

# 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 物理科

030115

“氣韻” “聲” 動—亥姆赫茲共振的探討與應用

學校名稱：雲林縣立斗六國民中學

作者：  國二 李昀芸  國二 黃若菱  國二 蔡佩芸	指導老師：  丁崇祺  何玉月
---	-----------------------------

關鍵詞：亥姆赫茲空腔、共振、頻率

## 摘要：

為了能簡單利用聲能，所以利用亥姆赫茲共振的方式，對原理及應用進行探討，目的是用來找出共振空腔的頻率，並找出旋轉器的共振範圍，使其轉動而產生電流。

### 亥姆赫茲共振原理驗證：

- 1、有無瓶頸不影響公式頻率，但將無瓶頸空腔當作極短瓶頸去計算，真實頻率與公式頻率相近，但會影響公式趨勢的變化。
- 2、瓶頸越長、截面積越小及空腔體積越大其頻率越低，但材質與空腔外型會影響公式頻率的準確率。

### 亥姆赫茲共振應用：

- 1、空腔頻率越低，材質越硬，外型越流線越利於轉速，且共振不只在單一頻率，在一定範圍都可轉動，材質越硬，驅動頻率範圍越大。
- 2、聲量分貝越大，轉速越快，但線圈來不及磁化，電流反而越小。
- 3、裝置可吸收一定的環境聲能。

## 壹、研究動機

老師在課堂上提到環境污染越來越嚴重時，如何減少污染已成為當今的議題，各種污染需要長時間的努力才有辦法改善。那有甚麼污染可以立即性改變，甚至利用呢？










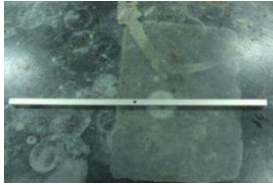



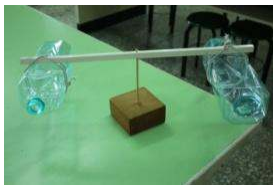


接下來我們就開始思考要如何解決與利用污染問題，剛好在 2013 年第 26 屆國際青年物理學家競賽 IYPT 題目中有提到亥姆赫茲共振的應用，在合適的頻率與強度的環境下，聖誕樹球的裝置就會開始運動，而這個動力來自於聲音，所以我們就想嘗試利用聲音來提供能源，做出從聲能到動能，再從動能到電能的裝置，進而對能源做出貢獻。

## 貳、研究目的

- 1、瞭解容器有無瓶頸對空腔共振頻率的關係
- 2、瞭解容器瓶頸的長短與截面積對共振頻率的影響
- 3、瞭解容器空腔體積對共振頻率的影響
- 4、以亥姆赫茲共鳴器為基礎做出自製亥姆赫茲旋轉裝置
- 5、了解空腔頻率、空腔外型與材質對亥姆赫茲旋轉裝置轉速的影響
- 6、改良亥姆赫茲共振旋轉裝置成發電機，並測量聲量、轉速、電壓與電流大小的關係。

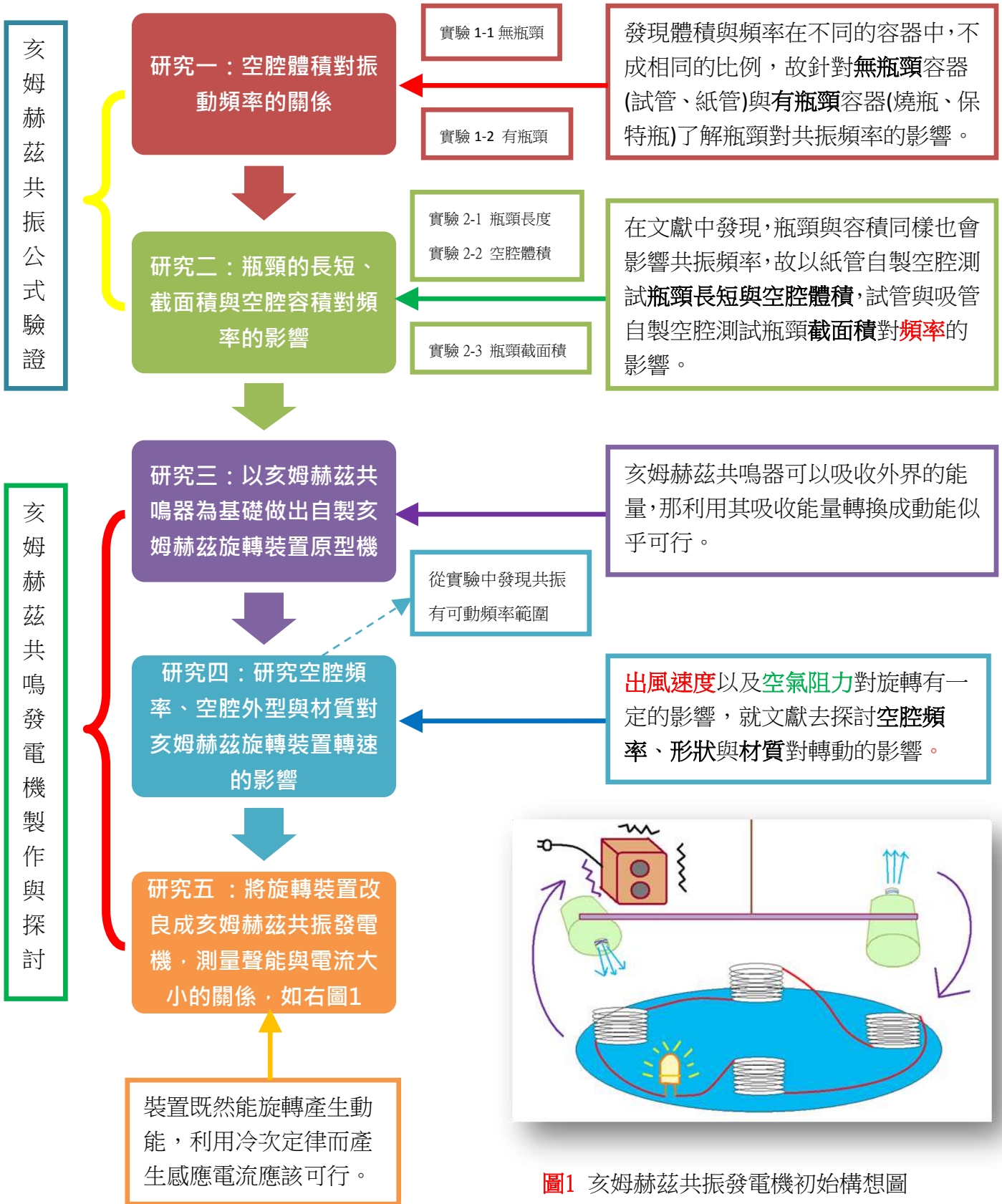
## 參、研究器材

軟體	音效分析軟體 audacity
----	-----------------

器材	保特瓶數支 	試管數支 	燒瓶數支 	自製亥姆赫茲共振器 
	筆記型電腦 	量筒 	喇叭 1 與 2 號 	分貝計 
	轉速計 	鋁管 	三用電表 	麥克風 
	亥姆赫茲一號機 	亥姆赫茲三號機 	亥姆赫茲四號機 	亥姆赫茲三號改 

# 肆、研究過程或方法

研究架構圖：



## 實驗原理：

1863年德國物理學家赫爾曼·馮·亥姆赫茲 Hermann von Helmholtz 所著之《作為樂理的生理學基礎的音調感受的研究》On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music。他發明亥姆霍茲共振器，用來研究聲學中sin波的“頻率”和“音高”，所以在語言與聽覺的研究有了重大發現，同時對之後的音樂學者產生了重大的影響(懸鉤子, 2014)。

短管與空腔結合稱為亥姆赫茲共振器，假設大氣壓力為 $P_0$ ，空氣密度為 $\rho$ ，空腔容積為 $V_0$ ，瓶頸長度為 $L$ ，瓶頸截面積 $A$ 。

$\therefore$ 腔體氣體質量為 $M = \rho \times A \times L$ ，當聲音發出的時候，瓶頸內空氣就會震盪產生位移，假設往空腔移動 $X$ ，空腔的內部容積  $V = V_0 - AX$ ，將內部氣體視為絕熱系統，所以  $P \times V^\gamma = \text{定值}$ 。

$$P_0 \times V_0^\gamma = P \times (V_0 - AX)^\gamma$$

$$\therefore P = \frac{P_0 \times V_0^\gamma}{(V_0 - AX)^\gamma} = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{AX}{V_0}\right)^\gamma} = \frac{P_0 \left(1 + \frac{AX}{V_0}\right)^\gamma}{\left(1 - \frac{AX}{V_0}\right)^\gamma \left(1 + \frac{AX}{V_0}\right)^\gamma} = \frac{P_0 \left(1 + \frac{AX}{V_0}\right)^\gamma}{\left[1 - \left(\frac{AX}{V_0}\right)^2\right]^\gamma}$$

$$\because AX \ll V_0, \therefore \text{依二項式定理 } P = \frac{P_0 \left(1 + \frac{\gamma AX}{V_0}\right)}{(1-0)^\gamma} = P_0 \left(1 + \frac{\gamma AX}{V_0}\right)$$

$$\therefore \text{腔體瓶頸壓力差為 } P - P_0 = P_0 \left(\frac{\gamma AX}{V_0}\right)$$

$$\text{從瓶頸壓力差了解對截面積施力 } F = \Delta P \times A = ma; P_0 \left(\frac{\gamma AX}{V_0}\right) \times A = (\rho \times A \times L)a$$

$$\text{加速度 } a = \frac{P_0 \left(\frac{\gamma AX}{V_0}\right) \times A}{\rho \times A \times L} = \frac{P_0 \left(\frac{\gamma AX}{V_0}\right)}{\rho \times L}$$

$$\text{根據簡諧運動週期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ 推得週期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{X}{\frac{P_0 \left(\frac{\gamma AX}{V_0}\right)}{\rho \times L}}} = 2\pi \sqrt{\frac{V_0 \rho L}{P_0 A \gamma}}, \text{ 又頻率 } f = \frac{1}{T},$$

推得頻率  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P_0 A \gamma}{V_0 \rho L}}$   $\because$  在拉普拉斯所修正的牛頓聲速公式 (陳宇, 2004)中，假設聲波在理想氣體中傳播，空氣的體積彈性係數  $B = \gamma P$ ，其中 $P$ 為空氣的壓力， $\gamma$  為定壓比熱與定容比

