中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080411

獨「數」E格－E型棋盤最少步數的探討

學校名稱：臺中市私立華盛頓國民小學

作者：	指導老師：
小五 吳　蓁	張雅玲
小五 顏宏諭	李昕芬
小五 劉庭妤	
小五 劉子銘	
小五 何秉紘	
小五 林資穎	

關鍵詞：單人棋、平面調度棋

摘要

單人棋戲，看似簡單，卻包含先人古老的智慧，蘊含無窮變化，雖然沒有對手和您同時競賽，但盤中乾坤卻是充滿想像空間，會讓人一上手就欲罷不能。

自製 E 型棋的玩法是：在 E 型棋盤中，每個橫排放入數量相等的棋子，每次只能移動 1 顆棋子，移動至指定空格即算一步，最後棋子要上下交換排列，並找到最少步數。

本次研究想透過數學中的歸納與分析，其中「棋子的步數」是否有特定的規律性，以及「棋子的走法」是否也隱藏著有趣的數學道理，我們不斷嘗試各種走法，雖然過程複雜繁瑣，但最後都得到排列的規律性，也有了肯定的結論。

壹、研究動機

去年第一次參加台中市科展，當時研究「易位棋」這個有趣的遊戲，引起了我們對單人棋的興趣，還記得老師當時教我們上網查閱歷屆科展的資料，我們才知道同一個主題居然可以發展出這麼多不同的研究。有了去年的經驗，今年我們從『趣味數學棋藝篇』中找了一個更難的「平面調度棋」，上網查歷屆科展主題時，發現還沒有人研究過這種單人棋，讓我們更有股衝勁想一一破解其中的奧秘。

本來以為平面調度棋跟易位棋相比，就是使用不同的棋盤，改變規則、再將規定的棋子編號就定位，應該不會太難，沒想到實際操作時才發現，別說是最少步數，上下各兩排的棋盤光要讓棋子完成交換並就定位，就花了很多時間研究，但移完的步數卻大大超過書中解答的 43 步。原來不只要注意棋子編號，還要思考在有限的格子中，如何讓棋子交錯到對面就定位。我們六個人嘗試了一個禮拜還是毫無頭緒，求助老師，老師跟我們討論，既然「平面調度棋」太難，就要簡化問題，等方法熟練後再回到較複雜的問題。有了老師的提點後，我們討論出先用兩種顏色的棋子完成交換，經過四個多月才慢慢找到最少步數的規律，並嘗試了不同棋盤的最少步數。兩種顏色對換的方法熟練後，最後再回到原本加上數字編號的研究，突然覺得沒有之前那麼難，更能夠跳脫書中的解答，用我們自己的方法找到規律並能夠一直延伸到 N 格。

貳、研究目的

一、E 型棋盤中，探討上下排棋子數量相同、顏色對調最少步數的規律性並歸納通用的公式。
二、變化 E 型棋盤，找出對稱和非對稱棋盤間最少步數的規律性。
三、E 型棋盤中，找出數字對調的最少步數，並推論至上下排各 N 顆的通用公式。

參、研究設備及器材

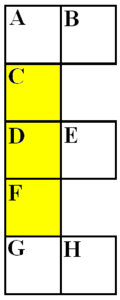
電腦、數位相機、磁性雙色棋子、自製棋盤、紀錄表格、筆。

肆、研究過程或方法

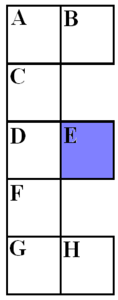
一、名詞定義：

(一)阻礙區：如【圖一】，C、D、F 格上若放置棋子就會阻礙到上下兩排 A、B、G、H 格上的棋子移動，我們將這些格子命名為阻礙區。

(二)暫停格：如【圖二】，將棋子先放到此格，便無法阻擋其它棋子移動，我們將這一格命名為暫停格。



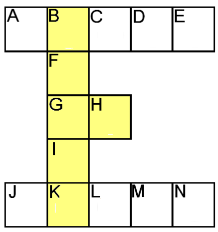
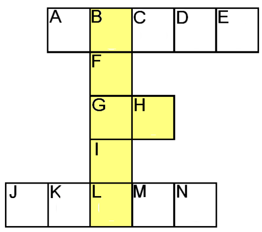
【圖一】阻礙區



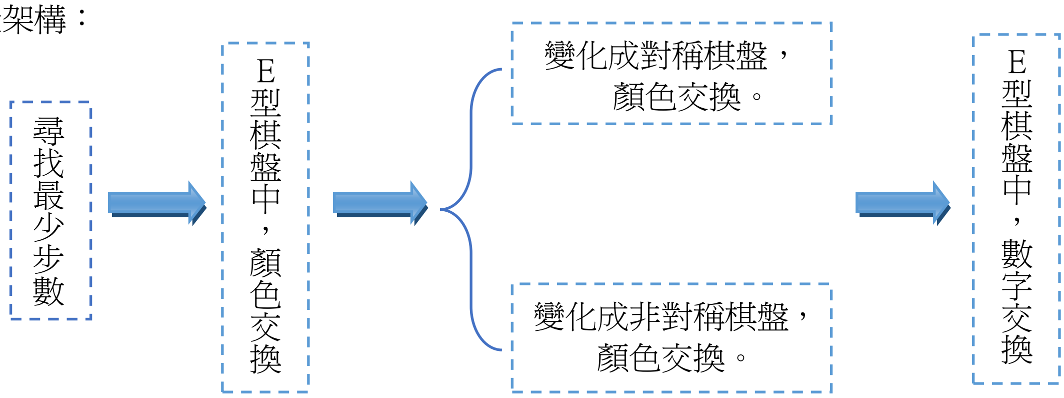
【圖二】暫停格

(三)走法：A→E 表示棋子從 A 格移動至 E 格，此為一步，以此類推。

(四)變化 E 型棋盤，分成對稱和非對稱棋盤：

	對稱棋盤	非對稱棋盤
		
命名	記作(13，13)	記作(13，22)
說明	1.上下排在阻礙區左邊各是 1 格(A 格及 J 格)，右邊各都是 3 格(C、D、E 格及 L、M、N 格)，所以稱為對稱棋盤。 2.上排在黃色阻礙區左、右邊依序是 1 格及 3 格，所以我們記作 13，同理，下排也是 13，統一都是先念出上排再念下排，所以記成(13，13)。	1.上下排在阻礙區左邊各是 1 格及 2 格，右邊則是 3 格及 2 格，所以稱為非對稱棋盤。 2.上排在黃色阻礙區左、右邊依序是 1 格及 3 格，所以我們記作 13，下排則是 22，統一都是先念出上排再念下排，所以記成(13，22)。

二、研究架構：

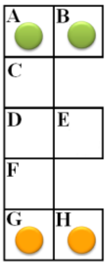


伍、研究結果

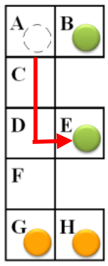
一、E 型棋盤中，探討上下排棋子數量相同、顏色對調最少步數的規律性並歸納通用的公式：

(一)遊戲規則：

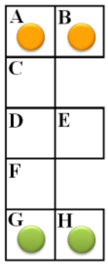
E 型棋盤中，上下排放入數量相等的棋子，如【圖三】；每次只能移動 1 顆棋子，移動至指定之空格即算一步，如【圖四】的綠棋從 A 格移到 E 格算一步，最後棋子要上下交換顏色成【圖五】。



