中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080409

因數小子

學校名稱：桃園縣八德市大安國民小學

作者：	指導老師：
小六 吳祐震	程柏璋
小六 潘奕丞	陳建樺
小六 王鳳昕	
小五 黃柏嘉	

關鍵詞：因數、質數、牌分差

因數小子

摘要

為了從遊戲中獲得勝利，進行研究的過程中，我們發現：挑戰者的贏牌策略為每張數字牌都比莊家大，除了一定得不到的質數牌外，設法拿到最多張數的數字牌。挑戰者的估計最大張數為（**總牌數-位於數字範圍內一半以上的質數牌張數+1**）÷2。但**實際最大張數為估計最大張數-（拿「雙因牌」次數+「合數牌」張數）×0.5**。挑戰者抽牌時應先抽最大質數牌，再抽最大質數平方牌，依序抽因數牌張數較少且與前一張有公因數的牌，以此類推，若最後有剩餘牌，觀察其中是否有合數牌再做試驗。

挑戰者的理想最高分為（最大牌分+1）×總張數÷2－〔(1+實際張數）×實際張數÷2+剩餘牌分+牌分差〕。

壹、研究動機

在五年級時，我們學到因數與倍數單元，找因數時，經常會缺少某些因數。對於因數與倍數的關係不甚了解。後來老師利用撲克牌進行找因數的活動，我們覺得十分有趣，尤其是「搶數大賽」活動。此活動除了能幫助我們思考因倍數及質數概念外，同時也能達到與紙筆練習相同效果的熟練度，更重要的是，在遊戲→解題→溝通討論→修正→歸納中，老師適時地引導我們，常能提升我們的思考層次，使我們對於此單元更有興趣。除此，為了能夠從遊戲中獲得勝利，讓我們戰鬥力十足：如何找出最高分的撲克牌組合？還是有更具效率的步驟？於是我們做了以下的研究：

貳、研究目的

一、探討挑戰者的贏牌策略。
二、分析挑戰者得到最大張數的模式。
三、分析挑戰者得到最高分的模式。
四、研究最大張數的算法。
五、研究最高分的算法。

參、研究器材

撲克牌、1-54數字牌、相機、電腦、紙筆若干。

肆、遊戲規則及說明

一、名詞解釋

1. 數字牌：為撲克牌的延伸，數字範圍為1到54。我們定義數字牌為（1）挑戰者和莊家還沒抽取的牌；（2）挑戰者所抽取的牌。
2. 因數牌：為挑戰者抽取某張數字牌後，莊家所得到的牌。

3. 雙因牌：為挑戰者抽取某張數字牌後，莊家同時得到的兩張因數牌。
4. 剩餘牌：根據規則，挑戰者想抽取的某張數字牌，莊家卻不能得到任何一張因數牌時，則這張數字牌歸莊家所有且稱之為「剩餘牌」。
5. 質數牌：在所有的數字牌中，其數字的因數僅 1 和自己本身的牌。
6. 合數牌：在所有的數字牌中，其數字的因數除了 1 和自己本身之外，還有其他的因數牌。
7. 互質：兩個以上的數字牌，其公因數只有 1，我們稱為「互質」。
8. 估計最大張數：扣除挑戰者一定拿不到的質數牌後，根據公式（**總牌數−位於數字範圍內一半以上的質數牌張數+1）÷2**，挑戰者所能得到最大張數，我們稱為「估計最大張數」。根據公式，有時「估計最大張數」並非整數。
9. 實際最大張數：為挑戰者實際上能得到的最大張數。有時會因莊家獲得「雙因牌」或是剩餘牌中有「合數牌」而與估計最大張數有所差距。

二、 規則說明

1. 撲克牌

   遊戲說明如下：

   (1) 將撲克牌中的 A 當作 1、J 當作 11、Q 當作 12、K 當作 13。
   (2) 遊戲者分為挑戰者及莊家兩方。
   (3) 挑戰者拿走一張撲克牌後，必須將此張撲克牌的因數牌全部給莊家。
   (4) 若此張撲克牌已經沒有任何因數牌可以給莊家，則挑戰者不能拿走這張撲克牌，而且這張撲克牌歸莊家所有。
   (5) 最後結算雙方牌組的數字和，最多者為優勝。

2. 數字牌

   遊戲規則是撲克牌的延伸，遊戲說明如下：

   (1) 數字牌共有 54 張。
   (2) 遊戲者分為挑戰者及莊家兩方。
   (3) 挑戰者拿走一張數字牌後，必須將此張數字牌的因數牌全部給莊家。
   (4) 若此張數字牌已經沒有任何因數牌可以給莊家，則挑戰者不能拿走這張數字牌，而且這張數字牌歸莊家所有。
   (5) 最後結算雙方牌組的數字和，最多者為優勝。

伍、 研究過程及方法

我們思考著挑戰者如何拿才能獲得較高的分數而給出最少的點數，如何找出最高分的撲克牌組合呢?有沒有更有效率的步驟呢?

主軸一：撲克牌遊戲

我們覺得好像有規則可循，於是我們做了以下的研究：

研究（一）：挑戰者贏牌策略初探

挑戰者想贏莊家，可能的策略如下：1. 不讓莊家拿到任何牌；2. 每張牌都拿得比莊家大。

討論 1：挑戰者能拿走全部的撲克牌嗎？

根據規則，挑戰者抽走一張撲克牌後，其因數牌歸莊家所有，若無因數牌可歸莊家，則該撲克牌應歸莊家。因此，不管挑戰者抽哪張牌，莊家都可拿走其因數牌；反之，若莊家拿不到其因數牌，則該撲克牌應歸莊家所有。故挑戰者不可能拿走全部的撲克牌；除了僅有一張撲克牌 A 的情形外，莊家也不可能得到所有的撲克牌。

結論：挑戰者和莊家雙方都不可能得到所有的撲克牌。

討論 2：挑戰者從最大的數字牌先抽，是否必贏莊家？

若我們從數字最大的牌開始先抽，過程記錄如表 1：

由右表知，從數字最大的牌開始抽，挑戰者不見得有利。挑戰者有許多數字牌因已無其因數牌而無法得到。

結論：挑戰者從數字最大的牌開始先抽，不見得有利。

表 1　大數先抽牌組記錄

對象	挑戰者	莊家
牌組	K Q 10 8	A 6、3、2 5 4 J、9、7
總分	43	48

討論 3：挑戰者從最小的數字牌先抽，是否就一定能贏莊家？

若我們從數字最小的牌開始先抽，過程記錄如表 2：

由右表知，從數字最小的開始抽，挑戰者不見得有利。與**討論 2** 相似，挑戰者有許多數字牌因已無其因數牌而得不到。故挑戰者在抽牌之前須考慮因數牌是否存在。

結論：挑戰者從數字最小的牌開始先抽，不見得有利。

表 2　小數先抽牌組記錄

對象	挑戰者	莊家
牌組	2 6 10 Q	A 3 5 4 7、8、9、J、K
總分	30	61

研究（二）：因數牌的分析

我們先以挑戰者抽第一張的情況做分析，如表 3：

表 3　挑戰者抽牌分析

挑戰者抽的牌	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
莊家得到的牌	A	A	A、2	A	A、2、3	A	A、2、4	A、3	A、2、5	A	A、2、3、4、6	A
莊家獲得的分數	1	1	3	1	6	1	7	4	8	1	16	1
分數比較	2＞1	3＞1	4＞3	5＞1	6＝6	7＞1	8＞7	9＞4	10＞8	11＞1	12＜16	13＞1