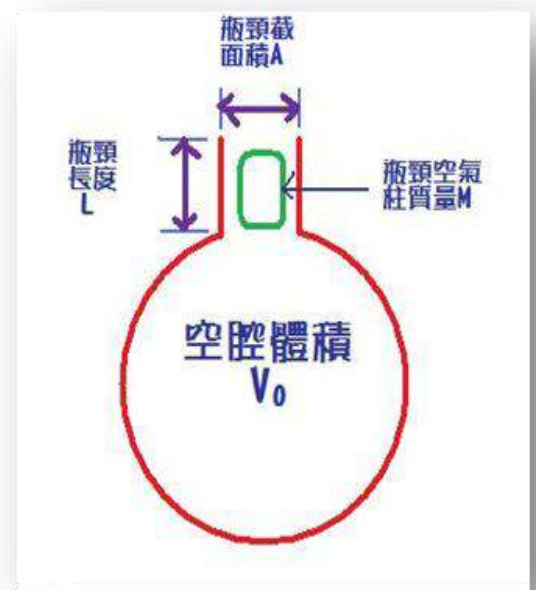


圖 2 亥姆赫茲共鳴器

熱的比值。聲速  $C = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho}}$ ，故真實頻率  $F = \frac{C}{2\pi} \times \sqrt{\frac{A}{V_0 L}}$

F：共振頻率(Hz)                      C：聲速(cm/s)                      A：瓶頸截面積( $\text{cm}^2$ )

$V_0$ ：腔體體積(ml)                      L：瓶頸長度 (cm)

用瓶頸長度去計算真實頻率時，發現誤差非常大，故查詢資料發現(吳佑焉，2001)，瓶頸氣體的振動長度實際上比瓶頸長度還要長，因為空氣管開口端邊緣並非零聲壓，所以聲波在出口端的反射位置不會正好在管子的邊緣，而是會由管的邊緣向外延伸一小段距離的位置，由於頸部與外側及空腔連結處，分為凸緣(flanged)與非凸緣(unflanged)不同的加工情形。所以長度修正會因加工情況而改變，參考右圖3，常見的有效長度為凸緣0.85d，非凸緣0.6d，d為口徑直徑，因容器的不同須修正不同的長度，故暫時修正可能的有效長度(以文獻所附的常見長度推算)  $L' = L + 0.85d + 0.6d = L + 1.45d$

所以公式更改為  $F = \frac{C}{2\pi} \times \sqrt{\frac{A}{V_0 L'}}$

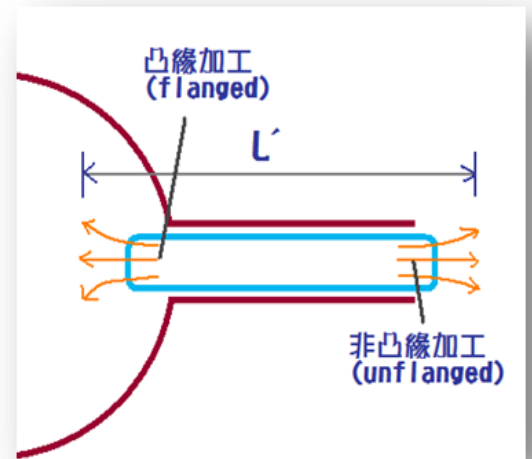


圖3 瓶頸長度修正圖

## 實驗步驟：

### 實驗1 研究容器空腔體積對共振頻率的關係

#### 實驗1-1 研究無瓶頸容器的體積對共振頻率的關係

- 1、分別將各種大小的試管裝滿水，將其倒入量筒測量其實際容積至最小單位ml，測量出五種試管大小，分別為試管1、2、3、4、5，如下表。

類別	試管1	試管2	試管3	試管4	試管5
體積	15.3 ml	16.8 ml	23.2 ml	36.6 ml	60.5 ml

- 2、使用學校老師使用過的羽球紙筒當容器，形成半封閉狀態。

3、將羽球罐紙筒由長至短切割成39.51cm、37.60cm、31.92cm、27.62cm、24.05cm，來形成五種不同體積的空腔，體積測量如下表。

類別	紙筒1	紙筒2	紙筒3	紙筒4	紙筒5
體積	1255.45 ml	1135.81 ml	966.8 ml	836.56 ml	728.43 ml

原本對試管與紙管用嘴巴吹出聲音讓麥克風收音，由軟體 **audacity** 利用對數頻率找出其共振頻率，示意圖如下圖 4。但發現這種方式找共振頻率，雜訊太高，且瓶頸越粗越不好吹，不好找出其共振頻率，故改以先計算公式頻率的方式來縮小正確的共振範圍，並修正方法如步驟 4。

4、先以公式計算頻率後，再用電腦以**audacity**軟體利用蜂鳴生成器以喇叭放出公式頻率前後50Hz的蜂鳴聲，同時以**audacity**軟體讓麥克風收音將麥克風放在瓶口附近來找出容器共振的頻率。

原本使用學校供應給老師的麥克風，發現雜訊很多，故上網購買高感度麥克風，雜訊也改善許多，且可以在空腔旁測量，示意圖如下圖 5。

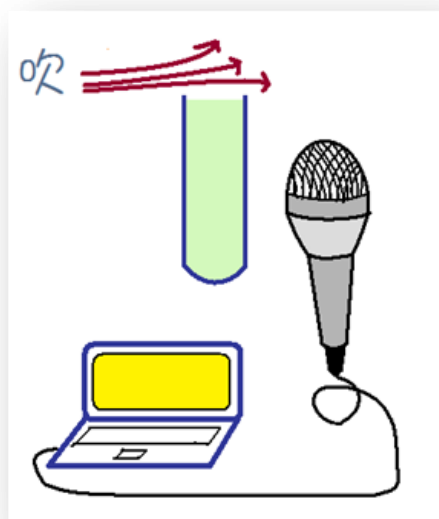


圖4 分析聲音裝置示意圖

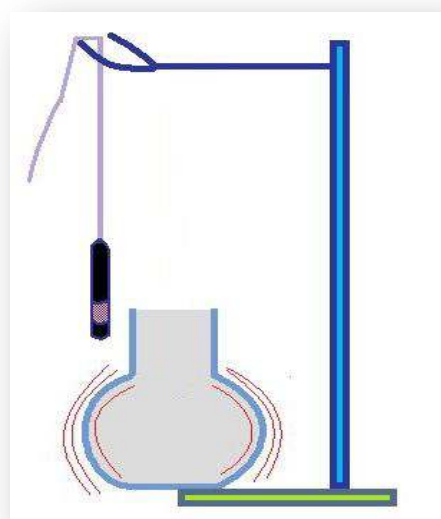


圖5 麥克風置放示意圖

5、由音效分析軟體**audacity**利用對數頻率分析頻譜，由最大分貝處找到其共振頻率。



## 實驗1-2 有容器瓶頸的空腔體積對共振頻率的關係

- 1、分別將五種不同體積的保特瓶及四種不同體積的燒瓶裝滿水，將其倒入量筒測量其實際體積。
- 2、再以實驗1-1的第4、5步驟找出其真實頻率

類別	保特瓶 甲	保特瓶 乙	保特瓶 丙	保特瓶 丁	保特瓶 戊
體積	522.5 ml	289.8 ml	870.1 ml	674.8 ml	564.5 ml
類別	燒瓶A	燒瓶B	燒瓶C	燒瓶D	
體積	622.5 ml	645.0 ml	264.0 ml	135.0 ml	

在實驗 1-2 發現，有瓶頸保特瓶的真實頻率與亥姆赫茲推導公式頻率誤差太大，故認為瓶頸或許有影響到共振頻率。所以針對瓶頸長短、截面積與容器體積繼續做探討。

## 實驗2 研究容器瓶頸的長短、截面積與空腔容積對頻率的影響

在實驗前使用學校老師使用過的羽球紙筒當容器做出三種紙筒亥姆赫茲共振腔，規格及測試如下：

- 1、使用學校老師使用過的羽球罐紙筒當容器，長度切至39.65cm，以塑膠蓋蓋住形成半封閉狀態。
- 2、再以厚紙板做出紙筒的上蓋封住瓶口，並在中心切出與瓶頸同樣截面積的圓洞。
- 3、將鋁箔紙筒當瓶頸，插入圓洞後再用熱融膠將周圍封住，如下圖6。

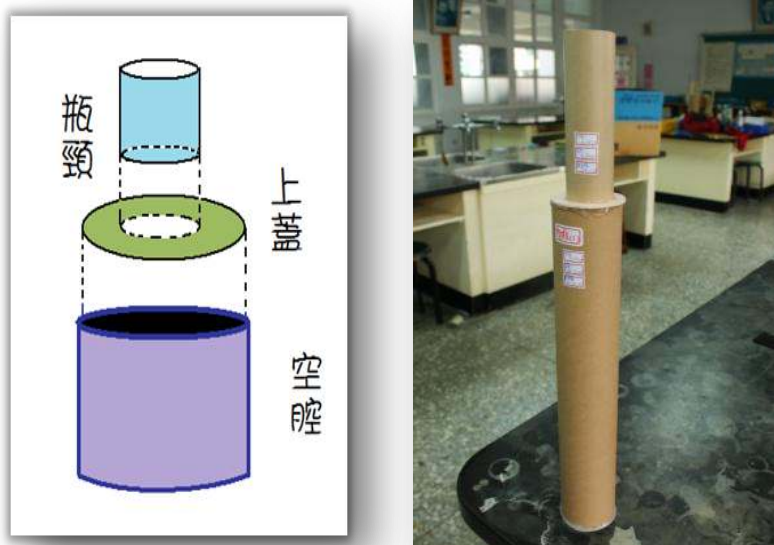


圖6 自製亥姆赫茲共振器



4、前置測試的規格與結果如下表。

類別	瓶頸口徑	瓶頸長度	空腔體積	公式頻率	實際頻率
自製空腔1	3.50 cm	14.90 cm	1303.43 ml	105 Hz	85 Hz
自製空腔2	3.00 cm	15.15 cm	254.03 ml	205 Hz	193 Hz
自製空腔3	4.08 cm	14.82 cm	1255.43 ml	122 Hz	95 Hz

在國中理化所學到的容器共振頻率主要是與容器體積有關，完全沒提到瓶頸，於是我們就開始自製三種不同的瓶頸與空腔體積來判斷瓶頸是否有影響關係，就推測頻率公式而言，開根號體積的倒數應該會與頻率成正比，但就這三個空腔測量可以發現(如下圖7)，並不全然呈現正比關係，瓶頸很可能有影響，於是針對瓶頸長短、截面積與容器體積來做實驗2-1~2-3。