【圖三】

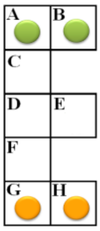


【圖四】

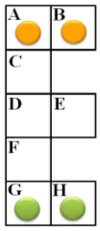


【圖五】

(二)上下各 2 顆的最少步數：

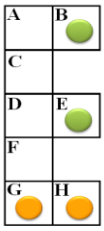
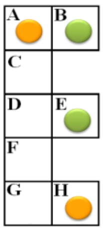
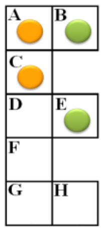
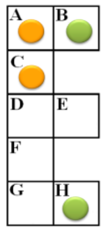


起始棋面

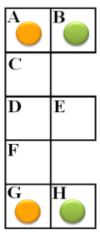
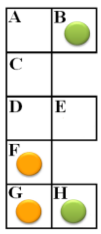
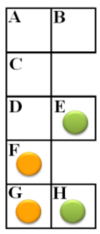
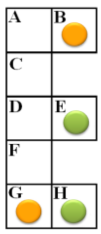
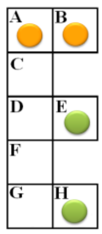
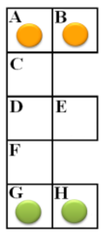


目標棋面

最少步數的移動結果如下：

第 1 步		第 2 步		第 3 步		第 4 步
	➔		➔		➔	
走法：A→E		走法：G→A		走法：H→C		走法：E→H

※分析：第 5 步 C 棋可以移動到阻礙區或暫停格，分成兩種情況討論後，發現若移到暫停格總步數需要 11 步，但 C 棋移到阻礙區總步數會少一步，如下表：

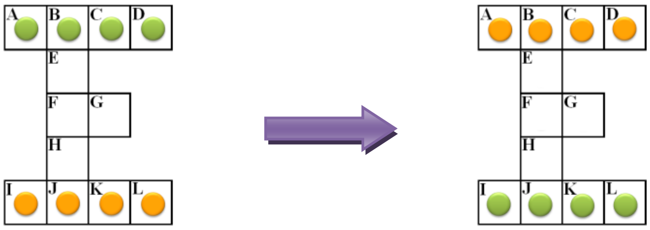
第 5 步	第 6 步	第 7 步	第 8 步	第 9 步	第 10 步
					
走法：C→G	走法：A→F	走法：B→E	走法：F→B	走法：G→A	走法：E→G

(三)上下各 3~5 顆的最少步數：

上下各 3 顆的最少步數是 17 步

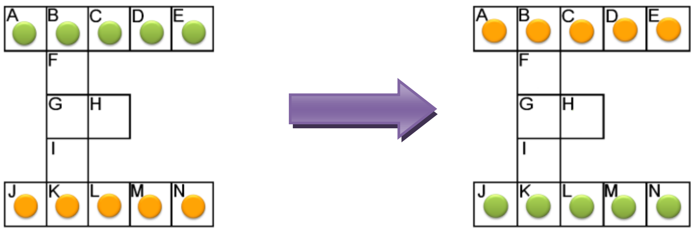
走法依序是：B→F，I→B，H→D，F→H，D→I，B→G，C→F，G→C，I→B，J→D，
F→J，D→I，B→G，A→F，G→A，I→B，F→I。

上下各 4 顆的最少步數是 30 步



走法依序是：B→G，J→B，I→E，G→I，E→J，B→H，C→G，H→C，J→B，K→E，
L→F，I→L，F→K，G→I，E→J，B→H，A→G，C→F，D→A，F→D，
H→C，J→B，K→E，G→K，E→J，B→H，A→G，H→A，J→B，G→J。

上下各 5 顆的最少步數是 47 步



走法依序是：B→H，K→B，J→F，H→J，F→K，B→I，A→H，I→A，K→B，L→F，
M→G，N→I，J→N，I→M，G→L，H→J，F→K，B→I，C→H，A→G，
D→A，G→D，I→C，K→B， L→F，M→G，J→M，G→J，H→L，F→K，
B→I，A→H，C→G，D→F，E→A，F→E，G→D，I→C，K→B，J→F，
H→J，F→K，B→I，A→H，I→A，K→B，H→K。

(四)討論有助於發現規律性的記錄方式：

在找上下各 3~5 顆最少步數的過程中，會發現一開始跟結尾的移法都相同，且前半段的移法與後半段類似，因此我們嘗試將所有的步數走法都記下來，觀察是否有關係。原本將每一步從 B 格→H 格的記錄方式無法幫助我們去歸納規律，經過嘗試很多種不同的記法後，我們決定使用下面的記法。

記錄方式：先記下每次移動的棋子顏色，再轉換成綠棋或橘棋每次移動的步數，舉例如下：

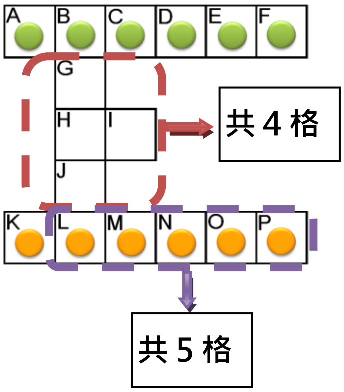
上下各 2 顆：	綠	<u>橘橘</u>	綠	<u>橘橘</u>	綠	<u>橘橘</u>	綠
	1	2	1	$\boxed{2}$	1	2	1

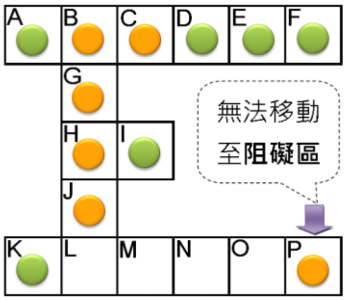
可發現步數明顯呈現對稱性，因此我們接著將上下各 3~5 顆的最少步數也轉換成這種記錄方式，下表直接記錄綠棋及橘棋每次移動的步數。

各 3 顆	1 2 1 2 1 $\boxed{3}$ 1 2 1 2 1
各 4 顆	1 2 1 2 1 $\boxed{4}$ 1 1 1 $\boxed{2}$ 1 1 1 $\boxed{4}$ 1 2 1 2 1
各 5 顆	1 2 1 2 1 $\boxed{5}$ 1 2 1 2 1 1 1 $\boxed{5}$ 1 1 1 2 1 2 1 $\boxed{5}$ 1 2 1 2 1

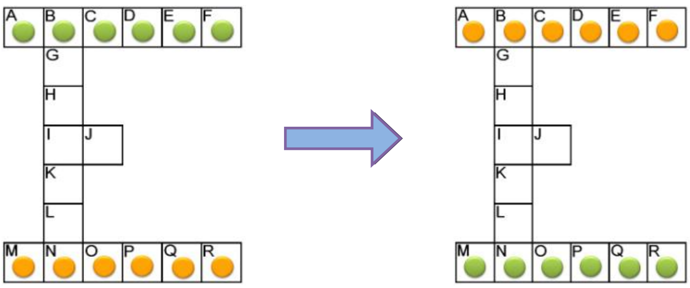
(五)設計可通用多顆棋子的棋盤：

轉換記錄方式發現明顯的對稱性後，我們就很興奮的繼續嘗試上下各 6 格的棋盤，但是又遇到新的難題：一開始我們一樣將上下排的棋盤各加一格，但嘗試後發現因爲阻礙區和暫停格共 4 格，無論怎麼移動，P 格的橘棋都無法移動到阻礙區，此棋盤無法成功移動上下各 6 顆的棋子。





