，符合。

5. $n=6k+4$ 時，$M(3n)=1+4(6k+4+3k+2)+8(2k+1)+8(9k^2+7k+1)=72k^2+108k+41$

   $=2(6k+4)^2+2(6k+4)+1=2n^2+2n+1$，符合。

6. $n=6k+5$ 時，$M(3n)=1+4(6k+5+3k+2)+8(2k+1)+8(9k^2+10k+3)=72k^2+132k+61$

   $=2(6k+5)^2+2(6k+5)+1=2n^2+2n+1$，符合。

七.推導 $S_A(3n)$, $S_B(3n)$,$S_C(3n)$及 $S_D(3n)$公式：令 $t=3n$，$n=0,1,2,\ldots$。

(一) $S_A(3n)$：$S_A(3n)=\sum_{r=0}^{n} M_A(3n)=\sum_{r=0}^{n} 1=n+1$。

(二) $S_B(3n)$：分 $n=2k$ 及 $n=2k+1$ 兩種情形。

1. $n=2k$ 時，$S_B(3n)=\sum_{r=0}^{n} M_B(3r)=\sum_{r=0}^{2k}\left(r+\left[\frac{r}{2}\right]\right)=\frac{2k(2k+1)}{2}+[1+1+2+2+\ldots$

   $+(k-1)+(k-1)+k]=2k^2+k+k(k-1)+k=3k^2+k=\frac{3n^2+2n}{4}$，

2. $n=2k+1$ 時，$S_B(3n)=\sum_{r=0}^{2k+1} M_B(3r)\frac{(2k+1)(2k+1+1)}{2}+(1+1+2+2+\ldots+k+k)$

   $=2k^2+3k+1+k(k+1)=3k^2+4k+1=3\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{n-1}{2}\right)+1=\frac{3n^2+2n-1}{4}$，

3. 此 2 公式可整合為 $S_B[3(2k+h)]=\frac{3(2k+h)^2+2(2k+h)-h}{4}$，$h=0,1$。

(三) $S_C(3n)$：分成 $n=3k,3k+1,3k+2$。

1. $n=3k$ 時，$S_C(3n)=\sum_{r=0}^{3k}\left[\frac{r}{3}\right]=1+1+1+\ldots+(k-1)+(k-1)+(k-1)+k=\frac{3k(k-1)}{2}+k$

$=\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k=\frac{n^2-n}{6}$。

2. n=3k+1 時，$S_C(3n)=\sum_{r=0}^{3k+1}[\frac{r}{3}]=1+1+1+\ldots+k+k=\frac{3k(k-1)}{2}+2k=\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k$

$=\frac{3}{2}(\frac{n-1}{3})^2+\frac{1}{2}(\frac{n-1}{3})=\frac{n^2-n}{6}$。

3. n=3k+2 時，$S_C(3n)=\sum_{r=0}^{3k+2}[\frac{r}{3}]=1+1+1+\ldots+k+k+k=\frac{3k(k-1)}{2}=\frac{3}{2}k^2+\frac{3}{2}k$

$=\frac{3}{2}(\frac{n-2}{3})^2+\frac{3}{2}(\frac{n-2}{3})=\frac{n^2-n-2}{6}$。

4.將此 3 公式整合為 $S_C(3n)=S_C[3(3k+h)]=\frac{n^2-n+(h-h^2)}{6}$

或$\frac{3}{2}k^2+(h-\frac{1}{2})k$，h=0,1,2。

(四) $S_D(3n)$：分成 6 種情形。

1.n=6k 時，$S_D[3(6k)]=\sum_{r=0}^{k}M_D[3(6r)]+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+1)]$

$+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+2)]+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+3)]+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+4)]$

$+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+5)]=(9k^2-5k)+54\sum_{r=0}^{k-1}r^2$

$+15\sum_{r=0}^{k-1}r+4\sum_{r=0}^{k-1}1=9k^2-5k+9k(k-1)(2k-1)+\frac{15}{2}k(k-1)+4k$

$=18k^3-\frac{21}{2}k^2+\frac{1}{2}k$。

2. n=6k+1 時，$S_D[3(6k+1)]=\sum_{r=0}^{k}M_D[3(6r)]+\sum_{r=0}^{k}M_D[3(6r+1)]$

$+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+2)]+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+3)]+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+4)]$

$+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+5)]=(9k^2-5k)+(9k^2-2k)+54\sum_{r=0}^{k-1}r^2$

$+15\sum_{r=0}^{k-1}r+4\sum_{r=0}^{k-1}1=18k^2-7k+9k(k-1)(2k-1)+\frac{15}{2}k(k-1)+4k$

$=18k^3-\frac{3}{2}k^2-\frac{3}{2}k$。

3. n=6k+2 時，$S_D[3(6k+2)]=\sum_{r=0}^{k}M_D[3(6r)]+\sum_{r=0}^{k}M_D[3(6r+1)]$

$+\sum_{r=0}^{k}M_D[3(6r+2)]+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+3)]+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+4)]$

