中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

最佳團隊合作獎

080406

看不見依然存在－莫比烏斯盤的探討

學校名稱：桃園縣大溪鎮仁和國民小學

作者：	指導老師：
小六　黃國銓 小六　蔡宗達 小六　趙若晴	鄧達鈞 林徹輝

關鍵詞：基底、莫比烏斯盤、展開圖

摘要

這次研究從平常網路上使用的雲端硬碟符號開始發想，同時我們想研究莫比烏斯環但想要做和別人不一樣的東西。所以兩者結合之後就形成了我們沒看過的莫比烏斯盤。莫比烏斯盤保有某些莫比烏斯環的特性，但又可以透過「翻開」將隱藏在其中的面翻出來。而我們透過假設與觀察規律之後再進行實作，找出了很方便的莫比烏斯盤展開圖製作方法。之後我們還知道了莫比烏斯盤的結構與原理，對莫比烏斯盤有了更深入的討論與理解。

壹、研究動機

在學校的數學社團中，我們觀察到了莫比烏斯環的神奇之處。為了能夠更瞭解莫比烏斯環我們動手做了莫比烏斯環以及其他的相關紙環，並大量尋找莫比烏斯環的相關資料。後來我們發現到目前為止在科展中，莫比烏斯環相關研究的重點都是轉動角度和分割裁切的變化。這不禁讓我們思考除了這些特點之外莫比烏斯環是否還有不被發現的迷人之處？如果我們朝另一個方向研究是否進步空間？所以我們開始了這次的研究。

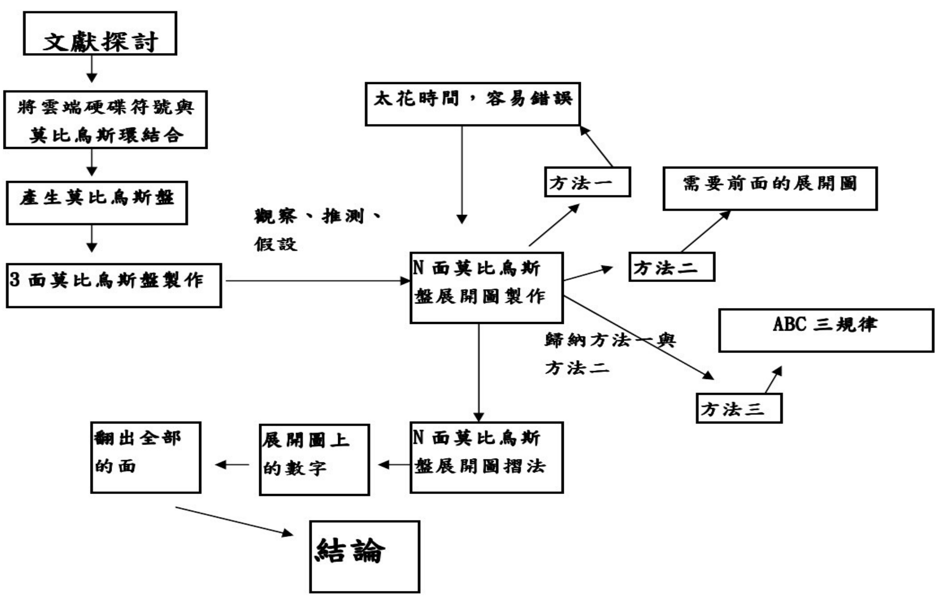
貳、研究目的

一、瞭解莫比烏斯盤的結構與原理
二、找到更多面的展開圖與摺法
三、找到展開圖上數字分佈的規律
四、如何翻出莫比烏斯盤的全部面

參、研究工具

紙、筆、剪刀、膠帶、Photocap、三角板、印表機

肆、研究過程與方法



一、名詞定義：

（一）莫比烏斯盤：將紙帶摺疊 3 次以上會形成多邊形，從中間翻開可以將因重疊被隱藏的面顯現出來。

（二）基底：任何一面的莫比烏斯盤可以被分成 3 組，1 組稱為 1 個基底。

（三）展開圖:3 個基底可以形成一個展開圖。經過正確的摺法可以形成莫比烏斯盤。

（四）拼圖工具：我們發現要畫出莫比烏斯盤展開圖可以用正三角形拼圖幫助。

（三）節點：在翻開莫比烏斯盤時，每 3 次會重覆，所以可以將每一面看成一個點，3 個點形成一個環。當我們要從一個環到另一個環所需要通過的點，稱為節點。

二、文獻探討

（一）莫比烏斯帶：

在1862~1865年，兩位德國數學家莫比烏斯和Johann Benedict Listing分別發現，扭轉180度後再將兩頭粘接起來的紙帶只有一個面(單側曲面)，一隻小蟲可爬遍整個曲面而不跨過它的邊緣！這一神奇的單面紙帶稱為“莫比烏斯帶”，從文獻得知，莫比烏斯帶還有下列性質：

1.可一筆畫走完兩面不跨過邊緣。

2.從中剪開一個莫比烏斯帶，會形成兩個連在一起的環。

（二）莫比烏斯環和相關紙環：

1.未旋轉的紙環和旋轉度數為180˚的偶數倍數的紙環都有兩個面;莫比烏斯環和旋轉度數 為180˚的奇數倍數的紙環卻都只有一個面。

2.未旋轉的紙環(0˚)與360˚(180˚x2)、720˚(180˚x4)的紙環特性相似；而莫比烏斯環(180˚)則和540˚(180˚x3)、900˚(180˚x5)的紙環特性相似。