由上表知，先抽撲克牌 6 或 Q 的話，因莊家所得到的因數牌多，挑戰者不見得有利。我們又列出撲克牌的因數個數分析表來觀察，如表 4：

表 4　撲克牌因數個數分析表

撲克牌	因數	因數個數
A	1	1
2	1、2	2
3	1、3	2
4	1、2、4	3
5	1、5	2
6	1、2、3、6	4
7	1、7	2
8	1、2、4、8	4
9	1、3、9	3
10	1、2、5、10	4
J	1、11	2
Q	1、2、3、4、6、12	6
K	1、13	2

由表 3 和表 4 知，挑戰者抽的第一張牌不同，挑戰者和莊家雙方得分也會各有差異，那麼挑戰者後面抽的牌不同，是否也會有不同的結果？此外，因數個數的多寡與數字大小沒有直接的關係，但撲克牌因數個數對雙方得分會有影響嗎？

討論 1：抽牌順序不同是否會影響得分？

以表 3 中的 2 和 6 兩張撲克牌為例：挑戰者先抽撲克牌 2，莊家得到撲克牌 A，之後，挑戰者再抽撲克牌 6，莊家可得撲克牌 3。若挑戰者先抽撲克牌 6，莊家得到撲克牌 A、2、3。兩相比較，前者挑戰者共得 8 分，莊家得 4 分，挑戰者勝；後者挑戰者只得 6 分，莊家得 6 分，雙方平手。

結論：抽牌順序不同確實會影響得分。

由上述討論，我們猜想：挑戰者是否應先抽因數牌少的撲克牌？

討論 2：挑戰者抽牌時是否應以因數牌少的為優先？

由表 4 知，因數牌最少的是 A，但 A 的因數牌為自己本身，因此挑戰者無法抽撲克牌 A。而因數牌有兩張的是：撲克牌 2、3、5、7、J、K，這些牌所代表的數字正是質數，因此我們稱這些牌為質數牌。只要挑戰者抽走其中一張後，其他的質數牌就歸莊家所有，因此挑戰者最多只能得到一張質數牌。而因數牌有三張的為：撲克牌 4 和 9，這些牌所代表的數字正是平方數。

因挑戰者最多只能得到一張質數牌，故考慮挑戰者先抽質數牌 2、3、5、7、J、K，再抽有三張因數牌的撲克牌 4 和 9 的情形，如表 5：

表 5 挑戰者先抽質數牌再抽有三張因數牌的排列記錄表

對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	2 9	A 3 4、 5、 7、 J、 K	3 4	A 2 5、 7、 9、 J、 K	5 4 9	A 2 3 7、 J、 K	7 4 9	A 2 3 5、 J、 K	J 4 9	A 2 3 5、 7、 K	K 4 9	A 2 3 5、 7、 J
總分	11	44	7	48	18	37	20	35	24	31	26	29

由上表知，挑戰者先抽質數牌，再抽有三張因數牌的撲克牌之情形中，以先抽最大質數牌最佳，若扣除莊家所獲得的剩餘牌（5、7、11），比對每一輪的分數，都是挑戰者佔上風。因此，只要讓上述的剩餘牌都變成因數牌或是剩餘牌減到最低，挑戰者就有機會贏過莊家。

以上表之最佳情況為基礎，考慮因數牌有四張的情況，也就是再加入撲克牌 6、8、10 的情況記錄於下表：

表 6 加入撲克牌 6、8、10 的排列記錄表

對象	挑戰者	莊家
牌組	K 4 9 10	A 2 3 5 6、7、8、J
總分	36	43

令我們意外的是：挑戰者只拿到撲克牌 10，而撲克牌 6 和 8 都成為剩餘牌。我們於上表中再加入有六張因數牌的撲克牌 Q，如表 7：

表 7 加入撲克牌 Q 的排列記錄表

對象	挑戰者	莊家
牌組	K 4 9 10 Q	A 2 3 5 6 7、8、11
總分	48	43

由上表知，最終結果是挑戰者獲勝。正當我們感到高興時，老師提醒我們注意撲克牌

8，因為它不是質數牌，能不能讓挑戰者也拿到撲克牌 8？經過試驗，我們發現可拿撲克牌 8 換掉原先在挑戰者手上的撲克牌 4，如表 8：

表 8　修正撲克牌排列記錄表

對象	挑戰者	莊家
牌組	K $\boxed{8}$ 9 10 Q	A 2、$\boxed{4}$ 3 5 6 7、J
總分	52	39

由上表知，挑戰者的分數不但贏過莊家而且還更高分。我們對這結果還不滿意，因為當挑戰者抽撲克牌 8 之後，莊家一次就可以獲得因數牌 2 和 4，我們試著找出比這個更棒的結果，但是沒有成功。無論因數牌 2 和 4 如何與挑戰者手上其他的牌試驗，都必定有其中一輪是莊家一次拿到兩張因數牌。

結論：挑戰者抽牌時應以因數牌少的為優先：先抽最大質數牌，再依序抽因數牌張數較少的牌，最後若有剩餘牌，觀察其中是否有合數牌再做試驗。

主軸二：數字牌研究

藉由玩撲克牌的遊戲，我們找到了最高分的牌組，也發現了一些規律與挑戰者抽牌的策略，但是否能推廣到其他的數字範圍嗎？於是我們有了以下的研究。

研究（一）：數字牌最大張數及抽牌策略探討

透過擴大數字範圍的討論，希望能找尋挑戰者得到最大張數之規律及最佳抽牌策略。

討論 1：挑戰者最多只能拿走總牌數的一半嗎？

由前述知，挑戰者能得到最大牌數的情況是發生在：(1) 總牌數是偶數的每一輪中，挑戰者每抽一張數字牌，莊家也只得一張因數牌，且最後莊家得不到任何剩餘牌（已無因數牌給莊家之數字牌），則挑戰者能得到的最大牌數為總牌數÷2；(2) 總牌數是奇數的每一輪中，挑戰者都能得到一張牌，莊家也只能得到一張因數牌，最後莊家只能得到一張剩餘牌，則挑戰者能得到的最大牌數為（總牌數-1）÷2。

結論：挑戰者最多只能拿走總牌數一半的數字牌。

討論 2：數字牌的先後順序會影響挑戰者所得的牌數嗎？

許多數字牌都有共同的因數牌，如數字牌 4 和 6 都有因數牌 2，挑戰者先抽走數字牌 6，則莊家可得因數牌 1、2、3，但挑戰者就無法得到數字牌 4 了。若改變抽牌的順序，挑戰者先抽數字牌 4，莊家可得因數牌 1、2，第二輪挑戰者就可接著抽取數字牌 6，而莊家也得到因數牌 3。此結果與主軸一-**研究（二）-討論 1** 之結論相符

結論：抽牌的順序不同會直接影響挑戰者得到的牌數。

我們猜想：能否從數字牌的因數去考慮拿牌的順序，讓挑戰者得到較多張數的牌？

討論 3：先抽因數個數少的數字牌是有利的贏牌策略嗎？

由上述討論知，抽牌順序不同會直接影響結果。我們推測抽牌順序會受因數個數影響嗎？我們先從【1~6】中列出數字牌的因數關係來觀察，如表 9：

表 9　數字牌組與其因數關係表

因數 / 數字牌	1	2	3	4	5	6	因數個數
1	※						1
2	※	※					2
3	※		※				2
4	※	※		※			3
5	※				※		2
6	※	※	※			※	4