$+\sum_{r=0}^{k-1}M_D[3(6r+5)]=(9k^2-5k)+(9k^2-2k)+(9k^2+k)+9k(k-1)(2K-1)$

$+\frac{15}{2}k(k-1)+4k=18k^3+\frac{15}{2}k^2-\frac{1}{2}k$。

4. n=6k+3 時，藉上述結果，簡化計算，$S_D[3(6k+3)]=S_D[3(6k+2)]+M_D[3(6k+3)]$

$=18k^3+\frac{33}{2}k^2+\frac{7}{2}k$。

5. n=6k+4 時，$S_D[3(6k+4)]=S_D[3(6k+3)]+M_D[3(6k+4)]=18k^3+\frac{51}{2}k^2+\frac{21}{2}k+1$。

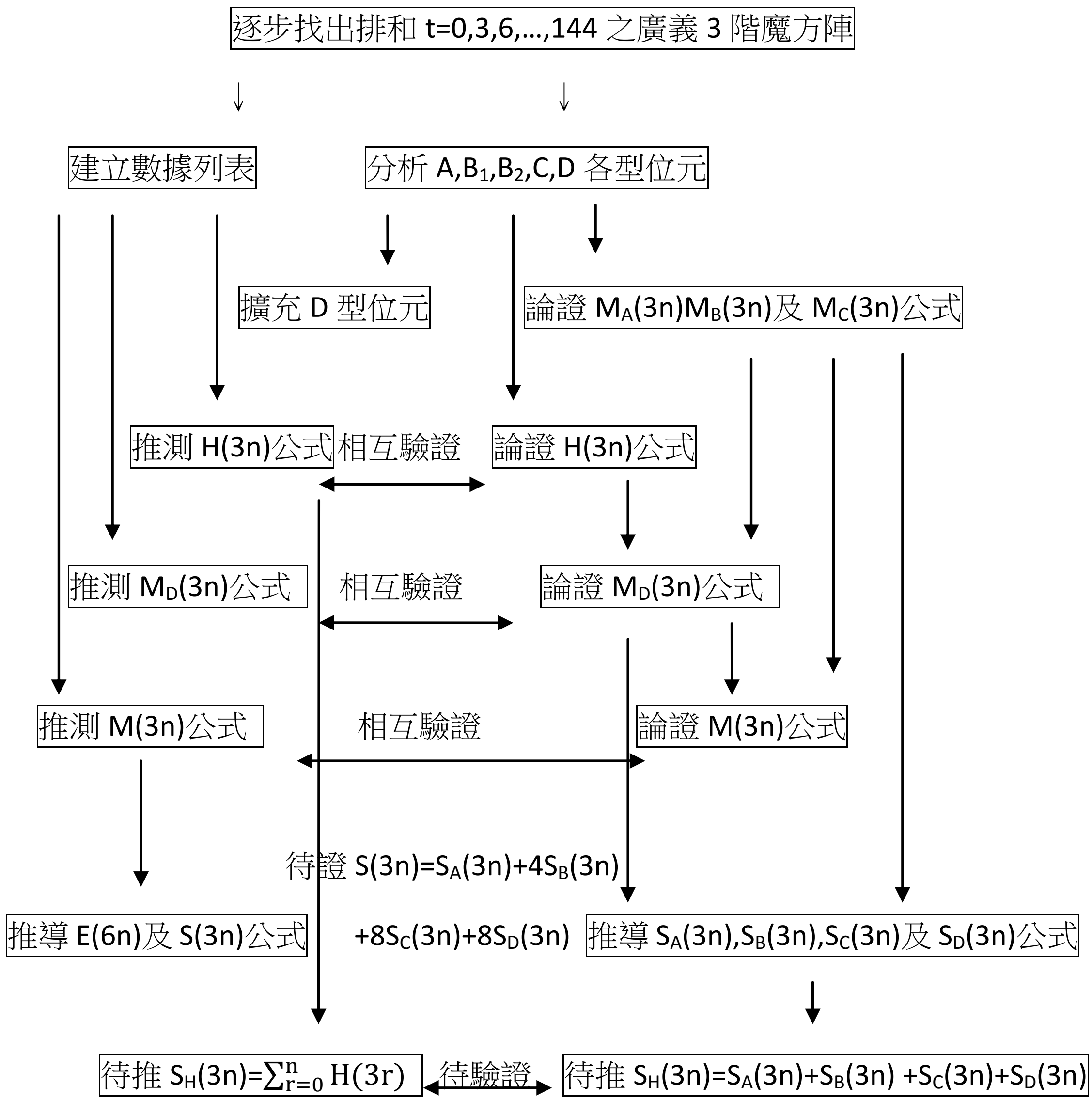
6. n=6k+5 時，$S_D[3(6k+5)]=S_D[3(6k+4)]+M_D[3(6k+5)]=18k^3+\frac{69}{2}k^2+\frac{41}{2}k+4$。

7. 整合上述 6 式為 $S_D[3(6k+h)]=18k^3+\frac{18h-21}{2}k^2+\frac{3h^2-7h+1}{2}k+[h^2/12]^2$，

h=0,1,2,3,4,5。

伍.結論

一.推導及論證流程：



二.公式簡表及彙集：

(一)依條件分類:

