中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

080407

端午現「粽」影，但見「形」與「數」

學校名稱：屏東縣南州鄉同安國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳羽品	梁惠珍
小六 陳羽宣	謝誠文
小六 倪意涵	
小六 倪其華	

關鍵詞：三角形數、三稜錐數、形數

端午現「粽」影，但見「形」與「數」

摘要

是端午節的應景物，更是生活中常見的「三角錐」。在不同顆數的珠子串所堆疊成不同層數的珠子粽裡，存在著「形」與「數」的有趣數學。珠子粽裡的形，有「三角形」和「三角錐」；而珠子粽裡的數，一共有三種數量關係。首先是，珠子粽的〝半粽〞中，所使用的珠子串，具有「顆數+串數=層數+1」的數量關係；其次是，珠子粽的側面和底面都是三角形，而珠子粽由上而下的每一層珠子數，是「三角形數」的數量關係，其計算公式為 $T_n = n \times (n+1) \div 2$；再者是，不同層數珠子粽的珠子總數，是「三稜錐數」的數量關係，其計算公式為 $S_n = n \times (n+1) \times (n+2) \div 6$。

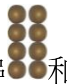
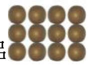
關 鍵 詞：三角形數、三稜錐數、形數

壹、研究動機

是端午節的應景物，更是生活中常見的「三角錐」。利用 6 串不同顆數的珠子串，可以拼成一個三角錐形的珠子粽。這個珠子粽，每邊都有 4 顆珠子，全部共有 20 顆珠子，而且由上而下一共有四層，第一層有 1 顆珠子，第二層有 3 顆珠子，第三層有 6 顆珠子，第四層有 10 顆珠子。而這個四層珠子粽的每一層珠子數量(如圖 1)和六上數學所學到的「三角形數」(如圖 2)是一樣的。

圖 1 四層珠子粽每一層珠子數

圖 2 三角形數(引自康軒六上數學課本 p72，詳見附錄一)

我們好奇著：用 2 串 4 顆的珠子串和 4 串 3 顆的珠子串，可以排出四層的珠子粽。那五層的珠子粽要用那些珠子串來排？總共會有幾顆珠子？六層、七層、八層……的珠子粽又是需要那些珠子串？這些不同層數珠子粽的珠子總數又是幾顆？有沒有像求三角形數一樣的計算方法，可以快速找到不同層數珠子粽所需要的珠子總數？

貳、研究目的與問題

在這個研究中，我們希望找出珠子串堆疊成珠子粽的規律；以及找出不同層數珠子粽所需要珠子總數的計算公式。所以，我們想要研究的問題有二：

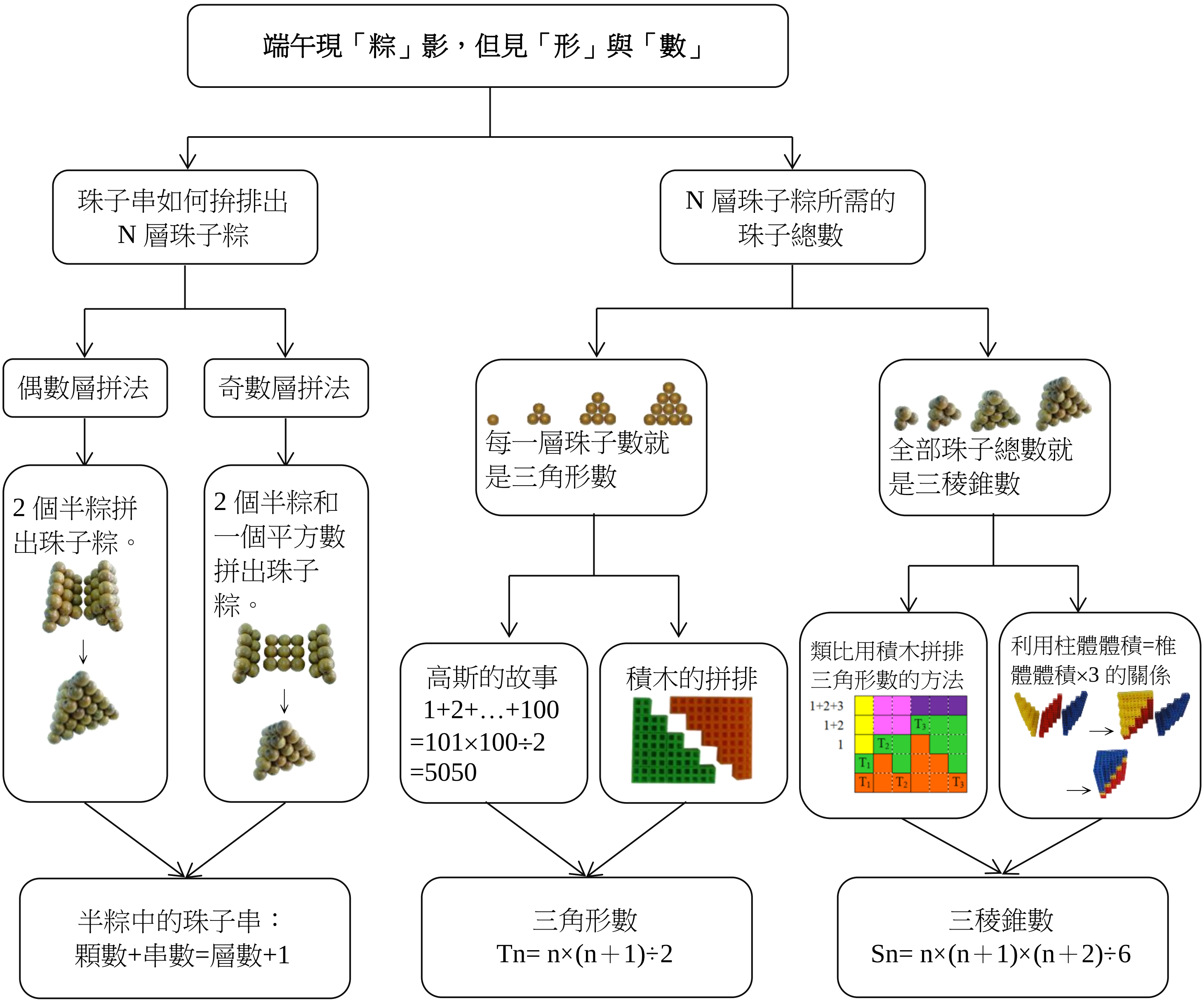
1. 不同顆數的珠子串，堆疊成不同層數的珠子粽時，其規律性為何？
2. 如何計算 N 層珠子粽中的珠子總數？

參、研究設備及器材

珠子、細竹籤、白膠、熱熔膠、2 公分立方的積木。

肆、研究過程或方法

一、研究架構與流程



二、符號定義與名詞釋義

(一) 符號定義

為了敘述方便，定義下列符號：

1. 以ⓝ表示有幾顆珠子的珠子串。如②表示有 2 顆珠子的珠子串；③表示有 3 顆珠子的珠子串；④表示有 4 顆珠子的珠子串；⑤表示有 5 顆珠子的珠子串；⑥表示有 6 顆珠子的珠子串；⑦表示有 7 顆珠子的珠子串；……以此類推。
2. 以 Tn 表示第 n 個三角形數的數量。如 T_1 表示第 1 個三角形數數量(T_1=1)；T_2 表示第 2 個三角形數數量(T_2=3)；T_3 表示第 3 個三角形數數量(T_3=6)；T_4 表示第 4 個三角形數數量(T_4=10)；T_5 表示第 5 個三角形數數量(T_5=15)；……以此類推。
3. 以 Sn 表示不同層數珠子粽所需要的珠子總數。如 S_2 表示二層珠子粽所需要的珠子總數(S_2=4)；S_3 表示三層珠子粽所需要的珠子總數(S_3=10)；S_4 表示四層珠子粽所需要的珠子總數(S_4=20)；S_5 表示五層珠子粽所需要的珠子總數(S_5=35)；S_6 表示六層珠子粽所需要的珠子總數(S_6=56)；S_7 表示七層珠子粽所需要的珠子總數(S_7=84)；……以此類推。

