

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080412

它鎖的住我？～手機螢幕鍵盤鎖之探究

學校名稱：高雄市左營區新光國民小學

作者： 小六 侯皓予 小六 許耘華 小五 邱志庭 小五 陳映仔	指導老師： 王奎婷
---	--------------

關鍵詞：樹狀圖、手機鍵盤鎖

它鎖的住我?~手機螢幕鍵盤鎖之探究

摘要

我們為了了解九宮格圖形的手機螢幕鍵盤鎖共有多少圖形，除了利用列舉法詳列外，還想出了樹狀法、部分樹狀法和刪去法三種計算方法，並請專家協助設計電腦程式檢測我們的數據，最後發現總共有 139880 種圖形。從問卷調查中發現目前圖像式鍵盤鎖十分普遍，而大家設定的圖像以點數量少或是和文字或數字有對應的居多。我們還找到了圖像中，點與點不能相連時，計算密碼圖形數量的公式，可作為圖像設計的參考，並設計出聖誕樹造型和立方體造型兩種鍵盤鎖圖像。

壹、研究動機

在升上六年級時，爸爸幫我買了一台智慧型手機，辦手機時，接待人員問我需不需要裝設密碼，我才發現原來密碼有好多種，有一滑就開的方式，有輸入密碼的，其中吸引我目光的是一種以圖像設計的螢幕鍵盤鎖。圖像的組成有九個點，排列像九宮格，要滑出自己設定的圖像才能夠解鎖，密碼設定的方式是以垂直、水平及斜線的方向至少連接四個點，不能回到或經過已設定的點。如下圖：

符合密碼的設定規則。	不可行的密碼，因為只連接三個點。	不可行的密碼，因為不能回到已設定過的點。	不可行的密碼，因為不能經過已設定的點。

圖像是大腦用來處理記憶的方式，所以應該比數字密碼還容易記憶，但這樣的鍵盤鎖是否能有效的幫助手機使用者維護他們的隱私呢?傳統 PIN 數字密碼有四個數字，共有 $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ 種，而圖像式的螢幕鍵盤鎖多少種呢?可以算的出來嗎?大家在日常生活中的使用情形是什麼呢?這引發了我們想針對圖像式螢幕鍵盤鎖進行探究的動機。

貳、研究目的

- 一、找出圖像式螢幕鍵盤鎖所有的圖像數量。
- 二、調查目前手機使用者的螢幕鍵盤鎖情形。
- 三、設計其他圖像式螢幕鍵盤鎖。

參、研究設備及器材

方格紙、紙、筆、手機、電腦、參考文獻

肆、研究歷程

過程一：找出圖像式螢幕鍵盤鎖的圖像共有幾種。

【過程 1-1】找出螢幕鍵盤鎖所有圖像數量的列舉方法。

1-1.1 使用圖形分類法，但列舉時會產生重複的狀況

為了可以列舉所有圖像，沒有遺漏，我們思考應用何種方法來列出所有圖形。嘗試的過程中，我們一開始使用圖形分類法。圖形分類法就是把所有圖形依線條的直線和橫線來分類，所以四個點連線的可以分類成「三條直線」、「二條直線一條斜線」、「一條直線二條斜線」、「三條斜線」，共四種，舉例如下：

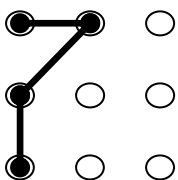
三條直線	二條直線一條斜線	一條直線二條斜線	三條斜線

但是我們發現這樣很難確定是否把全部圖形都列出來，因為我們在畫的時候，會先固定兩條線，但是固定不同的兩條線，卻會出現同一種圖形（如下圖）。



當我們固定 ，或是 ，

都會出現

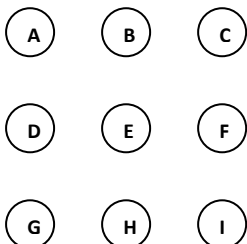


因為有可能會重複，所以很難檢查有沒有遺漏。

1-1.2 使用編碼法，列舉後發現可將圖形的點進行分類，運用於計算上

為了改善這樣的缺點，我們使用編碼法來進行列舉。編碼法就是把點換成代號，再依點的位置將所有圖形進行編碼，詳列出來。

先將點依位置用 A~I 進行編碼，再從 A 出發，按順序 ABCD、ABCE、ABCF……詳列出所有四個點的編碼，再繼續將五個點、六個點的詳列出來。



因為不可經過已設定的點，A 要連到 C、G、I 時，分別會經過 B、D、E，所以 A 不可直接連到 C、G、I；C 不可直接連到 A、G、I；G 不可直接連到 A、C、G、I；I 不可直接連到 A、C、G；D 不可直接連到 F；F 不可直接連到 D；B 不可直接連到 H；H 不可直接連到 B，如：ABCD 就可以；若是 ACDE 就是不行的，因為 A 連到 C 時會經過 B，這樣就有五個點了。

由於圖形的對稱關係，我們認為 A 和 I、C 和 G、B 和 H、D 和 F 的數目都一樣，所以我們只列開頭是 A、B、C、D、E 這些字母。下圖是我們列出來的數據。

	4 個點	5 個點	6 個點
A	144	572	1824
B	164	614	1776
C	144	572	1824
D	164	614	1776
E	168	584	1632

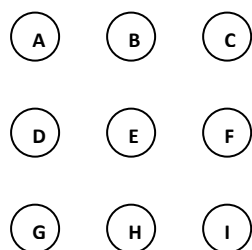
從列出來的數據中，我們發現 A 和 C、B 和 D 的數目也是一樣的，也就是 A 和 C、G、I 數量相同，B 和 D、F、H 數量相同。這讓我們注意到九宮格是一個點對稱的圖形，因為 A 和 C、G、I 是在圖形的邊角上，B 和 D、F、H 是邊的中間，而 E 是圖形的中心點。所以我們只要知道 A、B、和 E 三個點，就可以知道全部的情形了。

我們列到六個點時，發現可設定的密碼圖形數量很多，因此我們思考是否能用計算的方式來算出所有的數量。

【過程 1-2】找出圖像式鍵盤鎖所有圖像數量的計算方法。

我們用點和點之間的連線關係來嘗試繪製出路徑圖，從 A 點出發，可以連到五個點，再分別列出每個點可以連接到幾個點，因為不能回到以設定過的點，所以不會產生迴路，老師說這就是一種樹狀圖。

