中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030401

數學家的秘密花園-- 萬花尺作圖之研究

學校名稱：臺中市立大甲國民中學

作者：	指導老師：
國二 楊淳竣	王俊祺 楊鍾鳴

關鍵詞：曲率、擺線、萬花尺

摘要

我發現萬花尺是由兩圓互繞，竟形成那麼特別的圖形，便開始研究圖形成的原因。我從動態模擬萬花尺機械作圖開始，發現機械作圖的原理是用齒輪控制圓形的轉動，以至於可以控制花瓣數量，試想，如果不是因為齒輪，機械作圖總有誤差，要維持大小兩圓半徑在整數比的情況下是非常困難的事情。處理外圈是橢圓的情形時更是如此。

處理完機械作圖後，我找出控制萬花尺圖形的擺線方程式，這時候有兩個重點：

一、試著用方程式模擬並解釋機械作圖的所有樣態。

二、利用方程式內抽象的係數變化，討論原本機械作圖無法作成的圖形，包含外輪擺線的部分。

壹、研究動機

偶然在家裡發現一個小時候常玩的玩具－萬花尺，它的圖樣豐富有趣，充滿好奇心的我就去想它的數學原理，但百思不得其解，於是到學校問老師，老師說，那我們就來做科展研究這問題吧!

之後我去網路上找答案,但裡面的內容老師覺得不夠完整，大部分只有觀察，並沒有將其背後的原理作說明，特別是橢圓的部分，所以我想在這篇報告中利用方程式的方法證明其產生原因。

貳、研究目的

一、找到兩圓轉動關係(萬花尺形成的關鍵原因)。

二、討論萬花尺的圖形與圓的關係

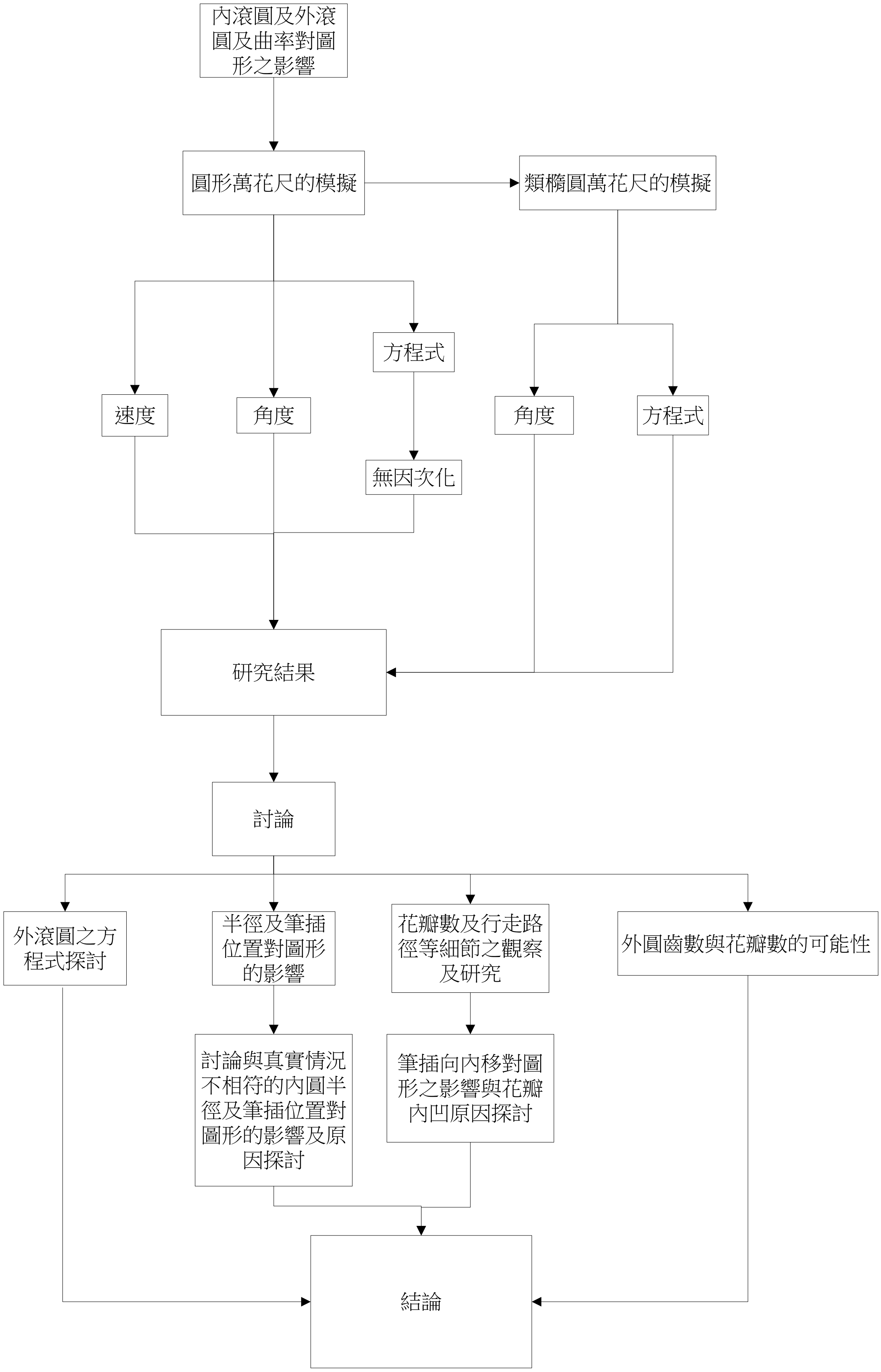
三、統整歸納出萬花尺方程式與圖形的關係

四、找出作圖工具的科學原理

五、用方程式創造出不存在的圖形

參、研究設備與器材與研究流程

紙、筆、電子計算機、網路、萬花尺、軟體(geogebra、word、Excel)。


內滾圓及外滾圓及曲率對圖形之影響
圓形萬花尺的模擬
類橢圓萬花尺的模擬
速度
角度
方程式
無因次化
角度
方程式
研究結果
討論
外滾圓之方程式探討
半徑及筆插位置對圖形的影響
花瓣數及行走路徑等細節之觀察及研究
外圓齒數與花瓣數的可能性
討論與真實情況不相符的內圓半徑及筆插位置對圖形的影響及原因探討
筆插向內移對圖形之影響與花瓣內凹原因探討
結論

肆、研究過程

一. 外滾圓及內滾圓及曲率對圖形的影響

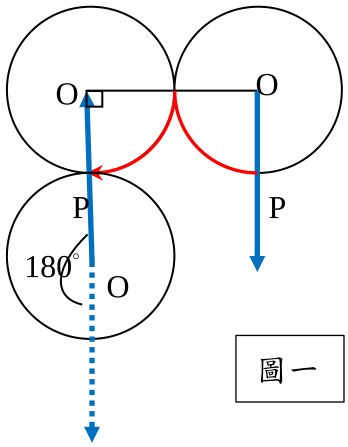
1. 外滾圓及內滾對速度的影響

當我開始尋找萬花尺背後原理的時候，我發現了一個有趣的問題：有兩個相同的圓，其中一個圓固定，當另個圓繞其轉動一圈時，繞行的圓轉動幾圈？

這個問題其實不是一開始就遇到的問題，不過老師建議我放在這邊，因為討論萬花尺之後，就把它當成先備知識，放在前面的原因是，整個研究的過程都要用到它。

（1） 討論半徑相同的兩圓

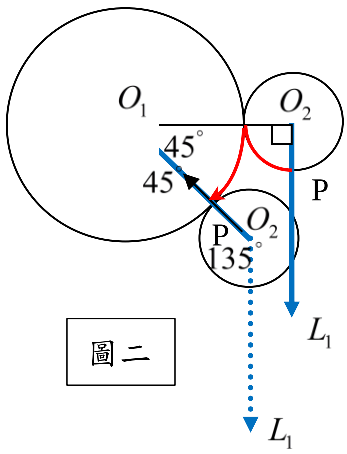
O_2繞著O_1旋轉，當轉了90°(1/4 圈)即圖形上紅色的長度，O_2上的點 P 轉了180°，所以當O_2轉O_1一圈時($90^{\circ}\times4$)，O_2上的點共轉了兩圈。



圖一

（2） 討論半徑 2:1 的圓

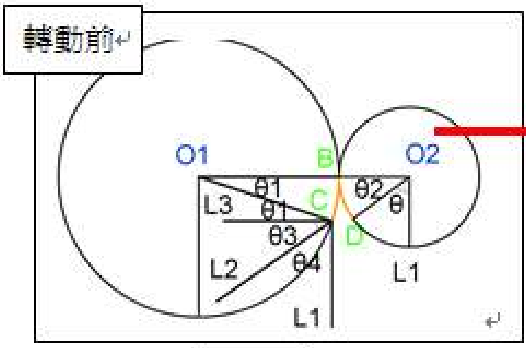
O_2繞著O_1旋轉，當轉了45°(1/4 圈)即圖形上紅色的長度，O_2上的點 P 轉了135°，所以當O_2轉O_1一圈時($45^{\circ}\times8$)，O_2上的點共轉了 3 圈($135^{\circ}\times8$)