條件＼公式	計算翻轉	不計翻轉	排和≤t	排和=t	位元不重複	位元可重複	位元限偶數
$M(t)$	✓			✓		✓	
$E(t)$	✓			✓		✓	✓
$H(t)$		✓		✓		✓	
$S(t)$	✓		✓			✓	
$S_H(t)$(待證)		✓	✓			✓	
$M_D(t)$		✓		✓	✓		
$M_B, M_C(t)$		✓		✓		✓	
$S_D(t)$		✓	✓		✓		
$S_B, S_C(t)$		✓	✓			✓	

(二)

令 t=3n，n=0,1,2,…,，本文推得下列公式：

1. $H(3n)=H[3(2k+h)]=k^2+(h+2)k+(h+1)$，$k=0,1,2,\ldots$，$h=0,1$，$n=2k+h$

2. $M(t)=M(3n)=2n^2+2n+1=\frac{2}{9}t^2+\frac{2}{3}t+1$

3. $S(3n)=\frac{2}{3}n^3+2n^2+\frac{7}{3}n+1$

4. $E(6n)=M(3n)=2n^2+2n+1$

5. $M_A(3n)=1$

6. $M_B(3n)=n+[n/2]$

7. $M_C(3n)=[n/3]$

8. $M_D(3n)=MD[3(6k+h)]= 9k^2+(3h-5)k+[(h-\frac{8}{5})^2/3]$，h=0,1,2,3,4,5，k=0,1,2,...

9. $S_A(3n)=n+1$

10. $S_B(3n)=S_B[3(2k+h)]=\frac{3n^2+2n-h}{4}$，h=0,1

11. $S_C(3n)=S_C[3(3k+h)]=\frac{n^2-n+(h-h^2)}{6}$，h=0,1,2

12. $S_D(3n)=S_D[3(6k+h)]=18k^3+\frac{18h-21}{2}k^2+\frac{3h^2-7h+1}{2}k+[h^2/12]^2$，h=0,1,2,3,4,5，k=0,1,2,...。

陸.討論

一.3 階魔方的技巧,可運用於 4 階以上之魔方。4 階魔方傳統型填 1~16,則有 880 型×8 共 7040 個,其排和為 34,若比照 3 階推廣又多了一些變化,例如:排和未必是 34+4K,還有 32+4K 型,雖然其數量驚人,但 3 階的技巧具決定性的影響。至於 5 階魔方傳統型填入 1~25,約 22 億個,其排和為 65,廣義型則比 4 階更加複雜。傳統 6 階魔方填入 1~36,到底有多少似乎無人知曉,但我們相信所有 4 階以上的廣義魔方必建立在 3 階的基礎上。

二.建構 4 階廣義魔方:

(一)從不計翻轉之傳統 880 個(若計翻轉為 7040 個)任取一個(型)Q，放寬位元非負整數且可重複，仿 3 階建構，可得 Q 衍生之廣義 4 階。將位元分 4 組(1,2,3,4)，(5,6,7,8)，(9,10,11,12)，(13,14,15,16)轉換到(2,3,4,5)，(5,6,7,8)，(8,9,10,11)，(11,12,13,14)得到排和為 32 之廣義 4 階魔方 Q^{I};若轉換到(4,3,2,1)，(8,7,6,5)，(12,11,10,9)，(16,15,14,13)則得到排和 34 之 Q^{II};若轉換到(7,7,7,7)，(8,8,8,8)，(9,9,9,9)，(10,10,10,10)得到 Q^{III}

11	10	8	5
7	6	12	9
2	3	13	16
14	15	1	4

10	9	8	5
7	6	11	8
3	4	11	14
12	13	2	5

10	11	5	8
6	7	9	12
3	2	16	13
15	14	4	1

9	9	8	8
8	8	9	9
7	7	10	10
10	10	7	7

Q　　　　　　Q^{I}　　　　　　Q^{II}　　　　　　Q^{III}

(二) 3 階建構可視為上述之特例：將傳統 A 位元分 3 組(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)轉換到(n-a-b,n-b,n+a-b),(n-a,n,n+a),(n-a+b,n+b,n+a+b)並放寬五之(四)對 a,b 的條件為 $0\leq a \leq b$，$a+b \leq n$，便得到所有廣義 3 階魔方(即組合(n,a,b)與魔方成 1-1 對應)。例如：

9	1	8
5	6	7
4	11	3

21	1	14
5	12	19
10	23	3

22	17	21
19	20	21
19	23	18

24	21	24
23	23	23
22	25	22

(6,2,3) D 型　　　(12,2,9) D 型　　　(20,1,2) C 型　　　(23,1,1)B 型

二. 建構 6 階：將 A 作<位元 2 階複製>得 C，取廣義 6 階 T，C 及 T 排和分別為 30 及 9，作矩陣數乘及加，得到 W=9T+C，排和=81+30=111