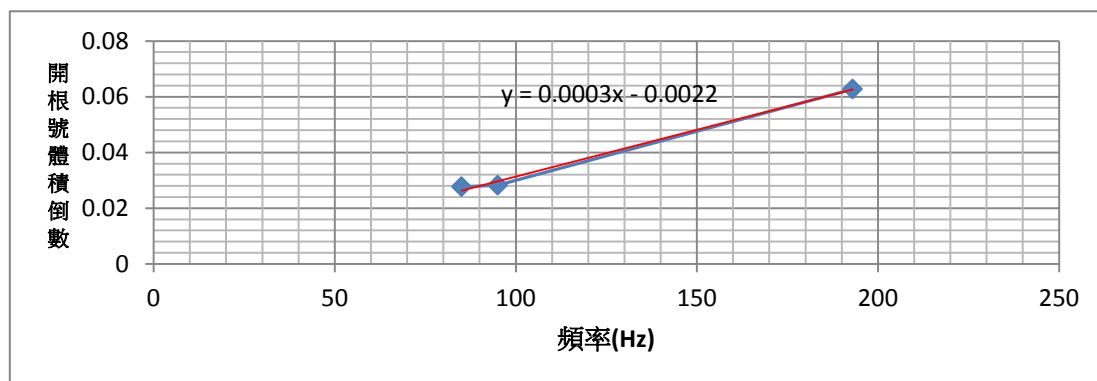


圖7 自製空腔開根號體積的倒數與頻率的關係圖

#### 實驗2-1 研究容器瓶頸的長短對共振頻率的關係

- 1、首先使用自製空腔3來製作不同長度瓶頸容器。
- 2、將瓶頸由長到短切成12.00cm、9.15cm、8.05cm、5.31cm四種不同長度的瓶頸。
- 3、再以實驗1-1的第4、5步驟找出其真實頻率。

#### 實驗2-2 研究容器的容積對共振頻率的關係

- 1、使用第二支自製空腔3來製作不同容積大小的容器。
- 2、將容器容積由長到短切成體積為1128.68ml、929.32ml、837.40ml、716.36ml四種不同容積的空腔。

- 3、以各自容器截面積做出以厚紙板所做的下蓋，封住下切處再用熱融膠將周圍封住。
- 4、再以實驗1-1的第4、5步驟找出其真實頻率。

用紙筒自製空腔費時且還要找到適合的瓶頸與空腔，在實驗瓶頸長度影響或是容器體積影響時，可以只做出一個空腔，再利用每裁一段就測量一次的方式來做實驗(切頸或切空腔)，但測量容器截面積若是用原來紙筒製作會很不方便，因為不同截面積，就必須製作不同的連接處，於是想出以試管當空腔，用不同截面積的吸管當瓶頸再插入橡皮塞較容易進行實驗，故改良後開始實驗2-3。

### 實驗2-3 研究容器瓶頸的截面積對共振頻率的關係

- 1、以試管5(體積16.8ml)當容器空腔，再分別以三種不同截面積的吸管當瓶頸。
- 2、將三種吸管各插入橡皮塞，吸管裁成14.0cm如下圖8，而空腔體積須扣除試管口至橡皮塞底的體積。
- 3、再以實驗1-1的第4、5步驟找出其真實頻率。

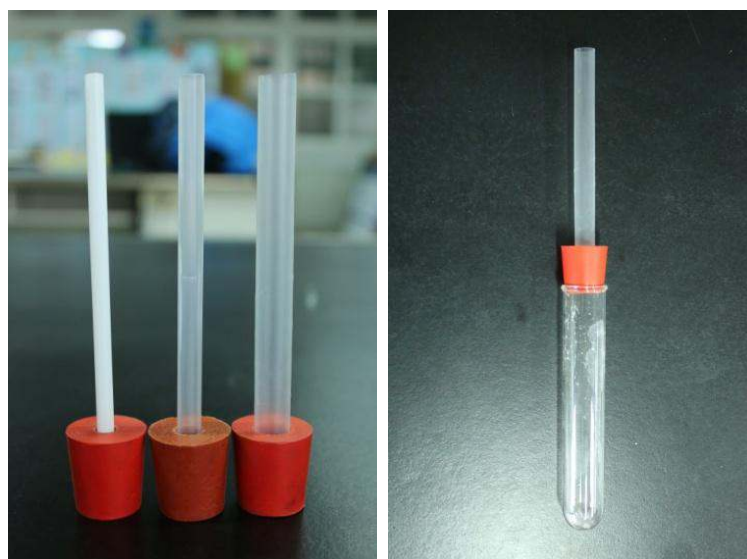


圖8 試管自製亥姆赫茲共振腔

### 實驗3 以亥姆赫茲共鳴器為基礎做出自製亥姆赫茲旋轉裝置原型機

由於在產生共振的容器中可以發現氣體不斷的從容器吐出，一開始以為是喇叭振動所產生的風，但以隔板隔開喇叭發現仍然有這種情況，所以才確定為容器自身所發

出的氣體，故推測可以利用作用力與反作用力的方式，利用扭秤產生力矩而造成旋轉進而設計出裝置。

### 亥姆赫茲共振器1號機

- 1、先取兩個相同的保特瓶當成亥姆赫茲共鳴器的空腔。

利用保特瓶的原因是容易取得且輕，先確定旋轉裝置可以動之後，在實驗四再探討自製的亥姆赫茲共振腔是否也能轉動，並了解影響轉動快慢的因素。

- 2、中間以鋁條當橫桿，並將兩個保特瓶綁在鋁條的兩側。
- 3、以扣環綁住釣魚線，喇叭放在下方的位置。
- 4、找出保特瓶的頻率再以喇叭驅動旋轉裝置原型機(如右圖9)。



圖9 亥姆赫茲共振機 1 號機

在實驗中發現，釣魚線的扭力很大，當旋轉到某個程度時，又會逆轉回來而影響轉動，故更改為粗鐵絲降低其扭力。(亥姆赫茲赫茲二號機仍失敗)但發現扭力還是存在，故改變其裝置，使其能以下面支撐的方式，放置旋轉裝置，使其減少扭力所產生的阻力。

### 亥姆赫茲共振器3號機

- 1、將原子筆芯墨水條改接竹筷，插入鑽孔的木塊並以熱融膠固定。



圖10 共振機底座

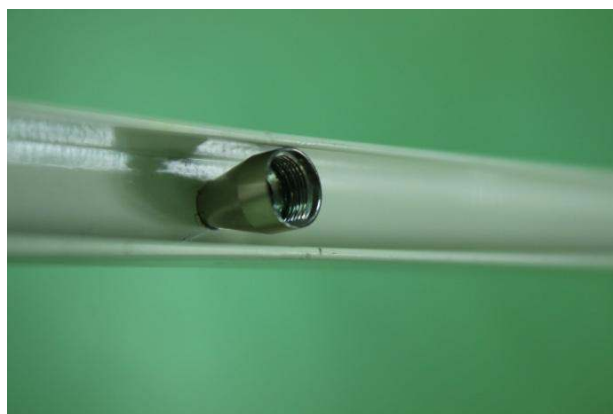


圖11 共振機鋁條底座聯結處

- 2、上端筆頭與原來的鋁條中心鑽孔的洞來做聯結，為了避免旋轉口徑太大，所以筆孔位置用竹筷一部分填入，再以三秒膠(液態型)固定，與底座聯結成為亥姆赫茲三號機。



圖12 筆孔填充方式圖

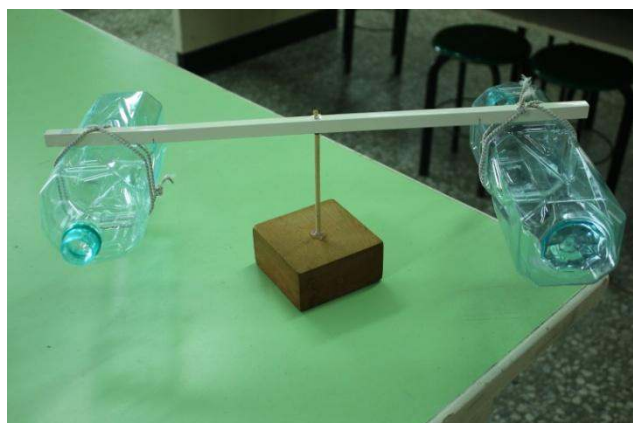


圖13 亥姆赫茲三號機

解決了扭力的問題，速度果然變快很多，當天測試可達到最高 12 轉/分以上，但過一陣子調整聯結處後，發現速度變慢到 3 轉/分左右，或許是調整不當所造成，加上鋁條也變形，所以乾脆將轉軸改成滾珠軸承，修正成亥姆赫茲四號機。

#### 亥姆赫茲共振器4號機

- 1、原先鋁桿中心鑽孔孔徑為5.5mm，所以請齒輪行老闆幫忙將所購買的滾珠軸承加工置中間鑽孔處。
- 2、根據老闆判斷，因鋁條較薄，怕旋轉時會導致滾珠軸承無法支撐，故另外購買凸緣的滾珠軸承(外徑6mm，內徑3mm)，如下頁圖14。
- 3、將凸緣滾珠軸承嵌入鋁條內，內徑插入4mm鐵條一部分加工後直徑為3mm，並以木塊結合成旋轉裝置，如下頁圖15。
- 4、經旋轉後，發現比三號機更慢，發現可能因素之一是因橫桿有更換為比較重的另一支鋁桿，但重沒有很多，會比較慢代表四號機軸承的摩擦力應該比三號機還大，所以另外的可能原因判斷是因為旋轉時橫桿會搖擺，對需要同一平面旋轉的滾珠軸承反而會產生更大的摩擦

做出四號機後，發現三號機的速度比四號機快近兩倍，若以軸心摩擦力都蠻小的情況下，最大的差別就是三號機用鋁條，而四號機用厚鋁條，差別在於重量與厚度，由於三號機鋁條已變形，只剩下厚鋁條可使用，或許未來可選擇較輕的材質使用。



力，所以只好以三號機的轉軸為基礎再進行改良，而成為三號機改。



圖14 凸緣滾珠軸承



圖15 亥姆赫茲四號機旋轉部分

### 亥姆赫茲共振器3號機改(第五代機)

- 1、將三號機的軸承內容物改成AB補土填入並塑形成弧狀，再填入三秒膠(黏稠型)。
- 2、三號機與三號機改軸承主要差別如下圖16。
- 3、與喇叭、紙箱、轉速計組成三號機改，如下圖17。

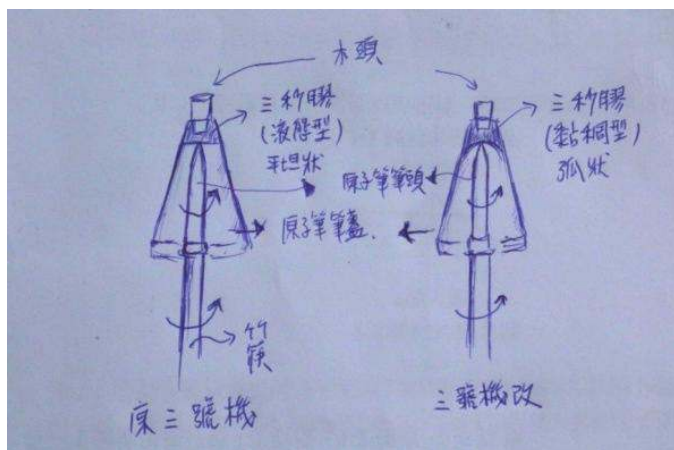


圖16 三號與三號改軸承差異圖



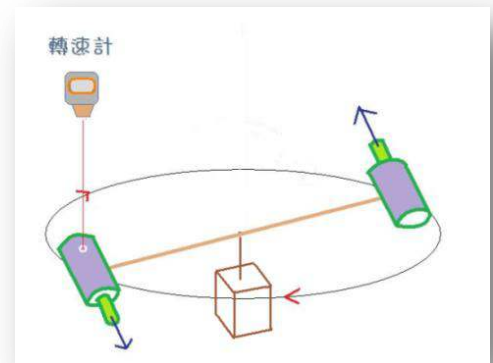
圖17 亥姆赫茲三號機改

原本是想試試看實驗二自製的紙筒空腔與試管空腔可不可以轉動，並探討瓶頸長度、截面積與空腔體積對轉速的影響(原本的實驗四設計)，但結果發現完全不能動，可能是因為體積太小、頻率太高而導致出氣量太少，再加上重量較重，所以需要改變方向來研究，我們觀察到動與不動的空腔的差別，動的空腔在出口處感受出氣量比較多，而在文獻中(馬大猷，2002)