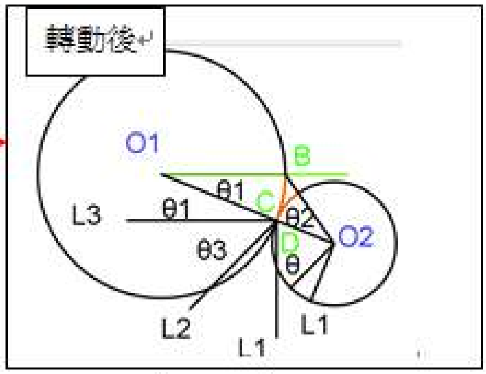
圖二

（3） 一般化

以半徑 2:1 的圖形為基礎，試著用幾何動態軟體 gegebra 模擬。(如圖三、圖四)



圖三



圖四

我發現O_2實際轉的度數應該是$\theta_1+\theta_2$，所以做了以下的實驗證明：

利用角度證明 ➔ $\theta_4=\theta_1+\theta_2$

假設大圓為O_1，小圓為O_2，小圓向前轉動的距離為 X(橘色部分)，O_1和O_2的半徑為 2 和 1；B 為轉動起點，終點為 C，O_2向前轉動 X 後，C 和 D 重疊。

此時O_1圓心與L_2的夾角為θ(與原L_1與$\overline{O^2D}$夾角θ相同)，且

$\theta=\theta_1+\theta_3$，$L_3 // \overline{O_1O_2}$，且$L_3\perp L_1$，而L_2與L_1的夾角θ_4即為O^2轉動

x，本身所轉的角度， $\theta_3+\theta_4=90$，$\therefore \theta_4=90-\theta_3$，又$\theta_3=\theta-\theta_1$，

$\theta=90-\theta_2$

$\therefore \theta_4=90-\theta_3=90-(\theta-\theta_1)=90-\theta+\theta_1 \;=90-(90-\theta_2)+\theta_1$

$=\theta_2+\theta_1$

若將 A、C 的半徑用 r_1、r_2代替，θ_4 依舊等於 $\theta_1+\theta_2$

(因為上一個證明並沒有用到半徑條件)

在此我們可以推導出公式 $\theta_4 = \frac{x}{\pi}(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1})\times 180°$

$$\theta_4 = \theta_1+\theta_2 = \frac{x}{2\pi r_1}\times 360° + \frac{x}{2\pi r_2}\times 360° = \frac{x}{\pi}(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1})\times 180°$$

小圓轉的圈數為 $\frac{360}{\theta_1}\cdot\theta_4\cdot\frac{1}{360°}$，因為 360 除以外圓對應的角度就是外圓轉的圈數 ，外圓要轉的圈數乘以當時小圓要轉的角度就是小圓繞外圓一圈的角度，再除以 360 就是小圓要轉的圈數。

因此， 小圓轉的圈數$=\frac{360}{\theta_1}\cdot\theta_4\cdot\frac{1}{360°}=\frac{360}{\theta_1}\cdot(\theta_1+\theta_2)\cdot\frac{1}{360°}=\frac{\theta_2}{\theta_1}+1$;

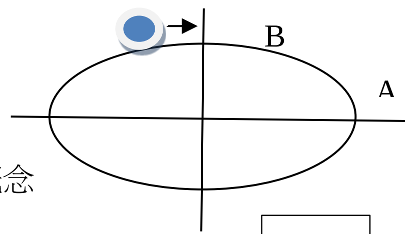
$r_1\cdot\theta_1 = r_2\cdot\theta_2$(弧長相等)，$\frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{r_1}{r_2}$， 故小圓轉的圈數$=\frac{\theta_2}{\theta_1}+1=\frac{r_2}{r_1}+1$

所以外切圓滾動時會多繞一圈(定理 1)。

同理可證，內切圓滾動外圓，內切圓滾動時會少繞一圈(定理 2)。

此時，小圓轉的圈數$=\frac{\theta_2}{\theta_1}-1=\frac{r_2}{r_1}-1$。

2. 曲率對繞行圓的影響



圖五

接下來要模擬的還有類橢圓形,我們可以使用曲率的概念來解釋:先以橢圓的外滾圓來說明，右邊的圖形是一個橢圓。

A 點附近比較彎曲，也就是繞行的圓只要行進比較短的距離就會額外增加比較多的角度。同理，B 點附近比較平緩，也就是繞行的圓比較長的距離才會額外增加一些角度。

因此，A 點部分應該有比較小的曲率半徑，B 點部分應該有比較大的曲率半徑；若曲率半徑非常大則可以想像成在直線上轉動，也就是不會有額外的轉動角度了。註:曲率的倒數就是曲率半徑。

二.圓形萬花尺的模擬

介紹：萬花齒是由一個大外圓搭配七個內圓，內圓中有許多小孔(筆插孔)，每個孔向圓心以零點一公分內縮。

表一

	齒數	筆插最外孔 離圓心	筆插孔數	半徑
外圓	48			3.32
A	17	0.65cm	5	1
B	18	0.7cm	5	1.1
C	22	1cm	7	1.3
D	27	1.45cm	9	1.65
E	29	1.55cm	11	1.8
F	30	1.55cm	11	1.85
G	33	1.75cm	13	2.05

上表和右圖是我的萬花尺規格，

這樣的圖樣總共有 61 種(插孔總數)

這讓我充滿了挑戰的望。

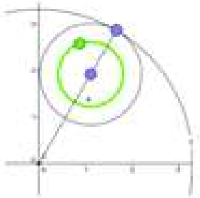
圖六

因此，我定下了幾個要觀察、研究的重點：從外面是圓的內輪擺線著手，試著用幾何軟體模擬圖形，找出輪徑齒數對擺線花樣的影響。如果可以的話，我也想研究外圓是橢圓甚至是其他形狀擺線花樣的規則變化。

圖七

圖八

1.速度模擬



圖九

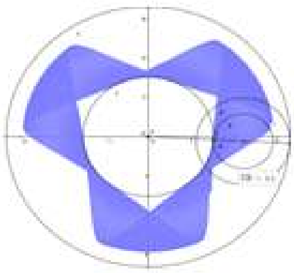
因為我是從科展開始才學習如何使用 gegebra，所以從基本的作圓開始，讓內圓依附外圓上的點移動(圖九)，然後讓內圓用同樣的速度滾動，結果發現擺線圖形是一個圓(圖十)，且半徑為筆插動點位置到外圓圓心的距離。

圖十

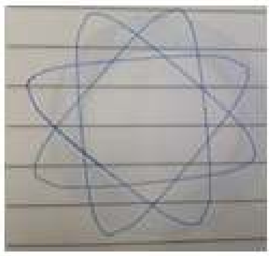
這個問題的解答，就在之前討論的定理 2，因為小圓是內滾圓，因此，內圓速度必須經過調整。

接著，這一段實驗非常有趣。我利用外、內圓半徑比來調整轉動速率，結果有跑出擺線花朵，不過跟真實情況有差別很大，如下圖。

圖十一:模擬示意



圖十二:模擬圖形



圖十三:真實圖形

後來，我想到了，半徑的測量無論如何都是有誤差的，但齒輪數量因為是整數，所以不會有誤差，因此，我將半徑比修正成齒輪數量比圖形因此完全正確。

以下是我的理論：

速率實際上是齒數比，也就是圓繞的圈數，由於我們知道圓內繞會少跑一圈，所以要算速度時，要考量在內。

速度為: $\dfrac{外圓齒數}{內滾圓齒數}-1$，也就是說，當內滾圓繞外圓一圈時，本身只轉了這些圈數，所以外圓和內滾圓的速度比為：

$$1:\ \frac{外圓齒數}{內滾圓齒數}-1$$

另外，內滾圓順時針繞外圓時，筆插逆時針旋轉，所以筆插的速度要加負號。

2.角度模擬

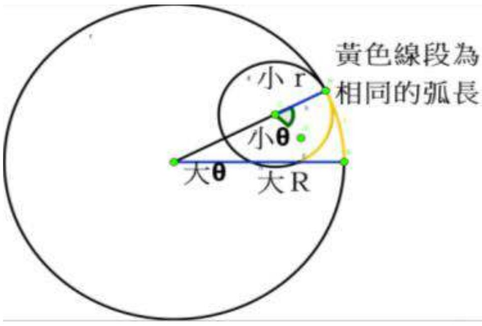
因為圓形的速度固定，所以不需調整，但橢圓就不一樣，他的角度改變，速率隨著曲率在變，所以我想到利用角度，當內滾圓轉了外圓幾度之後，他本身也要轉幾度，就不用擔心橢圓曲率不同的問題了。

因此，我設定小圓轉動不是以速度，而是以走過的路徑對應成旋轉角度來設定。具體操作原理如下：

我還是先以圓形來設定，首先要先算出 內圓要轉幾度＝外圓轉的角度乘上外圓半徑除以內圓半徑就是內圓要轉的角度。

(利用 L＝rθ，小圓繞過大圓長度相等)

$$\frac{\text{大}R*\text{大}\theta}{\text{小}R} = \text{內圓要轉幾度}$$



圖十四

大圓半徑就如同之前所說的，用齒數比，

因為它是一個比例關係，所以：$\dfrac{\text{大圓齒數}*\text{大}\theta}{\text{小圓齒數}} = \text{內圓要轉幾度}$

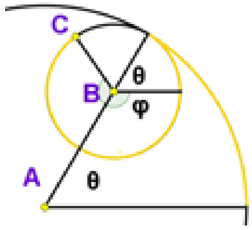
接著為了在圓上模擬 (因為圓轉了一圈角度就會重設)，所以要用數值滑桿代替，這樣角度才能大到可以把圖形都畫出來。滑桿要設定成用我們所說的依角度的方法去跑，所以我用滑桿的前進速度去控制，先令控制大圓角度的滑桿速度為 1，則小圓的速度就是：$\dfrac{\text{大圓齒數}*\text{大}\theta}{\text{小圓齒數}} = \text{內圓要轉幾度}$，這跟之前固定速率差在沒有減 1 (但之前的公式並沒有考慮角度的變化)。