為了簡化樹狀結構，我們根據過程 1-1.2 的發現，先將圖形進行分組。把點先換成代號（如下圖）

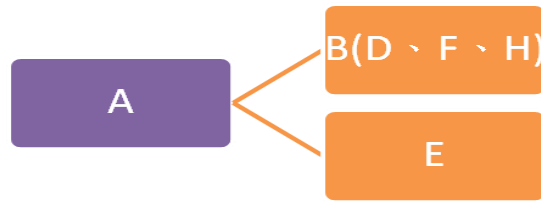


再把它們分類成 A、C、G、I 一組，B、D、F、H 一組，E 一組。我們共發現三種可行的計算法，分別是樹狀法、部分樹狀法、刪去法，以下分別介紹：

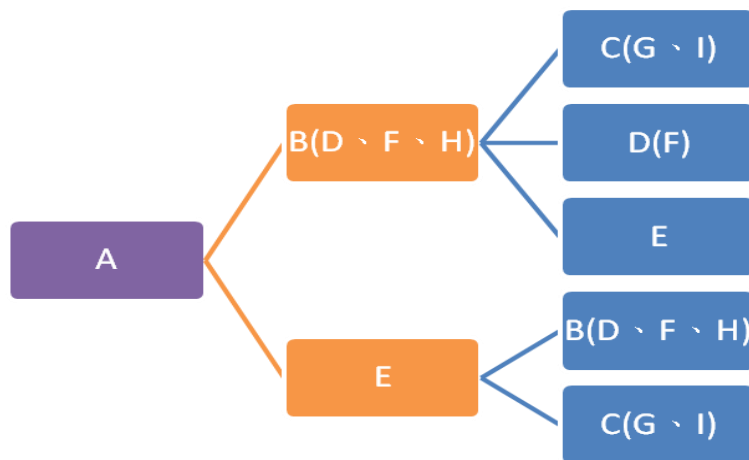
1-2.1 樹狀法：能詳細看出所有的數量與點之間的相連情形，但連接的點數多時，結構龐大不容易檢查

樹狀法是將每個點所能連到的點都詳列出來，但透過分類再去列，可以快速的計算，而不用一個個寫出來。我們以 A 開頭，通過四個點來舉例：

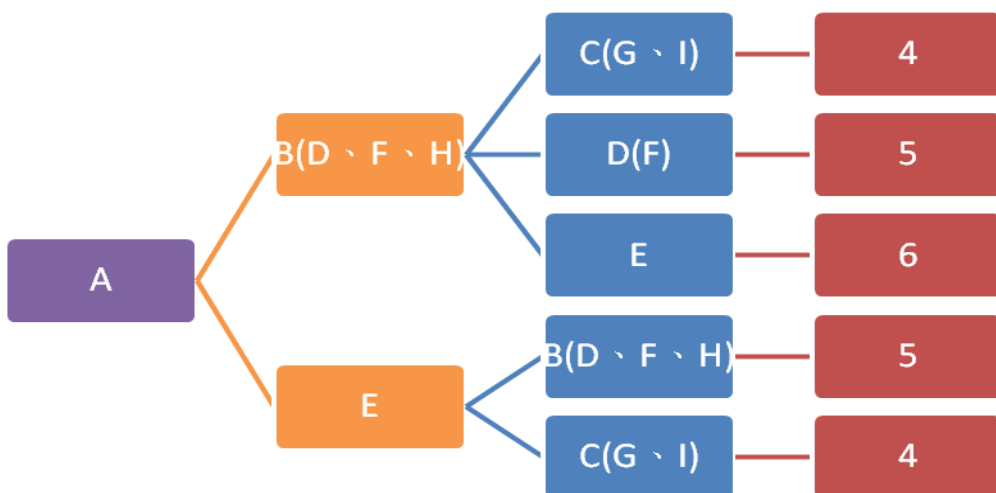
A 可以連到的字母先分成 B、D、F、H 和 E 兩類，歸納成 AB 組和 AE 組（如下圖）



而 B(D、F、H)可連到 C(G、I)、D(F)、E；E 可以連到 B(D、F、H)、C(G、I)（如下圖）



我們知道 C (G、 I)可連到 4 個字母，有 $4 \times 3 = 12$ 種圖形，B(D、F、 H)可連到 5 個字母，有 $5 \times 4 = 20$ 種圖形，E 可連到 6 個字母，有 $1 \times 6 = 6$ 種圖形（如下圖）。



所以 AB 組有 $4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 = 28$ ， $28 \times 4 = 112$ 種圖形，AE 組有 $5 \times 4 + 4 \times 3 = 32$ 種圖形，因此以 A 為起點，通過四個點的圖形共有 $112 + 32 = 144$ 種圖形。

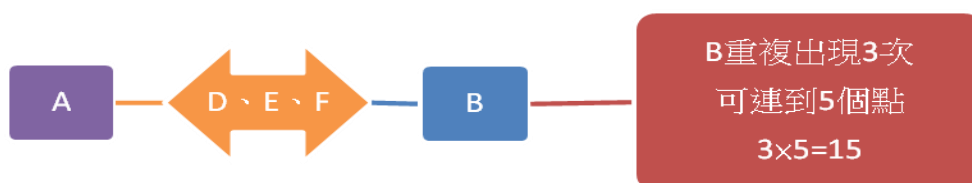
從圖形來看，樹狀法其實是將列舉法以事先分類，再去計算各分支的可能性

並進行總合的方法。所以五個點、六個點皆可這樣延伸下去，而 B 點區分成 BA(C、G、I)，BD(F)和 BE 三組，E 點區分成 EA(C、G、I)和 EB(D、F、H)兩組。

1-2.2 部分樹狀法：能省略目標層的前兩層和目標層不用列，用推理來計算目標層前一層的情況，可簡化樹狀法，但到多個點時，結構仍然複雜。

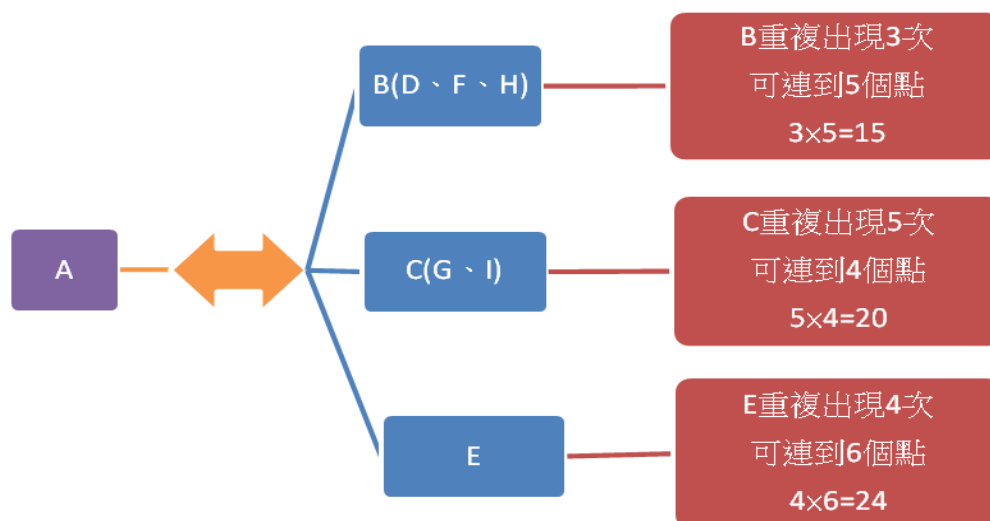
因為樹狀法需列出每一層所有的可能，我們開始思考是否可以不必完全列出，就可以計算出來呢？後來發現在計算時，我們可以先考慮出現代號的次數，再去進行計算，可以省下兩層不用詳列，我們就稱為部份樹狀法。一樣以 A 點為起點進行舉例：