提到有了瓶頸的空腔(亥姆赫茲空腔)，出氣的速度會增加 $\frac{\lambda_0^2}{\pi^2 a^2}$ 倍，又因 $V = f \times \lambda$ ，所以公式可

改成 $\frac{V^2}{\pi^2 a^2 f^2}$ ，所以流速倍速會與頻率及瓶頸截面積乘積的平方成反比，與聲速平方成正比關

係，對瓶頸來說，只跟截面積有關，而竟然沒有與瓶頸長度有關，這讓我們感到驚訝，所以接下來的實驗就以常見又可以回收再利用的保特瓶來做空腔主體，因為每種保特瓶截面積差異不大，所以針對保特瓶頻率、外型(空氣阻力)與材質對轉速的影響來做探討。



#### 實驗4 研究保特瓶頻率、外型與材質對亥姆赫茲旋轉裝置轉速的影響

圖 18 轉速計測量轉速示意圖

- 1、將各式保特瓶當做亥姆赫茲共振腔再以實驗三為基礎的旋轉裝置架設。
- 2、利用轉速計測量其轉速，如右圖18。

##### 實驗4-1 研究保特瓶頻率對亥姆赫茲旋轉裝置轉速的影響

- 1、將保特瓶A、B、C、D、E、F、G、H八種保特瓶分別當做亥姆赫茲共振腔，量取其重量、體積、瓶頸截面積與保特瓶重心與旋轉軸心的距離。
- 2、將兩個同樣的保特瓶分別將重心放在離轉軸14cm的位置。
- 3、找出其真實頻率後啟動喇叭撥放頻率，等轉動後再利用轉速計測量其轉速。

##### 實驗4-2 研究保特瓶的外型對亥姆赫茲旋轉裝置轉速的影響

- 1、分別將保特瓶A、B、C、D、E、F、G、H拍攝底部形狀。
- 2、就實驗4-1的實驗結果與保特瓶外型與材質做分析判斷。

#### 實驗5 將旋轉裝置改良成亥姆赫茲共振發電機，測量聲能、動能與電流大小的關係

- 1、將旋轉裝置中的保特瓶下方黏上強力磁鐵。
- 2、旋轉裝置下方放置平台，將線圈放置平台上。
- 3、分貝計在旋轉裝置中心測量音量大小，分別以不同分貝去驅動發電機。



4、以轉速計測出每分鐘的轉速，再以三用電表測量其電流與電壓，分別記錄之。

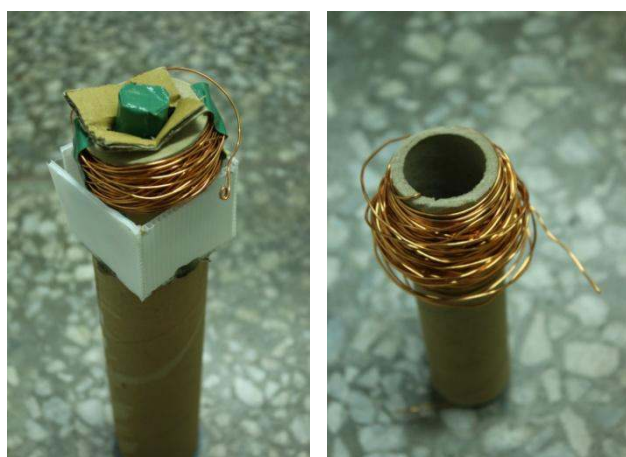


圖19 線圈與平台

利用法拉第電磁感應定律，螺旋線圈感應電

$$\text{動勢 } \varepsilon = N \frac{d\Phi}{dt} = N \frac{dB A}{dt} = N A \frac{dB}{dt}$$

N：總匝數     $\Phi$ ：磁通量    A：線圈截面積

N為通過磁場的總匝數，因為想讓LED燈亮，而驅動LED燈最重要的是電壓，所以我們的想法是要把螺旋管線圈變成扁的甜甜圈狀(如左圖19)，這樣就可以增加通過線圈的磁通量，進而有效的增加感應電壓。

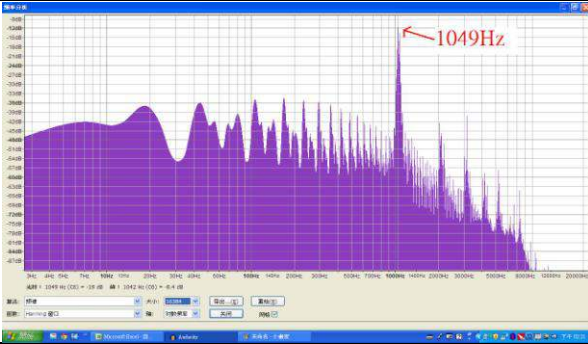
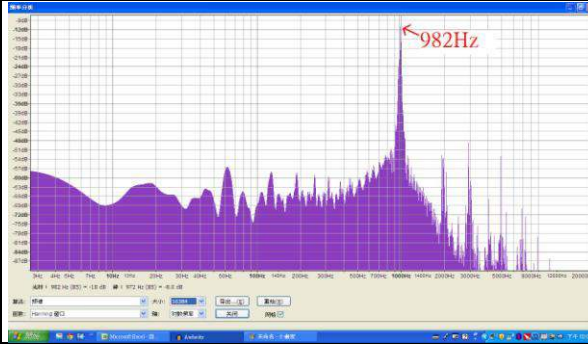
## 伍、研究結果與討論

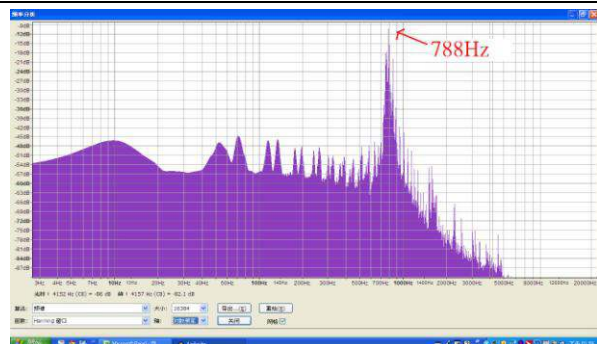
### 實驗1 研究容器空腔體積對共振頻率的關係

#### 實驗1-1 研究無瓶頸容器的體積對共振頻率的關係-

想了解無瓶頸的容器是否也符合亥姆赫茲共振腔的真實頻率公式，於是將試管的瓶頸長度假設極小，故假設為0.00001cm，而整個體積都當成空腔容積來計算真實頻率。

容器容積	玻璃試管1：15.3 ml	玻璃試管2：16.8 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	1308 Hz	1180 Hz
推測頻率	1301 Hz	1202 Hz
誤差率(%)	4.73%	1.83%
L修正倍率	1.32	1.47

容器容積	玻璃試管3：23.2 ml	玻璃試管4：36.6 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	1049 Hz	982 Hz
推測頻率	1056 Hz	1011.00 Hz
誤差率(%)	-3.43%	-2.87%
L修正倍率	1.36	1.54

容器容積	玻璃試管5：60.5 ml
audacity軟體分析圖	
共振頻率	788 Hz
推測頻率	786.34 Hz
誤差率(%)	0.21%
L修正倍率	1.44

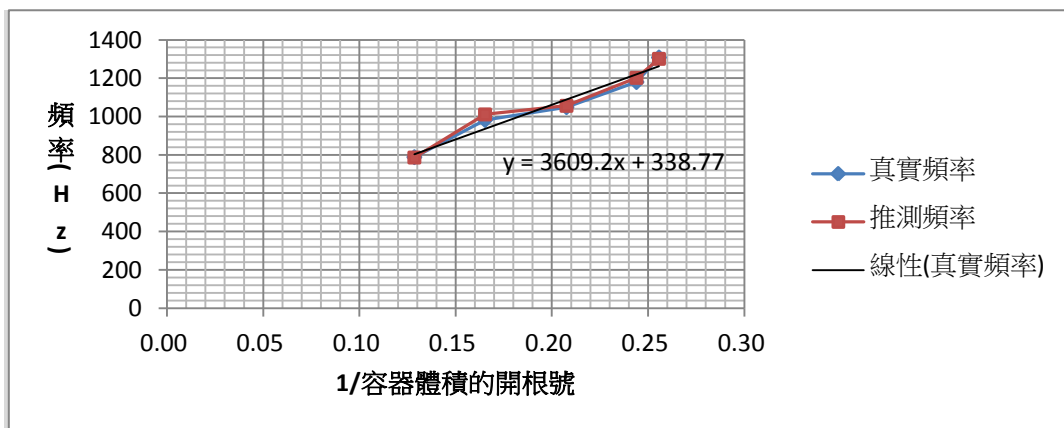




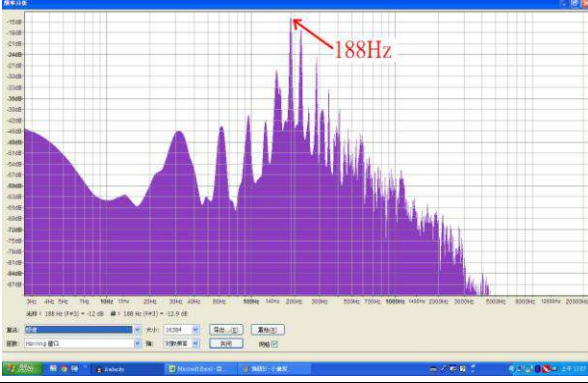
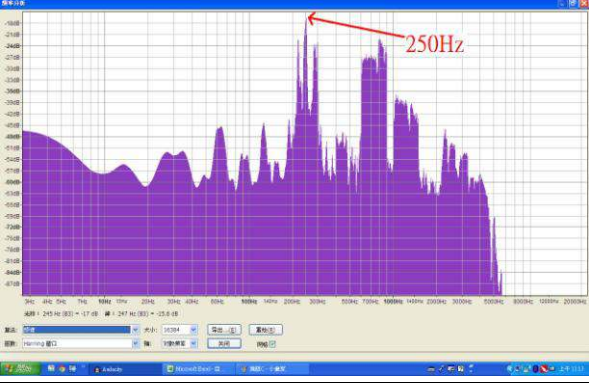
圖20 無瓶頸空腔體積的倒數與頻率關係圖