8	8	1	1	6	6
8	8	1	1	6	6
3	3	5	5	7	7
3	3	5	5	7	7
4	4	9	9	2	2
4	4	9	9	2	2

C

0	1	2	3	3	0
2	3	1	0	1	2
3	2	0	1	1	2
1	0	3	2	3	0
0	1	2	3	1	2
3	2	1	0	0	3

T

8	17	19	28	33	6
26	35	10	1	15	24
30	21	5	14	16	25
12	3	32	23	34	7
4	13	27	36	11	20
31	22	18	9	2	29

W

四.9 階介紹：V 是由 3 階經<位元 3 階複製>輾轉而得，將 V 位元組 (1,…,9),…,(72,…,81)轉換到(1,…,1),…,(9,…,9)得 V^{l}。F,G 則為奇數(>3)階傳統及延伸建構得到。

71	8	53	28	73	10	69	6	51
26	44	62	19	37	55	24	42	60
35	80	17	64	1	46	33	78	15
66	3	48	68	5	50	70	7	52
21	39	57	23	41	59	25	43	61
30	75	12	32	77	14	34	79	16
67	4	49	72	9	54	65	2	47
22	40	58	27	45	63	20	38	56
31	76	13	36	81	18	29	74	11

V(傳統型)

8	1	6	4	9	2	8	1	6
3	5	7	3	5	7	3	5	7
4	9	2	8	1	6	4	9	2
8	1	6	8	1	6	8	1	6
3	5	7	3	5	7	3	5	7
4	9	2	4	9	2	4	9	2
8	1	6	8	1	6	8	1	6
3	5	7	3	5	7	3	5	7
4	9	2	4	9	2	4	9	2

V^{l}(廣義型)

45	46	56	66	76	5	15	25	35
54	55	65	75	4	14	24	34	44
63	64	74	3	13	23	33	43	53
72	73	2	12	22	32	42	52	62
81	1	11	21	31	41	51	61	71
9	10	20	30	40	50	60	70	80
18	19	29	39	49	59	69	79	8
27	28	38	48	58	68	78	7	17
36	37	47	57	67	77	6	16	26

F

27	68	28	78	38	7	48	17	58
36	77	37	6	47	16	57	26	67
45	5	46	15	56	25	66	35	76
54	14	55	24	65	34	75	44	4
63	23	64	33	74	43	3	53	13
72	32	73	42	2	52	12	62	22
81	41	1	51	11	61	21	71	31
9	50	10	60	20	70	30	80	40
18	59	19	69	29	79	39	8	49

G

據師言:任意 3n 階皆可由 3 階層轉建構，必有助高階數量之研究;而行列式 IAI 及固有值(向量)$A\nu=\lambda\nu$，高階也從 3 階得利。

柒.參考資料

國中及高中數學課本

一. 國中數學一次方程式及二次函數單元

二. 高中數學等差數列及矩陣單元

t=141，n=47，C+D 型(A,B_1,B_2 型省略)，共 529 個(僅列部分)