我們先不管 A 可以連到哪個點，先看第三層可能的點有 B~I，那在第三層中 B 會出現幾次呢？因為 A 可以連到 B、D、E、F、H，而和 B 相連的有 A、C、D、E、F、G、I，所以在第二層中有 D、E、F 三個點可以將 A 與 B 相連，所以 B 在第三層會出現 3 次，因 B 原本可以連到 A、C、D、E、F、G、I，在第四層時要扣除 A 和一個與 B 相連之點(第二層)，剩下 $7-1-1=5$ 個點，所以第三層是 B 點共有 $3 \times 5=15$ 種圖形。而 B、D、F、H 是同組的， $15 \times 4=60$ 。



用相同的方法可算出第三層出現 C 的次數為 5 次，(因為 A 可以連到 B、D、E、F、H，與 C 相連的也是 B、D、E、F、H)，而 C 在第四層可連到 $5-1$ (第二層與 C 相連之點)=4 點，所以第三層是 C 點有 $5 \times 4=20$ 種圖形。而 C、G、I 是同組， $20 \times 3=60$ 。

第三層出現 E 的次數是 4 次(因為 A 可以連到 B、D、E、F、H，與 E 相連的是 A、B、C、D、F、G、H、I，所以在第二層中有 B、D、F、H 將 A 與 E 相連)，E 在第四層可連到 $8-1$ (A 點)- 1 (第二層與 E 相連之點)=6 點，所以第三層是 E 點有 $4 \times 6=24$ 種圖形。以 A 為起點，通過四個點的圖形共有 $60+60+24=144$ 種。



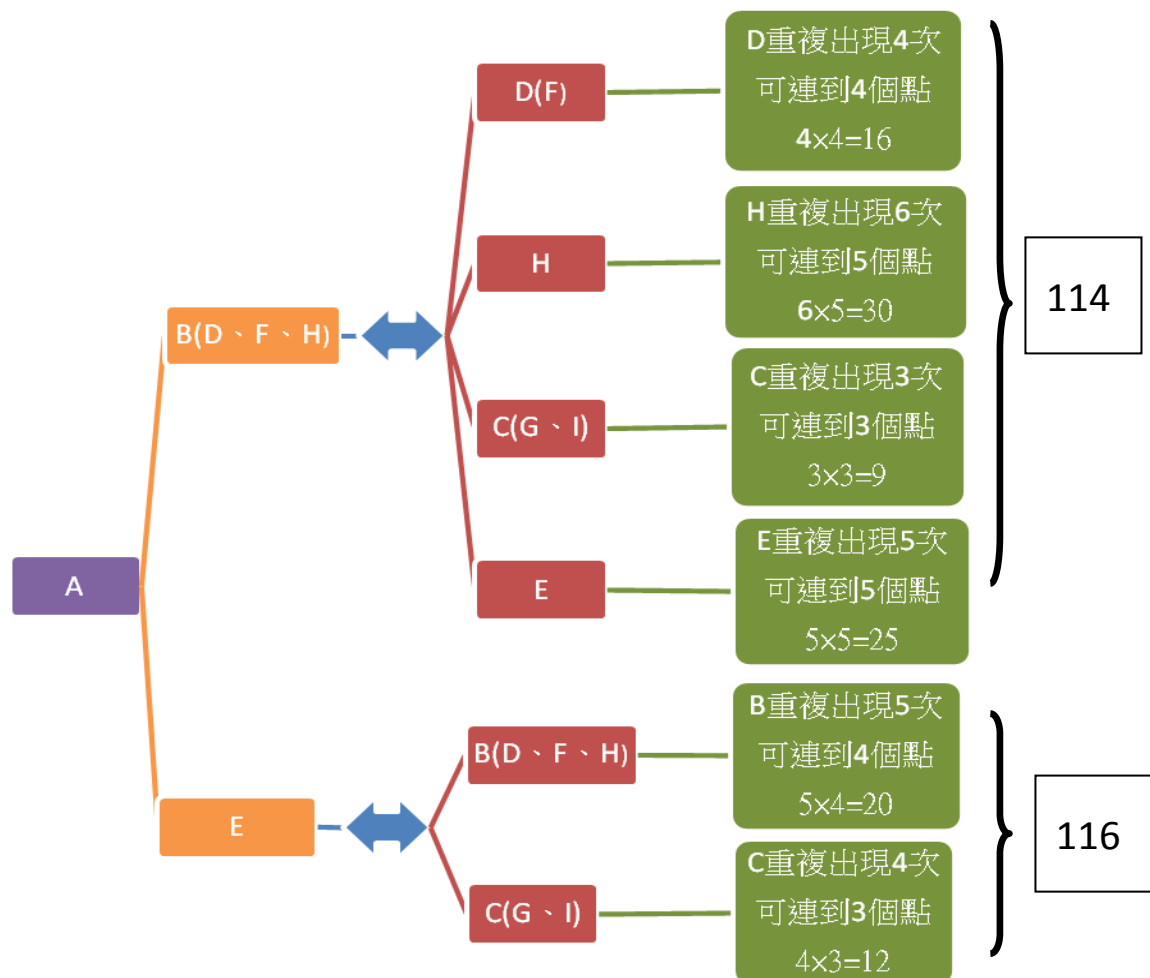
計算通過五個點的圖，則列出一、二和四層，不用列出第三層和第五層，就可以相同的算法來計算出。我們用 A 點來舉例，因為需列出一、二層，所以我們仍要將 A 點分成 AB 和 AE 兩組，再來不用列出第三層，而是列出第四層。

AB 組第四層可能的點有 C~I，所以拆成 C(G、I)，D(F)、H 和 E 三組，B 可以連到 C、D、E、F、G、I，和 C 相連的有 D、E、F、H，所以在第三層有 D、E、F 三個點可以將 B 和 C 相連，所以 C 在第四層會出現 3 次，因 C 原本可連到 B、D、E、F、H 五個點，在第五層時要扣除 B 和一個與 C 相連之點，剩下 $5-2=3$ 個點，所以第四層是 C 點的圖形有 $3 \times 3=9$ ，C、G、I 是同組的，所以有 $9 \times 3=27$ 種圖形。