在圖表可以發現，雖然試管不是亥姆赫茲共振腔，但將其瓶頸當成很小的時候，其亥姆赫茲經驗公式幾乎可以完美推測到真實頻率，同時也發現空腔體積越大，其頻率越小的關係。

但是公式當中  $\frac{1}{\sqrt{\text{無瓶頸空腔體積}}}$  應該與公式頻率應該成正比關係，但在圖17可以發現已經偏離正比，與常理不符，或許是因為假設試管有瓶頸，再加上不同截面積有關。

### 實驗1-2 有瓶頸容器的空腔體積對共振頻率的關係

容器容積	燒瓶A：622.5 ml	燒瓶B：645 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	126Hz	126Hz
推測頻率	129.11Hz	130.74Hz
誤差率(%)	-2.41%	-3.63%
L修正倍率	1.75	1.91

容器容積	燒瓶C：264 ml	燒瓶D：135 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	188 Hz	250 Hz
推測頻率	208.04 Hz	264.41 Hz
誤差率(%)	- 9.63%	- 5.45%
L修正倍率	2.65	2.00



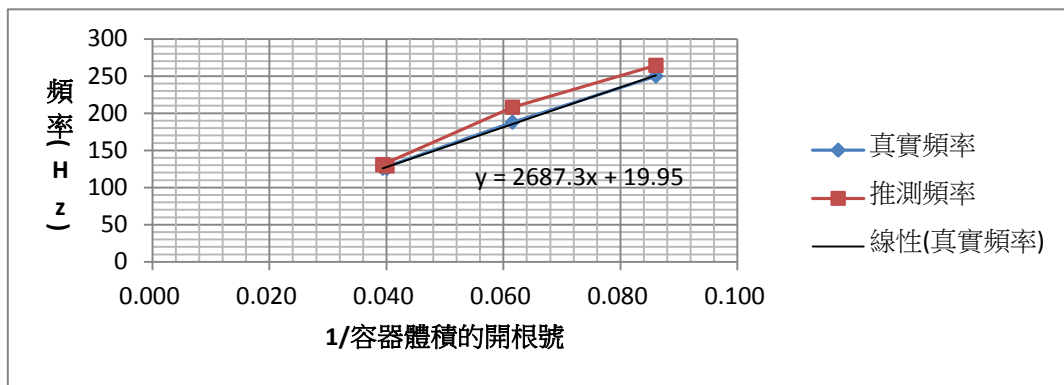
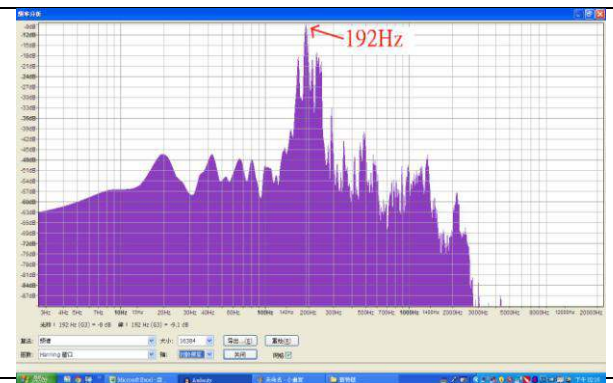


圖21  $\sqrt{\frac{1}{\text{有瓶頸空腔(燒瓶)體積}}}$  的倒數與頻率關係圖

發現燒瓶非常接近公式的推導，體積越大其頻率也越低，就容器的  $\frac{1}{\sqrt{\text{無瓶頸空腔體積}}}$  與頻率來看，非常偏向正比關係，應可以修正有效長度，讓誤差變小。

容器容積	保特瓶甲：522.5 ml	保特瓶乙：289.8 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	185 Hz	258 Hz
推測頻率	209.75 Hz	238.47 Hz
誤差率(%)	- 11.80%	8.19%
L修正倍率	2.08	1.03

容器容積	保特瓶丙：870.1 ml	保特瓶丁：674.8 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	182 Hz	181 Hz
推測頻率	152.63 Hz	181.47 Hz
誤差率(%)	19.74%	- 0.26%
L修正倍率	0.65	1.46

容器容積	保特瓶戊：564.5 ml
audacity軟體分析圖	
共振頻率	192 Hz
推測頻率	194.38 Hz
誤差率(%)	- 1.22%
L修正倍率	1.51

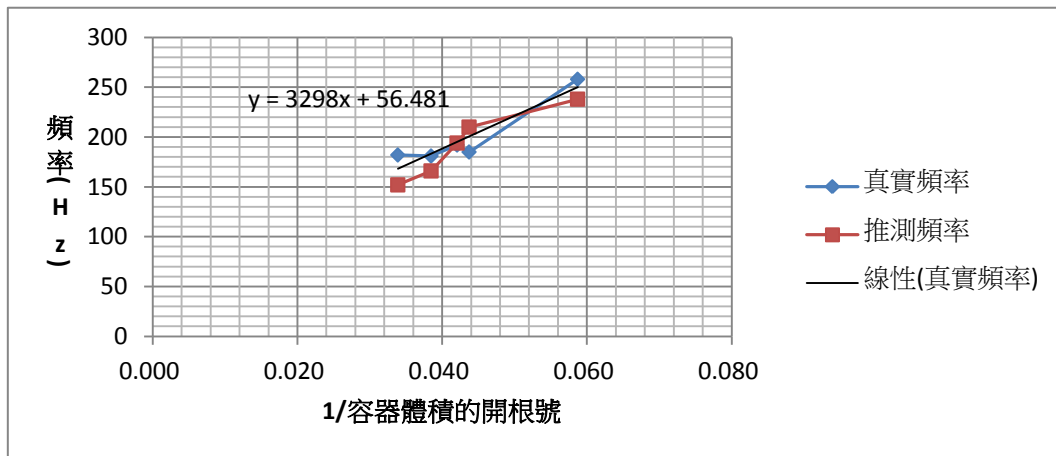




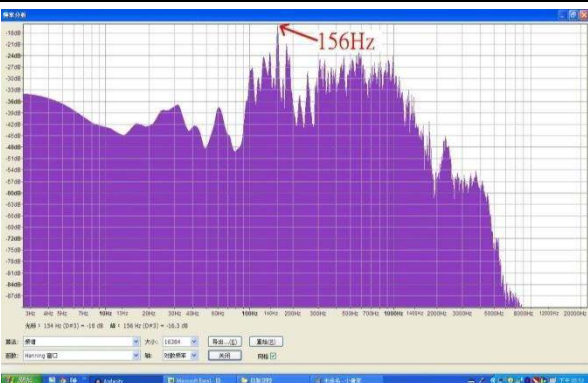
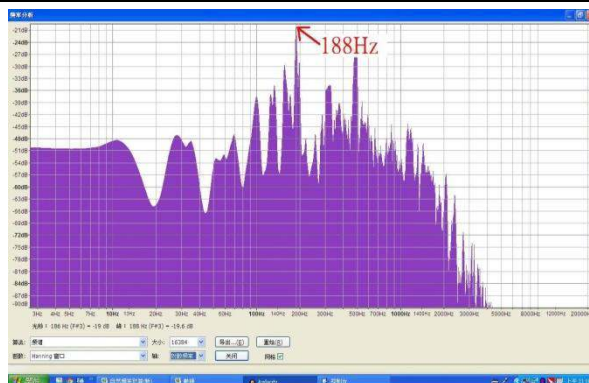
圖22  $\sqrt{\text{有瓶頸空腔(保特瓶)體積 的倒數與頻率關係圖}}$

可以發現保特瓶與燒瓶、試管有很大的差異，不全然是體積越大其頻率越小，對體積來說並沒有絕對關係，所以無法以修正長度來有效的降低誤差，而且大約在體積在500~700ml之間，與推測頻率誤差較小，無法修正的原因推測是因為保特瓶的形狀加上瓶頸的不同所造成的差異性。

**實驗2 研究容器瓶頸的長短、截面積、容器體積對頻率的影響**

**實驗2-1 研究容器瓶頸的長短對共振頻率的關係**

瓶頸長度	有瓶頸紙筒：12.00 cm	有瓶頸紙筒：9.15 cm
audacity軟體分析圖		
共振頻率	140 Hz	147 Hz
推測頻率	131.11 Hz	142.97 Hz
誤差率(%)	6.78%	2.82%
L修正倍率	0.91	1.25

瓶頸長度	有瓶頸紙筒：8.05 cm	有瓶頸紙筒：5.31 cm
audacity軟體分析圖		
共振頻率	156 Hz	188 Hz
推測頻率	148.49 Hz	165.63 Hz
誤差率(%)	5.06%	13.51%
L修正倍率	1.13	0.83



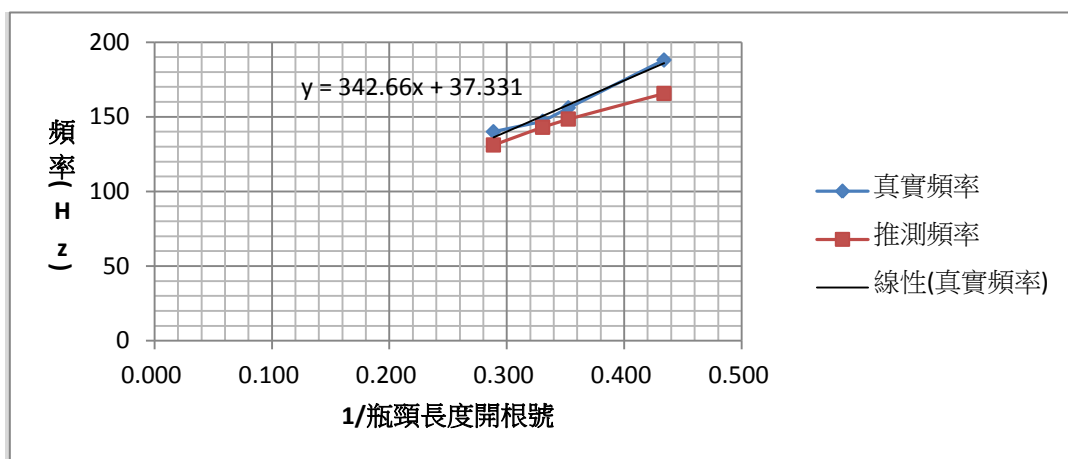
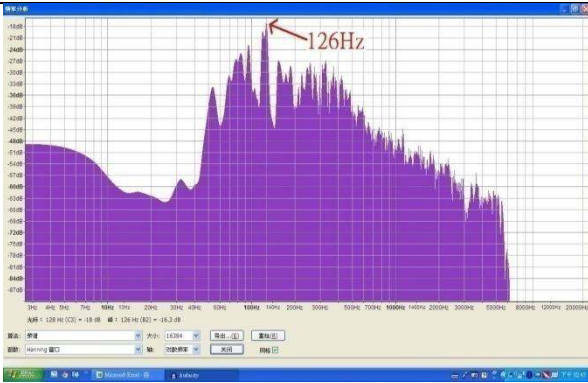
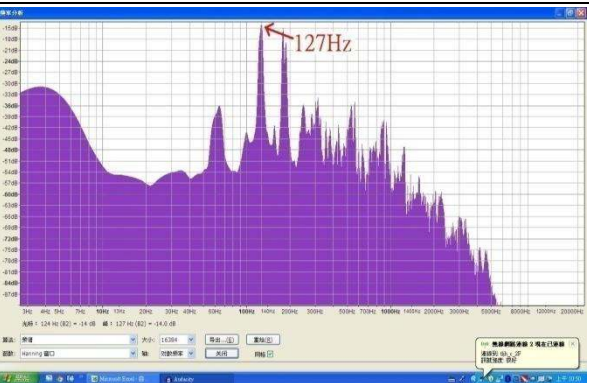