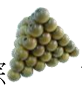
(二) 名詞釋義

1. 三角形數：由點子、花片或積木排成三角形的數量關係，如：

T_1=1　T_2=3　T_3=6　T_4=10　T_5=15

2. 三稜錐數：點子、花片或積木排列成三角錐的數量關係，如：

S_1=1　S_2=4　S_3=10　S_4=20　S_5=35

3. 珠子粽：由珠子串所堆疊成三角錐狀的粽子形，如。
4. 半粽：珠子粽切一半之後的形體，如六層珠子粽切一半之後的〝半粽〞就是。

三、文獻探討

(一) 三角形數的定義與公式

1. 三角形數的定義

三角形數 Triangular numbers(如圖 3)就是由排列成三角形的點子數量而得的一種數，其數列依序為 1，3，6，10，15，21，......，[n×(n＋1)÷2](吳振奎，2005；孫文先，1996；梁惠珍、柳賢，2008；Frobisher, et al., 1999)。

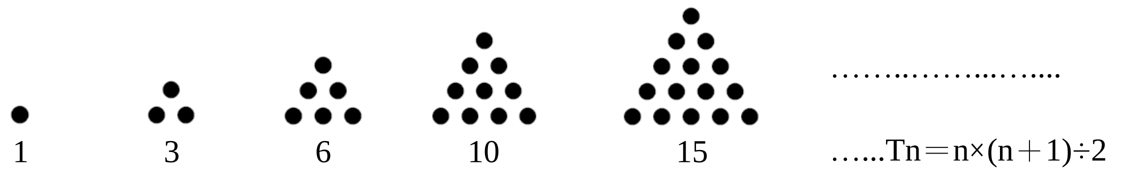


圖 3　三角形數 Triangular numbers(引自梁惠珍、柳賢，2008)

2. 三角形數的計算公式

關於三角形數的計算公式 n×(n＋1)÷2，可以透過數學王子高斯的故事和積木的拼排來了解：

(1) 數學王子高斯的故事

有一天，高斯的老師要求全班同學算出「1+2+3+.........+98+99+100=?　」當老師把問題講完不久，高斯馬上說出 5050 的答案(王懷權，1997)。原來，高斯的算法是：

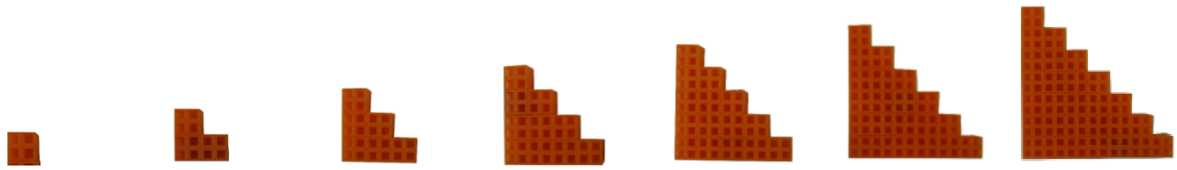
1 ＋ 2 ＋ 3＋……………………＋98＋99＋100
100＋99 ＋98＋……………………＋ 3＋ 2＋ 1
101＋101＋101＋…………………＋101＋101＋101＝101×100＝10100
10100 ÷2＝5050

高斯所回答的這個數量問題，其實就是第 100 個三角形數的計算方法：

$$T_{100}= 101\times100\div2=100\times101\div2=100\times(100+1)\div2=5050$$

(2) 積木的拼排

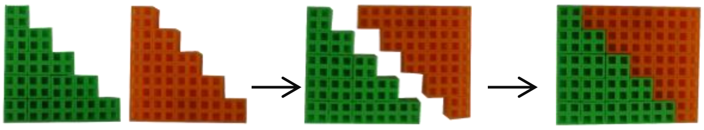
我們發現，用邊長 2 公分的立方積木，也可以排出三角形數的數量(如圖 4)，而且利用 2 組積木所排出的三角形數，也可以快速找到三角形數的計算方法。



T_1=1　T_2=3　T_3=6　T_4=10　T_5=15　T_6=21　T_7=28

圖 4　用邊長 2 公分的立方積木所排出的三角形數

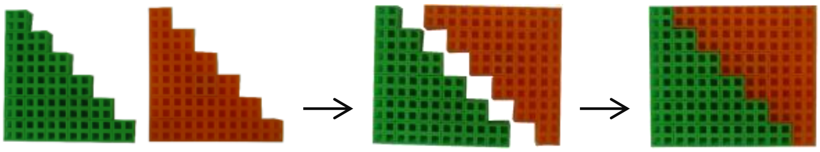
以 T_5 為例，2 組積木所排出三角形數 T_5 的解題步驟及計算方法如下圖 5：



$T_5 = 5\times(5+1)\div 2=5\times 6\div 2=15$

圖 5 三角形數 T_5 的解題步驟及計算方法

再以 T_6 為例，2 組積木所排出三角形數 T_6 的解題步驟及計算方法如下圖 6：



$T_6=6\times(6+1)\div 2=6\times 4\div 2=21$

圖 6 三角形數 T_6 的解題步驟及計算方法

(3) 小結

透過數學王子高斯的故事和積木的拼排，可知三角形數的計算公式如同梯形面積公式。所以第 n 個三角形數 $T_n= n\times(n+1)\div 2$。

(二) 三稜錐數的定義與公式

將三角形數一層一層疊放成三角錐形狀(如圖 7)，其所得點子數量的總數稱為「三稜錐數 Tetrahedral numbers」，其數列依序為 1，4，10，20，35，56，......，[n×(n＋1)×(n＋2)÷6] (梁惠珍、柳賢，2008；Radoslav Jovanovic, 2003)。

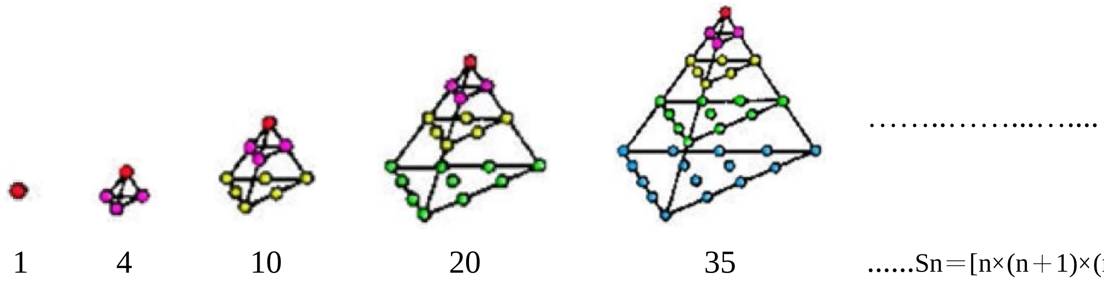


圖 7 三稜錐數 Tetrahedral numbers

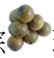
（引自 Radoslav Jovanovic, 2003. From http://milan.milanovic.org/math/english/tetrahedral/tetrahedral.html）

此外，三稜錐數亦稱「四面體數」：

四面體數或三角錐體數是可以排成底為三角形的錐體（即四面體）的數。四面體數每層為三角形數，其公式是首 n 個三角形數之和，即 $n(n+1)(n+2)/6$。其首幾項為：1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120。

摘自維基百科(2014)。四面體數。

另外，在李儼、杜石然(1997)所著《中國古代數學簡史》一書，我們進一步知道，原來類似珠子粽的珠子堆疊問題，早在宋元時期就有數學家開始研究了，而記載較為詳細的當推南宋的數學家楊輝，只是當時的數學家不是將「三稜錐數」稱為四面體數或三角錐體數，而是將「三稜錐數」稱為「三角垛」。