爲了挑戰到更多顆棋子的遊戲，於是我們增加阻礙區的格子數，但爲維持棋盤難度，故暫停格仍維持 1 格。設計出的棋盤如下圖(因棋盤設計爲上下對稱，所以阻礙區上下各增加 1 格)：



經過多次嘗試後，當上下各 6 格及 7 格的棋盤，阻礙區要增爲 5 格；當上下各 8 格及 9 格的棋盤，阻礙區要增爲 7 格，以此類推。

※設計出通用的棋盤後，我們繼續嘗試上下各 6 顆及 7 顆的最少步數，記錄如下：

各 6 顆	1 2 1 2 1 $\boxed{6}$ 1 2 1 3 1 $\boxed{5}$ 1 1 1 $\boxed{4}$ 1 1 1 $\boxed{5}$ 1 3 1 2 1 $\boxed{6}$ 1 2 1 2 1
各 7 顆	1 2 1 2 1 $\boxed{7}$ 1 3 1 3 1 $\boxed{6}$ 1 2 1 4 1 1 1 $\boxed{7}$ 1 1 1 4 1 2 1 $\boxed{6}$ 1 3 1 3 1 $\boxed{7}$ 1 2 1 2 1

根據上述操作的步數中發現，互爲相似的規律會分成兩種，上下排棋子數爲奇數的規律相似，而上下排棋子數爲偶數的規律也互爲相似，所以接下來我們就將上下排棋子數爲奇數及偶數的步數和走法分開討論。

(六)探討並歸納出最少步數間的規律性走法：

為了確定步數是否具有規律和對稱性質，進而推測出 N=12 以上的固定走法和步數總和，我們接著嘗試了上下各 8~12 顆棋的棋面，依照奇偶數列表如下：

1.探討上下排是奇數格的棋盤中，上下排分別是奇數顆的最少步數及走法。

(1)上下排分別是奇數顆的最少步數

兩個□之間的走法有規律性，且上下排依照箭頭所指的棋數也有相關連。

N	走法	和
3	12121 3 12121	17
5	12121 5 1212111 5 1112121 5 12121	47
7	12121 7 13131 6 1214111 7 1114121 6 13131 7 12121	87
9	12121 9 14141 8 13151 8 1216111 9 1116121 8 15131 8 14141 9 12121	143
11	12121 11 15151 10 14161 10 13171 10 1218111 11 1118121 10 17131 10 16141 10 15151 11 12121	215

(2)上下排分別是奇數顆最少步數的規律走法

根據圖表箭頭表示，N 相差 2 時，走法規律為 12121→13131→14141→15151→…、12141→13151→14161→…。最靠近中間的步數規律為 12141→12161→12181→…。

(3)推論 N=13 時的步數與走法

12121 13 16161 12 15171 12 14181 12 13191 12 121 **10** 111 13 111 **10** 121 12 19131 12 18141 12 17151 12 16161 13 12121

共 303 步。

※實際操作，確實跟我們推論的步數規律一樣，總步數也是 303 步。

2.探討上下排是偶數格的棋盤中，上下排分別是偶數顆的最少步數及走法。

(1)上下排分別是偶數顆的最少步數

兩個□之間的走法有規律性，且上下排依照箭頭所指的棋數也有相關連。

N	走法	和
2	121 **2** 121	10
4	12121 4 111 **2** 111 4 12121	30
6	12121 6 12131 5 111 **4** 111 5 13121 6 12121	62
8	12121 8 13141 7 12151 7 111 **6** 111 7 15121 7 14131 8 12121	110
10	12121 10 14151 9 13161 9 12171 9 111 **8** 111 9 17121 9 16131 9 15141 10 12121	174
12	12121 12 15161 11 14171 11 13181 11 12191 11 111 **10** 111 11 19121 11 18131 11 17141 11 16151 12 12121	254

(2)上下排分別是偶數顆最少步數的規律走法

根據圖表上的箭頭表示，N 相差 2 時，走法規律爲

12131→13141→14151→15161→…、12151→13161→14171→…。

最靠近中間的步數規律爲 12131→12151→12171→12191→…。

(3)推論 N=14 時的步數與走法

121211416171131518113141911313110113121**11**1131111**12**11113**1**11121131**10**131131914113181511317161**14**12121

共 350 步。

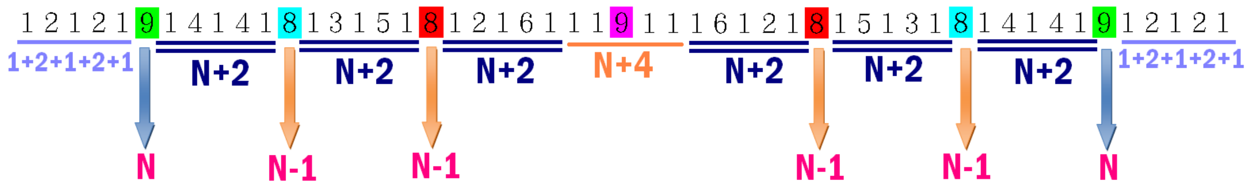
※實際操作，確實跟我們推論的步數規律一樣，總步數也是 350 步。

(七)歸納上下排是奇數顆及偶數顆的通用公式：

1.根據 N=奇數的走法規律，當上下排棋盤各 N 格時，移動的步數如下：

N	走法	總和
7	12121713131612141117111412161313171212 1	87
9	121219141418131518121611191116121815131814141912121	143
11	121211115151101416110131711012181111111181211017131101614110151511112121	215

※以 N=9 爲例說明：



1+2+1+2+1 共有 2 組，N 共有 2 個，N+2 共有 N-3 組，N-1 共有 N-5 組，正中間爲 N+4。

總步數=(1+2+1+2+1)×2+N×2+(N+2)×(N-3)+(N-1)×(N-5)+N+4

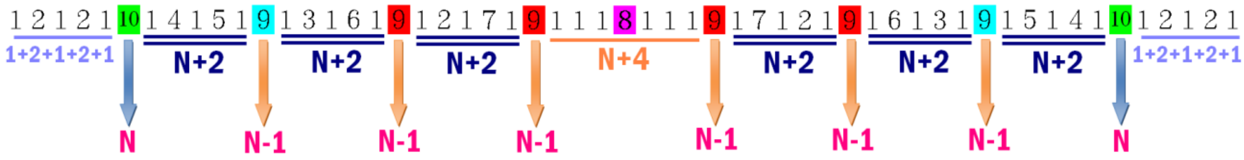
$=14+2N+N^2-N-6+N^2-6N+5+N+4$

$=2N^2-4N+17$

2.根據 N=偶數的走法規律，當上下排棋盤各 N 格時，移動的步數如下：

N	走法	總和
8	1212181314171215171116111715121714131812121	110
10	121211014151913161912171911181119171219161319151411012121	174
12	12121121516111141711113181111219111111101111119121111813111171411116151121 2121	254