（三）潘洛斯三角：

潘洛斯三角（Penrose triangle）是不可能的物體中的一種。最早是由瑞典藝術家 Oscar Reutersvärd 在 1934 年製作。英國數學家羅傑·潘洛斯及其父親也設計及推廣此圖案，並在 1958 年 2 月份的《英國心理學月刊》(British Journal of Psychology）中發表，稱之為「最純粹形式的不可能」。如圖 4-2-1

圖 4-2-1 潘洛斯三角

三、從莫比烏斯環與雲端硬碟符號說起：

兩種圖形的的異同:在閱讀過大量與莫比烏斯環相關的資料之後，我們自己製作了莫比烏斯環。在此同時，我們還發現常用的雲端硬碟符號和莫比烏斯環有相似之處。如圖 4-3-1

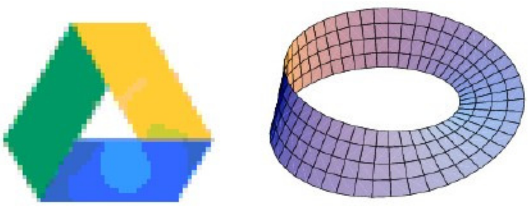


圖 4-3-1 雲端硬碟符號與莫比烏斯環

雲端硬碟符號與莫比烏斯環相似處如下列 3 點

（一）如果拿筆分別將雲端硬碟符號和莫比烏斯環畫一圈，那都可以將全部的面都畫到。

（二）雲端硬碟符號和莫比烏斯環旋轉 540 度（也就是轉 3 次）的結構大致相同，如果我們

將雲端硬碟符號和莫比烏斯環旋轉 540 度的指環分別剪開，會看到類似的紙圈。

（三）雲端硬碟符號和莫比烏斯環中間都有空洞，如果增加紙帶寬度，將中間空洞減少至最低會出現什麼樣的情形？如圖 4-3-2 為想像圖與實際製作圖，我們發現三角形和三角形中間部分無法去掉，如要將空洞減少至沒有可用三角形代替。

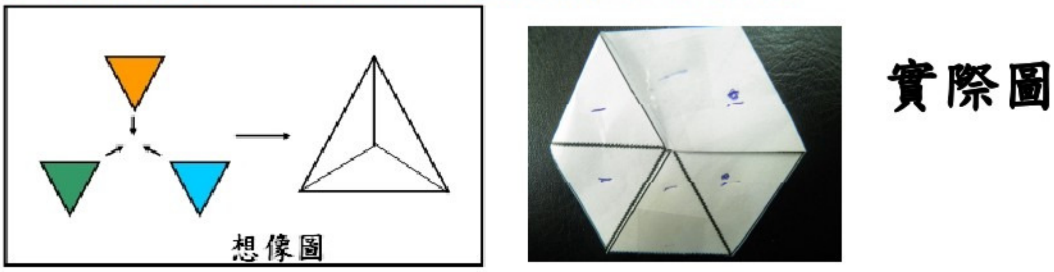


圖 4-3-2 想像圖與實際圖

四、莫比烏斯盤的形成過程與翻轉：

（一）由紙帶構成：如莫比烏斯帶一樣，需一條紙帶。

（二）九個正三角形：摺疊部分需要 3×2＝6 個正三角形，三角形和三角形中間部分各一個 3×1＝3 個。如圖 4-4-1

（三）按照雲端硬碟符號將莫比烏斯帶摺疊 3 次。

圖 4-4-1

因為將莫比烏斯環中間的空洞減少至沒有，看起來很像一個盤子的形狀，所以我們稱為莫比烏斯盤。莫比烏斯盤的形成過程如圖 4-4-2。

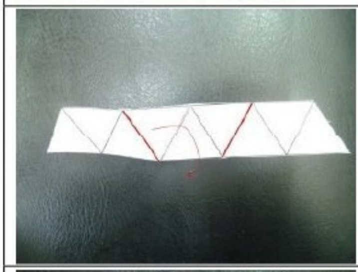
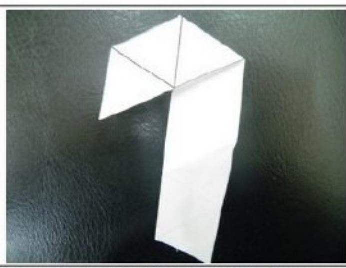
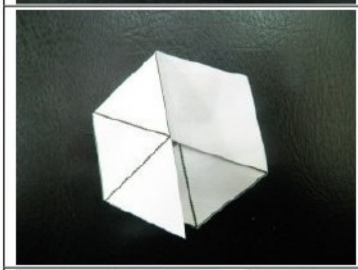
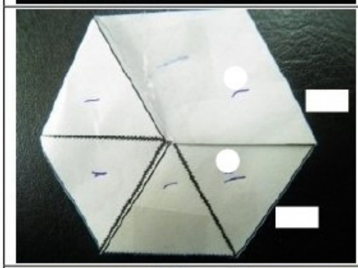
莫比烏斯盤的形成過程			
	第一步：將紙帶彎曲成雲端硬碟的符號。從符號上可以看出必須要摺疊 3 次。第一次摺疊我們按照左圖的方向摺疊。		第二步：摺疊一次的結果如左圖
	第三步：摺疊第二次的結果		第四步：我們將紙帶的尾放在紙帶的頭上。所以會形成 3 組。每組都在前一組的下方，而第一組也在第三組的下方。
	第五步：我們將看到的第一面的 6 個三角形都標出「一」的符號。	原本紙帶有 9×2＝18 個三角形，現在只能看到 6×2＝12（正反兩面）個三角形。我們發現用翻轉的方式可以看到看不見依舊存在的面。	

圖 4-4-2 莫比烏斯盤的形成過程

（四） 用翻轉看到全部的面：我們發現用「翻轉」的手法可以將被遮住的面顯現出來。我們將第一面的三角形標上 1，第二面的三角形標上 2，第三面的三角形標上 3。如圖 4-4-3