由上表知，1 的因數個數最少；是自己本身，挑戰者一定無法拿到數字牌 1。因此，挑戰者先抽質數牌：2、3、5，此三張質數牌的公因數是 1，無論挑戰者先抽哪一張，其餘兩張質數牌的因數牌 1 就沒了。此外，挑戰者若先抽合數牌，如數字牌 4，則莊家可得因數牌 1、2 的分數，但就得不到最大質數牌的分數了。據此，挑戰者最多只能得到一張質數牌。

我們統計【1~6】的各種情況及分數統計如下表：

表 10　數字範圍【1~6】之排列情形記錄表

組別	第一組		第二組		第三組		第四組		第五組	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	2 6	1 3 4、5	3 6	1 2 4、5	4 6	1、2 3 5	5 4 6	1 2 3	6	1、2、3 4、5
總分	8	13	9	12	10	11	15	6	6	15

由上表知，在範圍【1~6】中，第四組是挑戰者先抽最大質數牌 5 的情形，不但是挑戰者最高分，也是挑戰者勝莊家的唯一牌組。的確符合先挑最大質數牌 5 才是有利策略外，同時也符合主軸一-**研究（二）-討論 2** 的最佳狀態。

結論：挑戰者最多只能得到一個質數牌，因此挑戰者先抽最大的質數牌是有力的策略。

正當我們志得意滿之時，老師提出：在【1~8】和【1~10】中，挑戰者所能拿到最大

張數分別為 3 個和 4 個，不是我們原先所想的 4 個（8÷2＝4）和 5 個（10÷2＝5）。於是我們猜測是否和質數有關？

討論 4：考慮質數的條件後，挑戰者能拿到最大張數為何？

我們先從數字較小的範圍觀察，以下為挑戰者最大張數的牌組記錄：

表 11　數字範圍【1~1】~【1~12】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~1		1~2		1~3		1~4		1~5		1~6	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	×	1	2	1	3	1 2	3 4	1 2	5 4	1 2 3	5 4 6	1 2 3
總分	0	1	2	1	3	3	7	3	9	6	15	6
數字範圍	1~7		1~8		1~9		1~10		1~11		1~12	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	7 4 6	1 2 3 5	7 6 8	1 2、3 4 5	7 9 6 8	1 3 2 4 5	7 9 6 10 8	1 3 2 5 4	11 9 6 10 8	1 3 2 5 4 7	11 9 10 8 12	1 3 2、5 4 6 7
總分	17	11	21	15	30	15	40	15	44	22	50	28

我們觀察上表中各範圍最大張數及最高分之牌組中質數牌的分布情形，發現數字範圍一半以下的質數牌，都成為因數牌，而數字範圍一半以上的質數牌，挑戰者僅能得一張，其餘的都成為剩餘牌，因為數字範圍一半以上的質數牌，除了數字牌 1 以外，沒有其他的因數牌。

結論：在最大張數及最高分的情形下，數字範圍內一半以上的質數牌，除了最大質數牌外，其餘的必定成為剩餘牌。

於是我們做了以下的思考：

討論 5-1：每個位在數字範圍內一半以下的質數牌都會被莊家拿走嗎？

因挑戰者最多只能得到一張質數牌，因此剩下的質數牌都會被莊家拿走，同時也包含數字範圍一半以下的質數牌。

結論：每個位在數字範圍內一半以下的質數都歸莊家所有。

討論 5-2：根據上述討論修正挑戰者得最大張數的範圍為何？

綜合上述結論：（1）挑戰者最多只能拿走總牌數一半的數字牌；（2）挑戰者最多只

能得到一個質數牌；(3) 挑戰者一定拿不到數字範圍內一半以上的質數牌。於是我們修正主軸二-**研究（二）**-**討論** 1 及**討論** 5-1 的結論：挑戰者能得到最大張數之牌組的**估計最大牌數為（總牌數-位於數字範圍內一半以上的質數牌牌數+1）÷2，且牌組大多是由數字範圍上限除了最大質數外，先跳掉質數牌往下數的情形**。

我們以此為基礎，想找出某數字範圍內，挑戰者所能得到最大張數之牌組情形。我們先從數字範圍【1~13】~【1~54】觀察是否也適用？以下為挑戰者最大張數的牌組記錄及最大張數記錄表：

表 12-1　數字範圍【1~13】~【1~18】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~13		1~14		1~15		1~16		1~17		1~18	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	13 10 9 8 12	1 2、5 3 4 6 7 11	13 14 9 10 8 12	1 2、7 3 5 4 6 11	13 9 15 10 8 12 14	1 3 5 2 4 6 7 11	13 9 15 10 14 12 16	1 3 5 2 7 4、6 8 11	17 9 15 10 14 16 12	1 3 5 2 7 4、8 6 11、13	17 9 15 10 14 18 12 16	1 3 5 2 7 6 4 8 11、13
總分	52	39	66	39	81	39	89	47	93	60	111	60

表 12-2　數字範圍【1~19】~【1~24】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~19		1~20		1~21		1~22		1~23		1~24	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	19 9 15 10 14 18 12 16	1 3 5 2 7 6 4 8 11、13、17	19 14 10 15 20 12 16 18	1 2、7 5 3 4 6 8 9 11、13、17	19 9 15 21 14 16 18 12 20	1 3 5 7 2 8 6 4 10 11、13、17	19 9 15 21 14 18 12 16 20 22	1 3 5 7 2 6 4 8 10 11 13、17	23 9 15 21 14 22 20 18 12 16	1 3 5 7 2 11 10 6 4 8 13、17、19	23 9 15 21 14 22 20 16 18 24	1 3 5 7 2 11 4、10 8 6 12 13、17、19
總分	113	77	124	86	144	87	166	87	170	106	182	118

表 12-3　數字範圍【1~25】~【1~30】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~25		1~26		1~27		1~28		1~29		1~30	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	23 25 15 21 14 22 16 20 24 18	1 5 3 7 2 11 4、8 10 6 9 12、 13、 17、 19	23 25 15 21 14 22 26 16 24 18 20	1 5 3 7 2 11 13 4、8 6 9 10 12、 17、 19	23 25 15 21 14 22 26 27 18 16 20 24	1 5 3 7 2 11 13 9 6 4、8 10 12 17、 19	23 25 15 21 14 22 26 27 28 18 16 20 24	1 5 3 7 2 11 13 9 4 6 8 10 12 17、 19	29 25 15 21 14 26 27 28 16 18 20 22 24	1 5 3 7 2 13 9 4 8 6 10 11 12 17、 19、 23	29 25 15 21 27 18 22 26 30 20 28 16 24	1 5 3 7 9 2、6 11 13 10 4 14 8 12 17、 19、 23
總分	198	127	224	127	251	127	279	127	285	150	301	164