※以 N=10 爲例說明：



1+2+1+2+1 共有 2 組，N 共有 2 個，N+2 共有 N-4 組，N-1 共有 N-4 組，正中間爲 N+4。

總步數=$(1+2+1+2+1)\times2+N\times2+(N+2)\times(N-4)+(N-1)\times(N-4)+N+4$

$=14+2N+N^2-2N-8+N^2-5N+4+N+4$

$=2N^2-4N+14$

二、變化 E 型棋盤，找出對稱和非對稱棋盤間最少步數的規律性：

我們繼續思考其他不同的棋盤，在找尋最少步數時是不是也可以有規律？原本的棋盤在阻礙區左邊都固定是一格，且阻礙區左右邊的格子數不對稱；如果阻礙區左右邊的格子數相同，步數間是否也可以有規律呢？爲了解決我們的疑問，先畫出各種對稱及不對稱的棋盤，並嘗試找出下表中的最少步數：

(11,11) (17)步					
(12,12) (30)步					
(13,13) (47)步	(22,22) (43)步	(13,22) (45)步			
(14,14) (62)步	(23,23) (52)步	(14,23) (57)步			
(15,15) (87)步	(24,24) (69)步	(33,33) (65)步	(15,24) (78)步	(15,33) (76)步	(24,33) (71)步
(16,16) (110)步	(25,25) (84)步	(34,34) (80)步	(16,25) (97)步	(16,34) (96)步	(25,34) (84)步

上表先列出上下排各 3~8 格的所有棋盤，另外(12，12)跟(21，21)的棋盤走法一樣，故只記錄(12，12)一種；而(13，22)與(22，13)的棋盤走法也一樣，因此只記錄(13，22)一種。

(一)第一種類型：左右對稱型(對稱棋盤)

在阻礙區左右邊棋子數各 N 顆的棋盤有：(22,22)、(33,33)、(44,44)、(55,55)⋯

1. 分別列出左右邊棋子數各 N 顆的走法及最少步數，如下：

	走法	和
(22,22)	121214111211151112111412121 12 有 1 次	43
(33,33)	12121511131313111711131313111512121 13 有 3 次	65
(44,44)	1212161114141414141119111414141414111612121 14 有 5 次	95
(55,55)	1212171115151515151515111111115151515151515111712121 15 有 7 次	133
(66,66)	121218111616161616161616161111311161616161616161616111812121 16 有 9 次	179
(NN,NN)	12121N+2111N1N⋯ 111 2N+1 111 N1N1⋯11 N+212121 1N 有(2N-3)次	
走法規律：	開頭都是 12121，再來是(N+2)步，接著有 2 個 1，再接(1+N)有(2N-3)次，再接 3 個 1，正中間是(2N+1)，觀察走法可知會依據正中間的(2N+1)呈現對稱。	

2.歸納左右對稱型左右各 N 格的通用公式：

1+2+1+2+1 有 2 組，(N+2)有 2 組，單獨的 1 共有 10 個，(1+N)有 2x(2N-3)次，正中間是(2N+1)，

$$
\begin{aligned}
\text{總步數} &= (1+2+1+2+1)\times 2+(N+2)\times 2+10+(1+N)\times 2\times(2N-3)+(2N+1)\\
&= 14+2N+4+10+(1+N)\times(4N-6)+2N+1\\
&= 14+2N+14+4N-6+4N^2-6N+2N+1\\
&= 4N^2+2N+23
\end{aligned}
$$

3.實際驗證(77,77)並記錄走法，和我們推論的步數規律一樣，總步數也和我們帶入公式算出的答案相同。

(二)第二種類型：下排左右對稱型(非對稱棋盤)

此類型在下排阻礙區的左右邊格子數相同，左右都是各 N 格，而上排阻礙區左邊都是固定爲一格，因爲下排的格子總數爲 2N+1，所以上排總數也是 2N+1，去掉最左邊的一格及阻礙區一格，剩下阻礙區右邊爲(2N-1)格。

1.分別列出下排左右對稱型下排左右邊棋子數各 N 顆的走法及最少步數，如下頁：

	走法
(13,22) 45 步	1212141112111511112121512121
(15,33) 76 步	121215111313131117111313161214171 2121 13 有 3 次
(17,44) 117 步	12121611141414141414111911141418131318121619 12121 14 有 5 次　　有 1 組
(19,55) 170 步	1212171115151515151515111111115151101313110131711012181 1112121 15 有 7 次　　有 2 組
(1⑪,66) 235 步	1212181 1(16 有 9 次)111131116161121313112141811213191 12121⑩11312121 有 3 組
(1⑬,77) 312 步	1212191 1(17 有 11 次)1111511171711413131141519114141⑩114131⑪1 14 121⑫11512121 有 4 組
[1 2N-1,NN]	12121N+211(1N 有 2N-3 次)1112N+1111N1N12N131312N2N+32N2N+3⋯2N+112121 有 N-3 組

因(13,22)及(15,33)的棋子數較少，規律和後面不相似，所以從 N=4 開始探討。

2.歸納下排左右對稱型下排左右邊棋子數各 N 顆的通用公式：

1+2+1+2+1 有 2 組，(N+2)有 1 組，單獨的 1 共有 8 個，(1+N)有(2N-3)次，(2N+1)有 2 組，(N+1)有 2 組，(2N+9)有 1 組，(2N+2N+3)有 N-3 組

總步數=(1+2+1+2+1)×2+(N+2)+8+(1+N)×(2N-3)+ (2N+1)×2+ (N+1)×2+2N+9+(4N+3)×(N-3)

$=14+N+10+2N-3+2N^2-3N+4N+2+2N+2+2N+9+4N^2-12N+3N-9$

$=6N^2-N+25$

(三)第三種類型：左上左下 2 格型(對稱棋盤)

此類型在阻礙區的左邊都固定是 2 格，而上排及下排呈現對稱，每次我們都在上下排最右邊各加一格，這類型的棋盤有(22,22)、(23,23)　、(24,24)、(25,25)⋯。

1.分別列出(22,22)~(29,29)的走法及最少步數，如下：

	走法	和
(22,22)	1212141112111511121114121 21	43
(23,23)	131313121511141115121313131	52
(24,24)	13131313172213131312271 31313131	69
(25,25)	1313131318221414141414122813 1313131	84
(26,26)	13131313192413131312292213131314291 31313131	107
(27,27)	131313131102513131318221612281313131521013 1313131	126
(28,28)	1313131311126131313192217171712291313131621113 1313131	149
(29,29)	1313131311227131313110 2218181818181 22 10 131313172121 31313131	176

2.走法的規律：

(1) (22,22)跟(23,23)規律類似，正中間都是依據 111　111 呈現對稱。

(2) (24,24)跟(25,25)規律類似，開頭跟結尾都是 13131313，再來是 1722、1822，及 131、14141，正中間都是　。

(3) (26,26)~(29,29)的規律類似，開頭跟結尾都是 13131313，再來是 1924、1⑩25、1⑪26、1⑫27，及 1313131。

(4) (27,27)~(29,29)的正中間各是重複 1 次 16、3 次 17 及 5 次 18。

(四)第四種類型：左上 1 格左下 2 格型(非對稱棋盤)