前面減一是因為我是以圓繞圓的速度下去算，但後者是角度，所以沒有內圓少跑一圈的問題。這樣的設計不僅可以避免曲率改變問題也可讓圖形模擬更接近真實狀況。 (類橢圓的模擬情形需要使用此方法)

3.方程式模擬

利用內圓繞外圓旋轉速度和角度的方法，已經模擬出所有萬花尺可繪出的圖形。現在開始進行下一項工作：找出萬花尺圖形的方程式(也就是控制圖形各項變化的參數)，最後利用這些參數找出特別的圖形。

(1)不考慮筆插的內滾動點方程式



圖十五

以 C 為動點，R、r 為外、內圓半徑。

C 相對 B→$(r\cos(\varphi),\ -r\sin(\varphi))$

B 相對 A→$((R-r)\cos(\theta),(R-r)\sin(\theta))$

又因$R\theta=r(\theta+\varphi)$[滾動距離相等]　所以$\varphi=\frac{(R-r)\theta}{r}$

C 相對 A→$(R-r)\cos(\theta)+r\cos(\frac{R-r}{r}\theta),(R-r)\sin(\theta)-r\sin(\frac{R-r}{r}\theta)$

因此所推得的動點方程式如下：

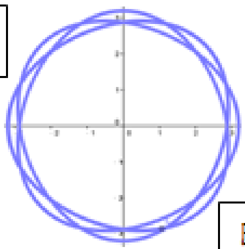
P[$(R-r)\cos(\theta)+r\cdot\cos((\frac{R-r}{r})\theta)$, $(R-r)\sin(\theta)-r\cdot\sin((\frac{R-r}{r})\theta)$]

而將 X 或 Y 的後半段方程式同除以 q 則 q 越大，花瓣越圓

P[$(R-r)\cos(\theta)+r\cdot\cos((\frac{R-r}{r})\theta)/q$, $(R-r)\sin(\theta)-r\cdot\sin((\frac{R-r}{r})\theta)/q$]

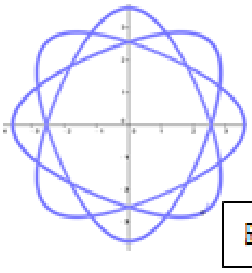
這個部分其實就是之後會討論的筆插影響。

q=9



圖十六

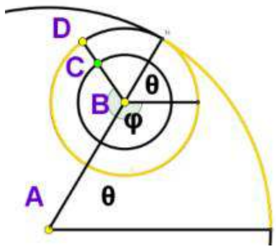
q=3



圖十七

(2) 加入筆插位置後的萬花尺圖形動點方程式

令 C 點為筆插位置距圓心 a 個單位，D 為對應出去的點，外圓與內圓的半徑分別為 R、r 單位。當內滾圓走了θ度，圓心相對的也轉θ度，C 點轉了Ø度。



圖十八

C 相對 B→$(a\cdot\cos\varphi,\ -a\cdot\sin\varphi)$

B 相對 A→$((R-r)\cos\theta,(R-r)\sin\theta)$

又因$R\theta = r(\theta+\varphi)$[滾動距離相等]　所以$\varphi = \frac{(R-r)\theta}{r}$

C 相對 A→ $(R-r)\cos\theta + a\cdot\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right),(R-r)\sin\theta - a\cdot\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$

(3) 無因次化

(因機械作圖的筆插位置有固定的值，所以要用適當的 k 值代表筆插位置)

表二

齒數	半徑	圓周率	K值
17	1	3.141593	0.369599
18	1.1	3.141593	0.383972
22	1.3	3.141593	0.371279
27	1.65	3.141593	0.383972
29	1.8	3.141593	0.389991
30	1.85	3.141593	0.387463
33	2.05	3.141593	0.390319

齒數	K值	圓周率	齒數半徑	量測半徑	誤差
17	以齒K值	圓周率	齒數半徑	量測半徑	[illegible]
17	0.369599	3.141593	1	1	0
18	0.369599	3.141593	1.058824	1.1	0.041176
22	0.369599	3.141593	1.294118	1.3	0.005882
27	0.369599	3.141593	1.588235	1.65	0.061765
29	0.369599	3.141593	1.705882	1.8	0.094118
30	0.369599	3.141593	1.764706	1.85	0.085294
33	0.369599	3.141593	1.941176	2.05	0.108824
18		3.141593			[illegible]
17	0.383972	3.141593	1.038889	1	0.038889
18	0.383972	3.141593	1.1	1.1	0
22	0.383972	3.141593	1.344444	1.3	0.044444
27	0.383972	3.141593	1.65	1.65	2.22E-16
29	0.383972	3.141593	1.772222	1.8	0.027778
30	0.383972	3.141593	1.833333	1.85	0.016667
33	0.383972	3.141593	2.016667	2.05	0.033333
29		3.141593			[illegible]
17	0.389991	3.141593	1.055172	1	0.055172
18	0.389991	3.141593	1.117241	1.1	0.017241
22	0.389991	3.141593	1.365517	1.3	0.065517
27	0.389991	3.141593	1.675862	1.65	0.025862
29	0.389991	3.141593	1.8	1.8	0
30	0.389991	3.141593	1.862069	1.85	0.012069
33	0.389991	3.141593	2.048276	2.05	0.001724
30		3.141593			[illegible]
17	[illegible]	3.141593	1.048333	1	0.048333
18	[illegible]	3.141593	1.11	1.1	0.01
22	[illegible]	3.141593	1.356667	1.3	0.056667
27	[illegible]	3.141593	1.665	1.65	0.015
29	[illegible]	3.141593	1.788333	1.8	0.011667
30	[illegible]	3.141593	1.85	1.85	0
33	[illegible]	3.141593	2.035	2.05	0.015
33		3.141593			[illegible]
17	0.390319	3.141593	1.056061	1	0.056061
18	0.390319	3.141593	1.118182	1.1	0.018182
22	0.390319	3.141593	1.366667	1.3	0.066667
27	0.390319	3.141593	1.677273	1.65	0.027273
29	0.390319	3.141593	1.801515	1.8	0.001515
30	0.390319	3.141593	1.863636	1.85	0.013636
33	0.390319	3.141593	2.05	2.05	0

若要用上面的方程式，單位必須要一樣，所以我把筆插換成與大 R 小 r 相對應的比例。

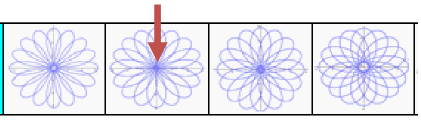
同一個圓，不論以半徑或齒數為單位，它的的圓周長會相同，所以令圓周長為齒數$\times K = 2\times\pi\times r$ 接著求 K，$K = 2\pi r \div$ 齒數，將每個內滾圓的齒數帶入，得到六個 K 值(有兩組 K 值一樣)再將 K 值帶回，算出以齒數轉換而成半徑，，再將 7 個內滾圓在同個 K 值與量出的半徑的誤差相加，取誤差最小的那組，如表二。

右邊兩表的解釋如下:紅色的為以該齒數算出的 K 值代入所有齒數所得的半徑，與測量出的半徑的誤差，最好的 K 值約為 0.387463，最後再用 K 值算出筆插齒數。

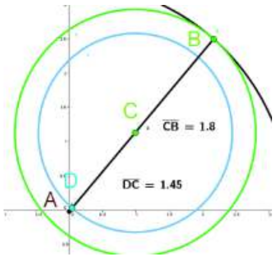
齒數 $= 2\pi r \div k$，最後再四捨五入求出誤差最小的齒數。

(4)關於誤差(模擬筆插位置的問題)

誤差的部分用有$\boxed{聚焦}$的圖形來說明(因為特徵明確)，

方程式	

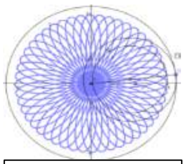
圖十九



圖二十

要聚焦的話，內圓半徑加筆插半徑等於外圓半徑的話就會聚焦於一點。我模擬時都用成齒數，齒數比半徑大，所以誤差就會變大，導致該聚焦的筆插點會比較晚聚焦。

但若用測量來的半徑，誤差會導致大 R、小 r 的比例改變，反而造成整個圖形的崩潰。(花瓣數會消失)
以 48:29 筆插 2 的圖形為例，測量值為 ：(3.32):(1.8):(1.45)，調整後為 48:29:24(變成齒數比)



圖二十一

接下來我要解釋研究結果中筆插位置改變方程式圖形較晚聚焦的原因：機械作圖的聚焦原因是：1.8+1.45 只要大約等於 3.32，只差了 0.07 但加上原子筆的粗細就有聚焦了。

然後方程式的部分因為：29+24 等於 53 與外圓 48 差了 5，但為了做圖方便加上較符合實際情況，我都用 4.8:2.9:2.4，所以誤差是 0.5，還是很大，畫出的圖形會較晚聚焦。

誤差只出現在模擬作圖時，因為有半徑當單位，但研究方程式的目的是要創造及觀察不存在的圖形，所以誤差對整體的影響不大。

4. 橢圓萬花尺的模擬

介 紹 ： 橢 圓 型 萬 花 齒 是 由一個大橢圓搭配七個內圓。

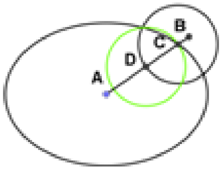
表三

	齒數	筆插最外孔離圓心	筆插孔數	半徑/長、短
橢圓	64			10.26、 7.3
A	17	0.65cm	5	1
B	18	0.7cm	7	1.1
C	22	1cm	7	1.3
D	27	1.45cm	9	1.65
E	29	1.55cm	11	1.8
F	30	1.55cm	11	1.85
G	33	1.75cm	13	2.05