同理我們可以算出 D(F)、H 和 E 分別為 32、30 和 25 種圖形，所以 AB 組共有 $27+32+30+25=114$ 種圖形。

AE 組第四層可拆成 B(D、F、H)和 C(G、I)兩組，分別可算出有 80 和 36 種圖形，所以 AE 組有 $36+80=116$ 種圖形。

所以以 A 為起點，通過五個點的圖形共有 $114 \times 4 + 116 = 572$ 種圖形



我們可以通過此種方法稍微簡化樹狀法複雜的結構，但當到多個點時，仍為複雜。

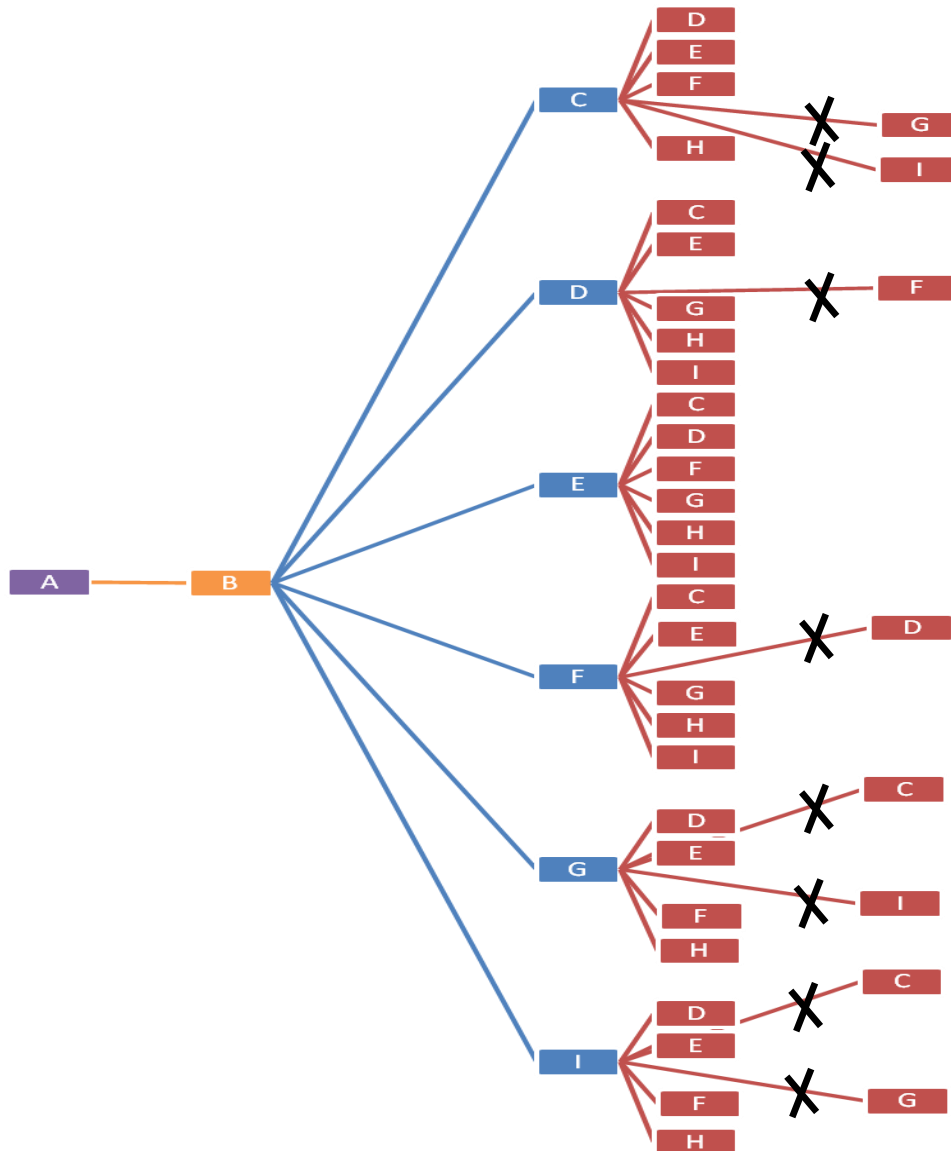
1-2.3 刪去法：先不管點與點是否相連，全部計算出來後，再將不能連到的點扣除，優點是可從上一層類推到下一層，計算到多個點時較為簡化。

用樹狀法來計算時，我們發現列到六、七個點時，樹狀的結構變的很大，分支很多，我們又開始思考其他的計算方式，因此想出了刪去法。刪去法是先不管點和點是否能相連，全部計算出來，再將不能相連的點刪除，剩下的即為所有的圖形數量。同上我們以 A 開頭，通過四個點來舉例：

A 可以連到的字母先分成 B、D、F、H 和 E 兩類，歸納成 AB 組和 AE 組。

我們先算 AB 組。一開始先固定前 2 個點，也就是 A 和 B，後 2 個點我們設為位置一和位置二。

位置一和 B 相連，可以和 B 相連的點有 A、C、D、E、F、G、I，但要先扣掉 A，剩下 6 個點。再來是位置二，全部有 9 個點扣除 A、B 和位置一，剩 6 個，所以共有 $6 \times 6 = 36$ 種連法。但位置一和位置二並非皆可相連，所以我們需要再扣除不可相連的部份：當位置一是 C、G 和 I 時，位置二不能是 C、G、I；位置一是 D 和 F 時，位置二不能是 F 和 D。不可相連的有 $2 \times 4 = 8$ 種，扣除 8 種後，有 $36 - 8 = 28$ 種可能的圖形。同理可算出 D、F 和 H 同樣是 28。AB 組共有 $28 \times 4 = 112$ 種圖形。



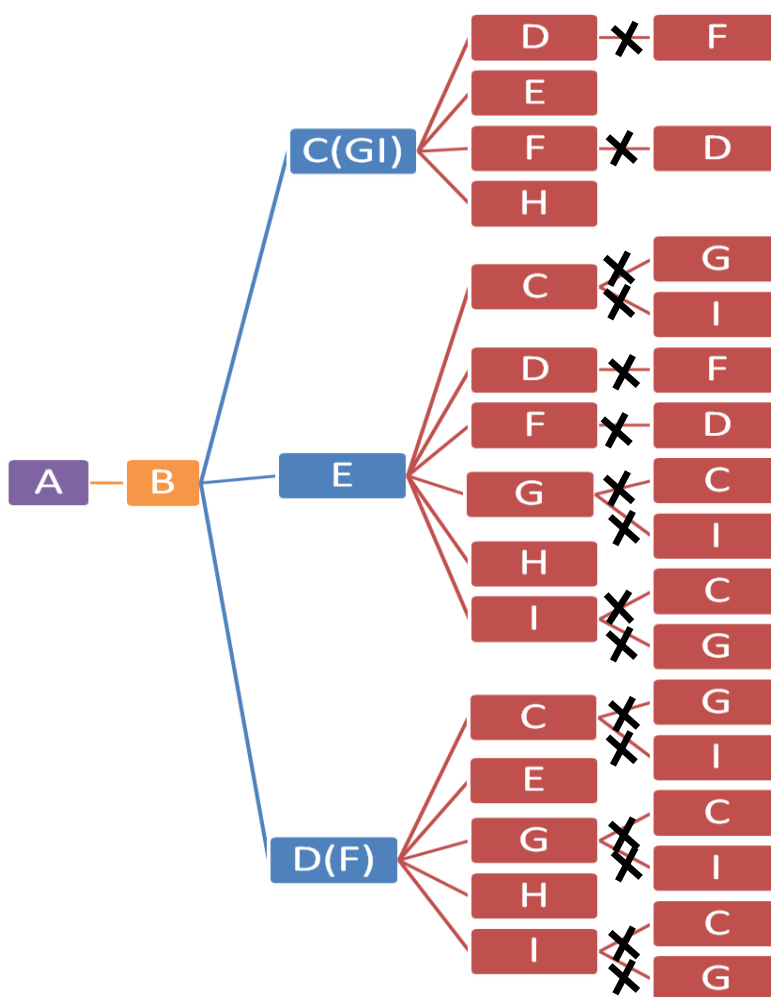
接著算 AE 組的。一樣先固定前 2 個點：A 和 E。後 2 個點仍設為位置一和位置二。