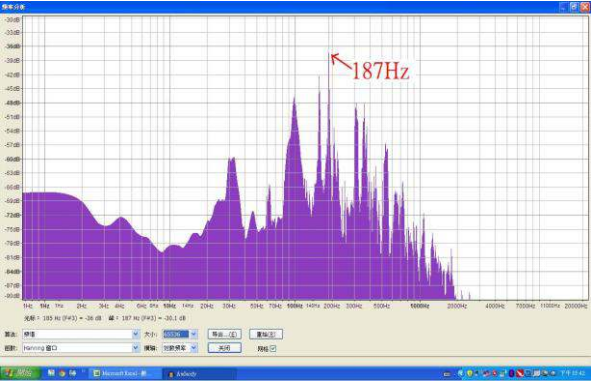
圖23  $\sqrt{\frac{1}{\text{瓶頸長度}}}$  紙筒自製空腔瓶頸長度 的倒數與頻率關係圖

可以發現  $\frac{1}{\sqrt{\text{瓶頸長度}}}$  的確有偏向正比的關係，仍然符合亥姆赫茲經驗公式，但有發現頻率越

高會偏離推測頻率，且瓶頸的改變比空腔的改變較不會影響真實頻率。

### 實驗2-2 研究容器的體積對共振頻率的關係

容器容積	有瓶頸紙筒：1128.68 ml	有瓶頸紙筒：929.32 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	126 Hz	127 Hz
推測頻率	128.84 Hz	141.99 Hz
誤差率(%)	- 2.20%	- 10.56%
L修正倍率	1.68	2.72

容器容積	有瓶頸紙筒：837.40 ml	有瓶頸紙筒：716.36 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	188 Hz	187 Hz
推測頻率	151.71 Hz	163.97 Hz
誤差率(%)	23.92%	14.02%
L修正倍率	-0.32	0.28

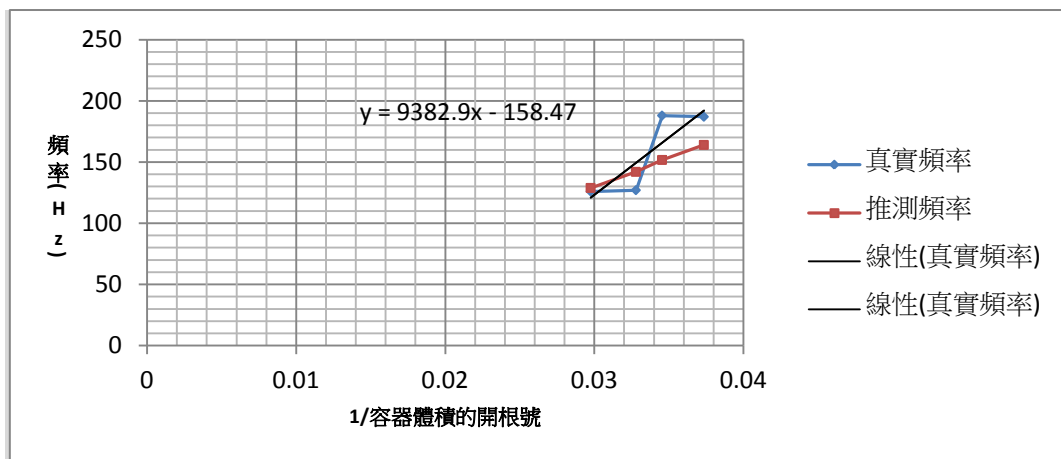
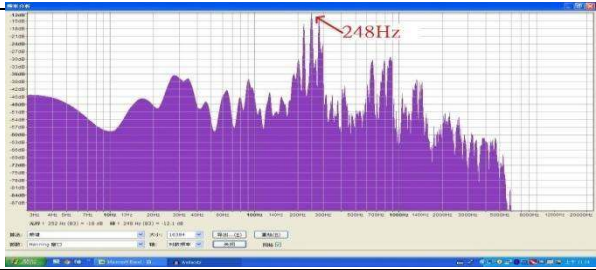
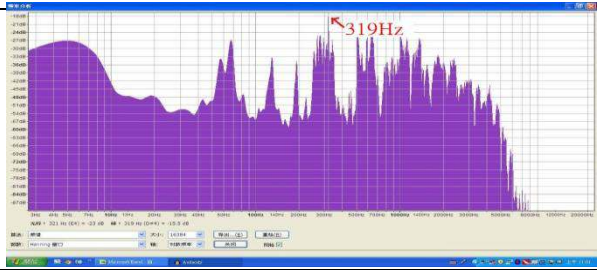
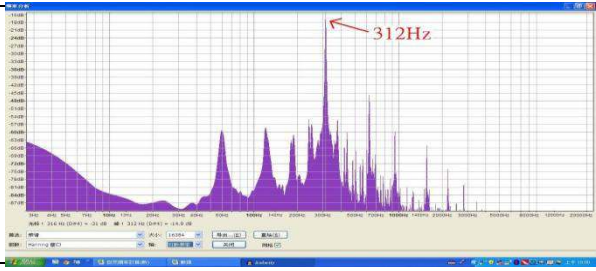



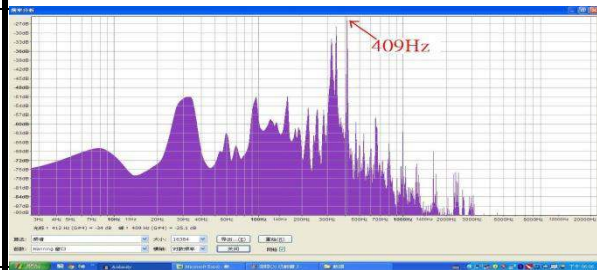
圖24 紙筒自製空腔的 $\sqrt{\text{空腔體積}}$ 的倒數對共振頻率的關係圖

可以發現當改變紙筒空腔的體積時，對頻率的影響很大， $\frac{1}{\sqrt{\text{空腔體積}}}$  對共振頻率並無正比的關係，可以推測非剛性材質的空腔對頻率影響很大，為了驗證，同時做了無瓶頸的紙筒五種體積來做驗證，從下頁圖25發現趨勢與無瓶頸的試管很大的不同，與有瓶頸的自製紙筒空腔不規則的情況頗為一致。

補測：實驗1-1 研究無瓶頸容器的體積對共振頻率的關係---紙筒

容器容積	無瓶頸紙筒：1255.45 ml	無瓶頸紙筒：1135.81 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	248 Hz	319 Hz
推測頻率	282.02 Hz	296.50 Hz
誤差率(%)	-12.06%	7.59%
L修正倍率	1.88	1.25

容器容積	無瓶頸紙筒：966.80 ml	無瓶頸紙筒：836.56 ml
audacity軟體分析圖		
共振頻率	312 Hz	344 Hz
推測頻率	321.38 Hz	351.67 Hz
誤差率(%)	-2.30%	-2.18%
L修正倍率	1.51	1.52

容器容積	無瓶頸紙筒：728.43 ml
audacity軟體分析圖	
共振頻率	409 Hz
推測頻率	376.86 Hz
誤差率(%)	8.53%
L修正倍率	1.23

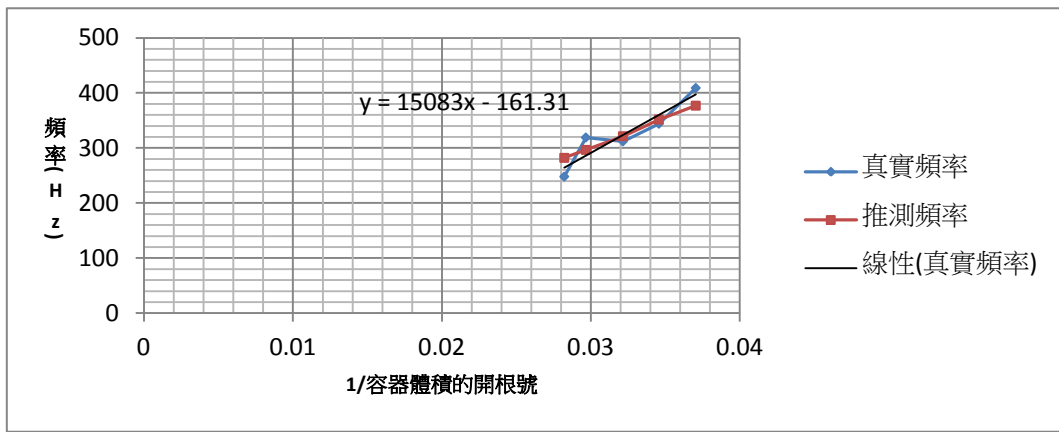


圖25 無瓶頸紙筒 $\sqrt{\text{空腔體積}}$  的倒數對共振頻率的關係圖

實驗2-3 研究容器瓶頸的截面積對共振頻率的關係

瓶頸截面積	有瓶頸玻璃試管：1.04cm <sup>2</sup>	有瓶頸玻璃試管：0.45cm <sup>2</sup>
audacity軟體分析圖		
共振頻率	188	124
推測頻率	186.72	127.93
誤差率(%)	0.69%	-3.07%
L修正倍率	1.27	2.73

容器容積	有瓶頸玻璃試管：0.20cm <sup>2</sup>
audacity軟體分析圖	
共振頻率	94
推測頻率	86.8
誤差率(%)	8.29%
L修正倍率	-2.80