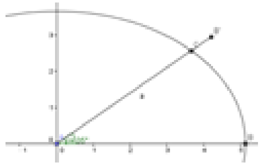
這組橢圓萬花尺的長短軸半徑並沒有差很多。模擬的時候，我先假設利用齒數比 (利用角度模擬方式，但不考慮橢圓半徑變化) 來處理橢圓和小圓周長的問題，因為這樣可以避免計算橢圓周長。

圖二十二

橢圓方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。以 C 為圓心內滾圓為半徑做一圓，找到 D 點，在 D 點以內滾圓半徑再做一個圓，用之前圓形角度的方法模擬。綠色的為需要用到的圓。



圖二十三


圖二十四

(1) 模擬方式與實際狀況分析

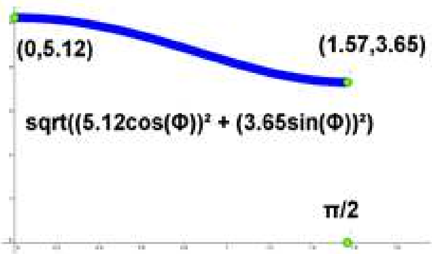
右圖為利用外內圈齒數比當半徑配合角度改變所繪的圖形。圖形和實際用機械繪出的圖形相當類似。

這邊我有一個想法；橢圓半徑(大 R)是會變化的，因此，

$$\frac{大R * 大\theta}{小R}=$$ 內圓要轉幾度 不就要進行修正，我們一般把長軸半徑定為 a，短軸半徑定為 b，O 為橢圓中心點，大 R 的改變曲線計算如下：

配合橢圓的參數式 $\mathbf{P}(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$，$\overline{PO}$ 長度公式以 R 來表示應為：

$$R=\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$$

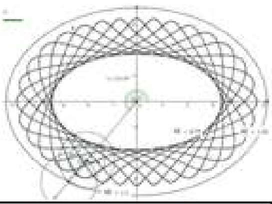


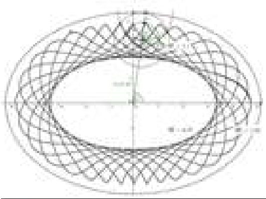
為了觀察 R 的變化，我設計了一個以 X 軸為角度，Y 為橢圓半徑的改變量的圖形。藍色曲線代表橢圓半徑在第一象限的長度變化。

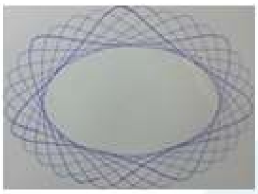
圖二十五

為了觀察半徑變化對圖形的影響，我設計了一個實驗在曲率比較高的地方增大外圓齒數(內圓速度加快)，曲率低的地方縮小外圓齒數(內圓速度放慢)，但平均齒數是一樣的(64 齒)，畫出來的圖形如下。

我發現，固定半徑的圖形反而比較接近機械萬花尺作圖，所以我推論應該是齒輪結構的關係。


圖二十六(固定半徑)


圖二十七(半徑改變)


圖二十八(真實圖形)

(2) 類橢圓方程式模擬

橢圓的半徑是一個變化的式子：

$$R = \sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)}$$

所以我在作類橢圓模擬方程式時，必須巧妙的避開這些複雜的算式，又能符合實際狀況，而這一連串的討論讓我找到適當的方法：

假設橢圓長軸為 2a、短軸為 2b，內圓的半徑為 r

橢圓齒數 m　內圓齒數 n

(這邊要特別注意　a、b 和 r 的設定要盡量符合實際長度)

C 相對 B → $(r\cos\varphi, -r\sin\varphi)$

B 相對 A → $((a-r)\cos\theta, (b-r)\sin\theta)$

利用之前的角度模擬：　$\theta m = (\theta+\varphi)n$ → $\varphi = \frac{m-n}{n}\theta$

得到方程式：$[(a-r)\cos(\theta) + r\cos(\frac{m-n}{n}\theta), (b-r)\sin(\theta) - r\sin(\frac{m-n}{n}\theta)]$

模擬後的圖形與機械作圖相仿，非常自然。

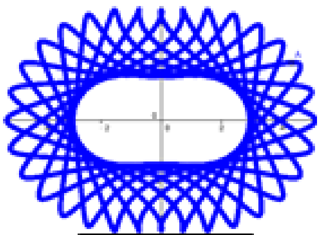
如果不考慮齒輪結構，內圓用橢圓繞行，則可以利用

$R = \sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)}$　中的 R 來代替 a、b，做出圖形。

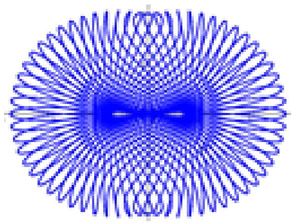
方程式為:

$\left(\sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)} - r\right)\cos(\theta) + r\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$，

$\left(\sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)} - r\right)\sin(\theta) - r\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$



圖二十九



圖三十

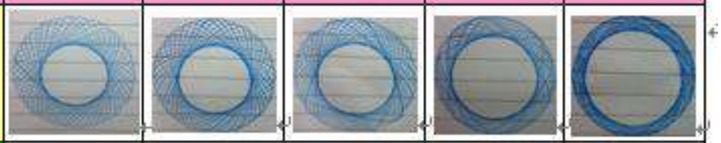
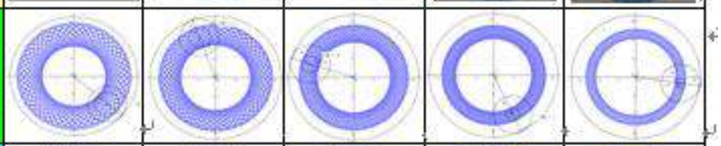
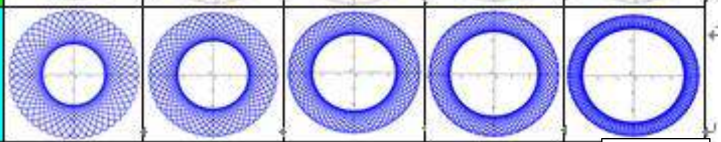
此圖形與機械作圖有相當的差異

伍、研究結果

1. 圓形萬花尺(1)手繪實際圖形(2)利用速度角度模擬圖形(3)直接用方程式模擬的圖形　筆插位置由外而內

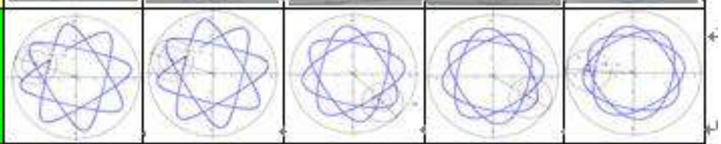
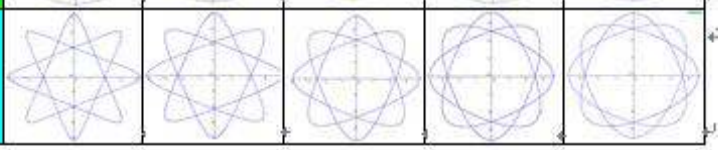
表四

外圈 48 齒　內圈 17 齒　筆插數 7　花瓣數　48

筆插位置	1	2	3	4	5
手繪					
速度角度					
方程式					

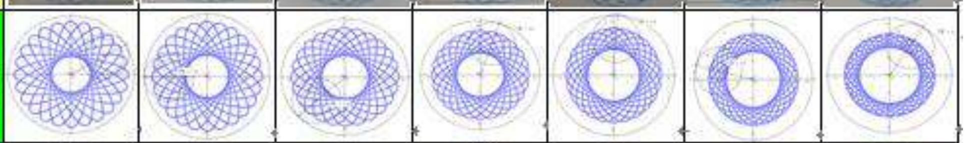
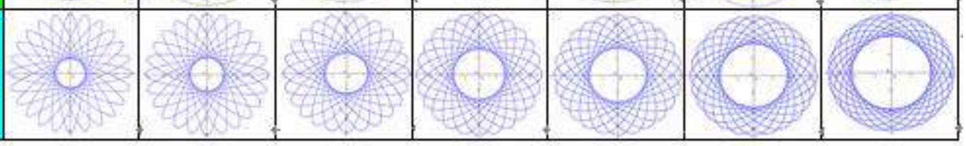
表五

外圈 48 齒　內圈 18 齒　筆插數 5　花瓣數　8

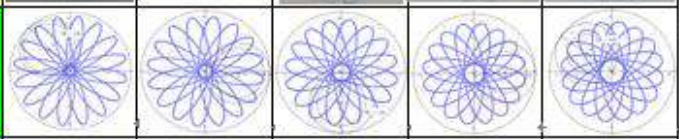
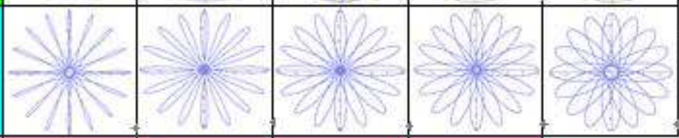
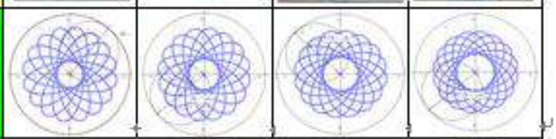
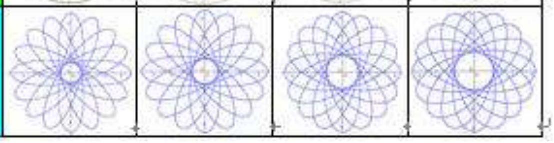
筆插位置	1	2	3	4	5
手繪					
速度角度					
方程式					