由上可知，不同珠子串所排出的不同層數珠子粽，所需要的珠子總數就是三稜錐數，其中二層珠子粽珠子總數 $S_2=4$；三層珠子粽珠子總數 $S_3=10$；四層珠子粽珠子總數 $S_4=20$；五層珠子粽珠子總數 $S_5=35$；……；n 層珠子粽珠子總數 Sn ＝n×(n＋1)×(n＋2)÷6。

從資料的閱讀中，我們得知三稜錐數的計算公式是 n×(n＋1)×(n＋2)÷6，但對於如何求得這個公式卻是一頭霧水。因此，我們希望透過這個研究，採用我們可以理解的方式來找尋出三稜錐數的計算公式為何是 n×(n＋1)×(n＋2)÷6。

四、珠子串製作

為解決不同珠子串的問題，我們找來了珠子椅墊，將椅墊上的每顆珠子拆下來，再用竹籤串接珠子中間的洞，使不同顆數的珠子連成一串後，用白膠或熱熔膠連接起來。我們先各做 10 串②顆、③顆、④顆、⑤顆、⑥顆、⑦顆、⑧顆、⑨顆和⑩顆的珠子串，並利用這些珠子串來嘗試堆疊出二層、三層、四層、五層、六層、七層、八層、九層和十層的珠子粽。關於珠子串的製作過程如下圖 8。

找來了珠子椅墊　　拆剪椅墊上的珠子　　用竹籤串接珠子　　完成珠子串

圖 8 珠子串的製作過程

五、珠子粽拼排

在用珠子串堆疊珠子粽的過程中，我們遇到了另一個問題：珠子粽的堆疊方式不唯一。以四層珠子粽來說，除了可用 2 串 4 顆的珠子串和 4 串 3 顆的珠子串來拼排之外，也可以用 4 串 3 顆的珠子串和 4 串 2 顆的珠子串來拼排出四層珠子粽。因此，**我們約定：同一排的珠子串，除非轉向(平放跟豎立不同)，不然不可以拼接**。換言之，如果是平放的這一排需要④顆珠子，就要用④顆的珠子串，不能用 2 串②顆的珠子串來拼接，而豎立的珠子串擺放也是一樣不能拼接。我們發現，**這樣的約定可以用最少串的珠子串來堆疊珠子粽，而且這樣的約定可以使不同層珠子粽只使用唯一的珠子串顆數和串數**。關於珠子粽的拼排過程如下圖 9(以五層珠子粽的拼法為例)。

先平放 1 串⑤顆，再平放 2 串④顆。

平放(或豎立) 3 串③顆

先豎立 2 串④顆，再豎立 1 串⑤顆。

圖 9 五層珠子粽的拼排過程

六、三稜錐數拼排

我們知道用積木所拼成的 2 組三角形數，可以拼出一個長方形，並進一步找到三角形數計算公式：$T_n = n\times(n+1)\div 2$ (如圖 5、圖 6)。所以，我們也想類比尋找三角形數的方法，改用積木來堆疊出二～十階的三稜錐數，看看能不能類比三角形數的方法，來找出三稜錐數的計算公式。然而，應該怎麼用積木疊出三稜錐數呢？

我們發現，平時在玩的索馬立方塊中(如附錄 2)，就有三個立體積木(如圖 10)，都是第二個三稜錐數的排列，我們可以參考這樣的排列，排出第 1 到第 10 個三稜錐數(如圖 11、圖 12)。

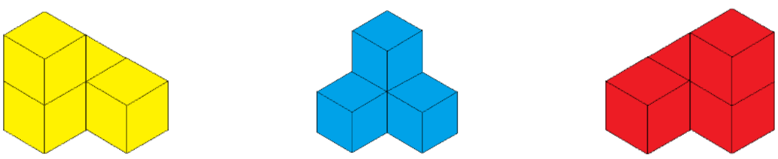


圖 10 索馬立方塊中具第 2 個三稜錐數數量的積木拼法

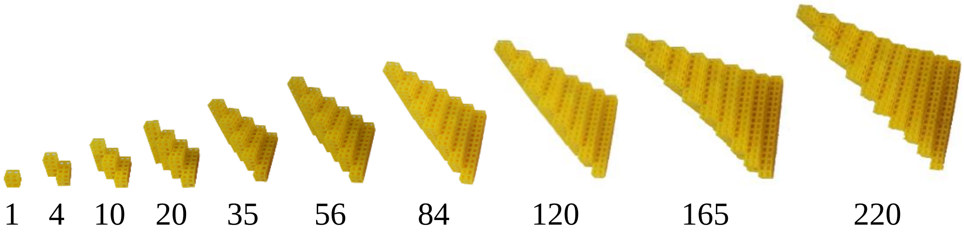


圖 11　用積木所呈現的三稜錐數方式一

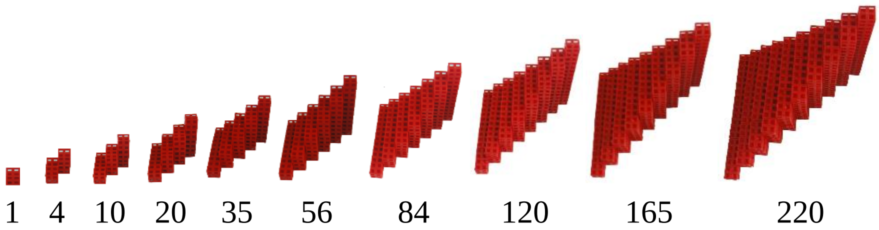


圖 12　用積木所呈現的三稜錐數方式二

此外，在六下第四單元柱體體積的學習中，知道相同底面積及高的柱體和錐體，柱體體積=錐體體積×3。因此，我們猜想是不是可以用以下 2 種方法來尋找三稜錐數的計算公式：$S_n=n\times(n+1)\times(n+2)\div 6$。

猜想一：能否類比三角形數的計算方法，將三稜錐數拼排成一個長方形，來尋找三稜錐數的計算規律。

猜想二：能否利用「柱體體積=錐體體積×3」的關係，用 3 組三稜錐數拼成一個相同底面積的柱體。

(一) 猜想一的實作：3 組三稜錐數拼排成一個長方形

透過猜想一，我們類比研究問題二中尋找三角形數的方法，試圖將 2 組三稜錐數拼排成一個長方形。所以我們分解三稜錐數中的每一層三角形數，並類比三角形數兩兩排排成長方形的感覺。但我們發現：需要補上另一種形式的三角形數才能拼成一個長方形(如圖 13)，所以總共是需要 3 組三稜錐數才能拼排成一個長方形。

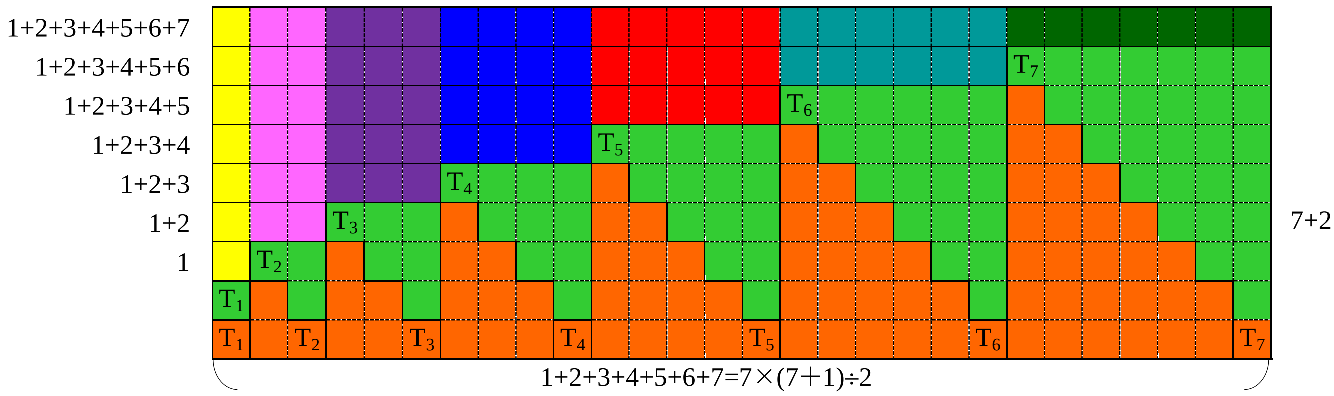


圖 13　3 組三稜錐數拼排成一個長方形

(二) 猜想二的實作：3 組三稜錐數拼排成一個相同底面積的柱體

透過猜想二，我們猜想 3 組三稜錐數可以拼成一個柱體，我們用圖 11 和圖 12 中的三稜錐數來嘗試，發現真的可以用 3 組三稜錐數拼成一個柱體。以下以第五個三稜錐數來說明如何將 3 組三稜錐數拼成一個柱體的實作過程(如圖 14)。