位置一和 E 相連，可以和 E 相連的點有 A、B、C、D、F、G、H、I，但要先扣掉 A，剩下 7 個點。再來是位置二，全部有 9 個點扣除 A、B 和位置一，剩 6 個，所以共有 $6 \times 7 = 42$ 種連法。但位置一和位置二並非皆可相連，所以我們需要再扣除不可相連的部份：當位置一是 C、G 和 I 時，位置二不能是 C、G、I；位置一是 D 和 F 時，位置二不能是 F 和 D；位置一是 B 和 H 時，位置二不能是 H 和 B。不可相連的有 $2 \times 5 = 10$ 種，扣除 10 種後，AE 組有 $42 - 10 = 32$ 種可能的圖形。以 A 為起點，通過四個點的圖形共有 $112 + 32 = 144$ 種圖形。

要算五個點的圖形，我們不用從頭算起，可以從四點連線的資料來推出五點連線的資料，計算方式如下：

一開始仍先分成 AB 和 AE 兩組，AB 組先固定前 2 個點，也就是 A 和 B，後 2 個點就是位置一、位置二和位置三。因為位置一和位置二在四個點計算出為 28 種圖形，位置三因全部有 9 個點，扣除 AB 和位置一、位置二，剩下 5 個點，所以有 $28 \times 5 = 140$ 種圖形。

但位置二和位置三並非皆可相連，仍要扣除不可相連之情形。扣除情形如下圖：



如果位置一等於 C，是扣 2 種情形。同組的 G 和 I 也是扣 2 種情形，共扣 $2 \times 3 = 6$ 種。如果位置一等於 E，是扣 8 種情形。如果位置一等於 D，是扣 6 種情形。同組的 F 也是扣 6 種情形，共扣 $6 \times 2 = 12$ 種。

全部共要扣 $6 + 12 + 8 = 26$ 種情形。AB 五個點的圖形有 $140 - 26 = 114$ 種。同理可算出 AD、AF 和 AH 也是 114 種，所以 AB 組共有 $114 \times 4 = 456$ 種圖形。

接下來計算 AE 組，一樣先固定前 2 個點：A 和 E。後 3 個點就是位置一、位置二和位置三。因為位置一和位置二在四個點計算出為 32 種圖形，位置三全部有 9 個點，扣除 AB 和位置一、位置二，剩下 5 個點，所以有 $32 \times 5 = 160$ 種圖形。

但位置二和位置三並非皆可相連，仍要扣除不可相連之情形。如果位置一等於 B，是扣 8 種情形(C、G、I 互不相連，D、F 互不相連)。同組的 D、F 和 H 也是扣 8 種情形，共扣 $8 \times 4 = 32$ 種。如果位置一等於 C，是扣 4 種情形(B、H 互不相連，D、F 互不相連)。同組的 G、I 也是扣 4 種情形，共扣 $4 \times 3 = 12$ 。

全部共要扣 $32 + 12 = 44$ 種情形。AE 五個點的圖形共有 $160 - 44 = 116$ 種。以 A 為起點，通過五個點的圖形共有 $456 + 116 = 572$ 種圖形。

以此類推，我們可從五個點推出六個點的圖形數量，並一直算出九個點的圖形數量。

【過程 1-3】 運用電腦程式來計算圖形的數量。

1-3.1 經過與專家說明與解釋圖像式密碼鎖的設定及計算方式，專家協助我們設計電腦程式來相互檢驗我們的數據是否正確。

我們想出三種計算法來計算圖形數量後，為了想確認自己計算的數據是否正確，因此詢問老師，老師說這應該可以用電腦程式來計算。因此我們找了一位程式設計的專家，跟他說明我們這個圖形密碼的設定規則，以及我們找到的計算法，請專家為我們運用電腦設計計算圖形數量的程式。設計出來的介面如下：



我們可由滑鼠按入任意字母(1)，但需遵守：A 後不為 C、G、I；B 後不為 H(D 後不為 F，反之亦然)；若按下 A 後，下一個鍵若按下 C，是不會有任何反應的。也可由鍵盤輸入一串字母以測試是否符合規則(2)：輸入完畢後按下”辨識”按鍵，即可得知是否為一可行的圖形密碼，藉此來檢驗我們詳列的數據是否正確。

也可找出全部或部份按鍵碼(以 6 個點為範例說明)，在”文字長度”欄內鍵入 6(3)，按下”搜尋”鍵，即可顯示全部 6 碼的可行圖形密碼於下方空格內(4)，並列出全部的數量(5)。

在遇到計算結果與程式運算結果不一樣時，我們會再次檢查我們的計算是否有所缺漏，並檢查詳列出的圖形密碼，藉著我們的計算及電腦的輔助，所有的數據如下：

	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點	8 個點	9 個點
AB	28	114	370	876	1356	1032
AB 組(含 AD.AF.AH)	112	456	1480	3504	5424	4128
AE	32	116	344	792	1200	912
總計	144	572	1824	4296	6624	5040

	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點	8 個點	9 個點
BA	22	82	252	564	792	504
BA 組(含 BC.BG.BI)	88	328	1008	2256	3168	2016
BD	24	96	264	504	528	144
BD 組(含 BF)	48	192	528	1008	1056	288
BE	28	94	240	432	480	144
總計	164	614	1776	3696	4704	2448

	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點	8 個點	9 個點
EA	20	68	200	456	624	432
EA 組(含 EC.EG.EI)	80	272	800	1824	2496	1728
EB	22	78	208	384	432	144
EB 組(含 ED.EF.EH)	88	312	832	1536	1728	576
總計	168	584	1632	3360	4224	2304

	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點	8 個點	9 個點
總計	1400	5328	16032	35328	49536	32256

全部共 139880 種圖形。三種計算法中，各有計算的優缺點，但因皆為樹狀法的延伸，所以三種計算法是可以互相通用的。我們覺得在計算四、五個點時用樹狀法，六、七個點用部分樹狀法，八、九個點用刪去法是計算時最佳的模式。

歷程二：調查目前手機使用者的螢幕鍵盤鎖情形。

【過程 2-1】目前手機使用者的螢幕鍵盤鎖情形。

2-1.1 我們利用問卷調查，發現目前手機使用者設定的圖像式鍵盤鎖大多與文字或數字有對應。

我們計算過後，發現圖像式的圖形數量比密碼式的數量還多的多，而在日常生活的使用者使用情形又是如何呢？大家比較常用的鍵盤鎖是哪些呢？因此我們就學校學生的家長及學校老師進行問卷調查，共收回問卷 322 份，其中有 19 份無效問卷，有效問卷為 303 份，以下是我們經過統計後的調查結果分析。