表六

外圈 48 齒　內圈 22 齒　筆插數 7　花瓣數　24

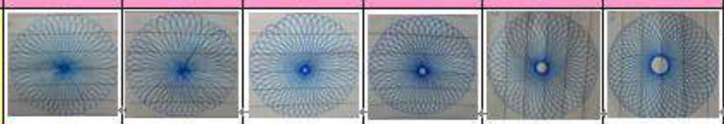
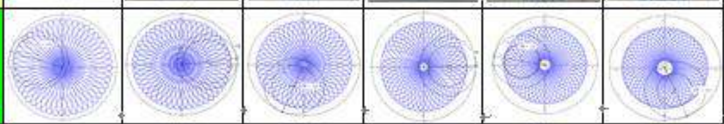
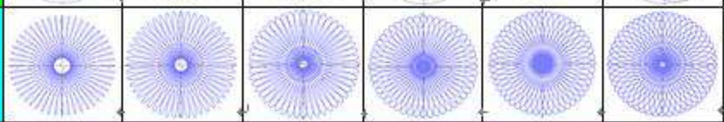
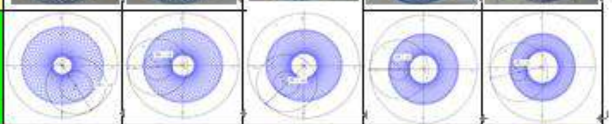
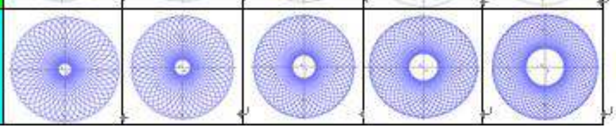
筆插位置	1	2	3	4	5	6	7
手繪							
速度角度							
方程式							

表七

<table>
<tr><td>筆插位置</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>手繪</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>速度角度</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>方程式</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>筆插位置</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>手繪</td><td colspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td>速度角度</td><td colspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td>方程式</td><td colspan="4"></td><td></td></tr>
</table>

外圈 48 齒
內圈 27 齒
筆插數 9
花瓣數 16

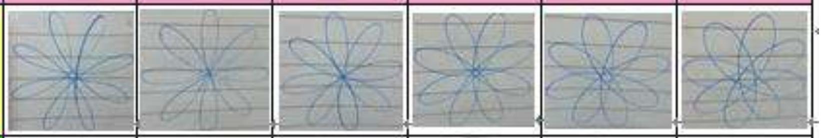
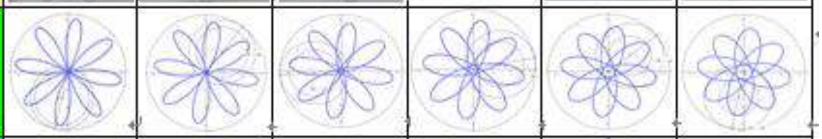
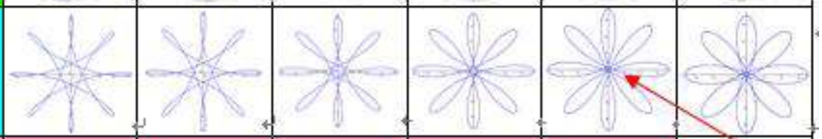
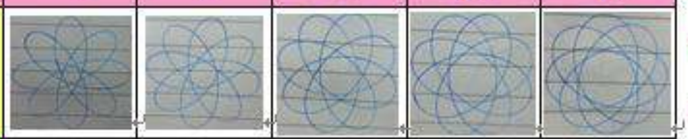
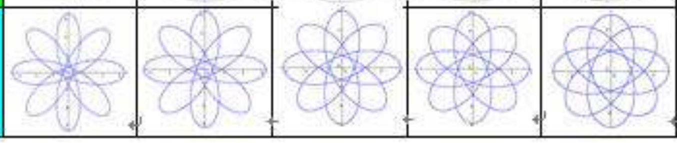
表八

<table>
<tr><td>筆插位置</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>手繪</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>速度角度</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>方程式</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>筆插位置</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td>手繪</td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td>速度角度</td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td>方程式</td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
</table>

外圈 48 齒
內圈 29 齒
筆插數 11
花瓣數 48

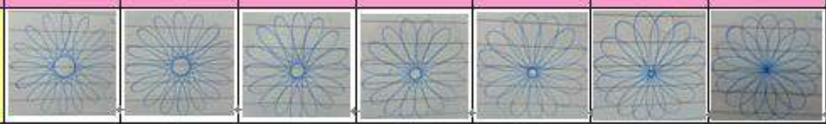
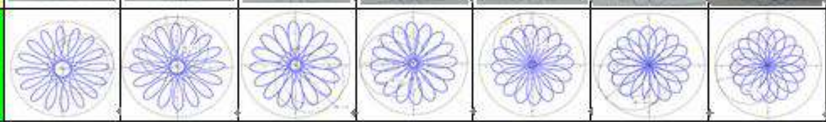
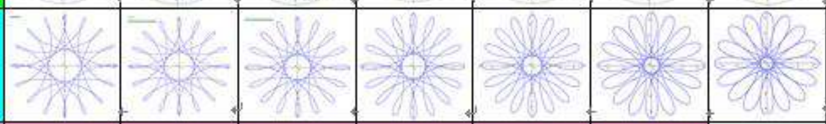
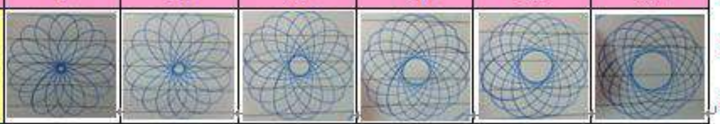
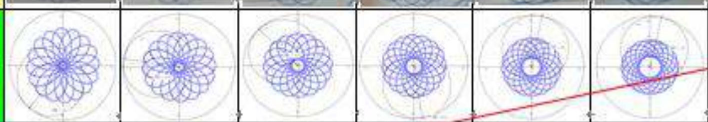
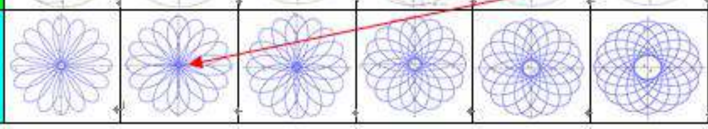
表九

外圈 48 齒　內圈 30 齒　筆插數 11　花瓣數　8

筆插位置	1	2	3	4	5	6
手繪						
速度角度						
方程式						
筆插位置	7	8	9	10	11	筆插位置的改變會導致圖形中央聚焦
手繪						
速度角度						
方程式						

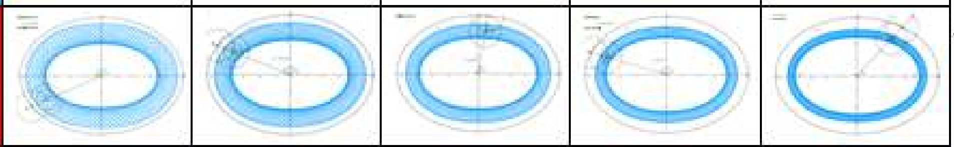
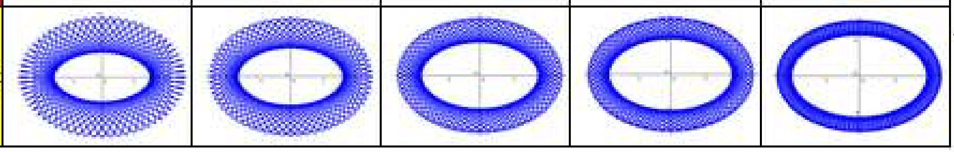
表十

外圈 48 齒　內圈 33 齒　筆插數 13　花瓣數　48

筆插位置	1	2	3	4	5	6	7
手繪							
速度角度							
方程式							
筆插位置	8	9	10	11	12	13	筆插位置的改變會導致圖形中央聚焦
手繪							
速度角度							
方程式							

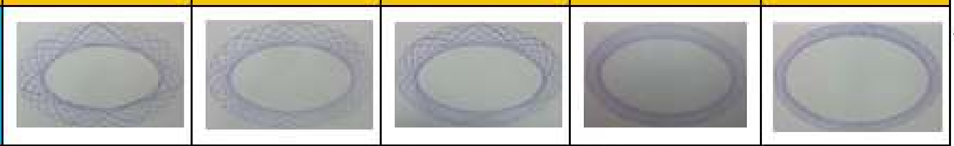
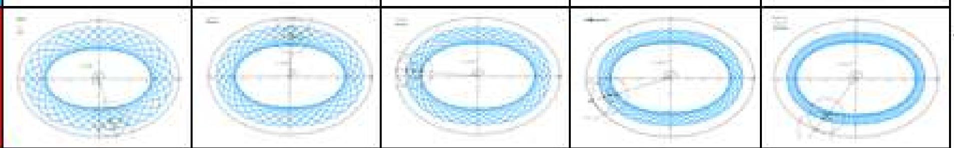
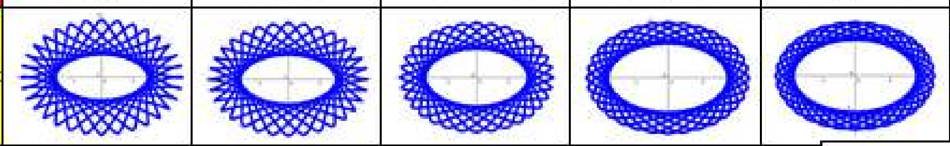
外圈 64 齒 內圈 17 齒 筆插數 5 花瓣數 64