表 12-4　數字範圍【1~31】~【1~36】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~31		1~32		1~33		1~34		1~35		1~36	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	31	1	31	1	31	1	31	1	31	1	31	1
	25	5	25	5	25	5	25	5	25	5	25	5
	15	3	15	3	15	3	15	3	35	7	35	7
	21	7	21	7	33	11	33	11	21	3	21	3
	27	9	27	9	22	2	22	2	33	11	27	9
	18	2、6	18	2、6	27	9	34	17	22	2	33	11
	22	11	22	11	26	13	26	13	34	17	22	2
	26	13	26	13	21	7	21	7	27	9	34	17
	30	10	30	10	28	14	27	9	26	13	28	4、14
	20	4	20	4	18	6	18	6	18	6	20	10
	28	14	28	14	30	10	30	10	12	4	18	6
	16	8	24	8、12	20	4	20	4	24	8	36	12
	24	12	32	16	32	8、16	28	14	28	14	24	8
		17、		17、	24	12	24	8、12	20	10	26	13
		19、		19、		17、	32	16	30	15	32	16
		23、		23、		19、		19、	32	16	30	15
		29		29		23、		23、		19、		19、
						29		29		23、		23、
										29		29
總分	303	193	319	209	352	209	386	209	418	212	442	224

表 12-5　數字範圍【1~37】~【1~42】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~37		1~38		1~39		1~40		1~41		1~42	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	37 25 35 21 27 33 22 34 28 20 18 36 24 26 32 30	1 5 7 3 9 11 2 17 4、14 10 6 12 8 13 16 15 19、 23、 29、 31	37 25 35 21 33 22 26 18 27 36 34 38 24 20 30 32 28	1 5 7 3 11 2 13 6 9 4 17 19 8、12 10 15 16 14、 31、 23、 29	37 25 35 21 27 33 39 26 34 38 18 20 30 28 36 24 32	1 5 7 3 9 11 13 2 17 19 6 4、10 15 14 12 8 16 22 23 29 31	37 25 35 21 33 27 39 26 38 34 20 24 36 40 30 32 28	1 5 7 3 11 9 13 2 19 17 4、10 6、12 18 8 15 16 14 22、 23、 29、 31	41 25 35 21 27 33 39 26 34 38 28 32 20 40 24 36 30	1 5 7 3 9 11 13 2 17 19 4、14 16 10 8 6、12 18 15 22、 23、 29、 31、 37	41 25 35 21 27 33 39 26 34 38 42 28 20 40 32 30 24 36	1 5 7 3 9 11 13 2 17 19 6、14 4 10 8 16 15 12 18 22、 23、 29、 31、 37
總分	448	255	486	255	503	277	525	295	529	332	571	332

表 12-6　數字範圍【1~43】~【1~48】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~43		1~44		1~45		1~46		1~47		1~48	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	43	1	43	1	43	1	43	1	47	1	47	1
	25	5	25	5	25	5	25	5	25	5	25	5
	35	7	35	7	35	7	35	7	35	7	35	7
	21	3	21	3	21	3	21	3	21	3	21	3
	27	9	27	9	27	9	27	9	27	9	27	9
	33	11	33	11	33	11	33	11	33	11	33	11
	39	13	39	13	39	13	39	13	39	13	39	13
	26	2	26	2	45	15	45	15	45	15	26	2
	34	17	34	17	26	2	26	2	26	2	34	17
	38	19	38	19	34	17	34	17	34	17	38	19
	42	6、14	42	6、14	38	19	38	19	38	19	45	15
	28	4	28	4	18	6	18	6	18	6	46	23
	20	10	20	10	30	10	30	10	30	10	18	6
	40	8	40	8	42	14	42	14	42	14	30	10
	32	16	32	16	28	4	28	4	28	4	42	14
	30	15	30	15	36	12	36	12	36	12	28	4
	24	12	24	12	44	22	44	22	44	22	36	12
	36	18	36	18	24	8	24	8	24	8	44	22
		22、	44	22	32	16	32	16	32	16	32	8、16
		23、		23、	40	20	40	20	40	20	40	20
		29、		29、		23、	46	23	46	23	48	24
		31、		31、		29、		29、		29、		29、
		37、		37、		31、		31、		31、		31、
		41		41		37、		37、		37、		37、
						41		41		41、		41、
										43		43
總分	573	373	617	373	660	375	706	375	710	418	734	442

表 12-7　數字範圍【1~49】~【1~54】最大張數及最高分的牌組記錄表

數字範圍	1~49		1~50		1~51		1~52		1~53		1~54	
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	47 49 35 21 27 33 39 26 34 38 45 46 18 30 42 28 36 44 32 40 48	1 7 5 3 9 11 13 2 17 19 15 23 6 10 14 4 12 22 8、16 20 24 25 29、 31、 37、 41、 43	47 49 35 21 27 33 39 26 34 38 45 46 18 30 42 28 36 44 32 40 48 50	1 7 5 3 9 11 13 2 17 19 15 23 6 10 14 4 12 22 8、16 20 24 25 29、 31、 37、 41、 43	47 49 35 21 27 33 39 51 34 38 45 46 18 42 28 30 36 44 50 24 48 40	1 7 5 3 9 11 13 17 2 19 15 23 6 14 4 10 12 22 25 8 16 20 26、 29、 31、 32、 37、 41、 43	47 49 35 21 27 33 39 45 51 34 46 38 18 30 42 50 28 36 44 52 32 40 48	1 7 5 3 9 11 13 15 17 2 23 19 6 10 14 25 4 12 22 26 8、16 20 24 29、 31、 37、 41、 43	53 49 35 21 27 33 39 45 51 34 46 38 18 30 42 50 28 36 44 52 32 40 48	1 7 5 3 9 11 13 15 17 2 23 19 6 10 14 25 4 12 22 26 8、16 20 24 29、 31、 37、 41、 43、 47	53 49 35 21 27 33 39 45 51 34 38 46 54 42 28 30 36 44 50 52 32 40 48	1 7 5 3 9 11 13 15 17 2 19 23 6、18 14 4 10 12 22 25 26 8、16 20 24 29、 31、 37、 41、 43、 47
總分	758	467	808	467	825	501	885	493	891	540	927	558

表 13-1　數字範圍【1~1】~【1~40】最大張數的牌組記錄表

範圍	1~1	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~7	1~8	1~9	1~10
對象	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者
張數上限	0.5	1	1	2	2	3	3	3.5	4	5
實際張數	0	1	1	2	2	3	3	3	4	5
相差張數	0.5	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0
範圍	1~11	1~12	1~13	1~14	1~15	1~16	1~17	1~18	1~19	1~20
對象	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者
張數上限	5.5	5.5	5.5	6.5	7	7.5	7.5	8	8	8.5
實際張數	5	5	5	6	7	7	7	8	8	8
相差張數	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.5	0.5	0	0	0
範圍	1~21	1~22	1~23	1~24	1~25	1~26	1~27	1~28	1~29	1~30
對象	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者
張數上限	9	10	10	10.5	11	12	12.5	13	13	13.5
實際張數	9	10	10	10	11	12	12	13	13	13
相差張數	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0
範圍	1~31	1~32	1~33	1~34	1~35	1~36	1~37	1~38	1~39	1~40
對象	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者
張數上限	13.5	14	14.5	15.5	16	16.5	16.5	17.5	18	18.5
實際張數	13	13	14	15	16	16	16	17	17	17
相差張數	0.5	1	0.5	0.5	0	0.5	0.5	0.5	1	1.5