1. 您的手機是否為智慧型手機？

是	否
261	42

從表中，我們可以發現現代智慧型手機非常的普及，而智慧型手機中所能儲存的個人信息比普通手機更多，因此螢幕鍵盤鎖是有存在之必要的。

2. 你是否有設定螢幕鍵盤鎖？

是	否
159	102

我們可以發現超過半數的智慧型手機使用者都有替自己的手機設密碼的習慣，表示大家會注意個人隱私，避免他人窺探。

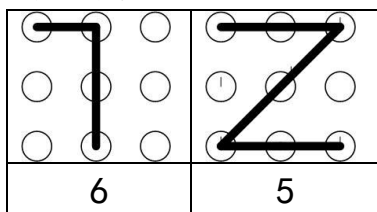
3. 你的螢幕鍵盤鎖採用何種型式？

圖像式	數字密碼式	其它
73	57	29

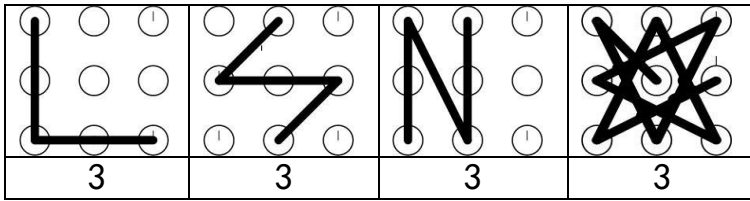
從統計表中，我們可以發現有設密碼的人，大部分都會選擇圖像式的密碼或數字式的密碼，其中圖像式的螢幕鍵盤鎖比數字式的更受歡迎。

4. 請你將你螢幕鍵盤鎖的圖形記錄於下。

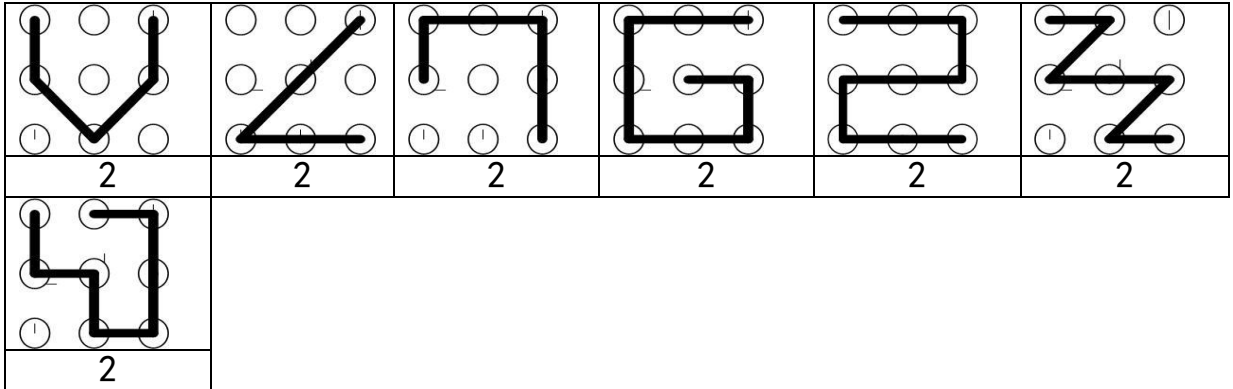
票數最多的分別為 7 字形和 Z 字形。



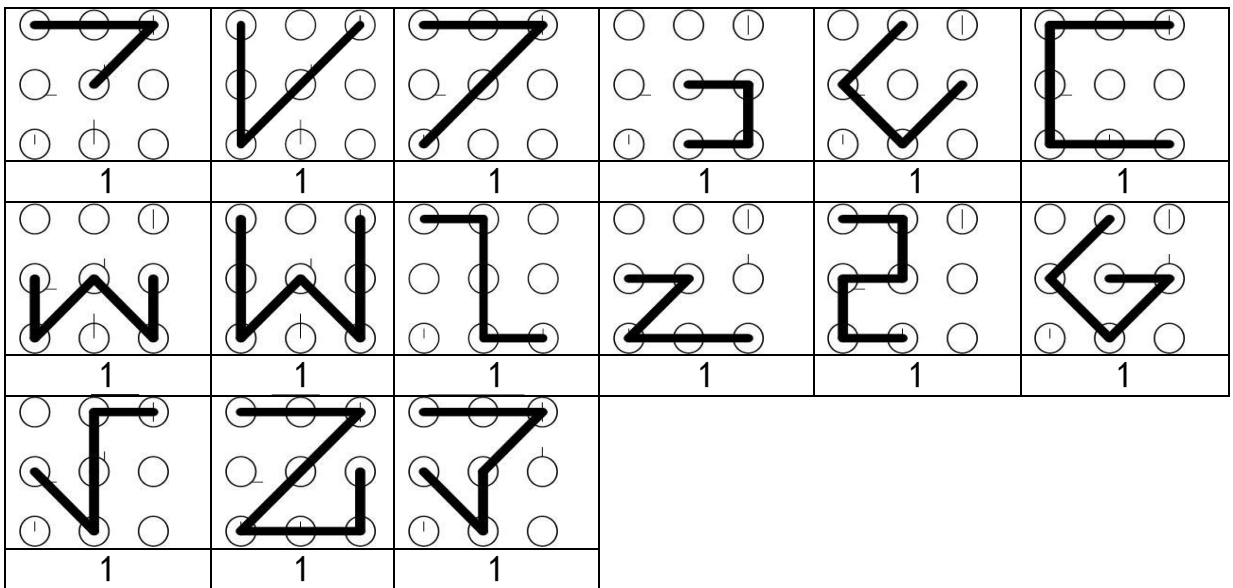
票數次之的有 L 字形、ㄣ 字型和 N 字形，以及一個星星圖。



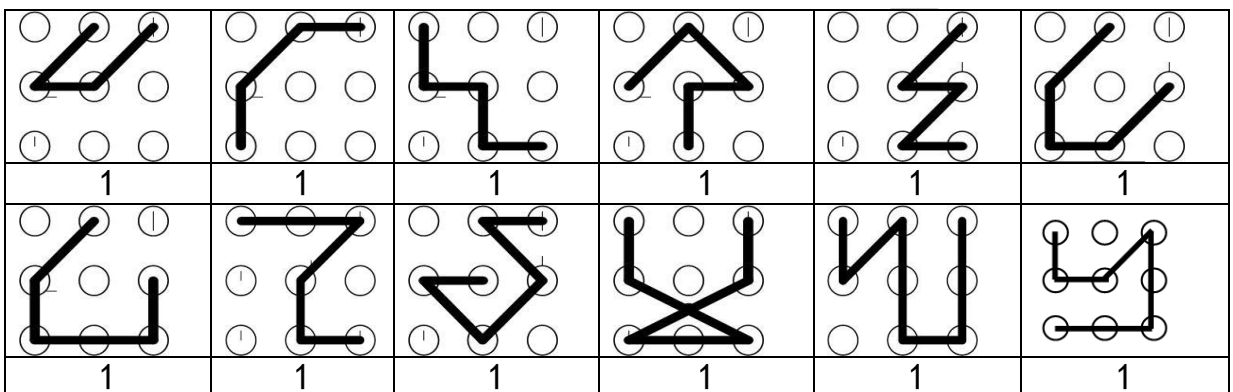
票數 2 票的有 V 字形、L 字形、大 7 字形、G 字形、2 字形及其他兩種。