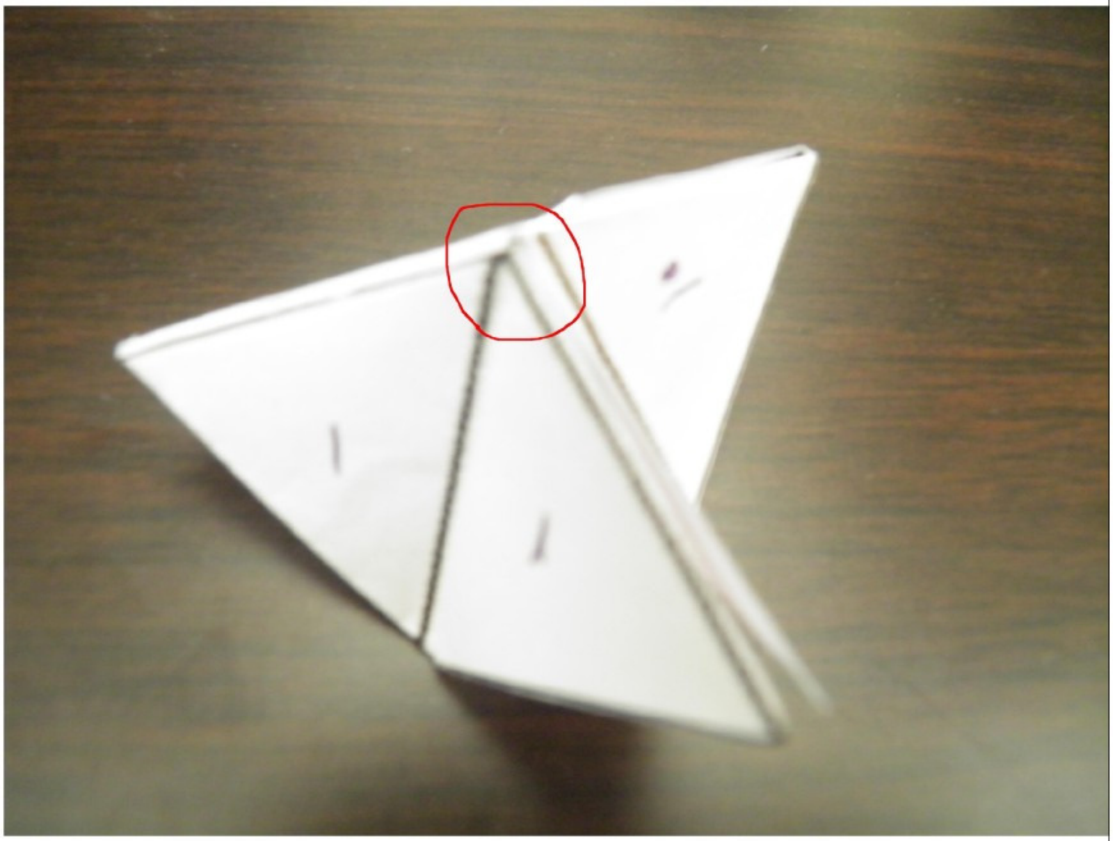
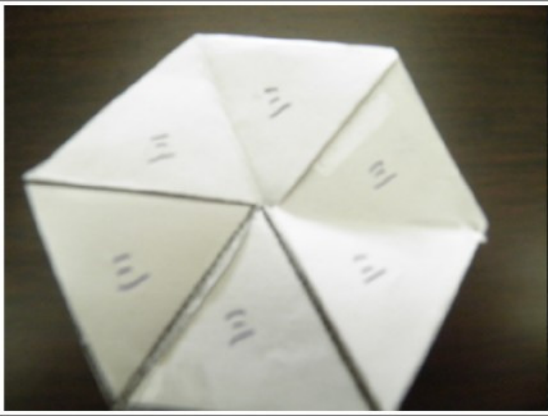
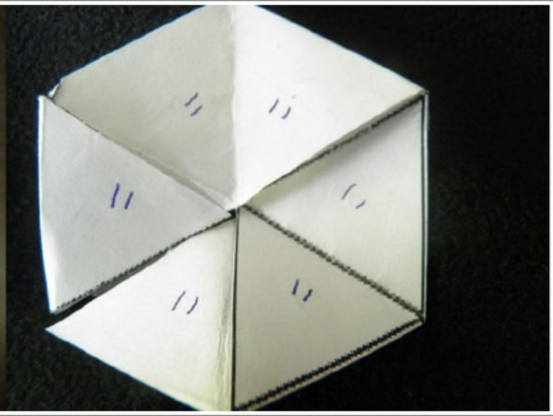
	將第一面的莫比烏斯盤捏成像「星星」的形狀，從中間翻開（紅色圓圈部分）後即可看到其他面。
 	按照上面的方法從中間翻開可以看到第二面與第三面。

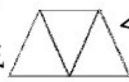
圖 4-4-3：莫比烏斯盤的翻開方法與翻開結果

五、研究一：探討莫比烏斯盤的結構與原理：

（一）發現 3 面莫比烏斯盤：觀察上面的莫比烏斯盤，我們發現有 6 個三角形的面積因為摺疊的關係被遮住了。總共有 18 個三角形，但只能看到 12 個三角形，剩下的 6 個三角形無法看見。換句話說，雖然有 3 面，但我們只能看到 2 面。