表 13-2　數字範圍【1~41】~【1~54】最大張數的牌組記錄表

範圍	1~41	1~42	1~43	1~44	1~45	1~46	1~47	1~48	1~49	1~50
對象	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者
張數上限	18.5	19	19	19.5	20	21	21	21.5	22	22.5
實際張數	17	18	18	19	20	21	21	21	21	22
相差張數	1.5	1	1	0.5	0	0	0	0.5	1	0.5
範圍	1~51	1~52	1~53	1~54						
對象	挑戰者	挑戰者	挑戰者	挑戰者						
張數上限	23	23.5	23.5	24						
實際張數	22	23	23	23						
相差張數	1	0.5	0.5	1						

觀察表 13-1 和表 13-2，某些數字範圍挑戰者實際最大張數與估計最大張數會有差距，例如【1~13】會差 0.5 張、【1~32】會差 1 張。我們觀察實際最大張數與估計最大張數相差 0.5 張的牌組中，莊家必然有一組雙因牌。而這些牌組的剩餘牌都是質數牌且實際最大張數與估計最大張數相差僅 0.5 張。因此，若莊家每拿到一組雙因牌，則挑戰者所能拿到的實際最大張數必定比估計最大張數還少 0.5 張。

結論：莊家每拿一組雙因牌，則挑戰者所能拿到的實際最大張數必定比估計最大張數還少 0.5 張。

觀察表 12-1~表 12-7 中，【1~1】~【1~54】除了【1~32】、【1~39】、【1~41】、【1~42】、【1~43】、【1~49】、【1~51】和【1~54】之外，其餘皆找到最大張數的牌組。在【1~32】的多種排列中，我們發現挑戰者最多只能排進 13 張，和估計最大張數 14 張還差一張牌，我們仔細觀察莊家的牌組中會拿到兩組「雙因牌」，不然就是剩餘牌中會有一張以上的「合數牌」。而在【1~39】、【1~41】、【1~49】、【1~51】和【1~54】中，我們也觀察到一樣的情況。以【1~38】和【1~39】的牌組為例，兩者僅差 39 這張數字牌，而 39 的因數為 1、3、13、39，與數字牌 26 的因數中 1，13 重疊，剩餘可拿的因數只有 2、3，若是與 22、33 一併考慮的話，無論如何都無法全拿。此時我們不禁懷疑：是否有挑戰者無法全拿估計最大張數牌組的情況？

討論 6：挑戰者可能全拿數字牌 22、26、33、39 嗎？

我們先考慮最佳情況，假設這四張牌的所有因數牌皆存在，以下為這四張牌的各種組合，如下表：

表 14　數字牌 22、26、33、39 各種排列的牌組記錄表

對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	22 26 33	1、2、11 13 3 39	22 26 39	1、2、11 13 3 33	22 33 26	1、2、11 3 13 39	22 33 39	1、2、11 3 13 26	22 39 26	1、2、11 3 13 33
總分	81	69	87	63	81	69	94	56	87	63
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	22 39 33	1、2、11 13 3 26	26 22 33	1、2、13 11 3 39	26 22 39	1、2、13 11 13 33	26 33	1、2、13 3、11 22 39	26 33	1、2、13 3、11 39 22
總分	94	56	81	69	87	73	59	91	59	91
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	26 39 22	1、2、13 3 11 33	26 39 33	1、2、13 3 11 22	33 22 26	1、3、11 2 13 39	33 22 39	1、3、11 2 13 26	33 26	1、3、11 2、13 22 39
總分	87	63	98	52	81	69	94	56	59	91
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
牌組	33 26	1、3、11 2、13 39 22	33 39 22	1、3、11 13 2 26	33 39 26	1、3、11 13 2 22	39 22	1、3、13 2、11 26 33	39 22	1、3、13 2、11 33 26
總分	59	91	94	56	98	52	61	89	61	89
對象	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家		
牌組	39 26 22	1、3、13 2 11 33	39 26 33	1、3、13 2 11 22	39 33 22	1、3、13 11 2 26	39 33 26	1、3、13 11 2 22		
總分	87	63	98	52	94	56	98	52		

結論：無論何種排法皆無法全拿是數字牌 22、26、33、39。

由上述結論知，即便數字牌 22、26、33、39 的所有因數牌 1、2、3、11、13 皆存在，挑戰者仍無法拿到全部的數字牌，再細觀上表，四張數字牌的排列組合中，部分牌組挑戰者可拿 3 張數字牌，部分牌組挑戰者可拿 2 張數字牌，顯示數字牌的先後順序的確會影響挑戰者可拿的張數，剛好和主軸一-**研究二-討論 1** 之結論相呼應。

討論 7：在討論 6 中，挑戰者拿牌策略分析。

我們觀察表 14，挑戰者只拿兩張數字牌的情況都發生在第一張數字牌和第二張數字

牌「互質」時。因為數字牌 22、26、33、39 的所有因數牌是 1、2、3、11、13，當挑戰者拿第一張數字牌時，莊家必定抽走三張因數牌，而挑戰者所拿的第二張數字牌與第一張互質時，莊家就可以把剩餘的兩張因數牌抽走，因此，挑戰者就無法拿到第三張數字牌了。

反之，若挑戰者所拿的第二張數字牌與第一張有一個公因數且莊家還只拿一張因數牌時，挑戰者就可拿第三張數字牌，而莊家也可得最後一張因數牌了。

結論：挑戰者每張可拿的數字牌最好是與前一張有一個公因數且莊家還只能拿一張因數牌是挑戰者拿牌的策略之一。

由上述討論知，可能有挑戰者無法全拿的情況，我們將在後面的討論嘗試找出哪些牌組是挑戰者無法全拿的。

討論 8：考慮最佳情況下(最佳排列及所有因數皆存在)，哪些組合是挑戰者無法全拿的？

由上述討論及觀察表 11 及表 12-1~12-7，我們做了以下的分類：

1. **有兩張以上的質數牌之排列**。根據主軸二-**研究（一）-討論 3** 知，挑戰者最多只能拿一張質數牌，因此只要有兩張以上的質數牌，挑戰者就不可能全拿。
2. **三個因數的數字牌，至少兩張以上之排列為基礎**。三個因數的數字牌一定是質數平方的數字牌，如 4、9、25、49 等，因為質數的平方其因數只有該質數一個，因此，任意兩個不同質數的平方不會有公因數。但是，若存在某一個數字牌，排除 1 和自己本身之外，只剩兩個因數，恰好分別是兩個質數平方數字牌的質數因數，則必定有一張數字牌會變成剩餘牌，如【1~49】中，數字牌 35 排除 1 和自己本身之後，只剩因數 5 和 7，而 5 是 25 的因數，7 是 49 的因數，故挑戰者不可能全拿數字牌 25、35、49，必然其中某張牌會成為剩餘牌。
3. **四個因數的數字牌，至少兩張以上之排列**。四個因數的數字，排除 1 和自己本身的因數外，剩餘兩個因數必定是質數，如下表：

表 15-1　四個因數之數字牌各種類型排列的牌組記錄表（沒有公因數）

類型	沒有公因數		沒有公因數		沒有公因數		沒有公因數		沒有公因數	
數字牌張數	2		3		4		5		6	
牌組形式	S＝a×b T＝c×d		S＝a×b T＝c×d U＝e×f		S＝a×b T＝c×d U＝e×f V＝g×h		S＝a×b T＝c×d U＝e×f V＝g×h W＝i×j		S＝a×b T＝c×d U＝e×f V＝g×h W＝i×j X＝k×l	
拿牌順序	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
	S T	a、b c、d	S T U	a、b c、d e、f	S T U V	a、b c、d e、f g、h	S T U V W	a、b c、d e、f g、h i、j	S T U V W X	a、b c、d e、f g、h i、j k、l
備註	S、T 順序可對調。		S、T、U 順序可對調。		S、T、U、V 順序可對調。		S、T、U、V、W 順序可對調。		S、T、U、V、W、X 順序可對調。	

