

# 中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國小組 數學科

080408

生存者遊戲

學校名稱：臺南市安定區安定國民小學

作者：	指導老師：
小六 詹慧君	張容君
小六 顏妤庭	陳藝珍
小六 蘇亭嘉	
小六 蔡欣宸	

關鍵詞：數列

## 壹、摘要

本研究實驗一：12 位同學進行遊戲，每 3 個一數，第三人即出局，找出最後一位生存的人。雖然，實地進行遊戲找出最後生存者的方法很有趣，但人數增多時，要找出最後的生存者要花費很多時間。因此，實驗二：我們改以紙筆畫格子的方式找出最後的生存者，並將人數定為 25 人，從圖形中找出規則性。實驗三：我們試圖推演算式，結果發現必須先算出特殊總人數的例子並且表列出來，才可以推算所設定的目標人數之最後生存者的編號。實驗四中，我們將 3 個一數的方式改為 5 個一數，我們發現具有相同的規則性。最後實驗五，我們進一步研究「7 個一數」、「9 個一數」和「10 個一數」亦有相同規則性的有趣遊戲。

## 貳、研究動機

有一天聽老師說了一則故事：在羅馬人佔領喬塔帕特後，39 個猶太人與猶太歷史學家 Josephus 及他的朋友躲到一個洞中，39 個猶太人決定寧願死也不要被敵人抓到，於是決定了一個自殺方式，41 個人排成一個圓圈，由第 1 個人開始報數，每報數到第 3 人該人就必須自殺，然後再由下一個重新報數，直到所有人都自殺身亡為止。然而 Josephus 和他的朋友並不想遵從，Josephus 要他的朋友先假裝遵從，他將朋友與自己安排在第 16 個與第 31 個位置，於是逃過了這場死亡遊戲。

聽完這個故事覺得這是一個很有趣的數學遊戲，於是和同學組隊實地操作。遊戲過程中，如果人數隨便改變，或改成其他如每報數到第 5 人時，誰就可以獲得最後的生存機會呢？這樣是不是都要重新計算？有沒有比較簡單又快速省時的計算法呢？這些問題引起了大家研究的興趣。

## 參、研究目的

- 一、人數為 12 人時，3 個一數，最後生存者的排列順序編號為何？
- 二、人數為 25 人時，3 個一數，最後生存者的排列順序編號為何？
- 三、3 個一數時的最後生存者編號為何？
- 四、5 個一數時的最後生存者編號為何？
- 五、比較「7 個一數」、「9 個一數」和「10 個一數」的規則性和「3 個一數」是否相同？

## 肆、研究器材及設備

- 一、材料：1. 計算紙。2. 筆（含色筆）。
  1. 計算紙：做為簡易計算時用。
  2. 筆(含色筆)：做為計算及簡易標記用。
- 二、工具：1. 電腦。2. 印表機。

## 伍、研究過程

本研究分為五個部分：第一部分為人數 12 人時，3 個一數，找出最後的生存者。第二部分是人數為 25 人時，3 個一數，利用紙筆和畫格子方式找出最後生存者。第三部分是當人數超過 100 人時，3 個一數，找出數列中的規則，並找出最後生存者。第四部份是研究人數超過 100 人時，5 個一數，依照研究三中的規則，推算出最後生存者。第五部份是研究人數超過 100 人時，7 個一數、9 個一數和 10 個一數，各依照研究三中的規則，推算出最後生存者。