（二）從立體模型看 3 面莫比烏斯盤與推測：為了能夠更清楚了解莫比烏斯盤，能夠直接觀察到中間被隱藏起來的 6 塊三角形，所以我們做了立體模型。

1、共有三組：我們發現 3 面莫比烏斯盤在立體模型中可被分成三組，每組的位置都在前一組的上面。



每組都長的像我一樣

2、第 2 面的推測：雖然第 2 面被遮起來無法在正常情況下被看到，但從立體模型中我們觀察到第 2 面是有規律的排列。所以我們推測將第 1 面『翻開』後，能夠出現被遮起來的第 2 面。

（三）目前觀察到 3 面莫比烏斯盤的特色：在做了上面的觀察與推測之後，我們試著將 3 面莫比烏斯盤『翻開』，發現果然出現第 3 面，還發現了其他的特色。

1、我們可以用翻開的方法呈現被隱藏的面。

2、每次翻開的結果都不一樣。第 0 次-上面：一下面：三。第 1 次-上面：二下面：一第 2 次-上面：三下面：二。第 3 次-上面：一下面：三。每 3 次會重新循環。

3、我們發現翻到第 1 面的數字位置 2 次並不同，所以特別在第 1 面做上記號。後來發現在中間的角會在翻動的過程中跑到旁邊的位置。

（四）對更多面莫比烏斯盤的推測

1、條狀的重要性：因為莫比烏斯盤是由莫比烏斯帶轉換而來。所以我們推測如果要構成莫比烏斯盤，展開圖一定要條狀。也就是在展開圖中說除了開頭和結尾，每一個三角形只有 2 條邊與其他三角形連接。這推測在之後利用攤開法製作展開圖時得到部分的證實。

2、只有條狀 9 個三角形能摺成莫比烏斯盤：因為基礎的 3 面莫比烏斯盤是由條狀 9 個三角形構成，所以我們推測更多面的莫比烏斯盤不管展開圖為何種形狀，都一定要能夠摺成條狀 9 個三角形。但反過來說，只要能夠摺成條狀 9 個三角形的構成圖是否就能夠成為莫比烏斯盤的展開圖呢？如圖 4-5-1

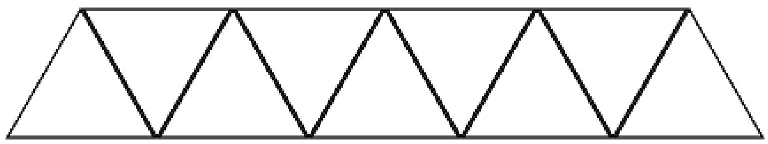


圖 4-5-1 條狀 9 個三角形

上圖就是條狀 9 個三角形的形狀。經實驗我們確認只有這個形狀可以摺成莫比烏斯盤。

3、每個莫比烏斯盤都可以分成 3 組：從立體模型我們可以看到 3 面莫比烏斯盤可以分成 3 組，所以我們推測更多面莫比烏斯盤也都可以分成 3 組，每一組都長的一樣。所以我們只要找到其中一組，就可以架構出完整的展開圖。

4、根據觀察我們知道展開圖是由 3 組一樣的圖形構成，我們稱一組為一個基底。另外我們推測要摺成莫比烏斯盤就須成條狀 9 個三角形。所以每一個基底到最後也都要能夠摺成圖 4-5-2 的形狀，只是因為面數的增加基底上面的三角形數目也會增加。下面是我們推測會形成的狀況。如圖 4-5-3

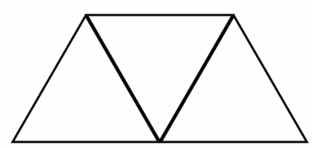


圖 4-5-2 每一個基底到最後應該都會摺成此形狀。

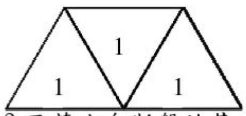
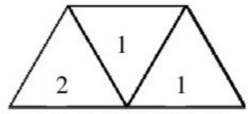
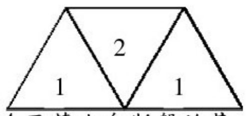
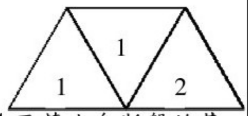
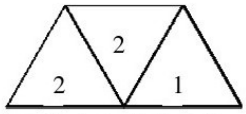
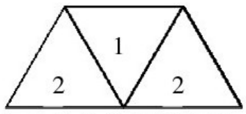
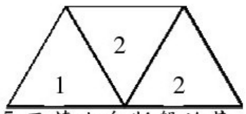
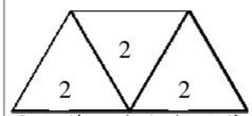
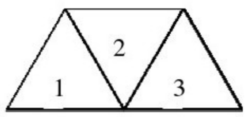
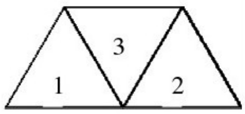
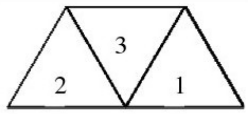
 3 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 111	 4 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 211	 4 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 121	 4 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 112
 5 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 221	 5 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 212	 5 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 122	 6 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 222
 6 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 123	 6 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 132	 6 面莫比烏斯盤的基底。數字表示三角形的數目。我們稱為 132	因為數字有很多種分配方法。所已有很多情況，但我們猜測數字分配應該會偏向較為平均的情況，而不是極端的分配。

圖 4-5-3 三角形上的數字表示三角形上經過摺疊後的三角形總數

5、莫比烏斯盤的展開圖是有規律的

六、研究二：找到更多面的展開圖與摺法

（一）只有條狀 9 個三角形能摺成莫比烏斯盤：為了證明只有條狀 9 個三角形能摺成莫比烏斯盤，我們做了 9 個莫比烏斯盤從不同的連接處把莫比烏斯盤剪開，發現展開圖都會是條狀三角形。