由上表知，在沒有因數牌張數的限制下，挑戰者可全拿數字牌。

表 15-2　四個因數之數字牌各種類型排列的牌組記錄表（一個公因數）

類型	一個公因數		一個公因數		一個公因數		一個公因數		一個公因數	
數字牌張數	2		3		4		5		6	
牌組形式	S＝a×b T＝a×c		S＝a×b T＝a×c U＝a×d		S＝a×b T＝a×c U＝a×d V＝a×e		S＝a×b T＝a×c U＝a×d V＝a×e W＝a×f		S＝a×b T＝a×c U＝a×d V＝a×e W＝a×f X＝a×g	
拿牌順序	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
	S T	a、b c	S T U	a、b c d	S T U V	a、b c d e	S T U V W	a、b c d e f	S T U V W X	a、b c d e f g
備註	S、T 順序可對調。		S、T、U 順序可對調。		S、T、U、V 順序可對調。		S、T、U、V、W 順序可對調。		S、T、U、V、W、X 順序可對調。	

由上表知，僅一個公因數的情況下，無論數字牌張數為何，挑戰者皆能全拿。

表 15-3　四個因數之數字牌各種類型排列的牌組記錄表（兩個公因數）

類型	兩個公因數		兩個公因數		兩個公因數		兩個公因數		兩個公因數	
數字牌張數	3		4		4		5		5	
因數牌張數 （扣除 1 和自己）	4		5		6		6		6	
牌組形式	S＝axb T＝axc U＝cxd		S＝axb T＝axc U＝axd V＝bxe		S＝axb T＝axc U＝dxe V＝dxf		S＝axb T＝axc U＝axd V＝axe W＝bxf		S＝axb T＝axc U＝axd V＝bxe W＝bxf	
拿牌順序	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
	S T U	a、b c d	S T U V	a、b c d e	S T U V	a、b c d、e f	S T U V W	a、b c d e f	S T U V W	a、b c d e f
備註	S、T 順序可對調或 T、U 順序可對調。		S、T、U、V 順序可對調（但 T→V→U→S、T→V→S→U、V→T→U→S 和 V→T→S→U 等組合不行）。		S、T 順序可對調或 V、U 順序可對調或者（S 和 T）、（V 和 U）順序可對調。		S、T、U、V、W 順序可對調，但是前兩張的組合不可是 W→T、W→U、W→V。		S、W 順序可對調或 T、V、U 順序可對調或者（S 和 W）、（T 和 V 和 U）順序可對調。	

由上表知，僅兩個公因數的情況下，無論數字牌張數為何，挑戰者有機會全拿。

表 15-4　四個因數之數字牌各種類型排列的牌組記錄表（三個公因數）

類型	三個公因數		三個公因數		三個公因數		三個公因數		三個公因數	
數字牌張數	3		4		4		5		5	
因數牌張數 （扣除 1 和自己）	3		4		5		5		6	
牌組形式	S＝axb T＝bxc U＝axc		S＝axb T＝bxc U＝axd V＝axc		S＝axb T＝axc U＝dxc V＝bxe		S＝axb T＝axc U＝axd V＝bxe W＝bxc		S＝axb T＝axc U＝cxd V＝bxe W＝bxf	
拿牌順序	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
	S T U	a、b c ×	S T U V	a、b c d ×	S T U V	a、b c d e	S T U V W	a、b c d e ×	S T U V W	a、b c d e f
備註	S、T、U 無論如何排序，挑戰者都不可能全拿。		S、T、U、V 無論如何排序，挑戰者都不可能全拿。		S、T、U、V 順序可對調，但是前兩張的組合不可是 U 和		S、T、U、V、W 無論如何排序，挑戰者都不可能全拿。		S、T、U、V、W 順序可對調，但是前兩張的組合不可	

			S、U和V、T和V。		是U和W、U和V、S和U、T和W、T和V、U和V、U和W。

由上表知，僅三個公因數的情況下，若數字牌張數小於因數牌張數（扣除因數牌 1 和自己）則挑戰者有機會全拿。我們考慮：挑戰者拿第一張牌後，莊家必可拿到兩張因數牌，縱使之後挑戰者每拿一張數字牌，莊家也只拿一張因數牌，最後挑戰者可拿的數字牌必定還少莊家的因數牌一張。在四個公因數的情形下是否也是如此呢？我們做了以下分析，如表 15-5：

表 15-5　四個因數之數字牌各種類型排列的牌組記錄表（四個公因數）

<table>
<tr><td>類型</td><td colspan="2">四個公因數</td><td colspan="2">四個公因數</td><td colspan="2">四個公因數</td><td colspan="2">四個公因數</td><td colspan="2">四個公因數</td></tr>
<tr><td>數字牌張數</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>因數牌張數
（扣除 1 和自己）</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td></tr>
<tr><td>牌組形式</td><td colspan="2">S＝axb
T＝bxc
U＝cxd
V＝axd</td><td colspan="2">S＝axb
T＝bxc
U＝cxd
V＝axe
W＝bxd</td><td colspan="2">S＝axb
T＝bxc
U＝cxd
V＝axe
W＝dxf</td><td colspan="2">S＝axb
T＝bxc
U＝cxd
V＝dxe
W＝axf
X＝bxd</td><td colspan="2">S＝axb
T＝bxc
U＝cxd
V＝dxe
W＝axf
X＝bxg</td></tr>
<tr><td rowspan="2">拿牌順序</td><td>挑戰者</td><td>莊家</td><td>挑戰者</td><td>莊家</td><td>挑戰者</td><td>莊家</td><td>挑戰者</td><td>莊家</td><td>挑戰者</td><td>莊家</td></tr>
<tr><td>S
T
U
V</td><td>a、b
c
d
×</td><td>S
T
U
V
W</td><td>a、b
c
d
e
×</td><td>S
T
U
V
W</td><td>a、b
c
d
e
f</td><td>S
T
U
V
W
X</td><td>a、b
c
d
e
f
×</td><td>S
T
U
V
W
X</td><td>a、b
c
d
e
f
g</td></tr>
<tr><td>備註</td><td colspan="2">S、T、U無論如何排序，挑戰者都不可能全拿。</td><td colspan="2">S、T、U、V無論如何排序，挑戰者都不可能全拿。</td><td colspan="2">S、T、U、V、W順序可對調，但前兩張的組合不可是S→W、W→U、T→V。</td><td colspan="2">S、T、U、V、W、X無論如何排序，挑戰者都不可能全拿。</td><td colspan="2">S、T、U、V、W、X順序可對調。</td></tr>
</table>

由上表知，僅四個公因數的情況下，若**數字牌張數小於因數牌張數（扣除因數牌 1）的情形下**，則挑戰者有機會全拿，符合我們原先的想法。

4. **五個因數的數字牌，至少兩張以上之排列**。五個因數的數字牌，必是某質數的四次方數，例如 16、81、625 等。任兩個質數的四次方數間沒有公因數，因此，挑戰者有機會全拿兩個質數的四次方數字牌。
5. **六個因數的數字牌，至少兩張以上之排列**。六個因數的數字牌可能是：
   （1）某質數的五次方（a^5），如 32、243、3125 等。任兩個質數的五次方數間沒有公因數，因此，挑戰者有機會全拿兩個質數的五次方數字牌。
   （2）某質數的平方乘以另一個質數的形式（$a^2 \times b$），例如 12、20、28 等。因此，現在我們僅考慮某質數的平方乘以另一個質數的形式（$a^2 \times b$）的情況，如下表：