## 一、研究一：人數為 12 人時，3 個一數，最後生存者的排列順序編號為何？

實驗一：我們利用遊戲的方法，由 12 個學生圍圓圈，以 3 個一數即淘汰的方式，瞭解最後生存者的號碼。

### (一)研究方法

找 12 個同學圍一個圓圈，並依序編號（1-12 號）和報數，遇 3 即出局（蹲下），找出最後生存者的號碼為何。

### (二)研究記錄

1.將 12 個同學圍成一個圓圈的形式，畫成兩個圓圈，內圈是排列順序，而外圈是陸續出局的順序，即可找出最後生存者的號碼是 10 號，如圖 1 和圖 2 所示。

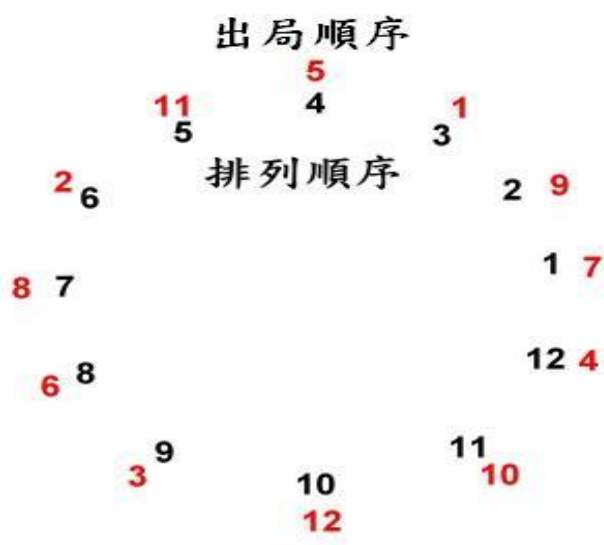


圖 1：12 人時的出局順序



圖 2：12 人遊戲

2.為了表達簡單化，我們將圖示改為畫表格的方式來表示，上列是排列順序，而下列是出局順序，如表 1 所示。

表 1：出局順序表

排列 順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
出局 順序	7	9	1	5	11	2	8	6	3	12	10	4

## 二、研究二：人數為 25 人時，3 個一數，最後生存者的排列順序編號為何？

### (一)研究方法

將遊戲人數訂為 25 人，用紙筆和畫格子方式，以最原始的方法慢慢數，找出最後一個生存者的排列順序編號，如圖 3 所示。



圖 3：用紙筆和畫格子方式，找出最後一個生存者的排列順序編號

## (二)研究紀錄

為了標示清楚方便研究，我們將最後生存者的排列順序之編號標示為綠色，而最後出局順序(即最後生存者)標示為黃色。當總人數少於 3 人為 2 人時，最後生存者是排列順序 2 號。

表 2：25 人時最後生存者紀錄表

人數編號	1	2						
出局順序	1	2						
人數編號	1	2	3					
出局順序	2	3	1					
人數編號	1	2	3	4				
出局順序	4	2	1	3				
人數編號	1	2	3	4	5			
出局順序	2	4	1	5	3			
人數編號	1	2	3	4	5	6		
出局順序	6	4	1	3	5	2		
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	
出局順序	6	3	1	7	5	2	4	
編號人數	1	2	3	4	5	6	7	8
出局順序	3	5	1	7	4	2	8	6

人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9																
出局順序	9	7	1	4	6	2	8	5	3																
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10															
出局順序	6	4	1	10	8	2	5	7	3	9															
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11														
出局順序	4	10	1	7	5	2	11	9	3	6	8														
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12													
出局順序	7	9	1	5	11	2	8	6	3	12	10	4													
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13												
出局順序	11	5	1	8	10	2	6	12	3	9	7	4	13												
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14											
出局順序	5	14	1	12	6	2	9	11	3	7	13	4	10	8											
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15										
出局順序	11	9	1	6	15	2	13	7	3	10	12	4	8	14	5										
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16									
出局順序	15	6	1	12	10	2	7	16	3	14	8	4	11	13	5	9									
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17								
出局順序	6	10	1	16	7	2	13	11	3	8	17	4	15	9	5	12	14								
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18							
出局順序	13	15	1	7	11	2	17	8	3	14	12	4	9	18	5	16	10	6							
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19						
出局順序	11	7	1	14	16	2	8	12	3	18	9	4	15	13	5	10	19	6	17						
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20					
出局順序	7	18	1	12	8	2	15	17	3	9	13	4	19	10	5	16	14	6	11	20					
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21				
出局順序	12	21	1	8	19	2	13	9	3	16	18	4	10	14	5	20	11	6	17	15	7				
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22			
出局順序	16	8	1	13	22	2	9	20	3	14	10	4	17	19	5	11	15	6	21	12	7	18			
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23		
出局順序	8	19	1	17	9	2	14	23	3	10	21	4	15	11	5	18	20	6	12	16	7	22	13		
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
出局順序	23	14	1	9	20	2	18	10	3	15	24	4	11	22	5	16	12	6	19	21	7	13	17	8	
人數編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
出局順序	18	9	1	24	15	2	10	21	3	19	11	4	16	25	5	12	23	6	17	13	7	20	22	8	14

### (三)研究結果

- 1.由表 2 中，我們找到一個可依循的規律：每三個一數，最後一個生存的編號，是總人數增加 1 人時，最後一個生存的編號，就要增加 3 。
- 2.如果編號超過總人數，要再減掉總人數。例如：總人數是 20 人時，最後一個生存的編號是 20 號，若總人數增加 1 人是 21 人時，最後一個生存的編號是  $20+3=23$  但超過 21，所以要再減去 21，即 2 號。又如總人數是 8 人時，最後一個生存的編號是 7 號，若總人數增加 1 人是 9 人時，最後一個生存的編號是  $7+3=10$  但超過 9，所以要再減去 9 即 1 號。
- 3.依照觀察所發現的規律：如果總人數 a、最後生存者編號 b 時，顯然  $b \leq a$