1. 用 1 組圖 11 的三稜錐數(黃色)，2 組圖 12 的三稜錐數(紅色和藍色) 。
2. 將黃色三稜錐數向右翻轉，疊在紅色三稜錐數之上。
3. 將藍色三稜錐數逆時針旋轉 90 度。
4. 將藍色三稜錐數往上翻轉 180 度。
5. 將藍色三稜錐數疊在黃色三稜錐數。
6. 形成一個底面積為第五個三角形數(5+1) ×5÷2=15，高為(5＋2)的柱體。

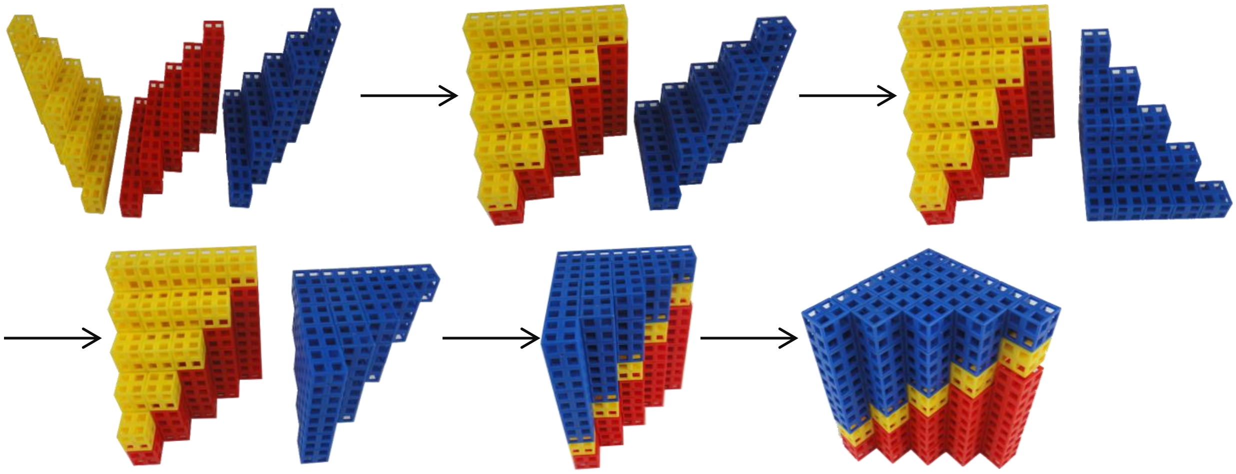


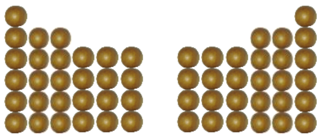
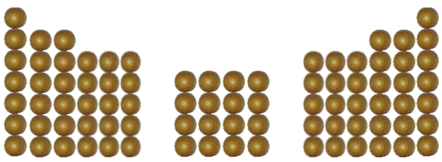
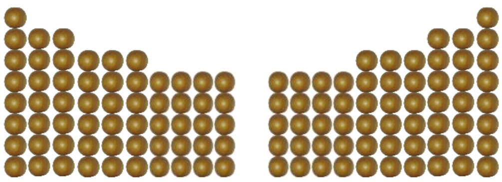
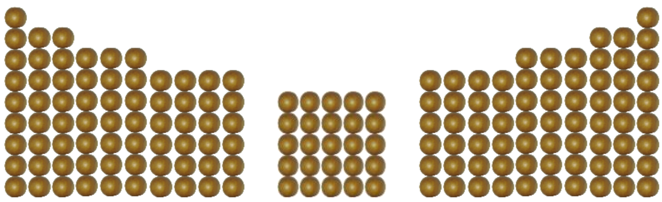
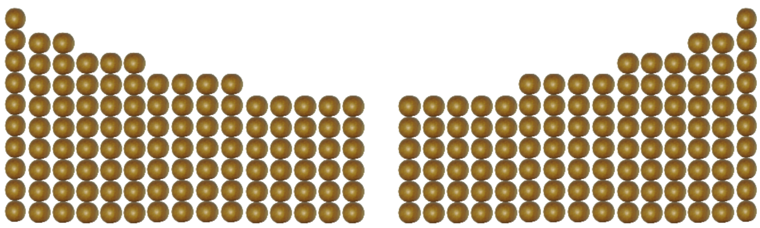
圖 14　3 組三稜錐數拼成一個柱體

伍、研究結果

一、珠子串拼排不同層數珠子粽的結果

我們將二層～十層珠子粽的拼排結果整理如表 1。

表 1 不同層數珠子粽的堆疊情形。

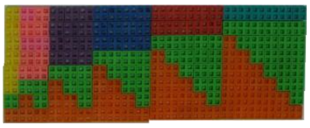
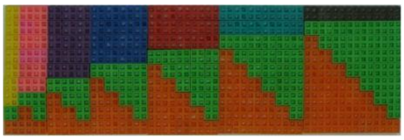
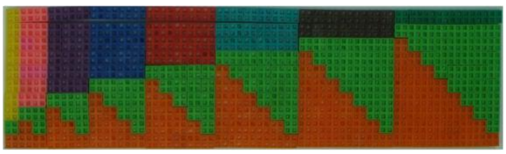
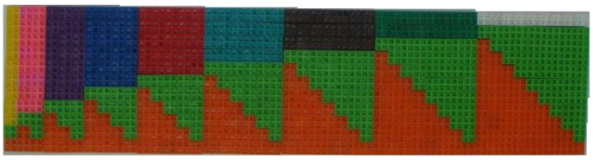
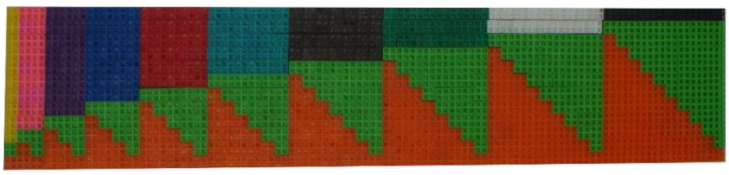
層數	珠子粽	所需要最少串的珠子串 (平放最多顆→平放最少顆→豎立最少顆→豎立最多顆)	珠子串 顆數與串數	總顆數
一			①：1 串	1
二			②：2 串	4
三			③：2 串 ②：2 串	10
四			④：2 串 ③：4 串	20
五			⑤：2 串 ④：4 串 ③：3 串	35
六			⑥：2 串 ⑤：4 串 ④：6 串	56
七			⑦：2 串 ⑥：4 串 ⑤：6 串 ④：4 串	84
八			⑧：2 串 ⑦：4 串 ⑥：6 串 ⑤：8 串	120
九			⑨：2 串 ⑧：4 串 ⑦：6 串 ⑥：8 串 ⑤：5 串	165
十			⑩：2 串 ⑨：4 串 ⑧：6 串 ⑦：8 串 ⑥：10 串	220