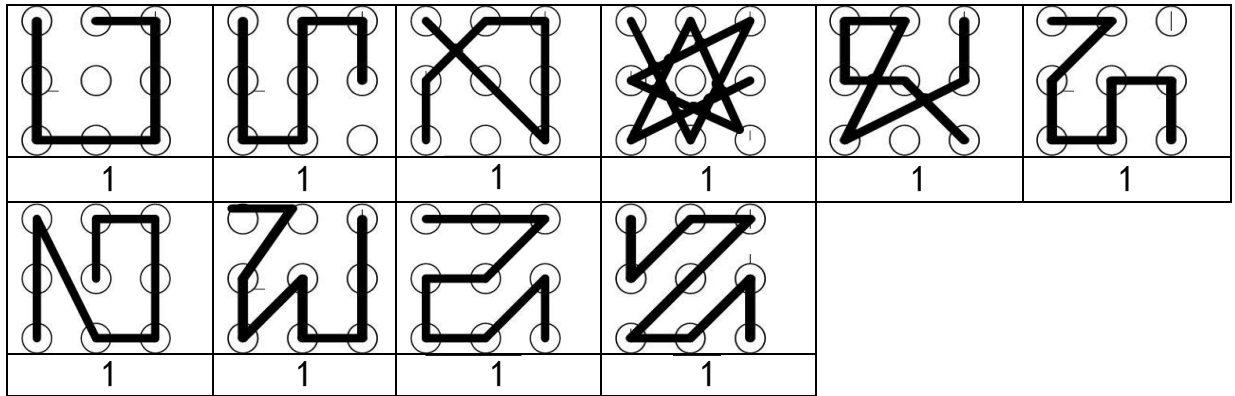


票數 1 票的有類 V 字形、C 字形、倒 M 字形、類 Z 字形、2 字形、G 字形、√ 字形、乙字形、了字形。



票數 1 票但無法看出相似字的有下列圖形：





這些圖形雖然和字體不像，但仍可發現和某些圖形如樓梯、星形、樹等有相似之處，可見在設定圖形時，大部分的人是思考過，選擇自己容易記得的圖像。

根據以上的調查結果，我們歸納了幾點發現。大部分手機用戶會使用圖像式的螢幕鍵盤鎖，因為圖像式密碼較好記憶，而且有新鮮感。而大部分人常用的密碼圖形，是以連到的點數量少，或與文字或數字有對應，容易記憶的為主，所以我們可以發現很多類似 7、L 或 Z 的圖像。


圖像式的螢幕鍵盤鎖不僅圖像種類比密碼式的多，而且也很受大眾歡迎，所以我們覺得如果圖像式的螢幕鍵盤鎖可以設計出多種不同的樣式，改變鍵盤鎖上點的安排，不僅讓圖像更豐富，大家可以有更多的選擇，也可以降低被破解的風險。

歷程三：設計其他圖像式螢幕鍵盤鎖。

【過程 3-1】設計其他圖像式螢幕鍵盤鎖及其所有圖像數量。

3-1.1 圖像中，點與點如果不能相連，對密碼圖像數量有何影響，我們找出可以計算的公式，作為圖像設計的參考。

設計圖像之前，我們先考慮設計時會影響密碼圖像數量的因素，也就是點與點間是否能夠相連。我們先以七點為例，七個點沒有共線的話，圖像密碼的數量如下：

	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點
算式	$7 \times 6 \times 5 \times 4$	$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$	$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$	$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
數量	840	2520	5040	5040

全部加起來的數量是 $840+2520+5040+5040=13440$ 種。


我們先把點進行編碼 A、B、C、D、E、F、G，如果有一組不能相連的點，假設 A 和 B 不能相連，用刪去法計算如下：

圖形沒有共線時，四個點的計算方式為： $7 \times 6 \times 5 \times 4$ ，但需扣除 A 和 B 相連的情況：第一點和第二點為 AB，第二點和第三點為 AB，第三點和第四點為 AB，共三種情況，剩下的兩點則分別有 $7-2=5$ 種(C、D、E、F、G)和 $5-1=4$ 種選擇，其

中 AB 位置可以互換，所以需扣除的部份為 $3 \times 5 \times 4 \times 2$ 。圖像數量為 $7 \times 6 \times 5 \times 4 - 3 \times 5 \times 4 \times 2 = (7 \times 6 - 3 \times 2) \times 5 \times 4 = 720$

第一點	第二點	第三點	第四點
A	B	5	4
5	A	B	4
5	4	A	B

我們用相同的方法進行計算，可得出有一組不能相連的點時圖像數量如下表：


	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點
算式	$(7 \times 6 - 3 \times 2)$ $\times 5 \times 4$	$(7 \times 6 - 4 \times 2)$ $\times 5 \times 4 \times 3$	$(7 \times 6 - 5 \times 2)$ $\times 5 \times 4 \times 3 \times 2$	$(7 \times 6 - 6 \times 2)$ $\times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
數量	720	2040	3840	3600

如果有兩組不能相連的點時，假設 A 和 B 不能相連；C 和 D 不能相連，用刪去法計算如下：

圖形沒有共線時，四個點的計算方式為： $7 \times 6 \times 5 \times 4$ ，但需扣除 A 和 B 相連與 C 和 D 相連的情況，一組不能相連的情況中，要扣除 $3 \times 2 \times 5 \times 4$ ，有兩組不能相連，所以要扣除 $3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 2$ 。因有部分重複扣除，需加回 A 和 B 相連且 C 和 D 也相連的情形， 2×1 ，AB 可互換，CD 也可互換，所以共加回 $2 \times 1 \times 2 \times 2$ 。

第一點	第二點	第三點	第四點
A	B	C	D
C	D	A	B

我們用相同的方法進行計算，可得出有兩組不能相連的點時圖像數量如下表：

	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點
算式	$(7 \times 6 - 3 \times 4)$ $\times 5 \times 4$ $+ 4 \times 2 !$	$(7 \times 6 - 4 \times 4)$ $\times 5 \times 4 \times 3$ $+ 4 \times 3 ! \times C(3, 1)$	$(7 \times 6 - 5 \times 4)$ $\times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ $+ 4 \times 4 ! \times C(3, 2)$	$(7 \times 6 - 6 \times 4)$ $\times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $+ 4 \times 5 ! \times C(3, 3)$
數量	608	1632	3216	2640

如果有三組不能相連的點時，假設 A 和 B 不能相連；C 和 D 不能相連；E 和 F 不能相連，用刪去法計算如下：

圖形沒有共線時，四個點的計算方式為： $7 \times 6 \times 5 \times 4$ ，但需扣除 A 和 B 相連、C 和 D 相連、E 和 F 相連，一組不能相連的情況中，要扣除 $3 \times 2 \times 5 \times 4$ ，有三組不能

相連，所以要扣除 $3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3$ 。因有部分重複扣除，需加回兩組相連的情形，所以共加回 $2 \times 2 \times 2! \times C(3, 2)$ ，因只有四個點，沒有三組皆不能相連的情形，所以不需扣除重複的部份，6 個點以上則需扣除三組皆不能相連的情形，也就是 $2 \times 2 \times 3!$ 。

我們用相同的方法進行計算，可得出有三組不能相連的點時圖像數量如下表：

	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點
算式	$(7 \times 6 - 3 \times 6)$ $\times 5 \times 4$ $+ 4 \times 2! \times 3$	$(7 \times 6 - 4 \times 6)$ $\times 5 \times 4 \times 3$ $+ 4 \times 3! \times C(3, 1)$ $\times 3$	$(7 \times 6 - 5 \times 6)$ $\times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ $+ 4 \times 4! \times C(3, 2) \times$ $3 - 2 \times 2 \times 2 \times 3!$	$(7 \times 6 - 6 \times 6)$ $\times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $+ 4 \times 5! \times C(3, 3) \times$ $3 - 2 \times 2 \times 2 \times 4!$
數量	504	1296	2256	1968