（二）N 面莫比烏斯盤需要 N×6÷2 個三角形

（三）4 面莫比烏斯盤展開圖與摺法:根據我們之前觀察 3 面莫比烏斯盤的發現，每個展開圖都分成 3 組·所以我們只要找到一組(4 塊三角形)，就可以做出整個展開圖·

1、4 塊三角形:我們發現 4 塊三角形可以拼出 3 種圖形，這意味著有 3 種展開圖的可能·如圖 4-6-1

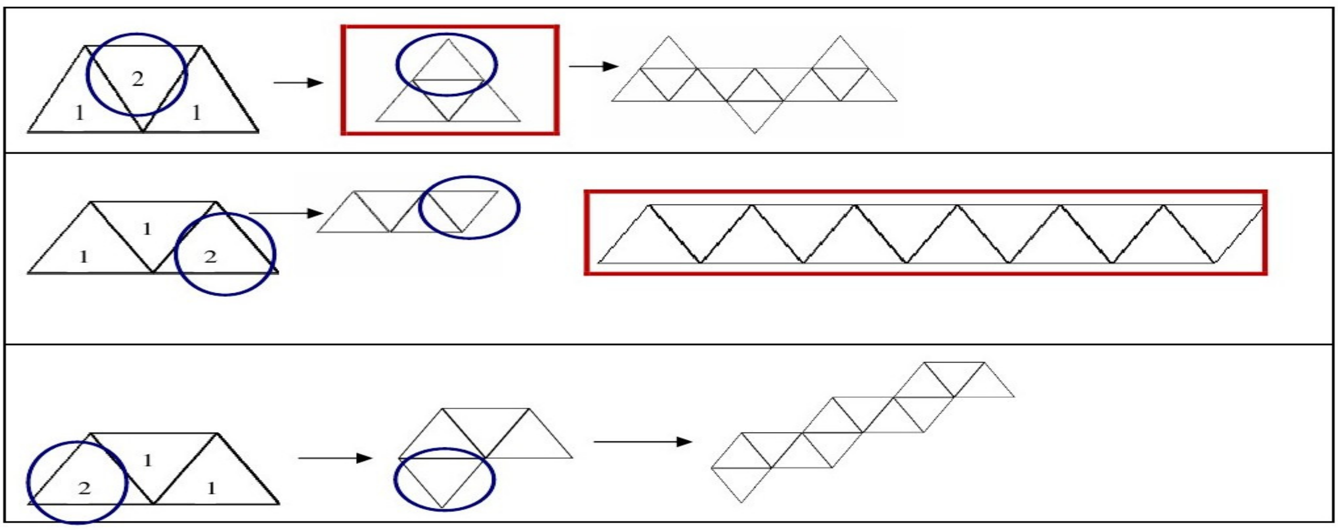


圖 4-6-1：4 面莫比烏斯盤展開圖的 3 種可能

2、連接邊的問題：雖然拼出了展開圖的基底，但我們遇到了困難的問題，那就是每一種基底都有很多可以相連的邊，我們該如何把 2 個基底之間相連呢？為了克服這個問題，我們回頭觀察 3 面莫比烏斯盤的展開圖・發現連接邊是有規律的，我們可以從 3 面莫比烏斯盤推出 4 面莫比烏斯盤・

3、111 與 211：3 面莫比烏斯盤的基底是 111，所以理論上 4 面莫比烏斯盤的基底會是 211 或 121 或 112・我們按照順序將 3 面莫比烏斯盤推成 4 面莫比烏斯盤發現之前 112 和 121 的展開圖是錯誤的・訂正過程如圖 4-6-2：

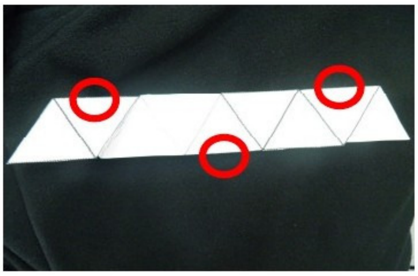
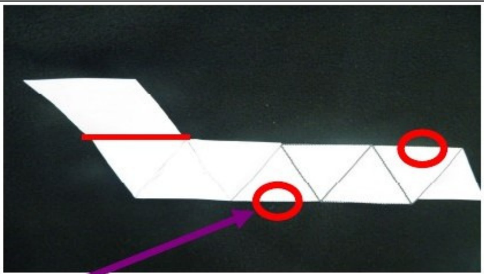
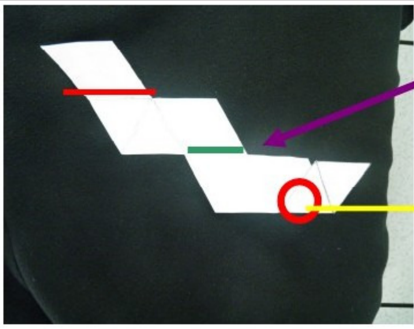
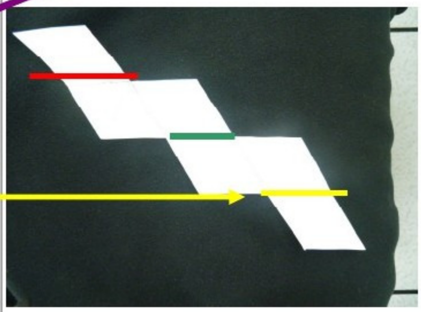
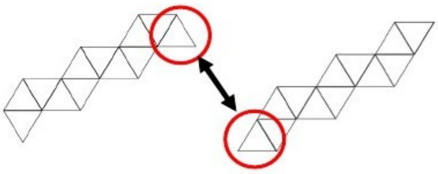
	我們將紅色圈圈的線段翻開，可以得到正確的展開圖。		紅色線段的地方是之前翻開的連接邊。剩下的紅色圈圈是還沒有翻開的地方。
	綠色線段是第二次翻開的地方，我們可以看到還有一處線段沒有翻開。		我們將 121 攤開來之後得到的 4 面莫比烏斯盤展開圖就像左邊一樣。
	我們可以知道這 2 種展開圖是一樣的。		