1.分別列出(13,22)、(14,23)、(15,24)~(18,27)的走法及最少步數，如下：

	走法	和
(13,22)	12121411121115111 2121512121	45
(14,23)	131313121511141151 2131612121	57
(15,24)	1313131216221411161313161 2141712121	78
(16,25)	131313121722151515111713141711 2151812121	97
(17,26)	1313131218241414141119211414171215191 3161912121	125
(18,27)	1313131219251414141921181118131518121611⑩1 3171⑩12121	150
(19,28)	131313121102614141411⑩22181119141519131619121711⑪13181⑪12121	182
(1⑩,29)	131313121⑪2714141411⑪219171711181216⑫2213171⑩12181⑫13191⑫12121	211

2.走法的規律：

(1) (14,23)~(1⑩,29)開頭都是 131313121，接著是 5、6、7…11，再接 22、22、24~27，及 14、3 次 15、3 次 14…3 次 14。

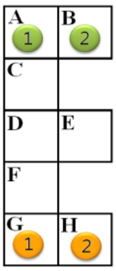
(2) (13,22)~(1⑩,29)正中間都是 111　，結尾都是先 2121、2131…2151、3161~3191，再接 512121、612121…⑫12121。

(3) (17,26)~(1⑩,29)都有 215191、2161⑩1、2171⑪1、2181⑫1。

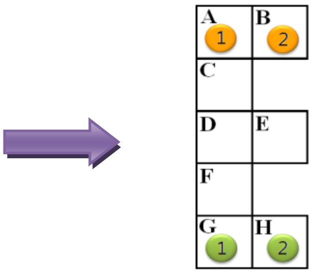
三、E 型棋盤中，找出數字對調的最少步數，並推論至上下排各 N 顆的通用公式：

(一)遊戲規則：

在 E 型棋盤中，上下排放入數量相等且編號的棋子，如【圖六】；根據 E 型棋盤的規則，最後棋子要上下交換排列成【圖七】(數字須按照排列順序，才算完成)。

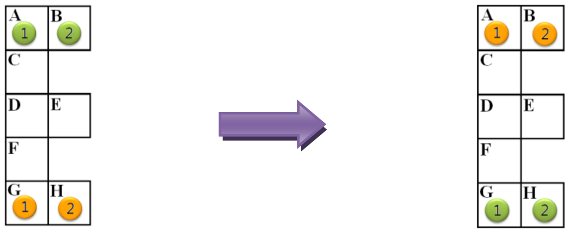


【圖六】



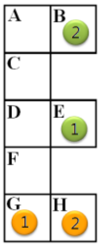
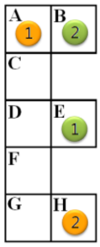
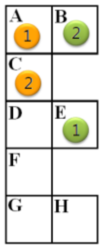
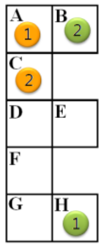
【圖七】

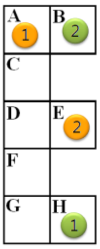
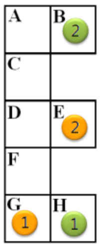
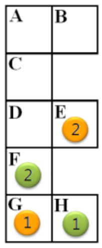
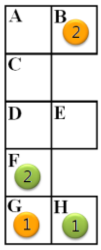
(二)上下各 2 顆的最少步數：

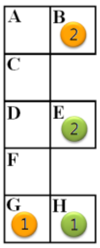
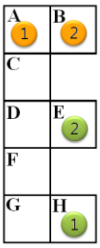
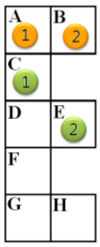
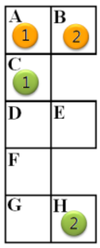
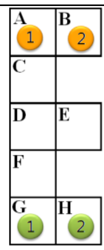


起始棋面　　　　目標棋面

最少步數的移動結果如下：

第 1 步		第 2 步		第 3 步		第 4 步
	➔		➔		➔	
走法：A→E		走法：G→A		走法：H→C		走法：E→H

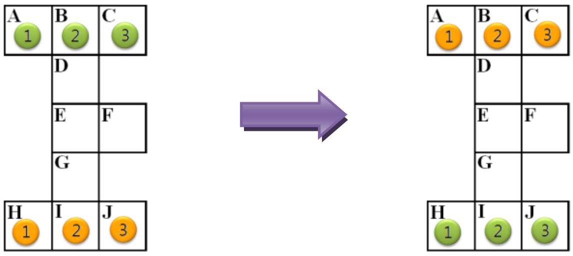
第 5 步		第 6 步		第 7 步		第 8 步
	➔		➔		➔	
走法：C→E		走法：A→G		走法：B→F		走法：E→B

第 9 步		第 10 步		第 11 步		第 12 步		第 13 步
	➔		➔		➔		➔	
走法：F→E		走法：G→A		走法：H→C		走法：E→H		走法：C→G

(三)上下各 3~6 顆的最少步數：

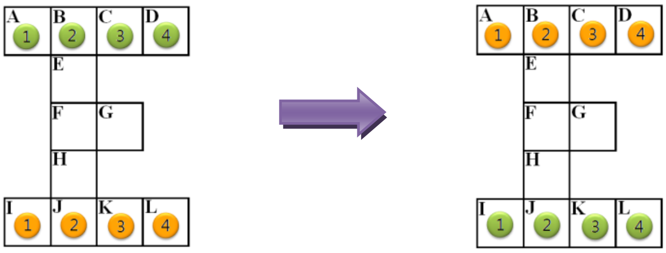
我們發現因為各 2~4 格的棋子數較少，規律不太明顯，都要嘗試到 6 格以上棋子數較多的情況，規律才會更明顯，所以我們嘗試找到 3~6 顆的最少步數，記錄如下頁：

上下各 3 顆的最少步數是 22 步



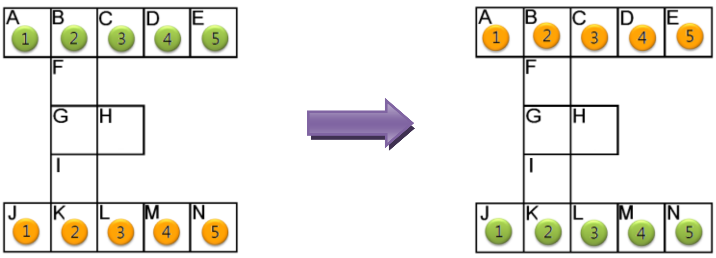
走法依序是：B→F，I→B，J→D，F→J，D→F，B→I，C→G，F→C，G→F，I→B，J→D，F→J，H→F，D→H，B→I，A→G，F→A，G→F，I→B，H→D，F→H，D→I。

上下各 4 顆的最少步數是 43 步

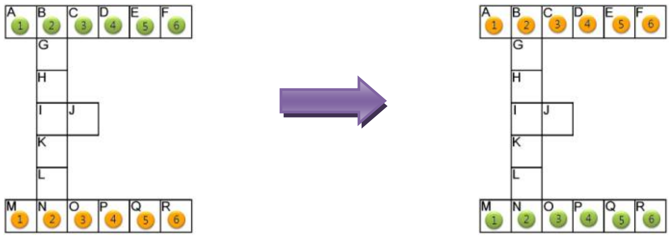


走法依序是：B→G，J→B，I→E，K→F，L→I，F→L，G→K，I→G，E→I，B→J，A→H，G→A，C→G，D→F，A→D，F→A，G→C，A→G，H→A，J→B，I→E，G→I，E→G，B→J，A→H，G→A，H→G，J→B，K→E，L→F，I→L，F→K，G→I，K→G，E→K，B→J，C→H，G→C，H→G，J→B，K→E，G→K，E→J。