(1)若  $b < a - 1$ ，則人數  $a + 1$  時，最後生存者編號為  $b + 3$

(2)若  $b = a - 1$ ，則人數  $a + 1$  時，最後生存者編號為 1

因為  $b + 3 = a - 1 + 3 = a + 2$

$$(b + 3) - (a + 1) = 1$$

(3)若  $b = a$ ，則人數  $a + 1$  時，最後生存者編號為 2

因為  $(b + 3) - (a + 1) = 2$ ，如下列表 3 所示。

表 3：最後生存者編號表(每 3 個一數)

總人數 a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
最後生存者編號 b	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5	8	11	14	17	20	2	5

總人數 a	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
最後生存者編號 b	8	11	14	17	20	23	26	29	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37

總人數 a	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
最後生存者編號 b	40	43	46	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53



總人數 a	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
最後生存者編號 b	56	59	62	65	68	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46

總人數 a	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
最後生存者編號 b	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	1	4

總人數 a	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127
最後生存者編號 b	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67

(4)我們可以将研究結果以程序圖來表示，如下列圖 4 所示。

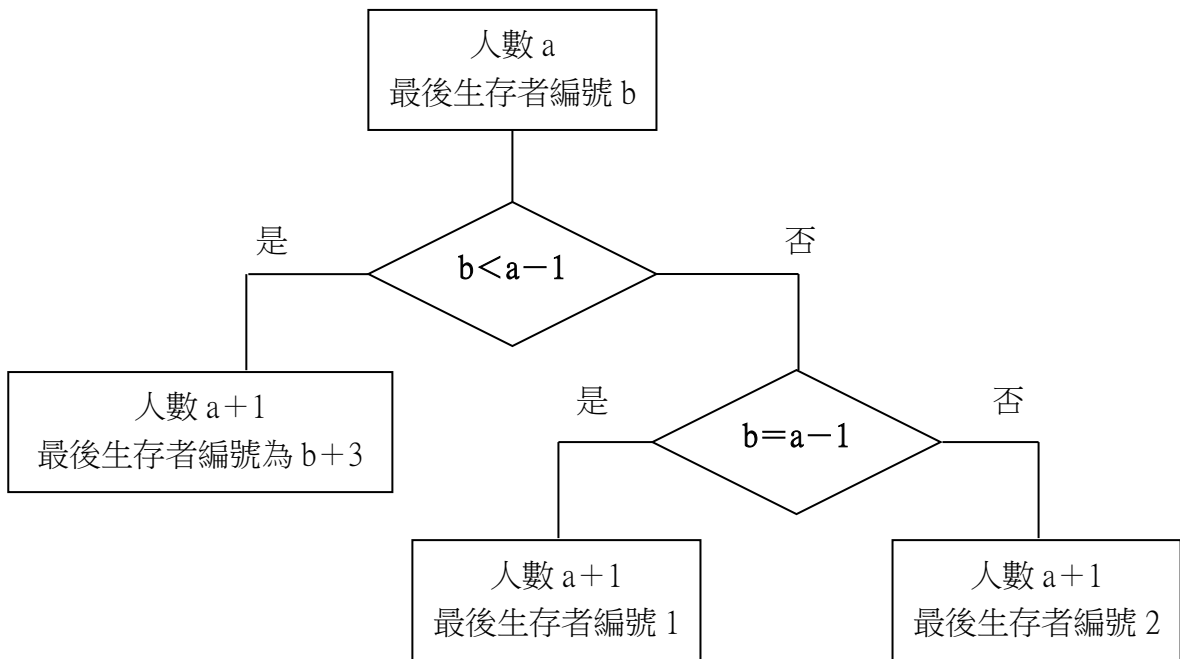


圖 4：研究結果程序圖

### 三、研究三：3 個一數時的最後生存者編號為何？

#### (一)研究方法

如果總人數超過 100 人時，是不是還有更簡單的方法，可以找出最後生存者排列順序的編號呢？觀察「表 3：最後生存者編號表(每 3 個一數)」，發現總人數增加 1 人時，最後一個生存者的編號就要增加 3，「如果編號超過總人數，要再減掉總人數。」這個比較特殊的情形，是否可以從中再找出規律性，歸納出更簡單的計算方法？因此，必須先將這個關鍵的總人數之最後生存者排列順序的編號列出來。