圖 4-6-2 利用攤開的方法找到 4 面的展開圖。發現與圖 4-6-1 的 211 是同一種圖形。

（四）5 面莫比烏斯盤展開圖：有了 3 面莫比烏斯盤和 4 面莫比烏斯盤的製作經驗，我們很容易就可以做出 5 面莫比烏斯盤的基底・並根據 4 面莫比烏斯盤的連接邊來做連接・

1、5 面莫比烏斯盤的候選基底，如圖 4-6-3

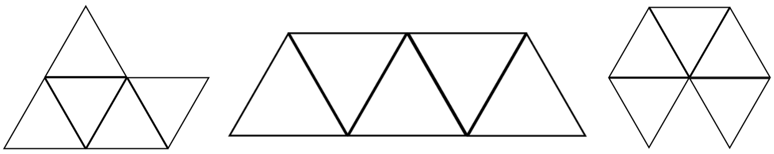


圖 4-6-3: 5 面候選基底

我們利用三角形拼湊的方法，拼湊出上面的圖形。可是因為可以連接的邊實在太多了，所以很難確定要如何將基底形成展開圖。所以我們決定從 4 面的基底來找出 5 面的基底。

2、從 4 面基底到 5 面基底：

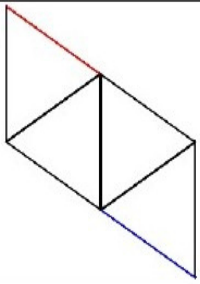
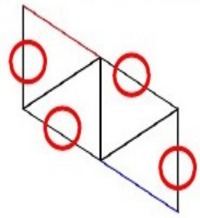
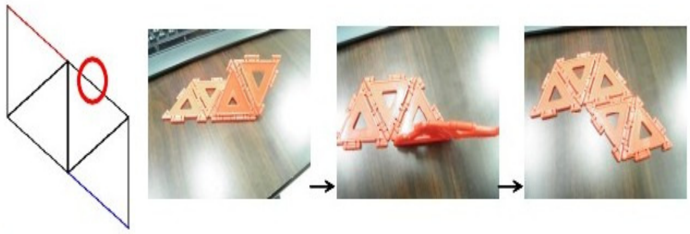
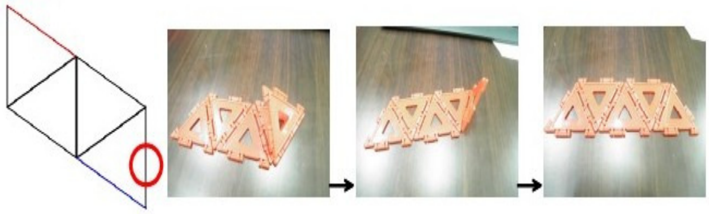
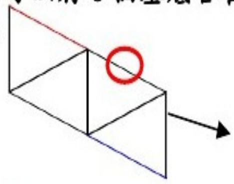
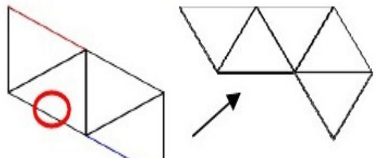
第一步：先找出 4 面的基底，並將連接邊標出。紅色線段是頭，藍色線段是尾。 3 個基底互相連接的時候，頭尾要互相連接。所以待會翻摺多出的一塊時不可以動連接邊。 	**第二步：將可以翻開的連接邊標出** 
第三步：將三角形翻開 **例一**  **例二** 	**從例一可以看出，可以將三角形翻開得到一個基底。 例二可以將 3 個基底合在一起且可以摺疊**   **我們可以看到因為對稱的關係所以翻開不同的 2 個連接邊會得到一樣的圖案**

圖 4-6-4：4 面基底攤開成 5 面基底過程

3、5 面莫比烏斯盤的展開圖：我們將剛剛得到的基底 3 組拼在一起，可以得到 5 面展開圖如圖 4-6-5，我們發現 3 種圖形都是一樣的，只是頭尾的差別。特別值得注意的是：第 2 組基底必須要水平翻轉過後，才能和 1、3 組基底拼在一起。