上下各 5 顆的最少步數是 69 步



走法依序是：B→H，K→B，J→F，L→G，M→I，N→J，I→N，G→M，H→L，J→H，F→J，B→K，A→I，H→A，C→H，D→G，E→F，A→E，F→A，G→D，H→C，A→H，I→A，K→B，J→F，H→J，L→H，M→G，N→I，J→N，I→J，G→M，H→L，J→H，F→J，B→K，A→I，H→A，C→H，D→G，A→D，G→A，H→C，A→H，I→A，K→B，J→F，H→J，F→H，B→K，A→I，H→A，I→H，K→B，L→F，M→G，J→M，G→L，H→J，L→H，F→L，B→K，C→I，H→C，I→H，K→B，L→F，H→L，F→K。

上下各 6 顆的最少步數是 89 步

走法依序是：B→J，N→B，M→G，O→H，P→I，Q→K，R→M，K→R，I→Q，H→P，J→O，M→J，G→M，B→N，A→L，J→A，C→J，D→K，E→I，F→H，A→F，H→A，I→E，J→D，K→C，A→J，L→A，N→B，M→G，J→M，O→H，P→J，Q→I，R→K，M→R，K→M，I→Q，J→P，H→O，M→J，G→M，B→N，A→L，C→K，J→A，D→J，E→I，A→E，I→A，J→D，A→J，K→A，L→C，N→B，M→G，J→M，G→J，B→N，A→L，J→A，L→J，N→B，O→G，P→H，Q→I，M→Q，I→M，J→P，M→J，H→M，G→O，B→N，C→L，D→K，J→D，K→C，L→J，N→B，M→G，J→M，G→J，B→N，C→L，J→C，L→J，N→B，O→H，J→O，H→N。

※歸納：

1.皆是先將每種棋盤最右邊、離阻礙區最遠的棋先移出到上下排最左邊的格子內，再移到暫停格，完成上下交換就定位。

2.仍會延用顏色交換的方法。

(四)討論有助於發現規律性的記錄方式：

嘗試的過程中，為了觀察走法是否有規律，我們將走法記成移動的「數字編號」，如下表：

1.移動的數字編號：上下各 2~7 顆

N	
2	1121212221121
3	2232323332231221112212
4	22134324121 43444341 2141211122343132233332232
5	2213454325121 5345554351 21523454324121 43444341 2141211122343132233332232
6	221345654326121 634566653461 2162345654325 1214 535553541 21512414223 45444322134312313 2 3332232
7	22134567654327121 73456777653741 21723456765432612146356665364 1 2162345654325 1214 535553541 21512414223 45444322134312313 2 3332232

※發現：上下各 4~6 顆移動的規律較明顯，因為每次都各多 1 顆棋，所以上表作「□」及「＿」記號的每個階段間增加的步數也都有規律，我們推論若採用之前顏色交換的記法增加的步數應會更明顯。將上面的移動過程記錄成下表：

2.綠棋及橘棋每次移動的步數：上下各 2~7 顆

N	
2	121211113
3	1212111121111113
4	15131 1214 21211111 1111111 11113
5	17131 1315 22212131 1214 21211111 1111111 11113
6	19131 1416 22313132 1215 21211111 2111 21121222111113
7	1⑪131 1517 22414132 1316 22313132 1215 21211111 2111 21121222111113

※發現：

(1)從 N=4 開始，開頭的步數呈現有規律的增加：15131→17131→19131→1⑪131→……。

(2)各 2~7 顆結尾的步數都是 11113。

標示「□」和「__」記號的步數似乎有規律，我們繼續嘗試 7 顆以上的移動，並試著找出完整的規律性。

(五)探討並歸納出偶數顆最少步數的規律性走法及通用公式：

當上下排棋盤各 N 格(N=偶數)時，記錄的移動步數如下：

N	綠棋及橘棋每次移動的步數
2	121211113
4	15131 1214 21211111 1111111 11113
6	19131 1416 22313132 1215 21211111 2111 21121222111113
8	1⑬131 1618 22515133 1317 22414133 1216 21211111 3111 3113131111 21121222111113
10	1⑰131 181⑩ 22717134 1419 22616134 1318 22515134 1217 21211111 4111 4114141121 3113131111 21121222111113
12	1㉑131 1⑩1⑫ 22919135 151⑪ 22818135 141⑩ 22717135 1319 22616135 1218 21211111 5111 5115151131 4114141121 3113131111 21121222111113
14	1㉕131 1⑫1⑭ 22⑪1⑪136 161⑬ 22⑩1⑩136 151⑫ 22919136 141⑪ 22818136 131⑩ 22717136 1219 21211111 6111 6116161141 5115151131 4114141121 3113131111 21121222111113

N=6 以上的結尾走法都是「21121222111113」，開頭規律都是「15131、19131、1⑬131…」，N=2 跟 4 的棋子數太少，所以規律跟其他較不類似，以下只討論 N=6 以上(偶數)的規律並推算到 N 顆，依據上表以 N=8 爲例，共分成以下四部分討論，再結合成通用公式。

1⑬131 1618 22515133 1317 22414133 1216 21211111 3111 3113131111 2112122211113

黃色部分 N=6 以上皆相同

1.開頭：

N	步數
6	1 9 1 3 1
8	1 13 1 3 1
10	1 17 1 3 1
12	1 21 1 3 1
14	1 25 1 3 1
N	1 (2N-3) 1 3 1

N 顆時開頭的總和=1+(2N-3)+1+3+1=2N+3

2.標示「$\underline{\underline{\quad}}$」記號：

N	前面步數	後面步數	後面的規律
6	1 4 1 6	1 2 1 5	有 1 組
8	1 6 1 8	1 3 1 7 、1 2 1 6	有 2 組
10	1 8 1 ⑩	1 4 1 9 、1 3 1 8 、1 2 1 7	有 3 組
12	1 ⑩ 1 ⑫	1 5 1⑪ 、1 4 1⑩ 、1 3 1 9 、1 2 1 8	有 4 組
14	1 ⑫ 1 ⑭	1 6 1⑬ 、1 5 1⑫ 、1 4 1⑪ 、1 3 1⑩ 、1 2 1 9	有 5 組
N	1 (N-2) 1 N、……	…… 1 2 1 $(N-\frac{N-4}{2})$	有$\frac{N-4}{2}$組

由上表可以明顯看出剛開始的走法與後面不同，我們分成前面步數和後面步數，N 顆時標示「$\underline{\underline{\quad}}$」記號的總和=前面步數+後面步數

$$\boxed{1+(N-2)+1+N}+\boxed{(1+1\text{ 有 }\frac{N-4}{2}\text{組})+(2+3+4+\cdots+\frac{N-2}{2})+〔N-\frac{N-4}{2}+\cdots+(N-3)+(N-2)+(N-1)〕}$$

$$=2N+(2\times\frac{N-4}{2})+〔(2+\frac{N-2}{2})\times\frac{N-4}{2}\times\frac{1}{2}〕+〔(N-\frac{N-4}{2}+N-1)\times\frac{N-4}{2}\times\frac{1}{2}〕$$

$$=2N+(N-4)+\frac{1}{8}\times〔(N+2)\times(N-4)〕+\frac{1}{8}\times〔(3N+2)\times(N-4)〕$$

$$=3N-4+\frac{1}{8}\times(N^2-2N-8+3N^2-10N-8)$$

$$=3N-4+\frac{1}{8}\times(4N^2-12N-16)$$

$$=\frac{1}{2}N^2+\frac{3}{2}N-6$$

3.標示「$\square$」記號：

N	步數	規律
6	22313132	有 1 組
8	22515133、22414133	有 2 組
10	22717134、22616134、22515134	有 3 組
12	22919135、22818135、22717135、22616135	有 4 組
14	22⑪1⑪136、22⑩1⑩136、22919136、22818136、22717136	有 5 組
N	22(N-3)1(N-3)13($\frac{N}{2}$-1)………… $22\frac{N}{2}1\frac{N}{2}13(\frac{N}{2}-1)$	有$\frac{N-4}{2}$組