93	0	48
2	47	92
46	94	1

84	0	57
20	47	74
37	94	10

75	0	66
38	47	56
28	94	19

88	1	52
11	47	83
42	93	6

79	1	61
29	47	65
33	93	15

92	0	49
4	47	90
45	94	2

83	0	58
22	47	72
36	94	11

74	0	67
40	47	54
27	94	20

87	1	53
13	47	81
41	93	7

78	1	62
31	47	63
32	93	16

91	0	50
6	47	88
44	94	3

82	0	59
24	47	70
35	94	12

73	0	68
42	47	52
26	94	21

86	1	54
15	47	79
40	93	8

77	1	63
33	47	61
31	93	17

90	0	51
8	47	86
43	94	4

81	0	60
26	47	68
34	94	13

72	0	69
44	47	50
25	94	22

85	1	55
17	47	77
39	93	9

76	1	64
35	47	59
30	93	18

89	0	52
10	47	84
42	94	5

80	0	61
28	47	66
33	94	14

71	0	70
46	47	48
24	94	23

84	1	56
19	47	75
38	93	10

75	1	65
37	47	57
29	93	19

88	0	53
12	47	82
41	94	6

79	0	62
30	47	64
32	94	15

92	1	48
3	47	91
46	93	2

83	1	57
21	47	73
37	93	11

74	1	66
39	47	55
28	93	20

87	0	54
14	47	80
40	94	7

78	0	63
32	47	62
31	94	16

91	1	49
5	47	89
45	93	3

82	1	58
23	47	71
36	93	12

73	1	67
41	47	53
27	93	21

86	0	55
16	47	78
39	94	8

77	0	64
34	47	60
30	94	17

90	1	50
7	47	87
44	93	4

81	1	59
25	47	69
35	93	13

72	1	68
43	47	51
26	93	22

85	0	56
18	47	76
38	94	9

76	0	65
36	47	58
29	94	18

89	1	51
9	47	85
43	93	5

80	1	60
27	47	67
34	93	14

71	1	69
45	47	49
25	93	23

91	2	48
4	47	90
46	92	3

82	2	57
22	47	72
37	92	12

73	2	66
40	47	54
28	92	21

85	3	53
15	47	79
41	91	9

76	3	62
33	47	61
32	91	18

90	2	49
6	47	88
45	92	4

81	2	58
24	47	70
36	92	13

72	2	67
42	47	52
27	92	22

84	3	54
17	47	77
40	91	10

75	3	63
35	47	59
31	91	19

89	2	50
8	47	86
44	92	5

80	2	59
26	47	68
35	92	14

71	2	68
44	47	50
26	92	23

83	3	55
19	47	75
39	91	11

74	3	64
37	47	57
30	91	20

88	2	51
10	47	84
43	92	6

79	2	60
28	47	66
34	92	15

70	2	69
46	47	48
25	92	24

82	3	56
21	47	73
38	91	12

73	3	65
39	47	55
29	91	21

87	2	52
12	47	82
42	92	7

78	2	61
30	47	64
33	92	16

90	3	48
5	47	89
46	91	4

81	3	57
23	47	71
37	91	13

72	3	66
41	47	53
28	91	22

86	2	53
14	47	80
41	92	8

77	2	62
32	47	62
32	92	17

89	3	49
7	47	87
45	91	5

80	3	58
25	47	69
36	91	14

71	3	67
43	47	51
27	91	23

85	2	54
16	47	78
40	92	9

76	2	63
34	47	60
31	92	18

88	3	50
9	47	85
44	91	6

79	3	59
27	47	67
35	91	15

70	3	68
45	47	49
26	91	24

84	2	55
18	47	76
39	92	10

75	2	64
36	47	58
30	92	19

87	3	51
11	47	83
43	91	7

78	3	60
29	47	65
34	91	16

89	4	48
6	47	88
46	90	5

83	2	56
20	47	74
38	92	11

74	2	65
38	47	56
29	92	20

86	3	52
13	47	81
42	91	8

77	3	61
31	47	63
33	91	17

88	4	49
8	47	86
45	90	6

87	4	50
10	47	84
44	90	7

78	4	59
28	47	66
35	90	16

69	4	68
46	47	48
26	90	25

80	5	56
23	47	71
38	89	14

71	5	65
41	47	53
29	89	23

86	4	51
12	47	82
43	90	8

77	4	60
30	47	64
34	90	17

88	5	48
7	47	87
46	89	6

79	5	57
25	47	69
37	89	15

70	5	66
43	47	51
28	89	24

85	4	52
14	47	80
42	90	9

76	4	61
32	47	62
33	90	18

87	5	49
9	47	85
45	89	7

78	5	58
27	47	67
36	89	16

69	5	67
45	47	49
27	89	25

84	4	53
16	47	78
41	90	10

75	4	62
34	47	60
32	90	19

86	5	50
11	47	83
44	89	8

77	5	59
29	47	65
35	89	17

87	6	48
8	47	86
46	88	7

83	4	54
18	47	76
40	90	11

74	4	63
36	47	58
31	90	20

85	5	51
13	47	81
43	89	9

76	5	60
31	47	63
34	89	18

86	6	49
10	47	84
45	88	8

82	4	55
20	47	74
39	90	12

73	4	64
38	47	56
30	90	21

84	5	52
15	47	79
42	89	10

75	5	61
33	47	61
33	89	19

85	6	50
12	47	82
44	88	9

81	4	56
22	47	72
38	90	13

72	4	65
40	47	54
29	90	22

83	5	53
17	47	77
41	89	11

74	5	62
35	47	59
32	89	20

84	6	51
14	47	80
43	88	10

80	4	57
24	47	70
37	90	14

71	4	66
42	47	52
28	90	23

82	5	54
19	47	75
40	89	12

73	5	63
37	47	57
31	89	21

83	6	52
16	47	78