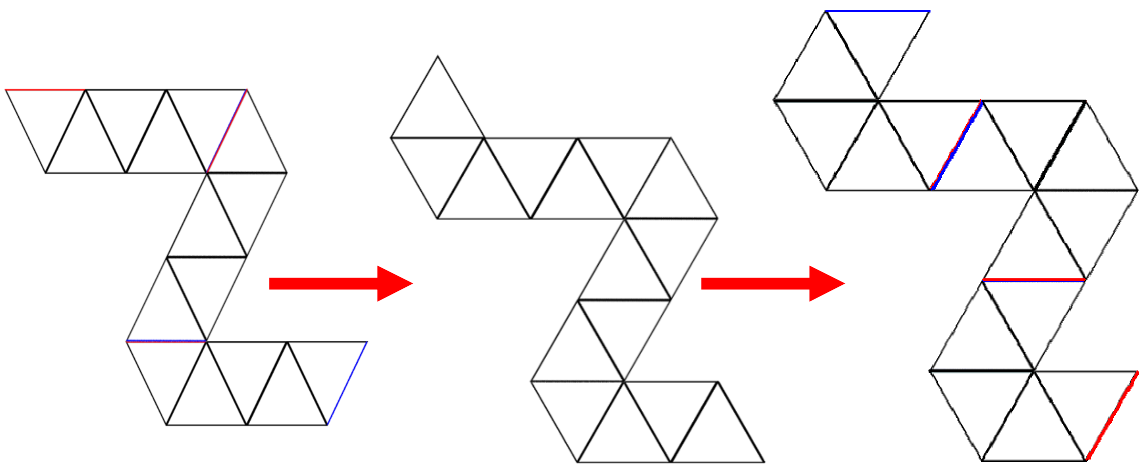


圖 4-6-5：5 面莫比烏斯盤的展開圖：3 種圖形實際上是同一組。

（五）6 面莫比烏斯盤展開圖

1、利用 5 面展開圖基底找到 6 面基底：有了 5 面基底的經驗我們只要將 5 面基底可以動的連接邊攤開就可以得到 6 面基底了。

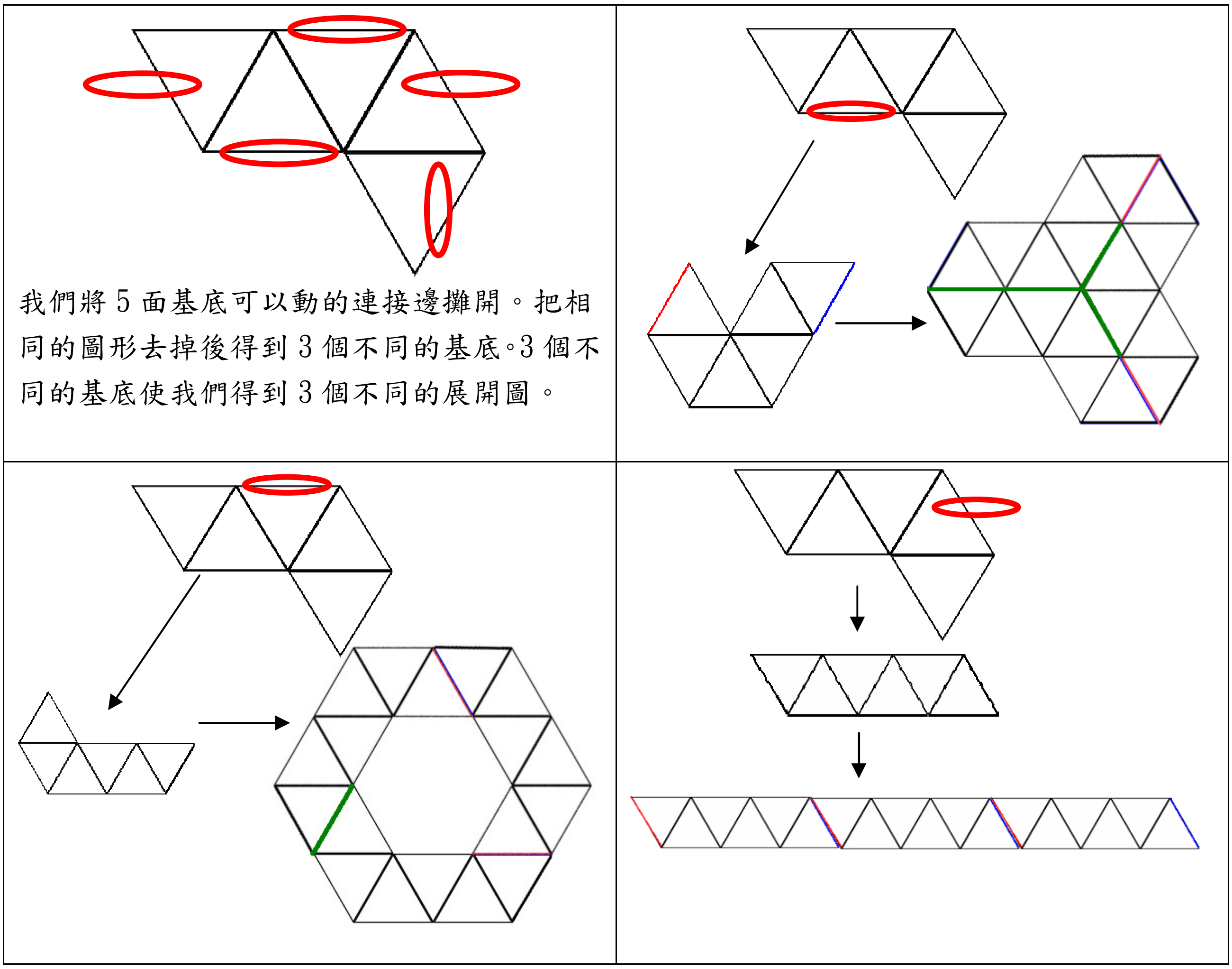


圖 4-6-6：5 面基底攤開成 6 面基底過程

（六）展開圖製作方法---拼湊法：從上面的研究過程中，我們發現用拼湊的方式可以將基底製作出來，稱此種方法為拼湊法。將其特點概列如下：

1、我們先將三角形一塊一塊拼起來（如圖 4-6-7），因為觀察到 3 面莫比烏斯盤，所以我們可以知道只要找到 1 組的圖形，然後將一樣的 3 組拼起來，就可以得到展開圖。所以我們試著用上面的拼圖找出展開圖。但後來發現這方法有很大的缺點。