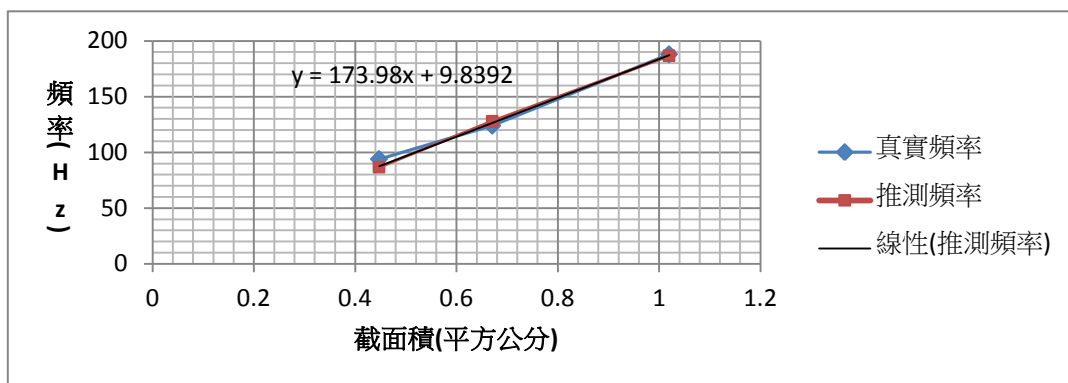


圖26  $\sqrt{\text{容器的瓶頸截面積對共振頻率的關係圖}}$

可以發現當改成玻璃試管當空腔時，非常符合亥姆赫茲共振公式， $\sqrt{\text{瓶頸截面積對頻率}}$ 呈現正比關係。除了發現截面積越大頻率越大之外，同時可以證實材質也影響到頻率的變化。

#### 實驗4 研究保特瓶對亥姆赫茲旋轉裝置轉速的影響

從文獻得知當有瓶頸空腔時(馬大猷，2002)，有瓶頸空腔比沒瓶頸空腔流出氣體流速增加  $\frac{\lambda_0^2}{\pi^2 a^2}$  倍，但對保特瓶來說，因為瓶口面積大小差異不大，所以當我們假設瓶口面積相同的情況下，在相同溫度下測量，推測變因主要是由頻率來影響到轉速，所以在實驗4-1中探討頻率對旋轉裝置轉速的影響。

##### 實驗4-1 研究保特瓶的頻率對亥姆赫茲旋轉裝置轉速的影響

保特瓶	A	B	C	D	E	F	G	H
體積	560.1ml	604.5ml	525.5 ml	675.2 ml	625.7 ml	1534.4 ml	1558.3 ml	2540.1 ml
瓶頸截面積	3.20 cm <sup>2</sup>	3.46 cm <sup>2</sup>	3.33 cm <sup>2</sup>	3.46 cm <sup>2</sup>	3.46 cm <sup>2</sup>	3.50 cm <sup>2</sup>	3.40 cm <sup>2</sup>	3.43 cm <sup>2</sup>
頻率	190 Hz	217 Hz	219 Hz	188 Hz	189 Hz	98 Hz	95 Hz	83 Hz
轉速(轉/分)	0轉/分	0轉/分	14.9轉/分	0轉/分	0轉/分	12.5轉/分	0轉/分	22.6轉/分

實際實驗後，轉動卻只有三種保特瓶可以旋轉，所以只能以此三個數據與保特瓶本身來做探討：



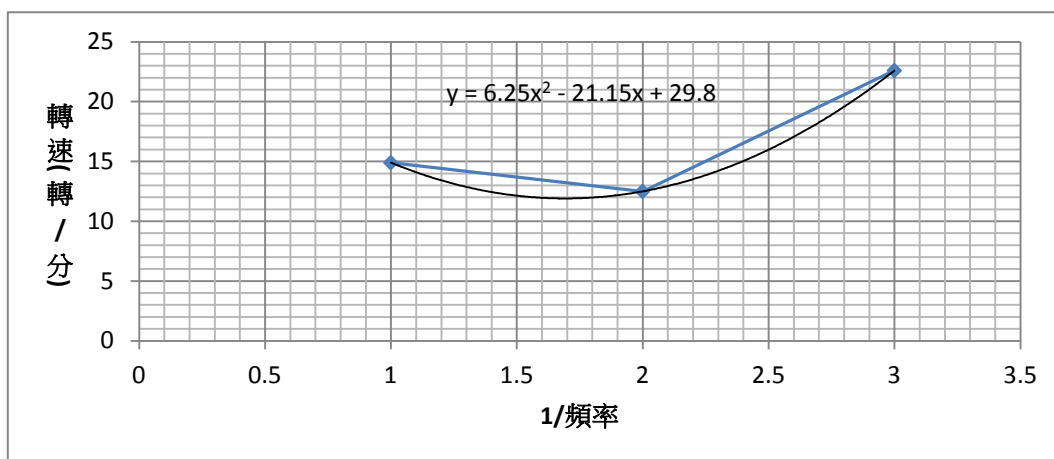


圖27 1/頻率對轉速關係圖

這三種保特瓶數據分析之後，發現不全然只有頻率影響轉速，不是一開始我們推測轉速與頻率的轉速成正比，保特瓶 H 頻率最低，其轉速最快沒有太大的問題，將可發現前兩個保特瓶是外型不同，體積雖然差 2.5 倍左右，但流線形的效果較好，後兩者體積的不同，可以發現體積越大越低頻轉動效果越好。

#### 實驗4-2 研究保特瓶外型與材質對亥姆赫茲旋轉裝置的轉速影響

就旋轉的情況來看，小組成員認為在瓶底的部分可能會產生空氣阻力而影響到轉動速度，所以就整個保特瓶的外型與材質進行探討。

保特瓶編號	A (560.1 ml)	B (604.5 ml)	C (525.5 ml)	D (675.2 ml)	E (625.7 ml)	F(1534.4 ml)	G (1285 ml)	H (2540.1 ml)
瓶底形狀								
底面積	27.52 cm <sup>2</sup>	29.22 cm <sup>2</sup>	31.67 cm <sup>2</sup>	28.27 cm <sup>2</sup>	25.97 cm <sup>2</sup>	63.60 cm <sup>2</sup>	63.64 cm <sup>2</sup>	87.46 cm <sup>2</sup>
瓶重	22.11g	20.21g	35.50g	29.70g	22.95g	56.68g	50.94g	60.16g
頻率	190 Hz	217 Hz	189 Hz	188 Hz	189 Hz	98 Hz	95 Hz	83 Hz
轉速	0 轉/分	0 轉/分	14.9 轉/分	0 轉/分	0 轉/分	12.7 轉/分	0轉/分	22.6 轉/分

因為八組保特瓶中，只有三組會動，觀察底部形狀、體積、材質等因素，竟然是那三組會動的保特瓶材質相對較硬，所以最優先決定因素為材質的問題，不過在研究中發現保特瓶 H 早上轉的速度與下午實驗速度不同，於是開始調整頻率看看，結果發現了有趣的現象。



頻率(Hz)	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
轉速(轉/分)	0	1.6	7.1	11.8	14.9	20.4	19.6	20.3	21.5	22.3	22.9	24.2	26.0	26.5
頻率(Hz)	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	
轉速(轉/分)	26.1	25.4	22.7	21.7	19.0	15.2	13.2	10.2	7.5	4.7	2.2	1.0	0	

可以發現找出真實頻率83Hz，從共振頻率往高頻的位置，轉速急速下降，而往低頻降速先不那麼快，過一個範圍後就急速下降。而從三個會轉的保特瓶中可以發現容器體積越大，其轉速越快，另外可以發現整體形狀越流線型，轉速反而比體積大2.5倍的還快。

### 實驗5 將旋轉裝置改良成亥姆赫茲共振發電機，測量聲能、動能與電流大小的關係

就實驗四發現保特瓶旋轉速度最快，所以以此當發電機的旋轉空腔。

旋轉裝置主要包含中間橫桿以及空腔的部分，所以動能的計算分為這兩個部分，

$$\therefore \text{橫桿的轉動慣量} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dl = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx = \left(\frac{M}{L}\right) \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} ML^2$$

$$\therefore \text{總動能} E = \text{橫桿的轉動動能} + \text{空腔的轉動動能(兩個空腔)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ML^2\right) \omega^2 + 2 \times \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 =$$

$$\frac{1}{24} ML^2 \omega^2 (\text{橫桿動能}) + mr^2 \omega^2 (\text{保特瓶動能}) \quad (\text{維基百科：轉動慣量，2015})$$

M：橫桿重量      L：橫桿長度       $\omega$ ：角速度(弧/s)

m：保特瓶重量      r：保特瓶與軸心距離

因聲能(分貝)與動能單位不同，所以無法做轉換的動作，但列出參考。

而在線圈的設置，因為是封閉線圈，所以線圈越多，反而電流量越少，所以我們暫定以142匝來發電，另外一個原因是銅線很容易打結，解開來的銅線也只能到142匝左右。

從實驗三得知，以保特瓶H的轉速最快，所以本實驗以保特瓶H當空腔，再測量最大分貝轉速與最小分貝轉速。

分貝(dB)	Min 92.1dB	96.4dB	100.2dB	103.6dB	Max 106.7dB
轉速(轉/分)	Min 7.9轉/分	13.8轉/分	23.0轉/分	24.7轉/分	Max 27.0轉/分
保特瓶重心離軸心距離(m)	0.14m	0.14m	0.14m	0.14m	0.14m
保特瓶動能(J)	$2.0175 \times 10^{-4} \text{J}$	$6.1563 \times 10^{-4} \text{J}$	$1.7101 \times 10^{-3} \text{J}$	$1.9722 \times 10^{-3} \text{J}$	$2.3566 \times 10^{-3} \text{J}$
電壓(V)	無法測得	無法測得	無法測得	無法測得	無法測得
電流(mA)	7.6mA	7.3mA	3.3mA	4.7mA	1.7mA

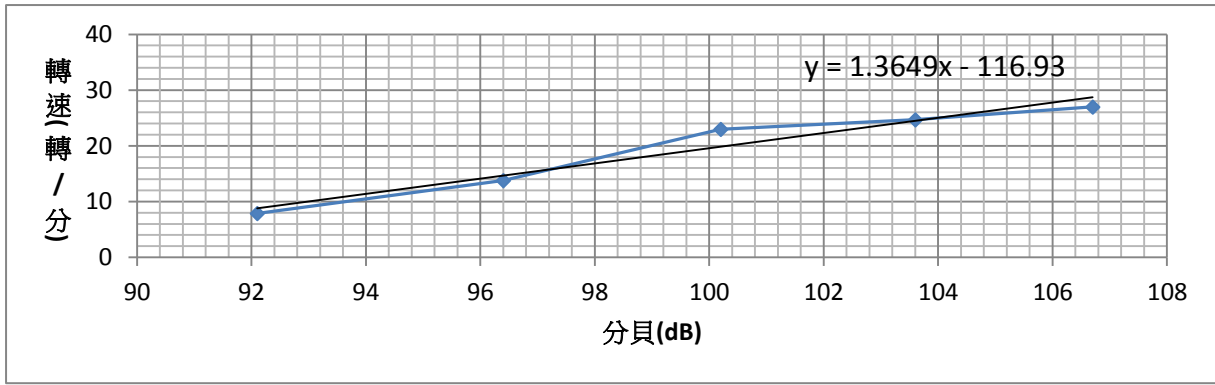


圖28 分貝對轉速關係圖

可以發現聲音分貝越大，其轉速越大，幾乎呈現線性關係，但轉速越大電流反而會越小，可能是速度太快，電壓有抵銷的現象，完全量不到電壓，所以驅動LED電壓不夠，但仍然有電流的產生，我們一直到送件的那刻仍然想辦法希望能解決增加電壓的方法。