#### (二)研究紀錄

如果總人數  $a$ ，最後生存者  $b$  時，則總人數  $a+1$  時，最後生存者  $b+3$ 。若推算的最後生存者  $=b+3 >$  總人數  $=a+1$  時，最後生存者  $=(b+3)-(a+1)$  的情形需另外列式，亦即當人數  $a$  的最後生存者編號為 1 或 2 時，則稱此時的人數為特殊總人數。特殊總人數由小而大排列記為  $A_1$ 、 $A_2$ ……，其所對應的最後生存者編號分別記為  $B_1$ 、 $B_2$ ……，依此類推，如下列表 4 所示。

表 4：特殊總人數例子推算表 ( $A_1 \sim A_{11}$ )

	總人數 a	最後生存者編號 b		$(A_k - B_k) \div 2 = Q \dots R$
$A_1 =$	2	2	$=B_1$	$(2 - 2) \div 2 = 0 \dots 0$
$A_2 =$	3	2	$=B_2$	$(3 - 2) \div 2 = 0 \dots 1$
$A_3 =$	4	1	$=B_3$	$(4 - 1) \div 2 = 1 \dots 1$
$A_4 =$	6	1	$=B_4$	$(6 - 1) \div 2 = 2 \dots 1$
$A_5 =$	9	1	$=B_5$	$(9 - 1) \div 2 = 4 \dots 0$
$A_6 =$	14	2	$=B_6$	$(14 - 2) \div 2 = 6 \dots 0$
$A_7 =$	21	2	$=B_7$	$(21 - 2) \div 2 = 9 \dots 1$
$A_8 =$	31	1	$=B_8$	$(31 - 1) \div 2 = 15 \dots 0$
$A_9 =$	47	2	$=B_9$	$(47 - 2) \div 2 = 22 \dots 1$
$A_{10} =$	70	1	$=B_{10}$	$(70 - 1) \div 2 = 34 \dots 1$
$A_{11} =$	105	1	$=B_{11}$	$(105 - 1) \div 2 = 52 \dots 0$

### (三)研究結果

1. 依照觀察所發現的規律：如果總人數  $a$ 、最後生存者編號  $b$  時，顯然  $b \leq a$

(1)若  $b < a - 1$ ，則人數  $a + 1$  時，最後生存者編號為  $b + 3$

(2)當總人數  $a$  這列人數每次增加 1 時，原則上最後生存者編號  $b$  這列會增加 3，所以這兩列的增加每次就相差 2。

2.觀察「表 3：最後生存者編號表(每 3 個一數)」的結果，發現「表 4：特殊總人數例子推算表」有下列的規律：

(1)  $B_k$  必為 1 或 2

$$(2) A_{k+1} = A_k + \left[ \frac{A_k - B_k}{2} \right] + 1$$

其中  $[ ]$  表示高斯符號，即  $[x]$  為不大於  $x$  的整數中最大的，例如： $[1.5] = 1$ ,  $[2] = 2$

$$(3) B_{k+1} = \begin{cases} 1 & (A_k - B_k) \text{ 為奇數} \\ 2 & (A_k - B_k) \text{ 為偶數} \end{cases}$$

因此，若  $(A_k, B_k)$  為 (奇數, 偶數) 或 (偶數, 奇數) 時， $B_{k+1} = 1$

若  $(A_k, B_k)$  為 (奇數, 奇數) 或 (偶數, 偶數) 時， $B_{k+1} = 2$

(4)對於一般的人數  $n$ ，找到  $A_k$  和  $A_{k+1}$ ，使得  $A_k < n < A_{k+1}$ ，則人數  $n$  時，最後生存者編號為  $b_n$ 。

$$b_n = B_k + 3(n - A_k)$$

因此， $A_{12}$  和  $B_{12}$  可以由  $A_{11}$  和  $B_{11}$  推算出來，算式如下列所示。用同樣的方法，可以陸續算出  $A_{13}$  和  $B_{13}$ 、 $A_{14}$  和  $B_{14}$ 、 $A_{15}$  和  $B_{15}$  等特殊例子的總人數和最後生存者編號。如下列表 5 所示。

$$\begin{aligned} A_{12} &= A_{11} + \left[ \frac{1051}{2} \right] + 1 \\ &= 105 + 52 + 1 \\ &= 158 \\ \therefore R &= 0 \quad \therefore B_{12} = 2 \end{aligned}$$

3.當人數更多時，再簡單快速的計算方式如下：如果總人數  $a$  已知，而且總人數  $a$  在表 4 中介於  $A_k$  與  $A_{k+1}$  之間，則最後生存者編號  $b = B_k + 3 \times (\text{總人數 } a - A_k)$ 。因此，若總人數  $a = 100$  在表 4 中介於  $A_{10}$  與  $A_{11}$  之間，則最後生存者編號  $b = 1 + 3 \times (100 - 70) = 91$ 。如果總人數  $a$  是 200、500 或 1000 時，那麼依照表 4 的規律，求出後面的數，直到總人數  $a$  介於某兩個數之間，就可以很快的求出最後生存者編號  $b$  這個數。現在把表 4 增列後面幾個數，如下列表 5 所示。