N 顆時標示「$\square$」記號的總和

$$=\boxed{〔2+2+1+1+3+(\frac{N}{2}-1)〕有\frac{N-4}{2}組}+\boxed{〔(N-3)+(N-4)+(N-5)+\cdots\cdots+\frac{N}{2}〕有2組}$$

$$=(\frac{N}{2}+8)\times(\frac{N}{2}-2)+〔(N-3)+\frac{N}{2}〕\times(\frac{N}{2}-2)\div2\times2$$

$$=\frac{1}{4}N^2-\frac{N}{2}\times2+\frac{N}{2}\times8-16+(\frac{3}{2}N-3)\times(\frac{N}{2}-2)$$

$$=\frac{1}{4}N^2+3N-16+\frac{3}{4}N^2-3N-\frac{3}{2}N+6$$

$$=N^2-\frac{3}{2}N-10$$

4.標示「　」：

N	前面步數	後面步數	後面的規律
6	2111		有 0 組
8	3111	3113131111	有 1 組
10	4111	4114141121、3113131111	有 2 組
12	5111	5115151131、4114141121、3113131111	有 3 組
14	6111	6116161141、5115151131、4114141121、3113131111	有 4 組
N	($\frac{N}{2}$-1)111	($\frac{N}{2}$-1)11($\frac{N}{2}$-1)1($\frac{N}{2}$-1)11($\frac{N}{2}$-3)1……	有($\frac{N}{2}$-3)組

由上表可以明顯看出剛開始的走法與後面不同，我們分成前面步數和後面步數，N 顆時標示「$\underline{\quad}$」記號的總和=前面步數+後面步數

$$\boxed{(\frac{N}{2}+2)}+\boxed{(1+1+1+1+1+1)\text{有}(\frac{N}{2}-3)\text{組}+〔3+4+5+\cdots+(\frac{N}{2}-1)〕\text{有 3 組}+〔1+2+3+\cdots+(\frac{N}{2}-3)〕\text{有 1 組}}$$

$$=(\frac{N}{2}+2)+6\times(\frac{N}{2}-3)+〔(3+\frac{N}{2}-1)\times(\frac{N}{2}-3)\times\frac{1}{2}〕\times3+〔(1+\frac{N}{2}-3)\times(\frac{N}{2}-3)〕\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{N}{2}+3N-16+〔(\frac{N}{2}+2)\ \times(\frac{N}{2}-3)〕\times\frac{3}{2}+〔(\frac{N}{2}-2)\times(\frac{N}{2}-3)〕\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{7}{2}N-16+(\frac{N}{2}-3)\ \times\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2}N+6+\frac{N}{2}-2)$$

$$=\frac{7}{2}N-16+(\frac{N}{2}-3)\ \times(N+2)$$

$$=\ \frac{1}{2}N^2+\frac{3}{2}N-22$$

5.偶數顆最少步數的通用公式(結合前面 1~4 部分)：

開頭+標示「$\underline{\quad}$」記號+標示「$\boxed{}$」記號+21211111+標示「　」+21121221211113

$$=\boxed{2N+3}+\boxed{\frac{1}{2}N^2+\frac{3}{2}\ \ N-6}+\boxed{N^2-\frac{3}{2}N-10}+10+\boxed{\frac{1}{2}N^2+\frac{3}{2}N-22}+21$$

$$=2\ N^2+\frac{7}{2}N-4$$

(六)探討並歸納出奇數顆最少步數的規律性走法及通用公式：

當上下排棋盤各 N 格(N=奇數)時，記錄的移動步數如下：

N	綠棋及橘棋每次移動的步數
5	17131　1315 22212131 1214 21211111 11111111113
7	1⑪131 1517 22414132 1316 22313132 1215 21211111 2111 21121221211113
9	1⑮131 1719 22616133 1418 22515133 1317 22414133 1216 21211111　3111　3113131111　21121221211113
11	1⑲131 191⑪ 22818134 151⑩ 22717134 1419 22616134 1318 22515134 1217 21211111 4111 4114141121　3113131111　21121221211113
13	1㉓131 1⑪1⑬ 22⑩1⑩135 161⑫ 22919135 151⑪ 22818135 141⑩ 22717136 1319 22616135 1218 21211111　5111　5115151131　4114141121　3113131111 21121221211113
15	1㉗131 1⑬1⑮ 22⑫1⑫136 171⑭ 22⑪1⑪136 161⑬ 22⑩1⑩136 151⑫ 22919136 141⑪ 22818136 131⑩ 22717136 1219 21211111　6111　611616 1141　511515　1131 411414　1121 311313 1111　21121221211113

作上記號後，明顯看出規律跟偶數類似，但 N=3 跟 5 顆的棋子數較少，規律跟其他較不類似，以下只討論 N=7 以上(奇數)的規律並推論到 N 顆，一樣分成四部分討論，再結合成通用公式。

1.開頭：

N	步數
7	1 11 1 3 1
9	1 15 1 3 1
11	1 19 1 3 1
13	1 23 31 3 1
15	1 27 1 3 1
N	1 (2N-3) 1 3 1

N 顆時開頭的總和=1+(2N-3)+1+3+1=2N+3

2.標示「$\underline{\underline{\ \ }}$」記號：

N	前面步數	後面步數	後面的規律
7	1 5 1 7	1 6 1 6 、1 2 1 5	有 2 組
9	1 7 1 9	1 4 1 8 、1 3 1 7 、1 2 1 6	有 3 組
11	1 9 1⑪	1 5 1⑩ 、1 4 1 9 、1 3 1 8 、1 2 1 7	有 4 組
13	1⑪1⑬	1 6 1⑫ 、1 5 1⑪ 、1 4 1⑩ 、1 3 1 9 、1 2 1 8	有 5 組
15	1⑬1⑮	1 7 1⑭ 、1 6 1⑬、1 5 1⑫、1 4 1⑪、1 3 1⑩、1 2 1 9	有 6 組
N	1 (N-2) 1 N、⋯	1 2 1 (N-1) ⋯⋯ 1 2 1 (N-$\frac{N-3}{2}$)	有 $\frac{N-3}{2}$ 組