## 陸、結論

### 亥姆赫茲共振理論驗證：

- 1、從**實驗 1-1** 可以發現無瓶頸容器的頻率適用亥姆赫茲推導公式，誤差率極少，照理說推測頻率由公式計算的情況下應該會與  $\frac{1}{\sqrt{\text{空腔體積}}}$  成正比關係，但卻發現將試管假設瓶頸極短的情況與真實頻率一樣呈現扭曲狀且接近真實頻率，推測或許是一開始將試管當成有瓶頸容器而導致，但有趣的是公式依然可推測頻率，有助於推導無瓶頸容器的頻率。
- 2、從**實驗 1-2** 可以發現保特瓶的頻率很難準確，誤差較大，推測瓶頸的形狀會影響瓶頸修正長度，將瓶頸形狀與其他要素分析如下。

保特瓶類別	甲	乙	丙	丁	戊
頭部外觀					
瓶頸直徑	2.20 cm	2.05 cm	2.35 cm	2.21 cm	2.25 cm
瓶頸長度	1.70 cm	2.95 cm	2.92 cm	1.90 cm	2.25 cm
空腔體積	522.5ml	289.8ml	870.1ml	674.8ml	564.5ml
L 修正倍率	2.15	1.09	0.69	1.51	1.57
L' 長度	6.43cm	5.18cm	4.54cm	5.24cm	5.78cm

觀察容積體積相似的保特瓶甲與戊，原本以為甲的瓶頸長，所以其延伸的氣體長度倍數應該較長才對，但結果卻相反，發現瓶口與瓶身口徑差異越小其修正倍率越大，如保特瓶甲。像保特瓶丙差異很大，修正頻率就會較小，推測與氣體流動的阻抗有關。

- 3、從**實驗 2-1** 可以發現  $\frac{1}{\sqrt{\text{瓶頸長度}}}$  與頻率接近正比關係，紙筒空腔的瓶頸越短頻率越高，與**實驗 1-1** 及 **2-2** 對照，可以發現材質對瓶頸長度的影響比較沒空腔那麼大，主要還是因為空腔是共振的主要原因。
- 4、在**實驗 1-2** 有瓶頸的燒瓶與**實驗 2-2** 紙管自製空腔可以發現，一樣是有瓶頸空腔，但自製空腔卻不符合推導公式，推測主因是紙筒比較玻璃燒瓶來說為非鋼體，容易吸收聲音，再加上容易吸水而影響共振頻率之故，為了驗證是否是因為紙筒的問題，後來又做了無瓶頸的紙筒來做驗證，果然在真實頻率上不規則的情形又再次發生。
- 5、在**實驗 2-3** 可以發現  $\sqrt{\text{瓶頸截面積}}$  與真實頻率呈現正比關係，符合推導公式。從文獻發現當聲波由一個介質傳遞到另一個介質時，因不同介質其聲阻抗也不同（聲阻抗為波速與材料密度之乘積），在不同的物質中，聲阻抗與物質之密度成正比。所以當聲波經過兩種不同介質時，入射波形成部分反射波及部分折射波之狀態，且兩物質之音阻抗差異愈大，反射波訊號將愈強(彭朋畿等，2011)，也就是截面積越大，與空腔產生的波長差異越小時，其反射越少，修正氣體長度就比較不會影響其頻率的變化，推測頻率準確率就越高。

從實驗一到二可以發現，有瓶頸空腔的頻率大致上符合  $F = \frac{c}{2\pi} \times \sqrt{\frac{A}{v_0 L}}$  的關係式，誤差率大致在 10% 內，也發現瓶頸形狀與空腔材質會影響公式的準確性使誤差大於 10%。

#### 亥姆赫茲共振應用探討：

在**實驗四**中可以發現，最優先決定轉動的是材質的硬度，硬度越大，保特瓶本身越易讓聲能反射，讓空氣產生共振排出，而保特瓶越軟，在膨脹收縮的情況下，消耗大部分進入空腔的聲能，用手在出風口感受到出氣量都不多，另外發現第二重要就是外觀是否流線，空氣阻力同樣也影響很大，最後才是體積，空腔的體積越小，頻率越高，對亥姆赫茲共振較不利進行，主要是波長越大，與細管直徑差異越大，越能在細管內產生波動的特

性，而產生波的反射而造成與空腔共振的效果越好，而且有瓶頸容器，空氣對頸口流速甚至會增加為 $\frac{\lambda_0^2}{\pi^2 a^2}$ 倍(馬大猷，2002)，就保特瓶 C 的數據而言，理想狀態可提升到737.82倍的流速，說明了頻率越低(空腔體積大)，口徑越小，其流速越快，可以增加轉速。

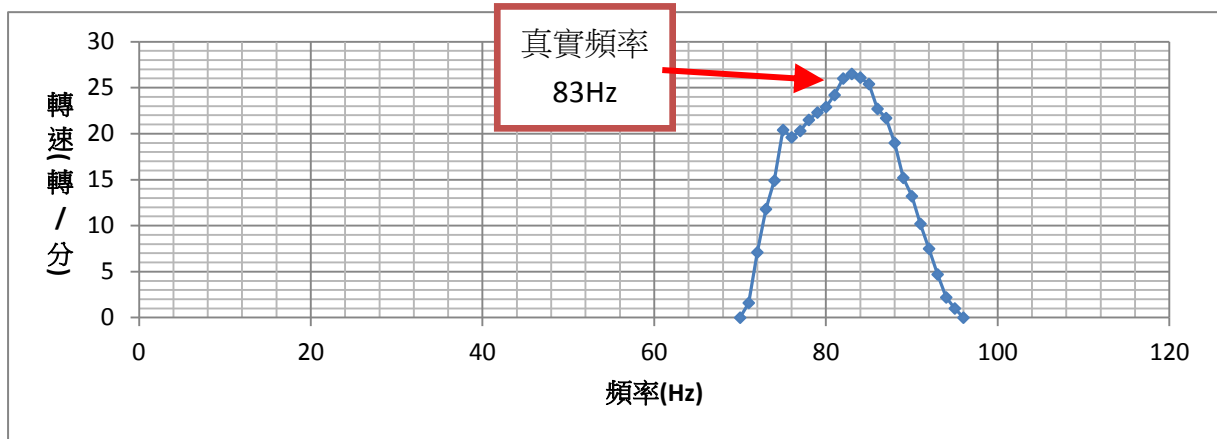


圖 29 頻率對轉速圖

在**實驗四**同時也發現，在真實頻率轉動是最快的，但發現轉動有一定的頻率範圍可以共振，以頻率 83Hz 來看，能動的範圍大小有 24Hz，高低的範圍相同(各 12Hz)，另外在真實頻率前後遞減時，靠近真實頻率低範圍比較能維持轉速，在後續實驗中除了發現(實驗放於實驗日誌)材質越硬其頻率範圍會越大(最硬的頻率前後大約各 40Hz)，同時也發現裝置在 73dB~90dB 測試下，可以降低聲能 1~9 分貝。

**實驗五**發現分貝越大轉速越快，但卻無法測得電壓(太小)，且速度無法與電流大小呈現正相關，甚至越快越慢，有可能是速度太快而線圈來不及感應之故。另外也發現用保特瓶 H 至少需 92 分貝以上才能驅動，後續實驗(實驗放於實驗日誌)發現材質越硬的保特瓶驅動旋轉裝置所需的聲能越小(目前所測可轉動當中最硬的保特瓶只需 72 分貝即可驅動)。

應用結論整理

- 1、頻率越低、外型越流線型、材質越硬越有利於轉動。
- 2、發現共振頻率範圍的存在，材質越硬範圍越大，從真實頻率前後等距遞減。
- 3、分貝越大，轉速越快，驅動旋轉裝置，材質越硬所需聲能可以越小。
- 4、裝置可以用來吸收聲能，在 73dB~90dB 下，可以降低 1~9 分貝左右。
- 5、本裝置轉速不夠，所以電壓也不足以驅動 LED 燈 2.1V，電流約 1~8mA 左右。

## 柒、未來展望

本次研究發現很多可以改進之處，但由於時間的關係，加上可以研究的地方太多，一直做到送國展的前幾天才做到一個段落，其實這次發電的情況算是不好，所以本次研究主要還是在於旋轉的部分，旋轉已經由研究一開始的每分 3 轉進步到每分 26 轉，如果未來能改進發電的部分，再加上本裝置有吸能的效果，在日常生活中，聲音無所不在，人們往往忽視的噪音，或許可以降低、收集並再加以利用。

簡單的共振，就可以產生小小的電流，能源積少成多，若是可以讓裝置更敏感的情況下，文獻(張立、盛美萍，2005)也發現將亥姆赫茲共振腔多組組合，可以讓共振頻寬變寬，再將裝置放在能持續性發出相同頻率噪音的地點，譬如火車站、工廠、隧道亦或是很吵的風力發電機，將多個裝置做串聯或並聯，或許是聲能發展的另外一片天。

## 捌、參考資料

- 1、陳宇，陳謙，張曉青，曾玉松.(2004 年 12 月). 一種新的聲速推導方法. 大學物理, 23 (12),頁 16-17.
- 2、張立，盛美萍.(2005). 低頻寬頻共振吸聲結構與原理. 陝西師範大學學報自然科學版.第三卷第 2 期.
- 3、吳佑焉.(2001). 彈性荷姆霍茲共振器之分析. 國立台灣大學機械工程系.
- 4、馬大猷.(2002). 亥姆赫茲共鳴器. 聲學技術, 21 卷第 1-2 期.
- 5、彭朋畿，張沛倫，李國鍵，施嘉裕.(2011-12-01). 超音波應用於鋼板之檢測.中華民國鋼結構協會.
- 6、史曉峰.(2014). 酒瓶發聲與噪音控制. 2014 年 12 月 26 日 擷取自 香港理工大學建築科，這一科學甚麼。：<http://utalks.etvonline.tv/article57.php>
- 7、懸鉤子.(2014 年 9 月 26 日). 【SONIC Π】聲波之傳播原理：共振篇《四上》. 2014 年 12 月 26 日 擷取自 freesandal 輕鬆學部落客：<http://www.freesandal.org/?p=12384>
- 8、轉動慣量.(2015 年 4 月 9 日). 2015 年 4 月 10 日 擷取自 維基百科：<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BD%89%E5%8B%95%E6%85%A3%E9%87%8F>

## 【評語】 030115

1. 實驗內容很有趣，很吸引人進一步探討聲音的應用。
2. 紀錄內容可能需要更多一些細部數據，使得能探討變數之間的關係。