4.根據(三)研究結果 2.(1)~(3)，我們可以利用 Excel 來計算特殊總人數，也可以簡單估計  $A_{k+1}$  的值，其結果詳如附錄之圖 5 所示。依據 (三)研究結果 2.(1)(2)，

$$A_{k+1} \sim \frac{3}{2} \quad , \quad \text{因此可得 } A_{k+1} \sim \left( \frac{3}{2} \right)^k A_1$$

表 5：特殊總人數例子推算表(A<sub>12</sub>~A<sub>34</sub>)

	總人數 a	最後生存者編號 b		$(A_k - B_k) \div 2 = Q \dots R$
A <sub>12</sub> =	158	2	=B <sub>12</sub>	$(158 - 2) \div 2 = 78 \dots 0$
A <sub>13</sub> =	237	2	=B <sub>13</sub>	$(237 - 2) \div 2 = 117 \dots 1$
A <sub>14</sub> =	355	1	=B <sub>14</sub>	$(355 - 1) \div 2 = 177 \dots 0$
A <sub>15</sub> =	533	2	=B <sub>15</sub>	$(533 - 2) \div 2 = 265 \dots 1$
A <sub>16</sub> =	799	1	=B <sub>16</sub>	$(799 - 1) \div 2 = 399 \dots 0$
A <sub>17</sub> =	1199	2	=B <sub>17</sub>	$(1199 - 2) \div 2 = 598 \dots 1$
A <sub>18</sub> =	1798	1	=B <sub>18</sub>	$(1798 - 1) \div 2 = 898 \dots 1$
A <sub>19</sub> =	2697	1	=B <sub>19</sub>	$(2697 - 1) \div 2 = 1348 \dots 0$
A <sub>20</sub> =	4046	2	=B <sub>20</sub>	$(4046 - 2) \div 2 = 2022 \dots 0$
A <sub>21</sub> =	6069	2	=B <sub>21</sub>	$(6069 - 2) \div 2 = 3033 \dots 1$
A <sub>22</sub> =	9103	1	=B <sub>22</sub>	$(9103 - 1) \div 2 = 4551 \dots 0$
A <sub>23</sub> =	13655	2	=B <sub>23</sub>	$(13655 - 2) \div 2 = 6826 \dots 1$
A <sub>24</sub> =	20482	1	=B <sub>24</sub>	$(20482 - 1) \div 2 = 10240 \dots 1$
A <sub>25</sub> =	30723	1	=B <sub>25</sub>	$(30723 - 1) \div 2 = 15361 \dots 0$
A <sub>26</sub> =	46085	2	=B <sub>26</sub>	$(46085 - 2) \div 2 = 23041 \dots 1$
A <sub>27</sub> =	69127	1	=B <sub>27</sub>	$(69127 - 1) \div 2 = 34563 \dots 0$
A <sub>28</sub> =	103691	2	=B <sub>28</sub>	$(103691 - 2) \div 2 = 51844 \dots 1$
A <sub>29</sub> =	155536	1	=B <sub>29</sub>	$(155536 - 1) \div 2 = 77767 \dots 1$
A <sub>30</sub> =	233304	1	=B <sub>30</sub>	$(233304 - 1) \div 2 = 116651 \dots 1$
A <sub>31</sub> =	349956	1	=B <sub>31</sub>	$(349956 - 1) \div 2 = 174977 \dots 1$
A <sub>32</sub> =	524934	1	=B <sub>32</sub>	$(524934 - 1) \div 2 = 262466 \dots 1$
A <sub>33</sub> =	787401	1	=B <sub>33</sub>	$(787401 - 1) \div 2 = 393700 \dots 0$
A <sub>34</sub> =	1181102	2	=B <sub>34</sub>	$(1181102 - 2) \div 2 = 590550 \dots 0$

總人數 a=200 時，則最後生存者編號  $b = B_{12} + 3 \times (200 - A_{12}) = 2 + 3 \times (200 - 158) = 128$

總人數 a=500 時，則最後生存者編號  $b = B_{14} + 3 \times (500 - A_{14}) = 1 + 3 \times (500 - 355) = 436$

總人數 a=1000 時，則最後生存者編號  $b = B_{16} + 3 \times (1000 - A_{16}) = 1 + 3 \times (1000 - 799) = 604$