表十一

筆插	1	2	3	4	5
手繪					
角度					
方程式					

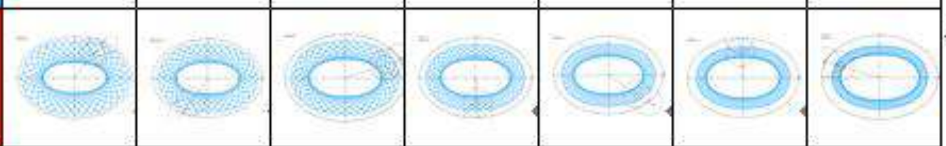
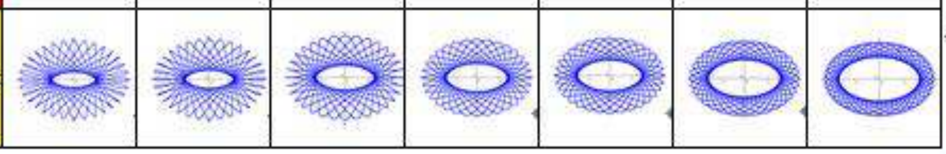
外圈 64 齒 內圈 18 齒 筆插數 5 花瓣數 32

表十二

筆插	1	2	3	4	5
手繪					
角度					
方程式					

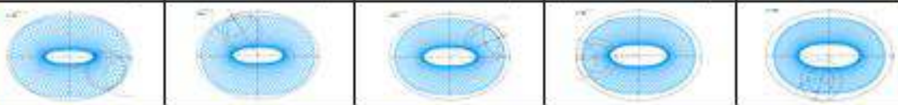
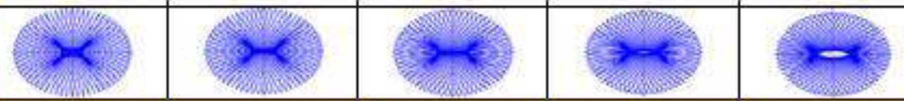
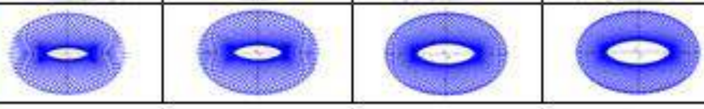
外圈 64 齒 內圈 22 齒 筆插數 7 花瓣數 32

表十三

筆插	1	2	3	4	5	6	7
手繪							
角度							
方程式							

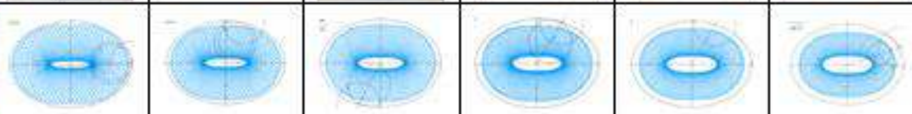
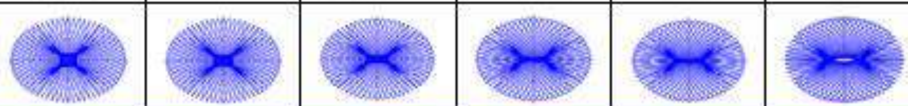
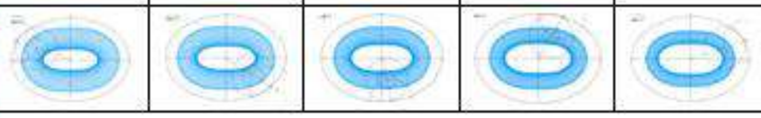
表十四

外圈 64 齒 內圈 27 齒 筆插數 9 花瓣數 32

筆插	1	2	3	4	5
手繪					
角度					
方程式					
筆插	6	7	8	9	
手繪					
角度					
方程式					

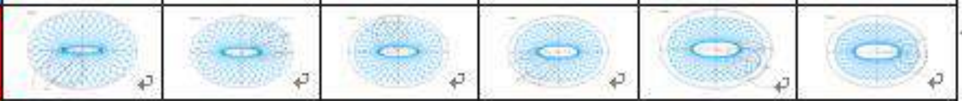
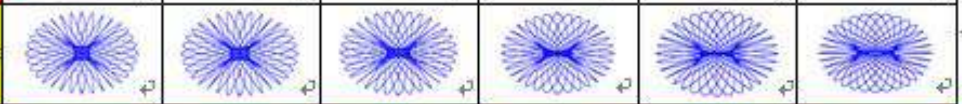
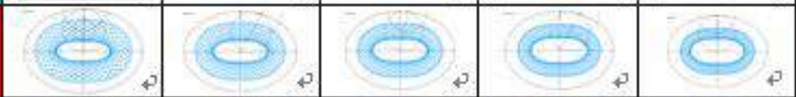
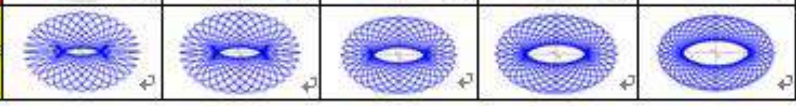
表十五

外圈 64 齒 內圈 29 齒 筆插數 11 花瓣數 64

筆插	1	2	3	4	5	6
手繪						
角度						
方程式						
筆插	7	8	9	10	11	
手繪						
角度						

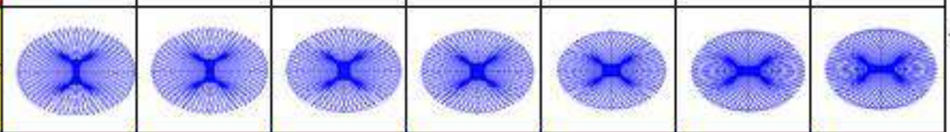
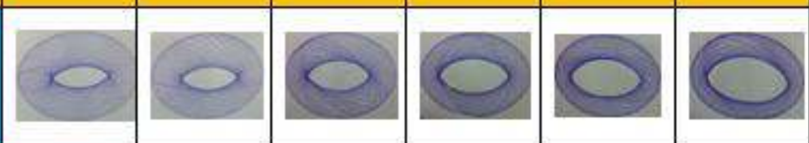
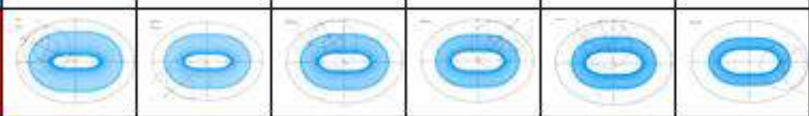
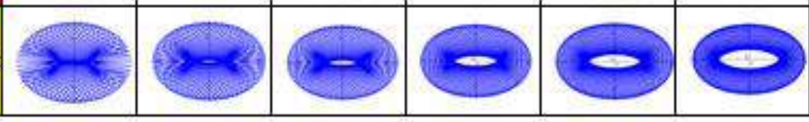
外圈 64 齒 內圈 30 齒 筆插數 11 花瓣數 32

表十六

筆插	1	2	3	4	5	6
手繪						
角度						
方程式						
筆插	7	8	9	10	11	
手繪						
角度						
方程式						

表十七

外圈 64 齒 內圈 33 齒 筆插數 13 花瓣數 64

筆插	1	2	3	4	5	6	7
手繪							
角度							
方程式							
筆插	8	9	10	11	12	13	
手繪							
角度							
方程式							

陸、討論

一. 外滾圓之方程式探討

外滾圓機械作圖可用兩個齒輪互繞完成

不過中間的齒輪沒有支撐力

我們用方程式作圖來討論

假設動點為 P，從 B 點出發，繞了半徑為 R 的大圓θ°，半徑為 r 的小圓轉了Ø°。

P 相對 T→ $(r\cos(\varnothing-\pi), r\sin(\varnothing-\pi))$

$=(r\cos(\pi-\varnothing), -r\sin(\pi-\varnothing))=(-r\cos(\varnothing), -r\sin(\varnothing))$

C 相對 S→ $((R+r)\cos(\theta), (R+r)\sin(\theta))$

P 相對 C→ $((R+r)\cos(\theta)-r\cos(\varnothing), (R+r)\sin(\theta)-r\sin(\varnothing))$

因 $R\theta=r(\varnothing-\theta)$，$\varnothing=\frac{(R+r)}{r}\theta$(滾動距離相等，紫色部分，如上圖)

P 相對 C 的關係如下:

$$((R+r)\cos(\theta)-r\cos(\frac{(R+r)}{r}\theta), (R+r)\sin(\theta)-r\sin(\frac{(R+r)}{r}\theta))$$

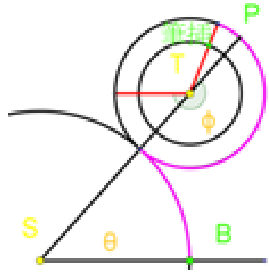
加入筆插，筆插半徑為 a:

筆插半徑相對 T→ $(-a\cos(\varnothing)，-a\sin(\varnothing))$

其餘的方程式都一樣

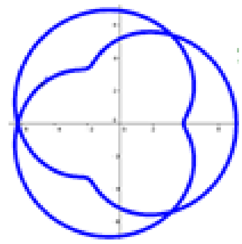
所以方程式為→

$((R+r)\cos(\theta)-a\cos(\frac{(R+r)}{r}\theta), (R+r)\sin(\theta)-a\sin(\frac{(R+r)}{r}\theta))$。



圖三十一

外滾的花瓣數為被繞圓與繞行圓的最簡整數比中的被繞圓比，例如: 33 為被繞圓的齒數，22 為繞行圓的齒數，花瓣數為三



圖三十二

有趣的問題:

若圓繞著O_1外滾，和繞著O_2內滾，畫出的圖形是否一樣?