表 16-1　六個因數之數字牌各種類型排列的牌組記錄表（一~三個公因數）

類型	一個公因數		一個公因數		兩個公因數		兩個公因數		三個公因數	
數字牌張數	2		3		2		3		3	
因數牌張數 （扣除 1 和自己）	7		10		5		6		9	
牌組形式	S＝$a^2\times b$ T＝$c^2\times b$		S＝$a^2\times b$ T＝$c^2\times b$ U＝$d^2\times b$		S＝$a^2\times b$ T＝$a^2\times c$		S＝$a^2\times b$ T＝$a^2\times c$ U＝$a^2\times d$		S＝$a^2\times b$ T＝$b^2\times c$ U＝$c^2\times a$	
拿牌順序	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
	S T	a、b、 ab、a^2 c、 bc、c^2	S T U	a、b、 ab、a^2 c、 bc、c^2 d、 bd、d^2	S T	a、b、 ab、a^2 c	S T U	a、b、 ab、a^2 c d	S T U	a、b、 ab、a^2 b^2、 bc、c c^2、ac
備註	S、T 順序可對調。		S、T、U 順序可對調。		S、T 順序可對調。		S、T、U 順序可對調。		S、T、U 順序可對調。	

表 16-2　六個因數之數字牌各種類型排列的牌組記錄表（三個公因數）

類型	三個公因數		三個公因數	
數字牌張數	3		4	
因數牌張數 （扣除 1 和自己）	9		12	
牌組形式	S＝$a^2\times b$ T＝$b^2\times c$ U＝$a^2\times d$		S＝$a^2\times b$ T＝$a^2\times c$ U＝$b^2\times d$ V＝$e^2\times f$	
拿牌順序	挑戰者	莊家	挑戰者	莊家
	S T U	a、b、 ab、a^2 b^2、c、 bc ad、d	S T U V	a、b、ab、 a^2 c b^2、bd、d e^2、ef、 e、f
備註	S、T、U 順序可對調。		S、T、U、V 順序可對調。	

由上表知，此種類型的每張數字牌，其因數牌很多；隨著挑戰者每次的抽牌，莊家都有很多因數牌的選擇，因此，同為 6 個因數的數字牌，至少兩張以上之排列，挑戰者應該有機會全拿，而此類型的數字牌的因數牌較多，在拿牌策略上挑戰者應

先抽取因數較少的數字牌，然後再考慮抽取因數較多的數字牌。此觀點與主軸一-**研究（二）-討論 2** 及主軸二-**研究（一）-討論 3** 之結論相呼應。故後續多個因數的數字牌之排列就不再探討。

6. 各類型數字牌混合情形討論。我們再觀察表 12-1~表 12-7 中【1~32】、【1~39】、【1~40】、【1~41】、【1~42】、【1~43】、【1~49】、【1~51】和【1~54】的牌組。

（1）**在【1~32】中**，根據**主軸二-研究（二）-討論 8** 之結論：挑戰者每張可拿的數字牌最好是與前一張有一個公因數且莊家還只能拿一張因數牌。而【1~32】的最大估計張數為 14 張，扣除莊家所拿到雙因牌後，挑戰者最多只能拿到 13 張。

（2）**在【1~39】中**，根據前述**討論 7** 及**本討論第 3 點**的探討得知，挑戰者所欲拿到的牌組當中若有四張數字牌中共有四個公因數牌(扣除 1 和自己本身）之情形發生，則必然有一張數字牌是挑戰者所無法抽取的。因此，挑戰者想抽取數字牌 22、26、33、39 時，必有一張數字牌是挑戰者所無法抽取的。所以在【1~39】中，莊家最後的剩餘牌裡有 22 這張合數牌，再加上莊家有獲得一組雙因牌，而【1~39】的估計最大張數為 18 張，又根據**主軸二-研究（一）-討論 5-2** 知，最大張數應為 18-0.5＝17.5 張，但是【1~39】的實際最大張數為 17 張，由此推知：**若莊家最後的剩餘牌中有合數牌，則實際最大張數也要減 0.5 張。**我們將在後續的討論作驗證。

（3）**在【1~40】、【1~41】、【1~42】和【1~43】中**，我們發現與【1~39】有相同的情形，在數字牌 22、26、33、39 中，必有一張是挑戰者拿不到的。

（4）**在【1~51】中**，我們發現與【1~39】有相同的情形，有挑戰者不可能全拿的組合：26、34、39、51。

（5）**在【1~49】中**，依**本討論第 2 點**，挑戰者不可能全拿的組合：25、35、49。

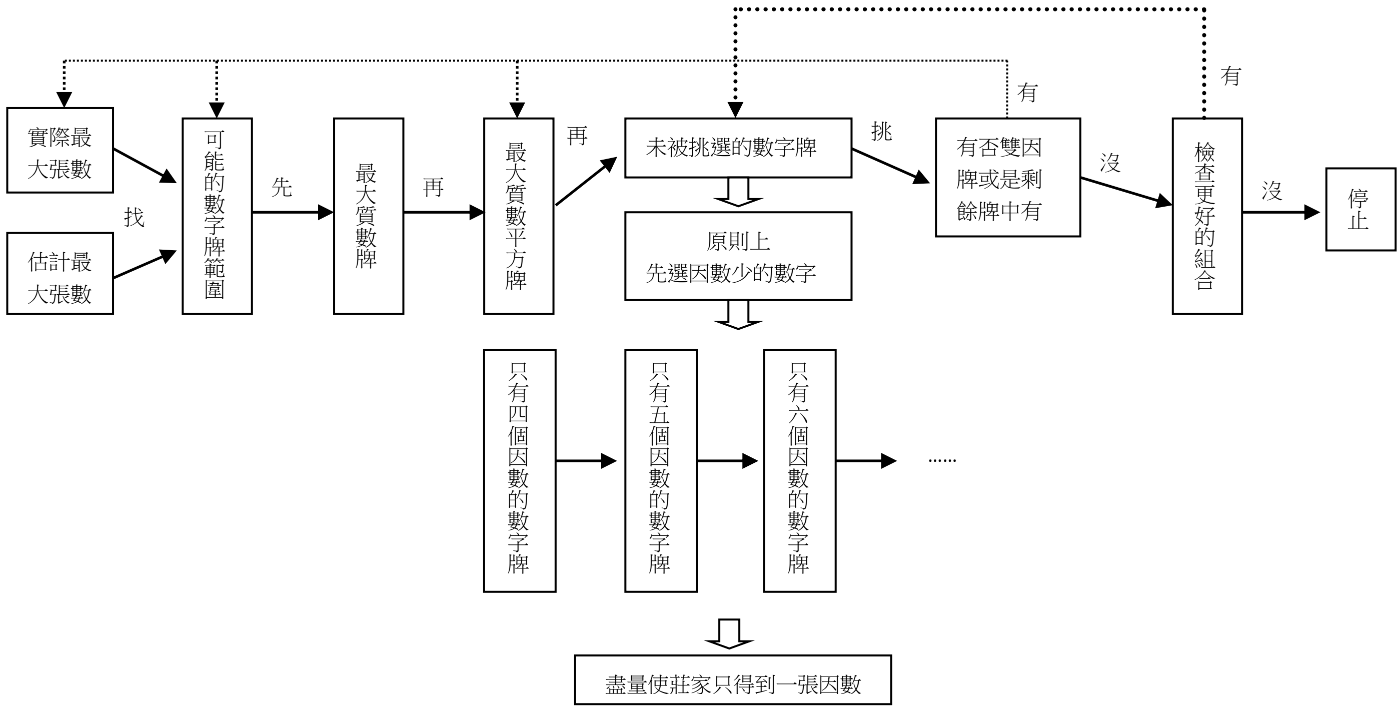
（6）**在【1~54】中**，當挑戰者將四個因數的數字牌都拿完後，剩下的數字牌中很多都是 6 的倍數；若挑戰者抽走數字牌 18，莊家得到數字牌 6，則挑戰者就無法抽取數字牌 54。反之，若挑戰者先抽取數字牌 54 或是其他 6 的倍數之數字牌，則莊家必然至少有一組雙因牌，實際最大張數至少也要減掉 0.5 張。而【1~54】有兩組雙因牌，故實際最大張數為 24-1＝23 張。故莊家每拿一次「雙因牌」或是剩餘牌中每多一張「合數牌」，實際最大張數就是估計最大張數再減掉 0.5 張，據此化為公式：**實際最大張數＝估計最大張數-（拿「雙因牌」次數+「合數牌」張數）×0.5。**