#### 四、研究四：5 個一數時的最後生存者編號為何？

##### (一)研究方法

我們將每 3 個一數，改變為每 5 個一數，算算看是否與每 3 個一數一樣，有相同的規律性存在。將遊戲人數訂為 100 人以上，用紙筆和畫格子方式，先以最原始的方法慢慢數，找出最後一個生存者的排列順序編號，並紀錄如下列表 6 所示。

##### (二)研究紀錄

表 6：最後生存者編號表(每 5 個一數)

總人數 a	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
最後生存者編號 b	2	1	6	3	8	3	8	1	6	11	1	6	11	16	2	7	12	17	22	3	8

總人數 a	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
最後生存者編號 b	13	18	23	28	3	8	13	18	23	28	33	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46

總人數 a	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
最後生存者編號 b	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46

總人數 a	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
最後生存者編號 b	51	56	61	66	71	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	73	78

總人數 a	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
最後生存者編號 b	83	88	2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	82	87	92

同樣發現表 6 中，總人數 a 增加 1 人時，最後生存者編號 b 就要增加 5，如果最後生存者編號 b 超過總人數 a 時，要再減掉總人數 a。因此，將那些特殊的數列出，如下列表 7 所示。

表 7：特殊總人數例子推算表(A<sub>1</sub>~A<sub>14</sub>)

	總人數 a	最後生存者編號 b		
A <sub>1</sub> =	5	2	=B <sub>1</sub>	$(A_k - B_k) \div 2 = Q \dots R$
A <sub>2</sub> =	6	1	=B <sub>2</sub>	$(5 - 2) \div 4 = 0 \dots 3$
A <sub>3</sub> =	8	3	=B <sub>3</sub>	$(6 - 1) \div 4 = 1 \dots 1$
A <sub>4</sub> =	10	3	=B <sub>4</sub>	$(8 - 3) \div 4 = 1 \dots 1$
A <sub>5</sub> =	12	1	=B <sub>5</sub>	$(10 - 3) \div 4 = 1 \dots 3$
A <sub>6</sub> =	15	1	=B <sub>6</sub>	$(12 - 1) \div 4 = 2 \dots 3$
A <sub>7</sub> =	19	2	=B <sub>7</sub>	$(15 - 1) \div 4 = 3 \dots 2$
A <sub>8</sub> =	24	3	=B <sub>8</sub>	$(19 - 2) \div 4 = 4 \dots 1$
A <sub>9</sub> =	30	3	=B <sub>9</sub>	$(24 - 3) \div 4 = 5 \dots 1$
A <sub>10</sub> =	37	1	=B <sub>10</sub>	$(30 - 3) \div 4 = 6 \dots 3$
A <sub>11</sub> =	47	4	=B <sub>11</sub>	$(37 - 1) \div 4 = 9 \dots 0$
A <sub>12</sub> =	58	1	=B <sub>12</sub>	$(47 - 4) \div 4 = 10 \dots 3$
A <sub>13</sub> =	73	3	=B <sub>13</sub>	$(58 - 1) \div 4 = 14 \dots 1$
A <sub>14</sub> =	91	2	=B <sub>14</sub>	$(73 - 3) \div 4 = 17 \dots 2$
				$(91 - 2) \div 4 = 22 \dots 1$

### (三)研究結果

1.如同表 4 發現表 7 有下列的一些規律：

(1) B<sub>k</sub> 必為 1 或 2 或 3 或 4

$$(2) \quad A_{k+1} = A_k + \left[ \frac{A_k - B_k}{4} \right] + 1$$

$$(3) \quad B_{k+1} = \begin{cases} 1 & (A_k - B_k) \div 4 \text{ 餘 } 3 \\ 2 & (A_k - B_k) \div 4 \text{ 餘 } 2 \\ 3 & (A_k - B_k) \div 4 \text{ 餘 } 1 \\ 4 & (A_k - B_k) \div 4 \text{ 餘 } 0 \end{cases}$$

因此，表 7 後面的數 A<sub>15</sub> 和 B<sub>15</sub>、A<sub>16</sub> 和 B<sub>16</sub>，可以由上面的規律算出來。

$$(91 - 2) \div 4 = 22 \dots 1, \quad A_{15} = 91 + 22 + 1 = 114, \quad B_{15} = 3$$

$$(114 - 3) \div 4 = 27 \dots 3, \quad A_{16} = 114 + 27 + 1 = 142, \quad B_{16} = 1$$

2.同樣，如果總人數  $a$  已知，而且總人數  $a$  在表 7 中介於  $A_k$  與  $A_{k+1}$  之間，則最後生存者編號  $b = B_k + 5 \times (\text{總人數 } a - A_k)$ 。因此，若總人數  $a = 80$  在表 7 中介於  $A_{13}$  與  $A_{14}$  之間，則最後生存者編號  $b = 3 + 5 \times (80 - 73) = 38$ 。