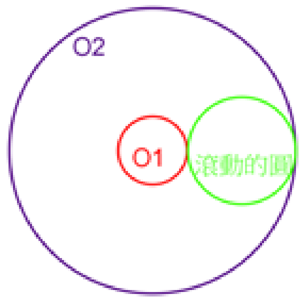
讓我們用方程式來證明:

令滾動的圓半徑為 1，O_1、O_2的半徑分別為 1:3

外滾 O_1 →

$(1+1)\cos(\theta)-\cos(\frac{(1+1)}{1}\theta),(1+1)\sin(\theta)-\sin(\frac{(1+1)}{1}\theta)$

$=(2\cos(\theta)-\cos(2\theta),2\sin(\theta)-\sin(2\theta))$



圖三十三

內滾O_2 →

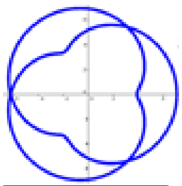
$$(3-1)\cos(\theta)+1\cos(\frac{3-1}{1}\theta),(3-1)\sin(\theta)-1\sin(\frac{3-1}{1}\theta)$$

$=(2\cos(\theta)+\cos(2\theta),2\sin(\theta)-\sin(2\theta))$

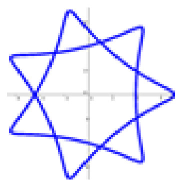
X 座標就不一樣了，所以不成立。原因是:

逆時針外繞時，筆插是逆時針轉(圖三十四)

逆時針內繞時，筆插是順時針轉(圖三十五)



圖三十四



圖三十五

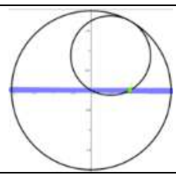
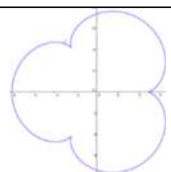
二. 半徑及筆插位置對圖形的影響

控制外、內圓半徑可決定花瓣數，利用筆插的部分可控制圖形的花瓣。

我們將討論半徑及筆插位置對圖形的影響，並用表格及圖片說明：

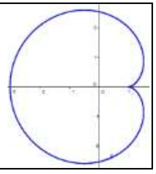
1.特殊半徑對內滾圖形的影響

表十八

$r=\frac{1}{2}R$	當內滾圓半徑為外圓的一半時，畫出來的將會是一直線。 
r=R	將兩個半徑帶入得方程式$(r\times\cos(0)，r\times\sin(0))$，sin(0)=0;cos(0)=1，帶入可得(r,0)一點。不形成圖形。
r>R	花瓣數是最簡整數比的內圓數，圖為 48:63，48 當外圓，最簡整數比為 3:4。 

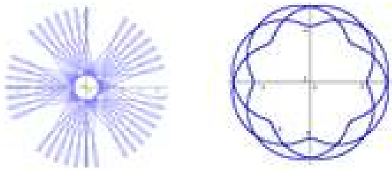
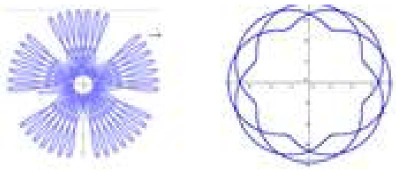
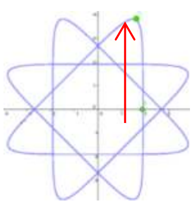
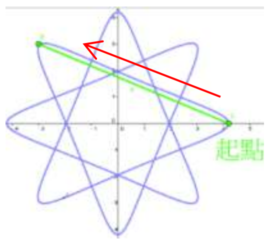
2.特殊半徑對外擺圖形的影響

表十九

$r = R$	當滾動圓等於被滾動圓時，會畫出像心臟的圖形 

3.特殊筆插位置

表二十

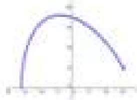
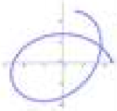
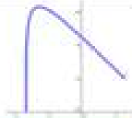
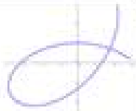
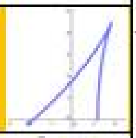
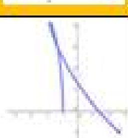
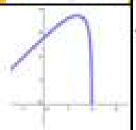
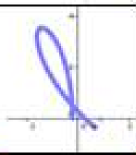
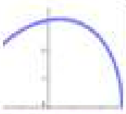
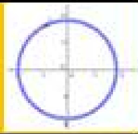
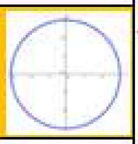
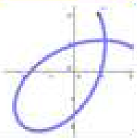
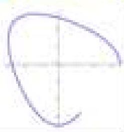
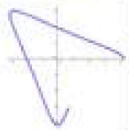
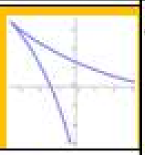
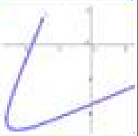
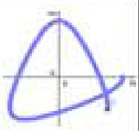
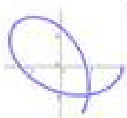
<table>
<tr>
<td>$a<0$</td>
<td>
比較內外圓半徑皆同，筆插互為相反數的圖形
(a) 花瓣數跟筆插無關(花瓣數跟內外圓有關)
(b)圖形呈現角度不同

$a>0$

$a<0$
就(b)點的情況我觀察圖形後發現應該是 X 座標的影響。因為方程式 X 變動不大才會直直向上，若變動很大才會走斜的將方程式分成兩個部分
$$(R-r)\cos(\theta)、\ a\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$$
$$\cos(0) = 1，\ -1 \le \cos(\theta) \le 1$$
θ為任意數。cos(0)得最大值，之後會慢慢變小
若筆插是正數，方程式為$(R-r)\cos(\theta) + a\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$而剛開始是從 0 度開始，所以兩者的值很大，相加後整個的值會變大，X 才會一下子就往斜邊走，若筆插是負數，方程式為$(R-r)\cos(\theta) - a\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$兩者的值很大，兩數相減值會變小，所以 X 會往上走。如右圖



</td>
</tr>
</table>

4.筆插及半徑對內滾圖形的影響

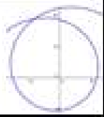
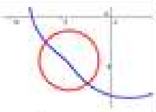
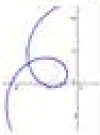
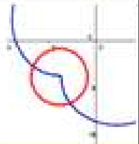
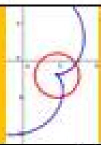
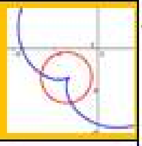
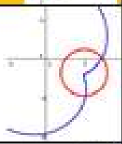
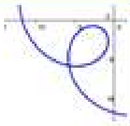
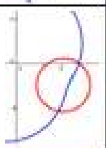
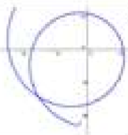
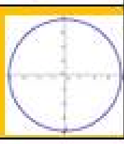
表二十一

內凹的定義:在同個花瓣上有一處焦點

	$r > \frac{1}{2}R$		$r < \frac{1}{2}R$	
a<r<0	較圓		內凹許多	
漸漸增大	較尖		稍微內凹	
a=-r	最尖		最尖	
r<a<0	稍微內凹		較尖	
漸漸增大	內凹較多		較圓	
a=0	圓形		圓形	
r>a>0	內凹較多		較圓	
漸漸增大	稍微內凹		較尖	
a=r	最尖		最尖	
a>r>0	較尖		稍微內凹	
漸漸增大	較圓		內凹許多	

5.筆插及半徑對外滾圖形的影響

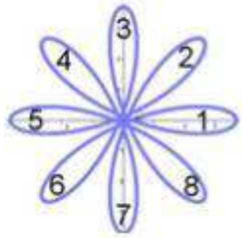
表二十二

（1）轉折的地方會有凹陷（紅色圈起來的地方） （2）向內形成一個凹陷的花瓣			
a<r<0	花瓣較大 	r>a>0	凹陷淺 
漸漸增大	花瓣較小 	漸漸增大	凹陷較深 
a=-r	凹陷最深 	a=r	凹陷最深 
r<a<0	凹陷較淺 	a>r>0	花瓣較小 
漸漸增大	凹陷淺 	漸漸增大	花瓣較大 
a=0	圓 		

三．花瓣數及行走路徑等細節之觀察及研究

1.花瓣數的決定

由於齒數比不同，所以不同的內滾圓會有不同的花瓣數，花瓣數是根據最小公倍數計算。



若外圓與內圓的最簡半徑比(齒數比)為 A:B 則

花瓣數為 A。繞行順序為 1→1+B→1+2B……依序完成圖形。

例:齒數 48 的外圓和齒數 30 的內滾圓因尺數最小公倍數為 240

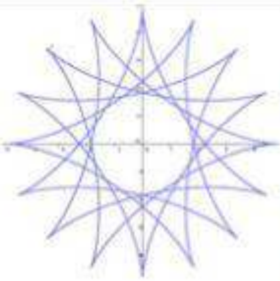
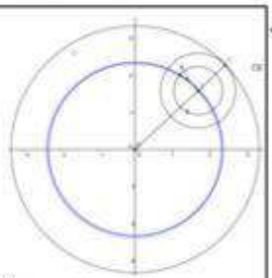
也就是小圓要轉 8 圈大圓要被轉 5 圈才算完成，所以瓣數是 8，