二、三稜錐數的拼排結果

(一) 猜想一的實作結果

我們將猜想一的實作和計算的結果整理如表 2。

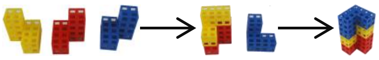
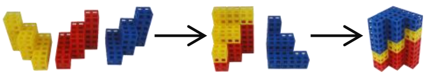
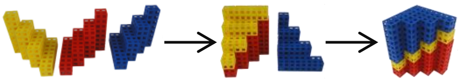
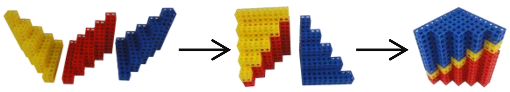
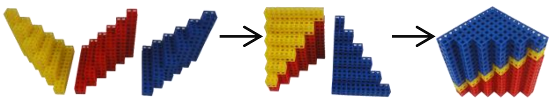
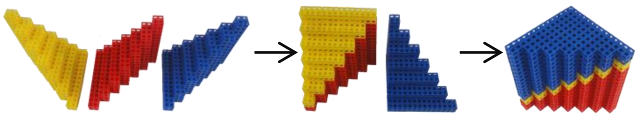
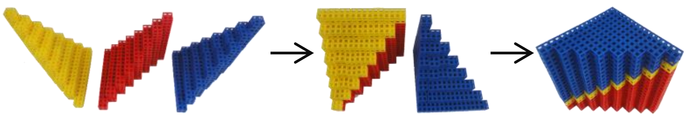
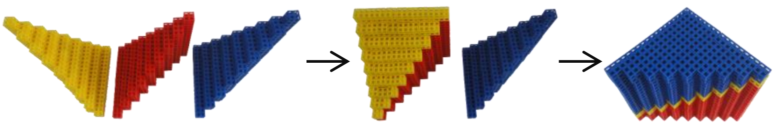
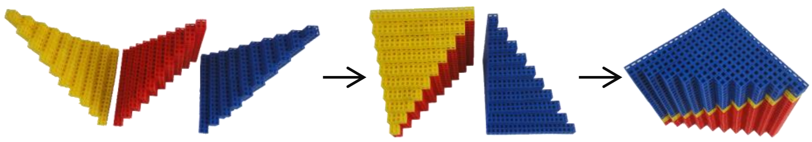
表 2　三稜錐數拼排成長方形的規律

層數	三稜錐數拼排成長方形	全部的積木數	三稜錐數
二層		$3\times4=12$ $\rightarrow(2+1)\times2\div2\times4$ $\rightarrow2\times(2+1)\times(2+2)\div2$	**4** $=2\times(2+1)\times(2+2)\div6$
三層		$6\times5=30$ $\rightarrow(3+1)\times3\div2\times5$ $\rightarrow3\times(3+1)\times(3+2)\div2$	**10** $=3\times(3+1)\times(3+2)\div6$
四層		$10\times6=60$ $\rightarrow(4+1)\times4\div2\times6$ $\rightarrow4\times(4+1)\times(4+2)\div2$	**20** $=4\times(4+1)\times(4+2)\div6$
五層		$15\times7=105$ $\rightarrow(5+1)\times5\div2\times7$ $\rightarrow5\times(5+1)\times(5+2)\div2$	**35** $=5\times(5+1)\times(5+2)\div6$
六層		$21\times8=168$ $\rightarrow(6+1)\times6\div2\times8$ $\rightarrow6\times(6+1)\times(6+2)\div2$	**56** $=6\times(6+1)\times(6+2)\div6$
七層		$28\times9=252$ $\rightarrow(7+1)\times7\div2\times9$ $\rightarrow7\times(7+1)\times(7+2)\div2$	**84** $=7\times(7+1)\times(7+2)\div6$
八層		$36\times10=360$ $\rightarrow(8+1)\times8\div2\times10$ $\rightarrow8\times(8+1)\times(8+2)\div2$	**120** $=8\times(8+1)\times(8+2)\div6$
九層		$45\times11=495$ $\rightarrow(9+1)\times9\div2\times11$ $\rightarrow9\times(9+1)\times(9+2)\div2$	**165** $=9\times(9+1)\times(9+2)\div6$
十層		$55\times12=660$ $\rightarrow(10+1)\times10\div2\times12$ $\rightarrow10\times(10+1)\times(10+2)\div2$	**220** $=10\times(10+1)\times(10+2)\div6$

(二) 猜想二的實作結果

我們將猜想二的實作和計算的結果整理如表 3。

表 3　三稜錐數拼排成柱體的規律

層數	三稜錐數成柱體	全部的積木數	三稜錐數
二層		$3\times4=12$ $\rightarrow(2+1)\times2\div2\times4$ $\rightarrow2\times(2+1)$ $\times(2+2)\div2$	**4** $=2\times(2+1)\times(2+2)\div6$
三層		$6\times5=30$ $\rightarrow(3+1)\times3\div2\times5$ $\rightarrow3\times(3+1)$ $\times(3+2)\div2$	**10** $=3\times(3+1)\times(3+2)\div6$
四層		$10\times6=60$ $\rightarrow(4+1)\times4\div2\times6$ $\rightarrow4\times(4+1)$ $\times(4+2)\div2$	**20** $=4\times(4+1)\times(4+2)\div6$
五層		$15\times7=105$ $\rightarrow(5+1)\times5\div2\times7$ $\rightarrow5\times(5+1)$ $\times(5+2)\div2$	**35** $=5\times(5+1)\times(5+2)\div6$
六層		$21\times8=168$ $\rightarrow(6+1)\times6\div2\times8$ $\rightarrow6\times(6+1)$ $\times(6+2)\div2$	**56** $=6\times(6+1)\times(6+2)\div6$
七層		$28\times9=252$ $\rightarrow(7+1)\times7\div2\times9$ $\rightarrow7\times(7+1)$ $\times(7+2)\div2$	**84** $=7\times(7+1)\times(7+2)\div6$
八層		$36\times10=360$ $\rightarrow(8+1)\times8\div2$ $\times10$ $\rightarrow8\times(8+1)$ $\times(8+2)\div2$	**120** $=8\times(8+1)\times(8+2)\div6$
九層		$45\times11=495$ $\rightarrow(9+1)\times9\div2$ $\times11$ $\rightarrow9\times(9+1)$ $\times(9+2)\div2$	**165** $=9\times(9+1)\times(9+2)\div6$
十層		$55\times12=660$ $\rightarrow(10+1)\times10\div2$ $\times12$ $\rightarrow10\times(10+1)$ $\times(10+2)\div2$	**220** $=10\times(10+1)\times(10+2)$ $\div6$

陸、討論

一、珠子串拼排不同層數珠子粽的規律

(一) 觀察到的現象

1. 奇數層的珠子粽中：
   1.1 中間會有一個平方數(珠子串的顆數和串數一樣多)
   1.2 中間形成平方數的珠子串，擺放的方向可以平放也可以豎立。
   1.3 扣掉中間形成平方數的珠子串，平放與豎立的珠子串，在珠子串的顆數和串數上一樣多。
2. 偶數層的珠子粽中：
   2.1 不同顆數的珠子串，串數都是偶數個。
   2.2 平放與豎立的珠子串，在珠子串的顆數和串數上一樣多。
   2.3 平放珠子串與豎立珠子串中間的區別面，好像粽子的綁線位置(如圖 15)。

圖 15　偶數層珠子粽中間的區別面與粽子的綁線位置

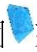
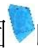
3. 對稱的現象：
   3.1 偶數層珠子粽中，如果一把拿起豎立的珠子串並旋轉 90 度後，可以發現這些珠子串所形成的形體，與平放的珠子串產生對稱。
   3.2 奇數層珠子粽，如果排開中間的平方數珠子串，也會得到兩個對稱的形體。


(六層珠子粽)


(五層珠子粽)

圖 16　珠子粽中平放的珠子串和豎立的珠子串所形成的形體

(二) 分析與討論

1. 偶數層的珠子粽，平放與豎立的珠子串，根本就是對切的兩半，所以我們推論應該就是〝半粽〞的形體(粽子切一半之後的樣子)。但我們該如何找出半粽的形體和粽子的切面(綁粽子的那條線所形成的切面)？
2. 在臺灣師範大學附屬高級中學彭良禎老師的個人網站上，我們找到了三角錐(正四面體)的切割(如圖 17)。圖 17 中，用了 2 個來拼成一個三角錐，而這 2 個的接面，正是綁粽子的那條線所在位置，而且 2 個的接合面是一個正方形。