最後，我們發現 n 個點的圖像，要連 m 個點：

全部不共線的圖形有 $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \cdots \times \{n - (m-1)\}$ 種，

全部不共線

一組不能相連時要扣除 $(m-1) \times 2 \times (n-2) \times (n-3) \cdots \times \{n - (m-1)\}$ 種，

全部不共線

AB 共線

兩組不能相連時先扣除 2 次一組不能相連的情形，再加回二組皆不相連的情形 $4 \times (m-2)! \times C(n-4, m-4)$

全部不共線

AB 共線

AB 共線且
CD 共線

CD 共線

三組不能相連時，先扣除 3 次一組不能相連的情形，再加回 3 次二組皆不相連的情形，最後再扣除三組皆不相連的情形 $8 \times (m-3)! \times C(n-6, m-6)$

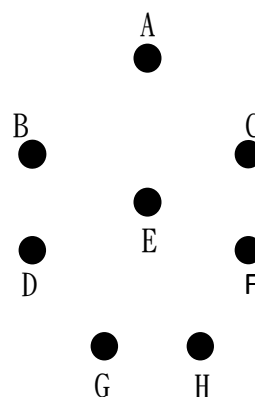
圖像設計可依此規則推出全部的圖形密碼數量，作為圖像設計的參考。

3-1.2 我們設計了聖誕樹造型和立方體造型兩種鍵盤鎖圖像。

因此我們設計了兩種八個點的鍵盤鎖，把圖及可連結的圖像數量算法紀錄如下：

圖型一：聖誕樹造型

算法：有八個點，且有兩組不能相連之點(B和F；C和D)，所以圖像密碼的數量為：



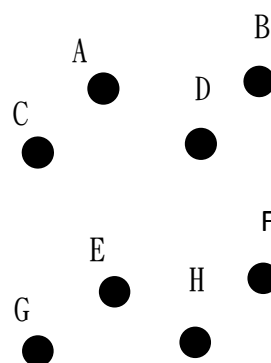
	4 個點	5 個點	6 個點	7 個點	8 個點
算式	$(8 \times 7 - 3 \times 4) \times 6 \times 5 + 4 \times 2 !$	$(8 \times 7 - 4 \times 4) \times 6 \times 5 \times 4 + 4 \times 3 ! \times C(4, 1)$	$(8 \times 7 - 5 \times 4) \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 4 ! \times C(4, 2)$	$(8 \times 7 - 6 \times 4) \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 4 \times 5 ! \times C(4, 3)$	$(8 \times 7 - 7 \times 4) \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 4 \times 6 ! \times C(4, 4)$
數量	1328	4896	13536	24960	23040

共 67760 種圖形。

圖形二：立方體造型

算法：因八個點都沒有阻礙，所以四個點連線有 $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ 種，五個點數量是 $1680 \times 4 = 6720$ 種，六個點則是 $6720 \times 3 = 20160$ 種，七個點數量是 $20160 \times 2 = 40320$ 種，八個點的數量是 $40320 \times 1 = 40320$ ，所以全部加起來的數量是 $1680 + 6720 + 20160 + 40320 + 40320 = 109200$ 種

我們設計的鍵盤鎖雖然只有 8 個點的圖形，但仍可提供給大家作為密碼設計的參考。



伍、研究結果

- 一、我們為了找出九宮格圖像的螢幕鍵盤鎖中所有的圖形，用了列舉法來詳列，並想出了樹狀法、部分樹狀法和刪去法三種計算方法，最後請專家協助設計電腦程式來確認數據的正確性，最後發現總共有 139880 種圖形。。
- 二、我們透過問卷調查，發現圖像式的螢幕鍵盤鎖目前十分普遍。而大部分人常用的密碼圖形，是以連到的點數量少，或與文字或數字有對應，容易記憶的為主。
- 三、我們找到了圖像中，點與點不能相連時，計算密碼圖形數量的公式，可作為圖像設計的參考，並設計了聖誕樹造型和立方體造型兩種鍵盤鎖圖像。

陸、結論

雖然圖像式密碼的較傳統 PIN 數字密碼數量還多，但經過我們的問卷調查後，可以發現大家設定的圖形的相似性高，仍容易被破解。所以我們覺得不管是密碼式鍵盤鎖，還是圖像式鍵盤鎖，都要依密碼的簡易來判斷是否容易被破解。怎樣的圖像式鍵盤鎖較不易被破解呢？我們建議點數至少要六點以上，斜線多一點的組合的圖形較佳。

這次的科展，我們學到了許多數學的知識，像是用樹狀圖、刪除法及列舉法等從沒聽過的算法。而令我們印象最深刻的地方是「問卷調查」，因為我們在做這個工作時，要親自把問卷送到不同的班級，並跟老師說明我們發問卷的原因以及填答法，需要膽量才能完成。最後，終於我們順利完成這次的科展作品，也經驗許多平常無法得到的體驗，十分有趣！

柒、參考資料

一、
http://mobile.htc.com/learnmore/aria/cht/howtos/Security_LockScreen.html 以螢幕解鎖圖形保護手機。

二宋承穎、陳虹均、郭玄樺(2012)。最後一道防線(高雄市第52屆中小學科學展覽會)。

三、<http://www.shs.edu.tw/works/essay/2012/11/2012111422504931.pdf>

夏維陽(2012)Android 手機圖形鎖的安全分析與強化

附錄一：螢幕鍵盤鎖使用情形問卷

親愛的家長及老師：

您好！我們是科展團隊，因這次的研究題目和智慧型手機的螢幕鍵盤鎖相關，因此我們想做一個調查研究，希望您能根據您使用的手機狀況，回答下列的問題。因螢幕鍵盤鎖有涉及您的隱私，所以此次研究採不記名方式填答，謝謝您的合作。

1. 您的手機是否為智慧型手機？

是(請填第二題) 否(問卷到此結束)

2. 您是否有設定螢幕鍵盤鎖？

是(請填第三題) 否(問卷到此結束)

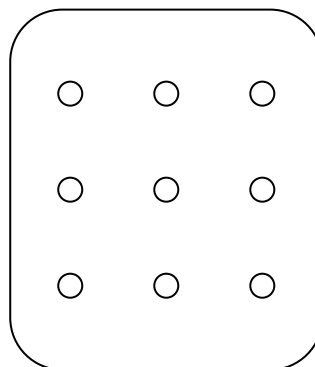
3. 您的螢幕鍵盤鎖採用何者形式？

圖像式(請填第四題) 密碼式(問卷到此結束) 其它(問卷

到此結束)



4. 請你將你螢幕鍵盤鎖的圖形記錄於下。



問卷到此結束，謝謝您！

【評語】 080412

1. 討論的問題相當生活化，也很有趣味。分析討論地相當完整，
是件不錯的科展作品。
2. 延伸性的討論有加強的空間，這可使作品更加有深度。