42	88	11

79	4	58
26	47	68
36	90	15

70	4	67
44	47	50
27	90	24

81	5	55
21	47	73
39	89	13

72	5	64
39	47	55
30	89	22

82	6	53
18	47	76
41	88	12

81	6	54
20	47	74
40	88	13

72	6	63
38	47	56
31	88	22

82	7	52
17	47	77
42	87	12

73	7	61
35	47	59
33	87	21

82	8	51
16	47	78
43	86	12

80	6	55
22	47	72
39	88	14

71	6	64
40	47	54
30	88	23

81	7	53
19	47	75
41	87	13

72	7	62
37	47	57
32	87	22

81	8	52
18	47	76
42	86	13

79	6	56
24	47	70
38	88	15

70	6	65
42	47	52
29	88	24

80	7	54
21	47	73
40	87	14

71	7	63
39	47	55
31	87	23

80	8	53
20	47	74
41	86	14

78	6	57
26	47	68
37	88	16

69	6	66
44	47	50
28	88	25

79	7	55
23	47	71
39	87	15

70	7	64
41	47	53
30	87	24

79	8	54
22	47	72
40	86	15

77	6	58
28	47	66
36	88	17

68	6	67
46	47	48
27	88	26

78	7	56
25	47	69
38	87	16

69	7	65
43	47	51
29	87	25

78	8	55
24	47	70
39	86	16

76	6	59
30	47	64
35	88	18

86	7	48
9	47	85
46	87	8

77	7	57
27	47	67
37	87	17

68	7	66
45	47	49
28	87	26

77	8	56
26	47	68
38	86	17

75	6	60
32	47	62
34	88	19

85	7	49
11	47	83
45	87	9

76	7	58
29	47	65
36	87	18

85	8	48
10	47	84
46	86	9

76	8	57
28	47	66
37	86	18

74	6	61
34	47	60
33	88	20

84	7	50
13	47	81
44	87	10

75	7	59
31	47	63
35	87	19

84	8	49
12	47	82
45	86	10

75	8	58
30	47	64
36	86	19

73	6	62
36	47	58
32	88	21

83	7	51
15	47	79
43	87	11

74	7	60
33	47	61
34	87	20

83	8	50
14	47	80
44	86	11

74	8	59
32	47	62
35	86	20

73	8	60
34	47	60
34	86	21

82	9	50
15	47	79
44	85	12

73	9	59
33	47	61
35	85	21

81	10	50
16	47	78
44	84	13

72	10	59
34	47	60
35	84	22

72	8	61
36	47	58
33	86	22

81	9	51
17	47	77
43	85	13

72	9	60
35	47	59
34	85	22

80	10	51
18	47	76
43	84	14

71	10	60
36	47	58
34	84	23

71	8	62
38	47	56
32	86	23

80	9	52
19	47	75
42	85	14

71	9	61
37	47	57
33	85	23

79	10	52
20	47	74
42	84	15

70	10	61
38	47	56
33	84	24

70	8	63
40	47	54
31	86	24

79	9	53
21	47	73
41	85	15

70	9	62
39	47	55
32	85	24

78	10	53
22	47	72
41	84	16

69	10	62
40	47	54
32	84	25

69	8	64
42	47	52
30	86	25

78	9	54
23	47	71
40	85	16

69	9	63
41	47	53
31	85	25

77	10	54
24	47	70
40	84	17

68	10	63
42	47	52
31	84	26

68	8	65
44	47	50
29	86	26

77	9	55
25	47	69
39	85	17

68	9	64
43	47	51
30	85	26

76	10	55
26	47	68
39	84	18

67	10	64
44	47	50
30	84	27

67	8	66
46	47	48
28	86	27

76	9	56
27	47	67
38	85	18

67	9	65
45	47	49
29	85	27

75	10	56
28	47	66
38	84	19

66	10	65
46	47	48
29	84	28

84	9	48
11	47	83
46	85	10

75	9	57
29	47	65
37	85	19

83	10	48
12	47	82
46	84	11

74	10	57
30	47	64
37	84	20

82	11	48
13	47	81
46	83	12

83	9	49
13	47	81
45	85	11

74	9	58
31	47	63
36	85	20

82	10	49
14	47	80
45	84	12

73	10	58
32	47	62
36	84	21

81	11	49
15	47	79
45	83	13

80	11	50
17	47	77
44	83	14

71	11	59
35	47	59
35	83	23

78	12	51
20	47	74
43	82	16

69	12	60
38	47	56
34	82	25

76	13	52
23	47	71
42	81	18

79	11	51
19	47	75
43	83	15

70	11	60
37	47	57
34	83	24

77	12	52
22	47	72
42	82	17

68	12	61
40	47	54
33	82	26

75	13	53
25	47	69
41	81	19

78	11	52
21	47	73
42	83	16

69	11	61
39	47	55
33	83	25

76	12	53
24	47	70
41	82	18

67	12	62
42	47	52
32	82	27

74	13	54
27	47	67
40	81	20

77	11	53
23	47	71
41	83	17

68	11	62
41	47	53
32	83	26

75	12	54
26	47	68
40	82	19

66	12	63
44	47	50
31	82	28

73	13	55
29	47	65
39	81	21

76	11	54
25	47	69
40	83	18

67	11	63
43	47	51
31	83	27

74	12	55
28	47	66
39	82	20

65	12	64
46	47	48
30	82	29

72	13	56
31	47	63
38	81	22

75	11	55
27	47	67
39	83	19

66	11	64
45	47	49
30	83	28

73	12	56
30	47	64
38	82	21

80	13	48
15	47	79
46	81	14

71	13	57
33	47	61
37	81	23

74	11	56
29	47	65