結論：挑戰者無法全拿的情況有：（1）有兩張以上的質數牌；（2）若牌組中存在某個數字牌，排除 1 和自己本身後，只剩兩個因數，且此數字牌恰好分別是兩個質數平方數字牌的質因數；（3）若牌組內僅四個因數的數字牌中，數字牌的張數大於或等於所有因數牌（扣除因數牌 1）張數的情形下。此外，莊家每拿一次「雙因牌」或是剩餘牌中每多一張「合數牌」。因此，實際最大張數就是估計最大張數再減掉 0.5 張，化為公式：實際最大張數＝估計最大張數-（拿「雙因牌」次數+「合數牌」張數）×0.5。

研究（二）：挑戰者最高分牌組探討

討論 1：考慮最佳的拿牌策略。

根據主軸二-**研究（二）-討論 1** 知，根據主軸一-**研究（二）-討論 2**、主軸二-**研究（一）-討論 3、討論 5-2、討論 7** 的結論知，最大張數的拿牌策略歸納如下：



討論 2：理想上挑戰者所能得到的最高分牌組。

根據主軸二-**研究（一）-討論 5-2** 及**討論 9** 的結論知，理想上扣掉挑戰者一定拿不到的質數牌數，剩餘牌若是偶數個，則挑戰者及莊家均分；剩餘牌若是奇數個，則莊家至少得到一張剩餘牌或是一組雙因牌。因此估計最大張數＝（總牌數－位於數字範圍內一半以上的質數牌張數+1）÷2，若此牌組都是由數字範圍上限除了最大質數外，先跳掉質數牌往下點數的數字牌去排列，也就是說，這些數字牌都是牌組中數字最大的且能拿最大張數的情形，想必這些數字牌的總和必是挑戰者估計上的最高分。此時，若考慮已知挑戰者不可能的情形，如主軸二-**研究（一）-討論 8** 中所探討的情形，則挑戰者的理想最高分＝估計最高分－剩餘牌分－牌分差。

結論：挑戰者的理想最高分=估計最高分－剩餘牌分－牌分差。

討論 3：理想最高分公式探討。

所有牌組總和可利用梯形面積公式算出：牌組總分＝（最大牌分+1）×總張數÷2＝（挑戰者總分+莊家總分）。而估計上，除了挑戰者一定拿不到的質數牌外，剩下的牌中最大的那一半歸挑戰者，最小的那一半歸莊家。據此，莊家最低分應為〔1+（總張數－實際張數－挑戰者拿不到的質數牌數－雙因牌次數）〕×（總張數－實際張數－挑戰者拿不到的質數牌數－雙因牌次數）÷2+剩餘牌分+牌分差=(1+實際張數)×實際張數÷2+剩餘牌分+牌分差。其中牌分差為挑戰者和莊家所擁有的數字牌（不包含剩餘牌）中不屬於理想狀態下的牌

間分數差。而挑戰者最高分則為牌組總分-莊家最低分。

根據**討論 1**，挑戰者的理想最高分=牌組總分-莊家最低分＝（最大牌分+1）×總張數÷2－｛〔1+（總張數-實際張數-挑戰者拿不到的質數牌數-雙因牌次數）〕×（總張數-實際張數-挑戰者拿不到的質數牌數-雙因牌次數）÷2+剩餘牌分+牌分差｝=（最大牌分+1）×總張數÷2－〔(1+實際張數）×實際張數÷2+剩餘牌分+牌分差〕。

結論：(1) 牌組總分＝（最大牌分+1）×總張數÷2＝（挑戰者總分+莊家總分）;(2) 莊家最低分應為〔1+（總張數-實際張數-挑戰者拿不到的質數牌數）〕×（總張數-實際張數-挑戰者拿不到的質數牌數）÷2+剩餘牌分+牌分差;(3) 挑戰者的理想最高分修正為（最大牌分+1）×總張數÷2－〔(1+實際張數）×實際張數÷2+剩餘牌分+牌分差〕。

陸、 結論

一、抽牌的順序不同會影響挑戰者得到的分數及數字牌的張數。

二、挑戰者每張可拿的數字牌最好是與前一張有一個公因數且莊家只能拿一張因數牌是挑戰者拿牌的策略之一。

三、挑戰者的贏牌策略為每張數字牌都比莊家大，除了一定得不到的質數牌之外，設法拿到最多張數的數字牌。而挑戰者抽牌時先抽最大質數牌，再抽最大質數平方牌，依序抽因數牌張數較少且與前一張共同因數的牌，以此類推，若最後有剩餘牌，觀察其中是否有合數牌再做試驗。

四、挑戰者無法全拿的情況有：(1) 有兩張以上的質數牌;(2) 若牌組中存在某數字牌，排除 1 和自己本身後，只剩兩個因數，且此數字牌恰好分別是兩個質數平方數字牌的質因數;(3) 若牌組內僅四個因數的數字牌中，數字牌的張數大於或等於因數牌（扣除因數牌 1）張數的情形下。

五、實際最大張數＝估計最大張數-（拿「雙因牌」次數+「合數牌」張數）×0.5。

六、挑戰者的理想最高分為（最大牌分+1）×總張數÷2－〔(1+實際張數）×實際張數÷2+剩餘牌分+牌分差〕。

柒、 參考書目

1. 何鳳珠(2005)。**實踐因倍數教學模組的課室寫真**。台灣數學教師電子期刊。第四期。
2. **部編版數學課本第九冊第三單元倍數與因數** 。
3. **部編版數學課本第十一冊第一單元質數和質因數**。

【評語】080409

為了能從遊戲中獲勝，啟發了探究數學問題的動機。以戲劇的方式，簡要呈現研究重點，清晰、有趣、又頗具創意，但數學內容的探究以及相關問題的討論深度，還有可再進步的空間。