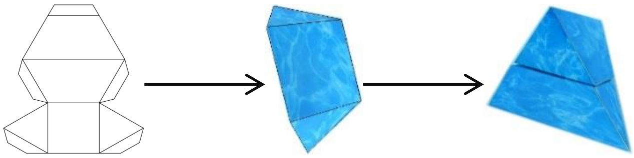
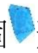


圖 17 三角錐的切割

3. 三角錐可以用 2 個來拼排。所以在偶數層珠子粽裡，因為是偶數，所以可以對分。但奇數層珠子粽，有 2 個部分是對稱，但中間有平方數的珠子串，這個形成平方數的珠子串，應該跟 2 個的接合面是正方形有關。

4. 以偶數層(八層)珠子粽來說，因為 8÷2=4，所以可以用 2 個形體的珠子串來拼成一個八層珠子粽，而每個形成形體的珠子串會有四層。因為八層珠子粽的邊要有⑧顆珠子，排列的方式是先平放⑧顆 1 串，再往前和往上個增加 1 串⑦顆，以此類推，往前增加的珠子串，顆數會減少，但串數會加 1。總計，在八層珠子粽中所需珠子串的顆數和串數規律是，做出 2 個形體的珠子半粽形體(需⑧顆 1 串，⑦顆 2 串，⑥顆 3 串，⑤顆 4 串)就能拼出八層珠子粽。

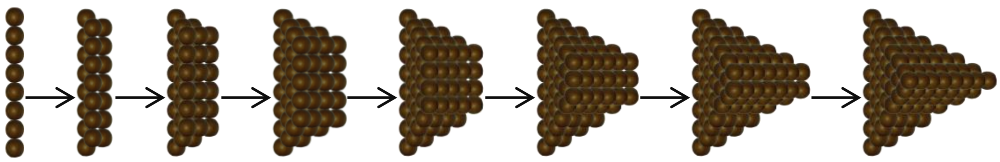
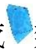


圖 18 八層珠子粽的拼排方式

5. 以奇數層(七層)珠子粽來說，因為 7÷2=3…1，所以無法直接用 2 個形體的相同珠子串直接拼成一個七層珠子粽，而是需要由 2 個類似形體的珠子半粽形體和一個平方數的

珠子串才能拼成一個七層珠子粽，而每個形成類似形體的珠子串會有三層。因為七層珠子粽的邊要有⑦顆珠子，排列的方式是先平放⑦顆 1 串，再往前和往上個增加 1 串⑥顆，以此類推，往前增加的珠子串，顆數會減少，但串數會加 1。總計，在七層珠子粽中所需珠子串的顆數和串數規律是，要先做出 2 個類似形體的珠子半粽形體(需⑦顆 1 串，⑥顆 2 串，⑤顆 3 串)，然後加上④顆 4 串(形成一個平方數)，就能拼出七層珠子粽。

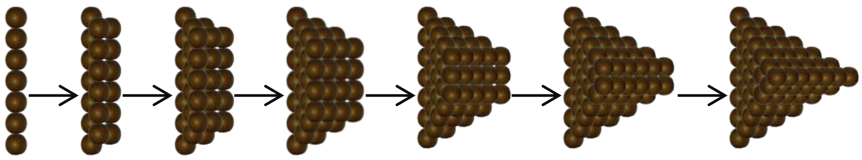


圖 19 七層珠子粽的拼排方式

(三) 歸納與整理

從動手拼珠子粽、紀錄不同層數珠子粽所需顆數和串數，到觀察紀錄結果所發現的現象到討論，我們發現，如果要用最少串數的珠子串來堆疊不同層數的珠子粽時，其規律性如下：

1. 珠子粽的堆疊，在顆數和串數上，有特別的數列關係，而這特別的數列與半粽的形體(粽子切一半之後的樣子)和粽子的切面(綁粽子的那條線所形成的切面)有密切關係。
2. 偶數層的珠子粽，需要用 2 個珠子半粽來拼。其中，珠子串最多的有 n 顆，最少的有(n÷2)+1 顆。而且半粽中，n 顆有 1 串，(n-1)顆有 2 串，(n-2)顆有 3 串，….，(n÷2)+1 顆有(n÷2)串。可見，偶數層的半粽中，滿足「珠子串的顆數+串數=層數+1」的規律。
3. 奇數層的珠子粽，需要一個平方數$[(n+1)÷2]^2$和 2 個類似半粽的珠子半粽來拼。其中，珠子串最多的有 n 顆，最少的有(n+1)÷2 顆。而且 2 個類似半粽的珠子半粽和平方數中，n 顆有 1 串，(n-1)顆有 2 串，(n-2)顆有 3 串，….，(n+1)÷2 顆有(n+1)÷2 串。可見，奇數層的半粽和中間的平方數，都滿足「珠子串的顆數+串數=層數+1」的規律。

二、三稜錐數的計算公式

1. 從類比三角形數的尋找方法中，我們找到 3 組三稜錐數可以拼成一個長為(n＋1)×n÷2，寬為(n＋2)的長方形。透過長方形面積公式(長×寬)，可以算出長方形內所有的積木數量是(n＋1)×n÷2×(n＋2)，並進而得到 3 組三稜錐數的總合是(n＋1)×n÷2×(n＋2)，可寫成 n ×(n＋1)×(n＋2) ÷2，所以第 N 個三稜錐數就是 n ×(n＋1)×(n＋2) ÷2 ÷3，也可寫成 n ×(n＋1)×(n＋2) ÷6。
2. 透過柱體體積是錐體體積×3 的想法，我們找到 3 組三稜錐數可以拼成一個底面積為(n＋1)×n÷2，高為(n＋2)的柱體。透過柱體體積公式(底面積×高) ，可以算出柱體內所有的積木數量是(n＋1)×n÷2×(n＋2)，並進而得到 3 組三稜錐數的總合是(n＋1)×n÷2×(n＋2)，可寫成 n ×(n＋1)×(n＋2) ÷2，所以第 N 個三稜錐數就是 n ×(n＋1)×(n＋2) ÷2 ÷3，也可寫成 n ×(n＋1)×(n＋2) ÷6。

柒、結論

透過以上的研究，我們得到下列結論：

1. 不同層數的珠子粽裡，不但有「形」，也有「數」。
2. 珠子粽裡的「形」是三角形和三角錐。
3. 珠子粽裡的「數」一共有三種數量關係：
   (1) 不同層數的珠子粽，所使用的珠子串，在顆數和串數上，有特別的數量關係，而這特別的數量關係與半粽的形體(粽子切一半之後的樣子)和粽子的切面(綁粽子的那條線所形成的切面)有密切相關。珠子粽裡的第 1 個數量關係就是：半粽中，珠子串的顆數+串數=層數+1。

   (2) 珠子粽的側面和底面都是三角形，而珠子粽由上而下的每一層珠子數，是「三角形數」的數量關係。珠子粽裡的第 2 個數量關係就是：三角形數 $T_n= n\times(n+1)\div2)$。

   (3) 不同層數珠子粽的珠子總數，是「三稜錐數」的數量關係。珠子粽裡的第 3 個數量關係就是：三稜錐數 $S_n= n\times(n+1)\times(n+2)\div6$。