38	83	20

81	12	48
14	47	80
46	82	13

72	12	57
32	47	62
37	82	22

79	13	49
17	47	77
45	81	15

70	13	58
35	47	59
36	81	24

73	11	57
31	47	63
37	83	21

80	12	49
16	47	78
45	82	14

71	12	58
34	47	60
36	82	23

78	13	50
19	47	75
44	81	16

69	13	59
37	47	57
35	81	25

72	11	58
33	47	61
36	83	22

79	12	50
18	47	76
44	82	15

70	12	59
36	47	58
35	82	24

77	13	51
21	47	73
43	81	17

68	13	60
39	47	55
34	81	26

67	13	61
41	47	53
33	81	27

73	14	54
28	47	66
40	80	21

64	14	63
46	47	48
31	80	30

70	15	56
33	47	61
38	79	24

75	16	50
22	47	72
44	78	19

66	13	62
43	47	51
32	81	28

72	14	55
30	47	64
39	80	22

78	15	48
17	47	77
46	79	16

69	15	57
35	47	59
37	79	25

74	16	51
24	47	70
43	78	20

65	13	63
45	47	49
31	81	29

71	14	56
32	47	62
38	80	23

77	15	49
19	47	75
45	79	17

68	15	58
37	47	57
36	79	26

73	16	52
26	47	68
42	78	21

79	14	48
16	47	78
46	80	15

70	14	57
34	47	60
37	80	24

76	15	50
21	47	73
44	79	18

67	15	59
39	47	55
35	79	27

72	16	53
28	47	66
41	78	22

78	14	49
18	47	76
45	80	16

69	14	58
36	47	58
36	80	25

75	15	51
23	47	71
43	79	19

66	15	60
41	47	53
34	79	28

71	16	54
30	47	64
40	78	23

77	14	50
20	47	74
44	80	17

68	14	59
38	47	56
35	80	26

74	15	52
25	47	69
42	79	20

65	15	61
43	47	51
33	79	29

70	16	55
32	47	62
39	78	24

76	14	51
22	47	72
43	80	18

67	14	60
40	47	54
34	80	27

73	15	53
27	47	67
41	79	21

64	15	62
45	47	49
32	79	30

69	16	56
34	47	60
38	78	25

75	14	52
24	47	70
42	80	19

66	14	61
42	47	52
33	80	28

72	15	54
29	47	65
40	79	22

77	16	48
18	47	76
46	78	17

68	16	57
36	47	58
37	78	26

74	14	53
26	47	68
41	80	20

65	14	62
44	47	50
32	80	29

71	15	55
31	47	63
39	79	23

76	16	49
20	47	74
45	78	18

67	16	58
38	47	56
36	78	27

66	16	59
40	47	54
35	78	28

71	17	53
29	47	65
41	77	23

75	18	48
20	47	74
46	76	19

66	18	57
38	47	56
37	76	28

70	19	52
29	47	65
42	75	24

65	16	60
42	47	52
34	78	29

70	17	54
31	47	63
40	77	24

74	18	49
22	47	72
45	76	20

65	18	58
40	47	54
36	76	29

69	19	53
31	47	63
41	75	25

64	16	61
44	47	50
33	78	30

69	17	55
33	47	61
39	77	25

73	18	50
24	47	70
44	76	21

64	18	59
42	47	52
35	76	30

68	19	54
33	47	61
40	75	26

63	16	62
46	47	48
32	78	31

68	17	56
35	47	59
38	77	26

72	18	51
26	47	68
43	76	22

63	18	60
44	47	50
34	76	31

67	19	55
35	47	59
39	75	27

76	17	48
19	47	75
46	77	18

67	17	57
37	47	57
37	77	27

71	18	52
28	47	66
42	76	23

62	18	61
46	47	48
33	76	32

66	19	56
37	47	57
38	75	28

75	17	49
21	47	73
45	77	19

66	17	58
39	47	55
36	77	28

70	18	53
30	47	64
41	76	24

74	19	48
21	47	73
46	75	20

65	19	57
39	47	55
37	75	29

74	17	50
23	47	71
44	77	20

65	17	59
41	47	53
35	77	29

69	18	54
32	47	62
40	76	25

73	19	49
23	47	71
45	75	21

64	19	58
41	47	53
36	75	30

73	17	51
25	47	69
43	77	21

64	17	60
43	47	51
34	77	30

68	18	55
34	47	60
39	76	26

72	19	50
25	47	69
44	75	22

63	19	59
43	47	51
35	75	31

72	17	52
27	47	67
42	77	22

63	17	61
45	47	49
33	77	31

67	18	56
36	47	58
38	76	27

71	19	51
27	47	67
43	75	23

62	19	60
45	47	49
34	75	32

73	20	48
22	47	72
46	74	21

64	20	57
40	47	54
37	74	30

67	21	53
33	47	61
41	73	27

69	22	50
28	47	66
44	72	25

60	22	59
46	47	48
35	72	34

72	20	49
24	47	70
45	74	22

63	20	58
42	47	52
36	74	31

66	21	54
35	47	59
40	73	28

68	22	51
30	47	64
43	72	26

70	23	48
25	47	69
46	71	24

71	20	50
26	47	68
44	74	23

62	20	59
44	47	50
35	74	32

65	21	55
37	47	57
39	73	29

67	22	52
32	47	62
42	72	27

69	23	49
27	47	67
45	71	25

70	20	51
28	47	66
43	74	24

61	20	60
46	47	48
34	74	33

64	21	56
39	47	55
38	73	30

66	22	53
34	47	60