圖三十六

也就是兩圓齒數最小整數比之外圓齒數。(48:30=8:5　因此瓣數為 8)

另外繞行順序為：1→6→11(3)→16(8)→ …但因瓣數是 8，所以 11 的時候要回到 3，16 的時候要回到 8，如此依序完成所有花瓣(如 圖三十六)。

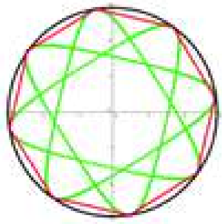
2.筆插特殊位置(實際無此圖形)與圖形的關係

當筆插位置在內滾圓的圓周上時，花瓣呈尖狀，並與外滾圓圓周相接。  圖三十七	筆插位置設在內滾圓圓心上時，或筆插速度與內滾圓速度相同時，畫出的皆為一個圓型。  圖三十八

3.花瓣頂點連線所形成的角度

圓型內滾出來的圖形用花瓣頂點連線成正多邊形，分成跟旁邊一點連線，跟旁邊兩點連線等…。如右圖。令外圓與內圓的最簡整數比為 A:B，與旁邊 N 點連線，然而連線出的正多邊形頂點角度

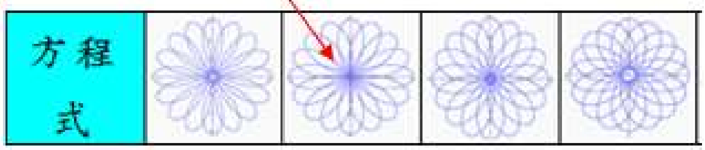
$360\times\frac{A-2n}{A}\div 2$，(頂角公式)，$\frac{A-2n}{A}$為頂角所佔的弧與圓的比例。



圖三十九

如圖三十七:此圖為與旁邊 1 點連接，有八瓣，所以頂角所對到的弧是 6/8 個圓周長，再用頂角公式即可求出頂角角度為 135 因與旁邊 N 點連線和與旁邊 B-N 點連線圖形相同，所以規定 $N<\frac{1}{2}B$。且 $N\neq\frac{1}{2}B$，$N\neq B$(當 N＝B 沒有意義)。

4. 圖形中間聚焦成一點的時機

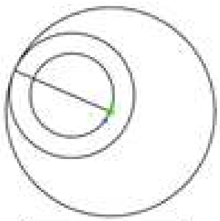


圖四十

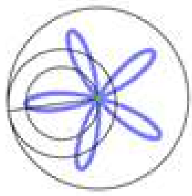
當內圓直徑大於外圓半徑(筆插才可能在外圓圓心上)，且筆插位置在圓心上時。也就是 R=r+a 時會聚焦

圖四十一:[藍點會經過圓心{綠色點}]。

圖四十二:[畫出的圖形聚焦在圓心上]。



圖四十一



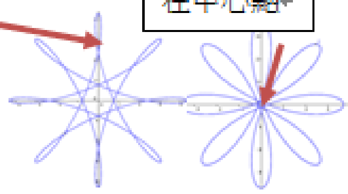
圖四十二

事實上聚焦的情況在同個外圓和

內滾圓中只有一種可能，但模擬時的點最小只有 0.1mm，所以很多不會聚焦的圖形看似有聚焦，但只要把點縮到很小很小，事實上聚焦的也只有一個圖形了(因為 R、r 固定，a 值只有一個)

四. 筆插向內移對圖形之影響與花瓣內凹原因探討

1.花瓣內凹原因



X 的座標方程式為→ $(R-r)\cos(\theta)+a\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$

隨著筆插的內移，a 會變小，X 值變小，與 Y 座標比較，

圖四十三　圖四十四

當 Y 跑到相同的值時，X 座標的水平移動距離變短，移動速度也較慢。

Y 座標的方程式為→ $(R-r)\sin(\theta)-a\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$

隨著筆插的內移，a 會變小，Y 值會變大，與 X 座標比較，

當 X 跑到相同的值時，Y 座標的垂直移動距離較大，移動速度較快。

又因 cos 函數值從零開始時為 1 到-1，再由-1 到 1，即減增減增

而 sin 函數值從零開始時為 0 到 1，再由 1 到-1，即增減增減

所以 X 一開始向左移動許多才換 Y 移動，當筆插越小，X 向左移動距離變短，就換 Y 移動，所以轉彎處會從負向移動至正向。

所以綜合之下，一開始第一個筆插轉彎處便在最左下角，之後慢慢地往右上角移(因為 X 還來不及移到負向，就換 Y 移動了)。

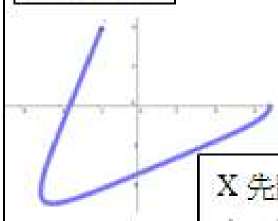
2.花瓣隨著筆插內移而變圓的原因

由上面的推論，同理可證，當 a 直漸漸增大，X 會增快，Y 會減慢，當 a 越大，X、Y 的圖形起伏會變越大。

令兩筆插齒數為 b、c， 且 b>c，b、c 分別為左圖與右圖。

Y 跑，但 Y 小，所以上升速度較慢，X 大，向右偏的速度快，所以很斜。

花瓣較尖

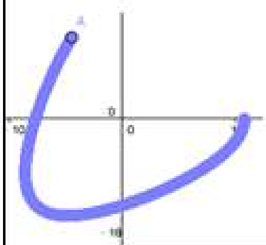


X 先跑，X 大，向左跑很多。

圖四十五

Y 跑，因為 Y 大，所以上升速度較快，X 小，向右偏的速度慢，所以較不斜。

花瓣較圓



圖四十六

由此可知，隨著筆插向內移動，花瓣會漸漸變圓。

五．外圓齒數與花瓣數的可能性

100 齒以內的外圓會有最多種類的花瓣數？(整數的討論)

看有幾個因數即可得知其花瓣數的種類，因為除了它的因數外，其他比它小的內滾圓的齒數會與它互質，他們的最簡整數比中的外圓比就一樣，而不同因數會與其外圓有一種最簡整數比。

例:外圓為 10 的花瓣數，內滾圓只可能為 1 到 9，花瓣數可能為 2;5;10 分別是 10:5 時;10:2 時;10:3 或 10:5 或 10:7 時(皆相同)，但 1 不可能，因為外圓是 10，內圓也是 10 的話不成圖形。[p.22]

所以 100 齒以內會形成最多花瓣的是 60,72,84,96，都有 11 種可能

柒、結論

一.萬花尺模擬

表二十三

圓形速度	外圓:內圓:筆插=1:$\frac{M}{N}-1$:$-\frac{M}{N}+1$
圓形角度	外圓:內圓=1:$\frac{R\theta}{r}$
圓形方程式	$(R-r)\cos\theta+a\cdot\cos((\frac{R-r}{r})\theta),(R-r)\sin\theta-a\cdot\sin((\frac{R-r}{r})\theta)$
類橢圓角度	外圓:內圓=1:$\frac{R\theta}{r}$
類橢圓方程式	$(a-r)\cos\theta+r\cdot\cos((\frac{m-n}{n})\theta),(b-r)\sin\theta-r\cdot\sin((\frac{m-n}{n})\theta)$

二.討論

1. R=r+a 時會聚焦。

2. 花瓣頂點連線的角度: $360\times\frac{A-2n}{A}\div 2$。

3.三圓半徑分別為 a、b、c 且 a+b=c 時，b 外滾 a 不等於 b 內滾 c。

4.外滾方程式:

$$(R+r)\cos\theta - a\cdot\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right)，(R+r)\sin\theta - a\cdot\sin(\frac{R+r}{r}\theta)$$

5.內外圓最簡整數比為 A:B，花瓣數為 B 繞行順序為 1→1+A→1+2A

6.花瓣內凹是因為三角函數值的關係

7. 內滾圓特殊半徑

三.研究價值及應用

1.輕易地畫出外擺圖形

實際上是可以用兩個齒輪互繞來做出外擺圖形，但轉動時十分不便，且外擺無法使用內擺可以取代。

2. 畫出更多圖形

使用這些方程式可以不受齒數(正整數)的限制做出更多圖形，而且可以調整筆插，改變花瓣的形狀及呈現角度。

3.畫角度

將花瓣頂點連線及可畫出正多邊形，而不同花瓣數畫出的正多邊形又不同，花瓣數量就是正多邊性的邊數(花瓣數大於等於三時)，而不同正多邊形的內幾度數又不同，藉由不同的內角角度相加或相減，即可做出多種不同的角度

4.設計出花瓣種類較多萬花尺外圓

我們知道外圓齒數的因數個數就是花瓣數的種類，若要研發，則可以選擇這些外圓齒數。

5.圖形可應用在壁紙、地磚等裝飾上

6.可做為防滑磁磚的花紋，既美觀又止滑。

捌、參考資料及其它

1.幾何學中的海倫 http://episte.math.ntu.edu.tw/

2.〈到底轉了幾圈？〉/101 學年度科展國中組王毓謙

3.〈圓擺線花形的幾何基因〉/45 屆科展國小組第一名

4. Geogebra 幾何與代數的美麗邂逅

【評語】030401

關於萬花尺作圖的討論。作者們針對小圓繞大圓轉動時，半徑和速率對小圓上動點的位置變化做了分析。藉由數學模型來討論萬花尺作圖的成像，給出了一些結果。數學模型得出的結果與機械作圖不盡一致，這是值得探究的問題。