捌、參考資料

吳振奎(2005)。幾個與「形數」有關的問題，數學傳播季刊，29（1）。
李儼、杜石然(1997)。中國古代數學簡史，頁 171-187。臺北：九章出版社。
孫文先編譯(1996)。神祕有趣的數學，頁 40-42。臺北：九章出版社。
袁小明（2003）。數學史，頁 80-87。臺北：九章出版社。
康軒文教(2013)。國民小學數學第 11、12 冊。台北：康軒文教事業股份有限公司。
彭良禎(2012)。粽子裡的趣味數學~摺紙在數學教學的應用－三角錐。
http://www.google.com.tw/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0CDoQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.ntcu.edu.tw%2Fspc%2Fdownload%2F38.doc&ei=r91BU6bhE43DlQWIxICgDQ&usg=AFQjCNH_adwzdfWTXgHMYdW_6GSL0mOXbA&sig2=jAQ8MYmReA-fXXKGVxWrig&bvm=bv.64125504,d.dGI
維基百科(2014)。四面體數。http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9B%E9%9D%A2%E9%AB%94%E6%95%B8。
國家教育研究院(2014)。數學名詞。http://terms.naer.edu.tw/detail/1163801/。
Frobisher, L. Monaghan, J. Orton, A. Orton , J. Roper, T., &.Threlfall, J. (1999). *Learning to teach number: A handbook for students & teachers in the primary school*. Ch17, pp.244-266. United Kingdom: Stanley Thrones Pub Ltd.
Radoslav Jovanovic (2003). *Tetrahedral numbers*, from http://milan.milanovic.org/math/english/tetrahedral/tetrahedral.html