41	72	28

68	23	50
29	47	65
44	71	26

69	20	52
30	47	64
42	74	25

72	21	48
23	47	71
46	73	22

63	21	57
41	47	53
37	73	31

65	22	54
36	47	58
40	72	29

67	23	51
31	47	63
43	71	27

68	20	53
32	47	62
41	74	26

71	21	49
25	47	69
45	73	23

62	21	58
43	47	51
36	73	32

64	22	55
38	47	56
39	72	30

66	23	52
33	47	61
42	71	28

67	20	54
34	47	60
40	74	27

70	21	50
27	47	67
44	73	24

61	21	59
45	47	49
35	73	33

63	22	56
40	47	54
38	72	31

65	23	53
35	47	59
41	71	29

66	20	55
36	47	58
39	74	28

69	21	51
29	47	65
43	73	25

71	22	48
24	47	70
46	72	23

62	22	57
42	47	52
37	72	32

64	23	54
37	47	57
40	71	30

65	20	56
38	47	56
38	74	29

68	21	52
31	47	63
42	73	26

70	22	49
26	47	68
45	72	24

61	22	58
44	47	50
36	72	33

63	23	55
39	47	55
39	71	31

62	23	56
41	47	53
38	71	32

63	24	54
38	47	56
40	70	31

64	25	52
35	47	59
42	69	30

64	26	51
34	47	60
43	68	30

64	27	50
33	47	61
44	67	30

61	23	57
43	47	51
37	71	33

62	24	55
40	47	54
39	70	32

63	25	53
37	47	57
41	69	31

63	26	52
36	47	58
42	68	31

63	27	51
35	47	59
43	67	31

60	23	58
45	47	49
36	71	34

61	24	56
42	47	52
38	70	33

62	25	54
39	47	55
40	69	32

62	26	53
38	47	56
41	68	32

62	27	52
37	47	57
42	67	32

69	24	48
26	47	68
46	70	25

60	24	57
44	47	50
37	70	34

61	25	55
41	47	53
39	69	33

61	26	54
40	47	54
40	68	33

61	27	53
39	47	55
41	67	33

68	24	49
28	47	66
45	70	26

59	24	58
46	47	48
36	70	35

60	25	56
43	47	51
38	69	34

60	26	55
42	47	52
39	68	34

60	27	54
41	47	53
40	67	34

67	24	50
30	47	64
44	70	27

68	25	48
27	47	67
46	69	26

59	25	57
45	47	49
37	69	35

59	26	56
44	47	50
38	68	35

59	27	55
43	47	51
39	67	35

66	24	51
32	47	62
43	70	28

67	25	49
29	47	65
45	69	27

67	26	48
28	47	66
46	68	27

58	26	57
46	47	48
37	68	36

58	27	56
45	47	49
38	67	36

65	24	52
34	47	60
42	70	29

66	25	50
31	47	63
44	69	28

66	26	49
30	47	64
45	68	28

66	27	48
29	47	65
46	67	28

65	28	48
30	47	64
46	66	29

64	24	53
36	47	58
41	70	30

65	25	51
33	47	61
43	69	29

65	26	50
32	47	62
44	68	29

65	27	49
31	47	63
45	67	29

64	28	49
32	47	62
45	66	30

63	28	50
34	47	60
44	66	31

62	29	50
35	47	59
44	65	32

60	30	51
38	47	56
43	64	34

58	31	52
41	47	53
42	63	36

55	32	54
46	47	48
40	62	39

62	28	51
36	47	58
43	66	32

61	29	51
37	47	57
43	65	33

59	30	52
40	47	54
42	64	35

57	31	53
43	47	51
41	63	37

60	33	48
35	47	59
46	61	34

61	28	52
38	47	56
42	66	33

60	29	52
39	47	55
42	65	34

58	30	53
42	47	52
41	64	36

56	31	54
45	47	49
40	63	38

59	33	49
37	47	57
45	61	35

60	28	53
40	47	54
41	66	34

59	29	53
41	47	53
41	65	35

57	30	54
44	47	50
40	64	37

61	32	48
34	47	60
46	62	33

58	33	50
39	47	55
44	61	36

59	28	54
42	47	52
40	66	35

58	29	54
43	47	51
40	65	36

56	30	55
46	47	48
39	64	38

60	32	49
36	47	58
45	62	34

57	33	51
41	47	53
43	61	37

58	28	55
44	47	50
39	66	36

57	29	55
45	47	49
39	65	37

62	31	48
33	47	61
46	63	32

59	32	50
38	47	56
44	62	35

56	33	52
43	47	51
42	61	38

57	28	56
46	47	48
38	66	37

63	30	48
32	47	62
46	64	31

61	31	49
35	47	59
45	63	33

58	32	51
40	47	54
43	62	36

55	33	53
45	47	49
41	61	39

64	29	48
31	47	63
46	65	30

62	30	49
34	47	60
45	64	32

60	31	50
37	47	57
44	63	34

57	32	52
42	47	52
42	62	37

59	34	48
36	47	58
46	60	35

63	29	49
33	47	61
45	65	31

61	30	50
36	47	58
44	64	33

59	31	51
39	47	55
43	63	35

56	32	53
44	47	50
41	62	38

58	34	49
38	47	56
45	60	36

【評語】030402

廣義的魔方陣探討。作者放寬了魔方陣的限制，在不限定每個位置的數字都不同，但保持每行、每列、兩對角線上的數字和相同的情況下，構造滿足條件的三階方陣，並計算了所有滿足條件的三階方陣的個數。關於後半部由廣義的階魔方陣來組合一般的階魔方陣是有趣的。但就如作者所述，這應該有人探討過。如果真是如此，關於作者們所討論的內容應該也會有才對，應該查一查。