## 五、研究五：比較「7 個一數」、「9 個一數」和「10 個一數」的規則性和「3 個一數」是否相同？

### (一)研究方法

我們再將每 3 個一數，改變為每 7 個一數、每 9 個一數和每 10 個一數，算算看是否與每 3 個一數一樣，有相同的規律性存在。

### (二)研究結果

研究結果是每 7 個一數、每 9 個一數和每 10 個一數，都和每 3 個一數一樣，有相同的規律性，詳如附錄之表 8、表 9 和表 10。

## 陸、討論與結論

一、「每  $P$  個一數」，總人數  $a$ ，則最後生存者編號  $b$  時，如果總人數  $a$ 、最後生存者編號  $b$  時，顯然  $b \leq a$ ，若  $b < a - 1$ ，則人數  $a + 1$  時，最後生存者編號為  $b + P$ 。

因此， $b_n = B_k + P \times (n - A_k)$ ，若最後生存者編號  $b$  的值  $>$  總人數  $a$  的值時，最後生存者編號  $b$  的值要再減去總人數  $a$  的值，公式如下所示。

(1)  $B_k$  必為介於  $0 < B_k < P$  的所有可能整數，亦即  $B_k = 1$  或  $2$  或  $3$  或  $4 \cdots \cdots$  或  $(P - 1)$

$$(2) A_{k+1} = A_k + \left[ \frac{A_k - B_k}{P - 1} \right] + 1$$



$$(3) B_{k+1} = \begin{cases} 1 & (A_k - B_k) \div (P-1) \text{ 餘 } P-2 \\ 2 & (A_k - B_k) \div (P-1) \text{ 餘 } P-3 \\ \dots & \\ P-2 & (A_k - B_k) \div (P-1) \text{ 餘 } 1 \\ P-1 & (A_k - B_k) \div (P-1) \text{ 餘 } 0 \end{cases}$$

二、將每 3 個一數的「表 4：特殊總人數例子推算表」或每 5 個一數的「表 7：特殊總人數例子推算表」表列出來。如果總人數 a 已知，而且總人數 a 在表 4(每 3 個一數)或表 7(每 5 個一數)的「特殊總人數例子推算表」中介於  $A_k$  與  $A_{k+1}$  之間，則最後生存者編號  $b = B_k + P \times (n - A_k)$ 。每 7 個一數、每 9 個一數或每 10 個一數，皆與每 3 個一數一樣，有相同的規則性。

## 柒、參考書目

- 一、五上數學課本(2012)。康軒文教事業
- 二、芳澤光雄(2005)。打擊數怪獸。台北：時報出版社
- 三、黛安·歐其翠(2005)。嘿！圖表真好用。台北：遠流出版公司

## 捌、附錄

表 8：最後生存者編號表(每 7 個一數)

總人數 a	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
最後生存者 編號 b	5	4	2	9	5	12	6	13	5	12	2	9	16	3	10	17	1	8	15	22	2

總人數 a	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
最後生存者 編號 b	9	16	23	30	5	12	19	26	33	3	10	17	24	31	38	2	9	16	23	30	37

總人數 a	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
最後生存者 編號 b	44	1	8	15	22	29	36	43	50	57	5	12	19	26	33	40	47	54	61	68	6

總人數 a	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
最後生存者 編號 b	13	20	27	34	41	48	55	62	69	76	3	10	17	24	31	38	45	52	59	66	73

總人數 a	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
最後生存者 編號 b	80	87	1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106	4	11	18

表 9：最後生存者編號表(每 9 個一數)

總人數 a	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最後生存者 編號 b	8	7	5	2	11	6	15	8	17	8	17	6	15	2	11	20	4	13	22	3	12

總人數 a	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
最後生存者 編號 b	21	30	7	16	25	34	7	16	25	34	3	12	21	30	39	3	12	21	30	39	48

總人數 a	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
最後生存者 編號 b	6	15	24	33	42	51	3	12	21	30	39	48	57	2	11	20	29	38	47	56	65

總人數 a	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
最後生存者 編號 b	2	11	20	29	38	47	56	65	74	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	1	10

總人數 a	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
最後生存者 編號 b	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96

表 10：最後生存者編號表(每 10 個一數)

總人數 a	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
最後生存者 編號 b	8	7	5	2	12	7	1	11	3	13	3	13	1	11	21	6	16	26	8	18	28

總人數 a	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
最後生存者 編號 b	7	17	27	3	13	23	33	5	15	25	35	3	13	23	33	43	6	16	26	36	46