由上表可以明顯看出剛開始的走法與後面不同，我們分成前面步數和後面步數，N 顆時標示「$\underline{\underline{\ \ }}$」記號的總和=前面步數+後面步數

$$\boxed{1+(N-2)+1+N}+\boxed{(1+1\text{ 有 }\frac{N-3}{2}\text{ 組})+(2+3+4+\cdots+\frac{N-1}{2})+〔(N-\frac{N-3}{2})+\cdots+(N-3)+(N-2)+(N-1)〕}$$

$$=2N+(2\times\frac{N-3}{2})+〔(2+\frac{N-1}{2})\times\frac{N-3}{2}\times\frac{1}{2}〕+〔(N-\frac{N-3}{2}+N-1)\times\frac{N-3}{2}\times\frac{1}{2}〕$$

$$=2N+(N-3)+\frac{1}{8}\times〔(N+3)\times(N-3)〕+\frac{1}{8}\times〔(3N+1)\times(N-3)〕$$

$$=3N-3+\frac{1}{8}\times(N^2-9+3N^2-8N-3)$$

$$=3N-3+\frac{1}{8}\times(4N^2-8N-12)$$

$$=\frac{1}{2}N^2+2N-\frac{9}{2}$$

3.標示「□」記號：

N	步數	規律
7	22414132　、22313132	有 2 組
9	22616133　、22515133　、　22414133	有 3 組
11	22818134　、22717134　、22616134　、　22515134	有 4 組
13	22⑩1⑩135　、　22919135　、22818135　、22717136　、22616135	有 5 組
15	22⑫1⑫136、22⑪1⑪136、22⑩1⑩136、22919136、22818136、22717136	有 6 組
N	$22(N-3)1(N-3)13(\frac{N-3}{2})\cdots\cdots\cdots\cdots$　$22(\frac{N-1}{2})1(\frac{N-1}{2})13(\frac{N-3}{2})$	有 $\frac{N-4}{2}$ 組

N 顆時標示「□」記號的總和

$$=\boxed{〔2+2+1+1+3+(\frac{N-3}{2})〕\text{有}(\frac{N+1}{2}-2)\text{組}}+\boxed{〔(N-3)+(N-4)+(N-5)+\cdots\cdots+\frac{N-1}{2}〕\text{有 2 組}}$$

$$=(\frac{N}{2}+\frac{15}{2})\times(\frac{N}{2}-\frac{3}{2})+〔(N-3)+\frac{N-1}{2}〕\times(\frac{N+1}{2}-2)\div2\times2$$

$$=\frac{1}{4}\times(N^2+12N-45)+\frac{1}{4}\times(3N^2-16N+21)$$

$$=N^2-N-6$$

4.標示「　」：

N	前面步數	後面步數	後面的規律
7	2111		有 0 組
9	3111	3113131111	有 1 組
11	4111	4114141121、3113131111	有 2 組
13	5111	5115151131、4114141121、3113131111	有 3 組
15	6111	6116161141、5115151131、4114141121、3113131111	有 4 組
N	$(\frac{N-1}{2}-1)111$	$(\frac{N-1}{2}-1)11(\frac{N-1}{2}-1)1(\frac{N-1}{2}-1)11(\frac{N-1}{2}-3)1\cdots\cdots$	有$(\frac{N-1}{2}-3)$組

N 顆時標示「__」記號的總和=前面步數+後面步數

$$\boxed{(\frac{N-1}{2}+2)}+\boxed{(1+1+1+1+1+1)\text{有}(\frac{N-1}{2}-3)\text{組}+〔3+4+5+\cdots(\frac{N-1}{2}-1)〕\text{有 3 組}}+$$

$$\boxed{〔1+2+3+\cdots(\frac{N-1}{2}-3)〕\text{有 1 組}}$$

$$=\frac{N+3}{2}+6\times\frac{N-7}{2}+〔(3+\frac{N-3}{2})\times\frac{N-7}{2}\times\frac{1}{2}〕\times3+〔(1+\frac{N-7}{2})\times\frac{N-7}{2}〕\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{2}N-23$$

5.奇數顆最少步數的通用公式(結合前面 1~4 部分)：

開頭+標示「__」記號+標示「□」記號+21211111+標示「　」+21121221211113

$$=\boxed{2N+3}+\boxed{\frac{1}{2}N^2+2N-\frac{9}{2}}+\boxed{N^2-N-6}+10+\boxed{\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{2}N-23}+21$$

$$=2N^2+\frac{7}{2}N+\frac{1}{2}$$

陸、討論

一、此研究我們固定「遊戲規則」，在「棋子數」、「棋盤形狀」、「交換的條件(顏色或數字)」這三個變因中，我們每次都改變一個變因進行討論，分成：

1.固定一種棋盤形狀，改變棋子數。例如：E 型棋盤中，從各 2 格、各 3 格…到很多格。

2.固定棋子數，改變棋盤形狀。例如：變化 E 型棋盤，棋子固定上下各 4 顆，去嘗試(13,13)、(22,22)、(13,22)。

3.固定交換的條件，改變棋子數。

例如：

(1)要交換上下棋子的顏色，棋子數從 1 格到很多格 → E 型棋盤中 / → 在變化的對稱及非對稱棋盤

(2)要交換上下棋子的數字，棋子數從 1 格到很多格 → E 型棋盤中 / → 在變化的對稱及非對稱棋盤

(因變化棋盤顏色交換的規律無法沿用到多顆，所以數字交換我們只有嘗試在 E 型棋盤中去嘗試走法到多顆)

二、找到的是最少步數嗎？如何證明呢？

一開始我們透過實作先不限定任何移法，去盡量嘗試出各種不同的移法，並跟同學互相比較步數，只要有人比自己更少，就會再繼續挑戰，這樣一直反覆驗證後，每一種棋盤自己都要嘗試數十次。結合六人大量的記錄，確定最少步數後，再進一步討論、分析走法，歸納出規律後，繼續假設及預測下一種情況的走法，確認符合規律後，寫成可延用到 N 顆的通用公式，並將最少步數帶入公式，確保公式正確後，再往下嘗試 2 種情況，驗證是否符合通用公式。

柒、結論

一、將上下兩排的 E 型棋盤，棋子交換最少步數的走法記錄下來，可以發現：

(一) E 型棋盤中，上下顏色對調會有對稱性，這個規律可以幫助我們延用到更多格的棋盤中。

(二)變化 E 型棋盤中，對稱棋盤的最少步數一樣有對稱性，所以歸納共同的規律，一樣可以延用到多格棋盤中。

(三)變化 E 型棋盤中，記錄非對稱棋盤的走法後，可發現因為上下排棋盤不同，走法的順序也會不同，無法寫成對稱性，但仍會有某些類似規律。

(四)E 型棋盤中，上下數字對調的走法因要考慮到指定的位置就定位，所以前後的走法不會一致，雖無對稱性，但棋子數增加時，會有相同的規律。

二、E 型棋盤中，上下排棋子數量相同、顏色對調最少步數的通用公式：

(一)上下排是奇數顆的最少步數=$2N^2-4N+17$

(二)上下排是偶數顆的最少步數=$2N^2-4N+14$

三、E 型棋盤中，上下排棋子數量相同、數字對調最少步數的通用公式：

(一)上下排是奇數顆的最少步數=$2N^2+\frac{7}{2}N+\frac{1}{2}$

(二)上下排是偶數顆的最少步數=$2N^2+\frac{7}{2}N-4$

捌、參考資料

一、國立台灣科學教育館/全國中小學科學展覽會 http://www.ntsec.gov.tw/m1.aspx?sNo=0000263

二、趣味數學棋藝篇 /明日世紀出版

【評語】080411

1. 討論的主題相當有趣，問題的討論也相當地有條理，解決問題的方法也相當地不錯。
2. 問題的延伸性討論有加強的空間，定可加強主題的深度與廣度。