附錄 1 康軒教科書~認識三角形數

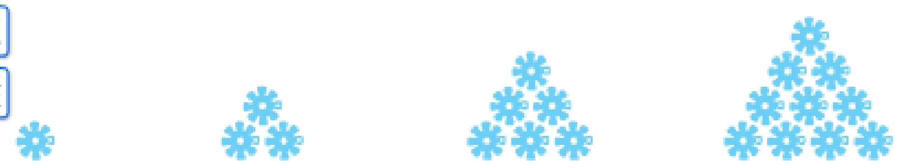
6 上第五單元數量關係，活動二數形的規律，5 認識三角形數，p72。

5 認識三角形數。

解題關鍵 (1) 拿出花片排排看，下面的三角形圖案，各用了幾個花片？

互動解題

解題動畫



圖❶ 圖❷ 圖❸ 圖❹

說說看，你發現了什麼？

(2) 排圖❺要用幾個花片？圖❻呢？

互動解題

解題動畫

由於排出的圖形都是三角形，我們把「1、3、6、10、……」這些數叫作「三角形數」。

(3) 36的下一個「三角形數」是多少？

互動解題

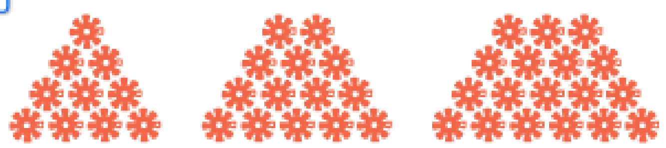
解題動畫

補充活動

做做看

想想看，圖❹要用幾個花片？

互動解題

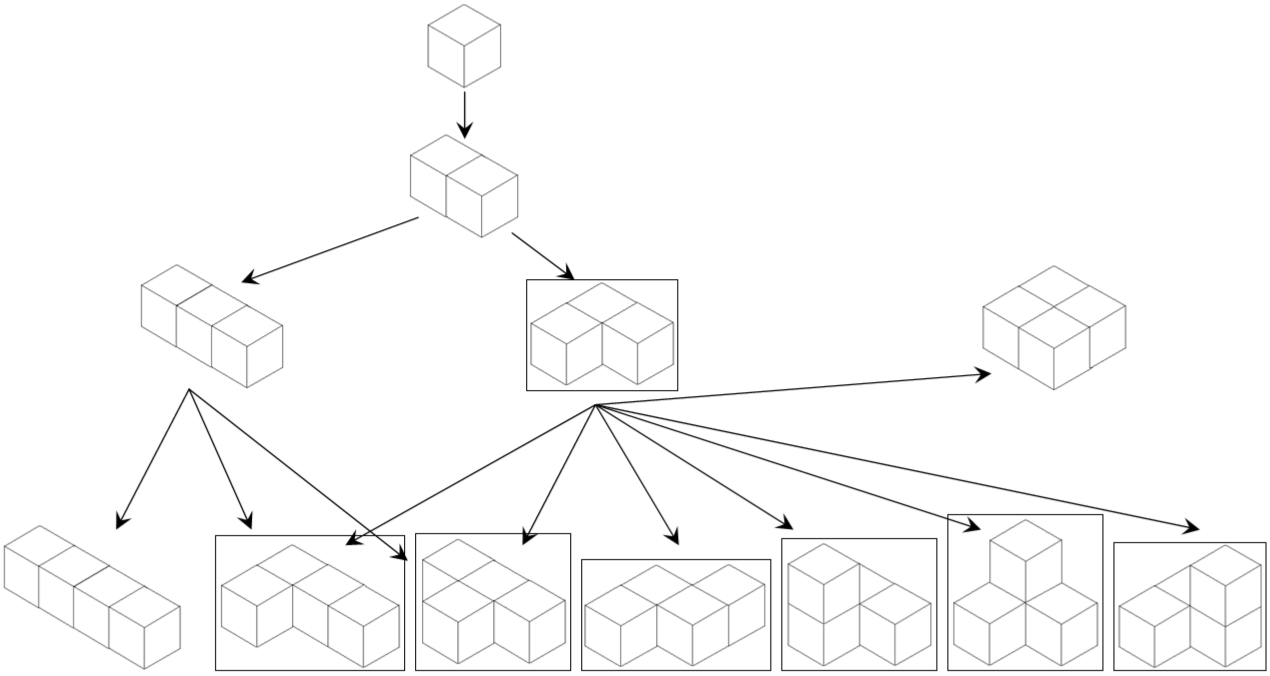


圖❶ 圖❷ 圖❸ 圖❹

72 親師溝通站：建議教師可利用做做看的布題，再提問圖❺、圖❻各要幾個花片，增加學生的練習機會。

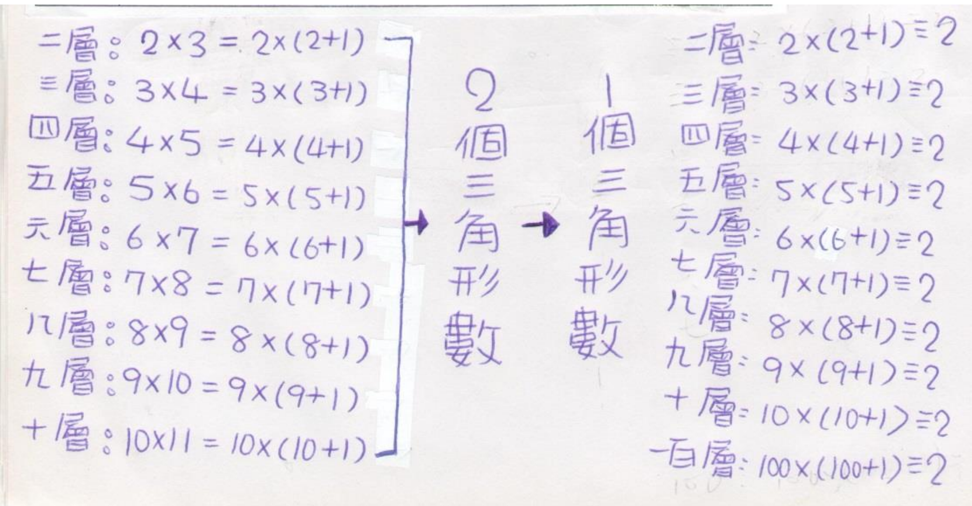
附錄 2 索馬立積木的基本組合

➢ 加框者為 soma 的基本七塊。



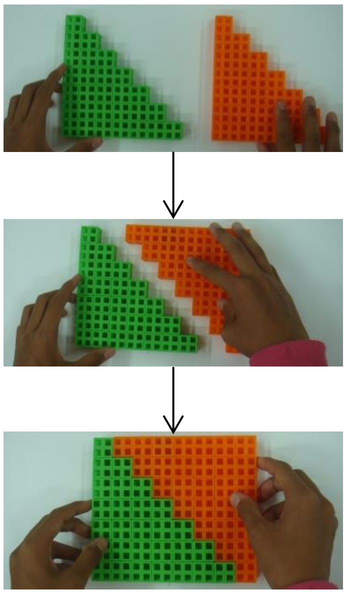
附錄 3 實驗過程中的實作與紀錄

一、三角形數的實作與紀錄

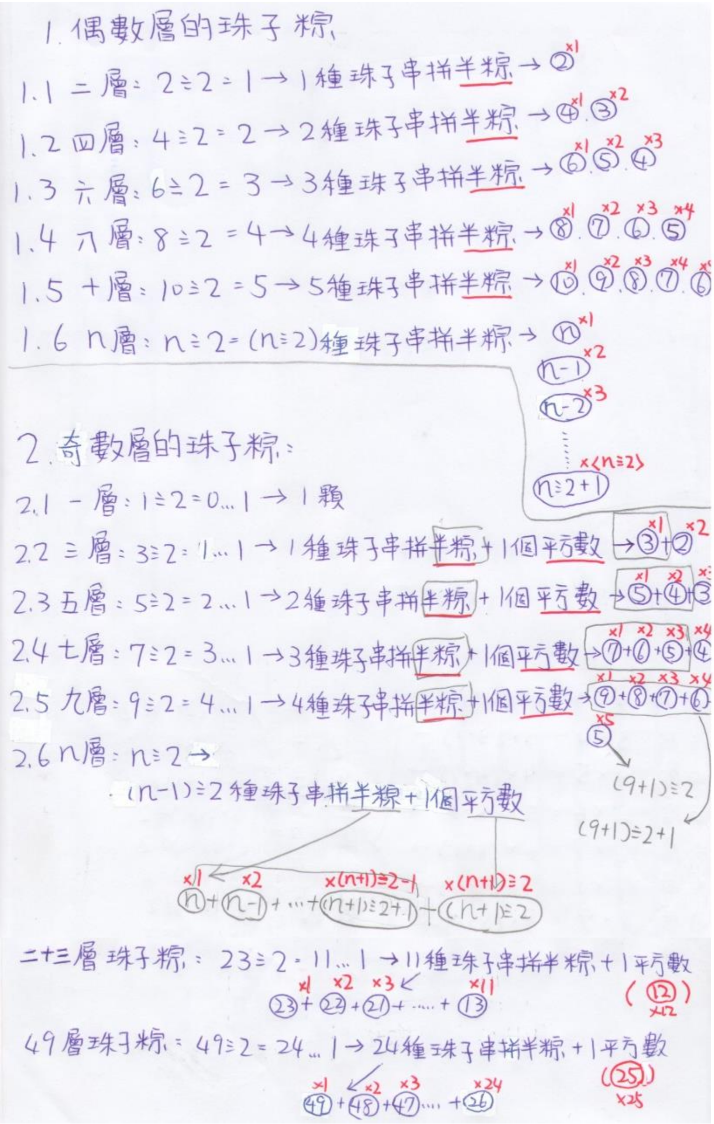

二層：2×3 = 2×(2+1)
三層：3×4 = 3×(3+1)
四層：4×5 = 4×(4+1)
五層：5×6 = 5×(5+1)
六層：6×7 = 6×(6+1)
七層：7×8 = 7×(7+1)
八層：8×9 = 8×(8+1)
九層：9×10 = 9×(9+1)
十層：10×11 = 10×(10+1)

→ 2個三角形數 → 1個三角形數

二層：2×(2+1)÷2
三層：3×(3+1)÷2
四層：4×(4+1)÷2
五層：5×(5+1)÷2
六層：6×(6+1)÷2
七層：7×(7+1)÷2
八層：8×(8+1)÷2
九層：9×(9+1)÷2
十層：10×(10+1)÷2
一百層：100×(100+1)÷2



二、珠子串拼珠子粽的實作與紀錄


1. 偶數層的珠子粽

1.1 二層：2÷2 = 1 → 1種珠子串拼半粽 → $2^{\times 1}$

1.2 四層：4÷2 = 2 → 2種珠子串拼半粽 → $4^{\times 1}$. $3^{\times 2}$

1.3 六層：6÷2 = 3 → 3種珠子串拼半粽 → $6^{\times 1}$. $5^{\times 2}$. $4^{\times 3}$

1.4 八層：8÷2 = 4 → 4種珠子串拼半粽 → $8^{\times 1}$. $7^{\times 2}$. $6^{\times 3}$. $5^{\times 4}$

1.5 十層：10÷2 = 5 → 5種珠子串拼半粽 → $10^{\times 1}$. $9^{\times 2}$. $8^{\times 3}$. $7^{\times 4}$. $6^{\times 5}$

1.6 n層：n÷2 = (n÷2)種珠子串拼半粽 → $n^{\times 1}$ $(n-1)^{\times 2}$ $(n-2)^{\times 3}$ …… $(n÷2+1)^{\times(n÷2)}$

2. 奇數層的珠子粽：

2.1 一層：1÷2 = 0…1 → 1顆

2.2 三層：3÷2 = 1…1 → 1種珠子串拼半粽 + 1個平方數 → $3^{\times 1}$ + $2^{\times 2}$

2.3 五層：5÷2 = 2…1 → 2種珠子串拼半粽 + 1個平方數 → $5^{\times 1}$ + $4^{\times 2}$ + $3^{\times 3}$

2.4 七層：7÷2 = 3…1 → 3種珠子串拼半粽 + 1個平方數 → $7^{\times 1}$ + $6^{\times 2}$ + $5^{\times 3}$ + $4^{\times 4}$

2.5 九層：9÷2 = 4…1 → 4種珠子串拼半粽 + 1個平方數 → $9^{\times 1}$ + $8^{\times 2}$ + $7^{\times 3}$ + $6^{\times 4}$ + $5^{\times 5}$

(9+1)÷2

(9+1)÷2+1

2.6 n層：n÷2 →

(n−1)÷2種珠子串拼半粽 + 1個平方數

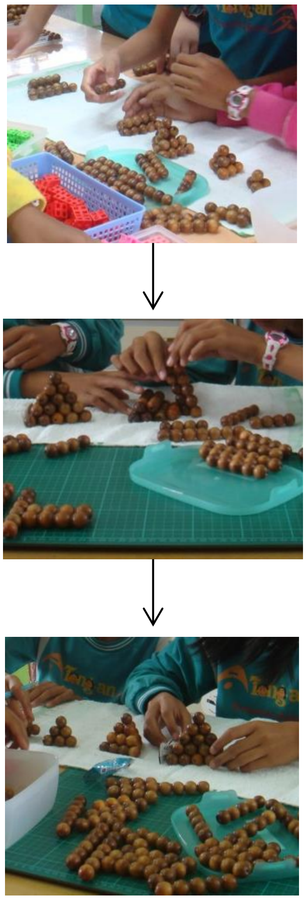
$n^{\times 1}$ + $(n-1)^{\times 2}$ + … + $((n+1)÷2+1)^{\times((n+1)÷2-1)}$ + $((n+1)÷2)^{\times((n+1)÷2)}$

二十三層珠子粽：23÷2 = 11…1 → 11種珠子串拼半粽 + 1平方數

$23^{\times 1}$ + $22^{\times 2}$ + $21^{\times 3}$ + …… + $13^{\times 11}$ ($12^{\times 12}$)

49層珠子粽：49÷2 = 24…1 → 24種珠子串拼半粽 + 1平方數

$49^{\times 1}$ + $48^{\times 2}$ + $47^{\times 3}$ …… + $26^{\times 24}$ ($25^{\times 25}$)



【評語】080407

從端午節的應景食物粽子發想，藉由手製不同層數的「珠子粽」發現出3種數量關係。其中，利用索馬立方塊的兩種不同巧妙拼排(分別拚成長方形與拚成柱體)以及結合教材所學的三角形數皆可求出3組三稜錐數的總和，進而找出三稜錐數的求法公式，相當有趣，值得鼓勵。