總人數 a	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
最後生存者 編號 b	4	14	24	34	44	54	6	16	26	36	46	56	2	12	22	32	42	52	62	1	11

總人數 a	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
最後生存者 編號 b	21	31	41	51	61	71	2	12	22	32	42	52	62	72	82	4	14	24	34	44	54

總人數 a	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114
最後生存者 編號 b	64	74	84	94	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106	7	17	27	37	47	57

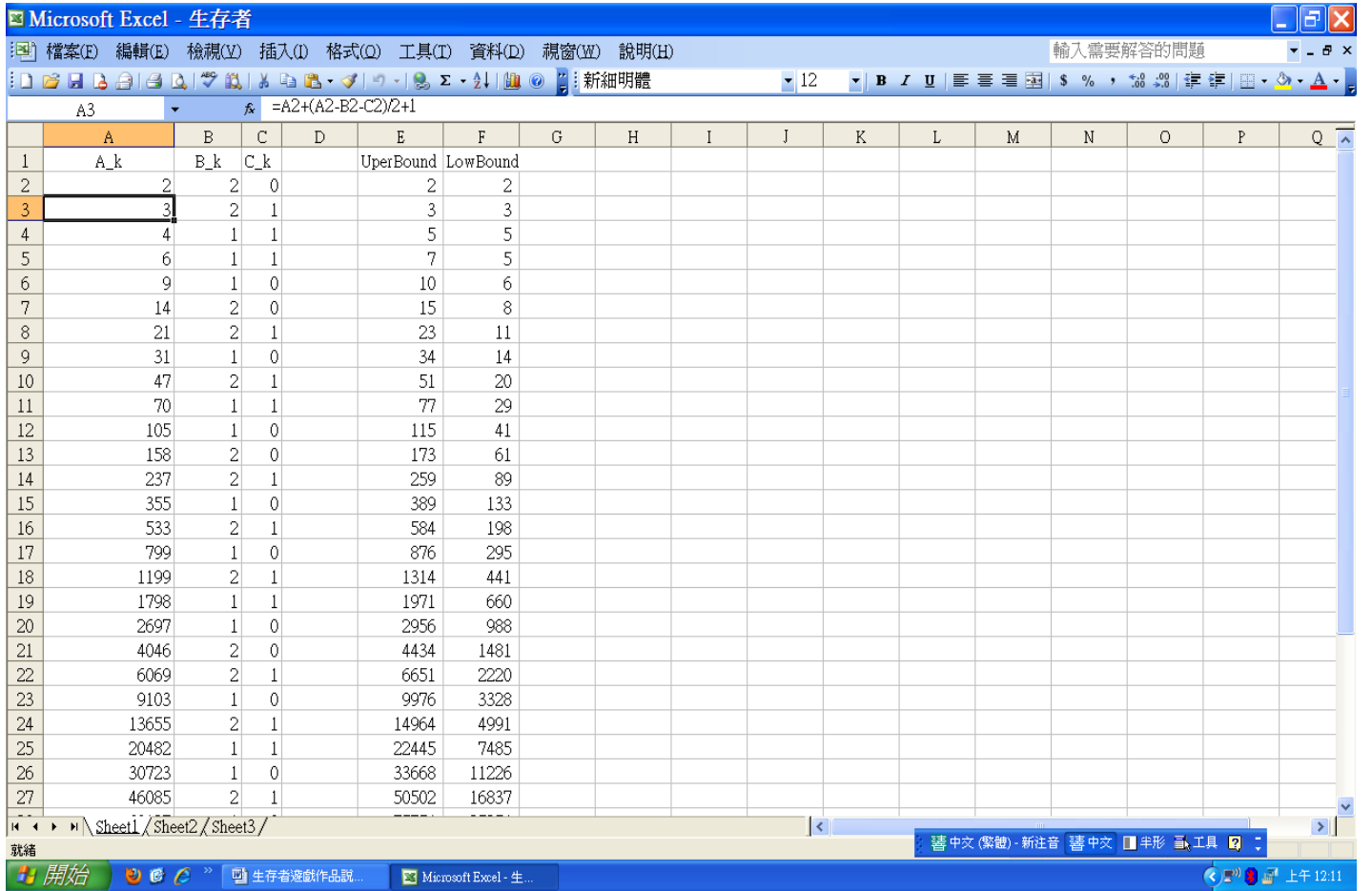


圖 5：利用 Excel 計算特殊總人數和估計  $A_{k+1}$  值

## 【評語】 080408

由一個古老的故事出發，引發一系列有趣的數學探索，過程中輔以圖與表來協助歸納與分析，是具體可行的解題策略。惟數學內涵可望再深化，將可更加提升本作品的質量與厚度。