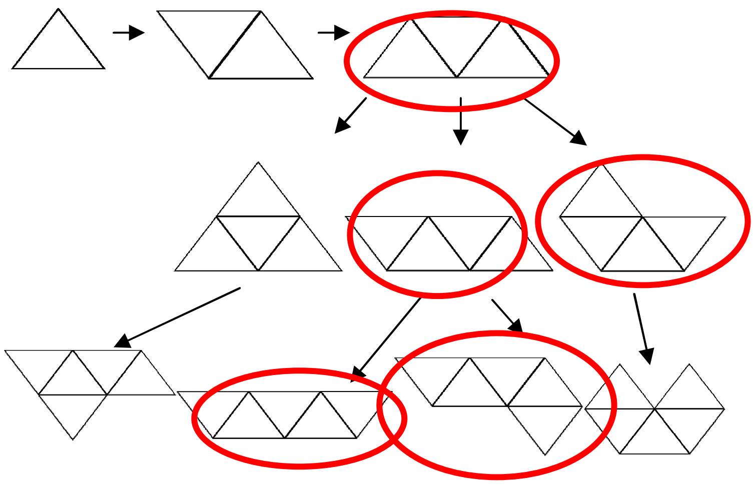


圖 4-6-7：紅色的圓圈表示該圖形可作為基底。所以拼湊法的缺點有：

1. 連接邊不明確，需多遍嘗試。

2. 拼出的圖形不一定就可以做基底。需浪費許多時間。

2、目前用拼湊法拼出的圖形如圖 4-6-8。我們將圖 4-6-8 做成表 4-6-1，希望對接下來的研究有幫助。

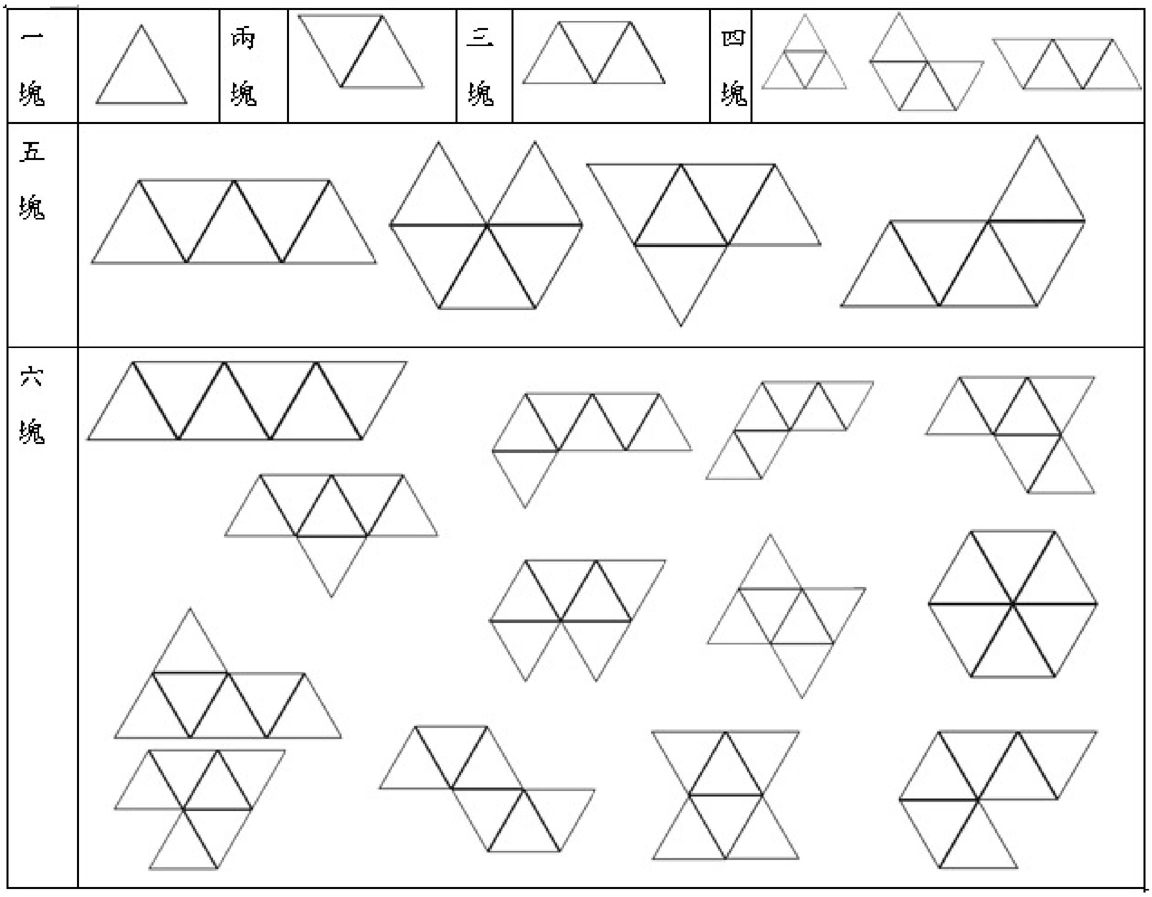


圖 4-6-8：1-6 塊的拼圖圖形，大部分不能做展開圖基底。

	1 塊三角形	2 塊三角形	3 塊三角形	4 塊三角形	5 塊三角形
種類	1 種	1 種	1 種	3 種	4 種
連接邊	3 條	4 條	5 條	6 條	7 條

表 4-6-1：拼湊圖形種類數目統計表

3、上面用紅色圈圈起來的圖形是可以做展開圖的基底。我們發現用這個方法找出正確基底的效率不高。而且因為不確定連接邊的關係，往往要試很多次才能發現正確的展開圖。優點是將全部的圖形都列出來，不會有少列的問題。

（七）展開圖製作方法---用 A 面展開圖求出 A+1 面展開圖（攤開法）：在改良拼湊法的過程中，我們發現用攤開的方法可以找到正確無誤的基底。將攤開法的特點概略如下。

1、我們用「攤開」的方法去掉重覆的基底，發現了圖 4-6-9，每一個都能形成正確的展開圖。

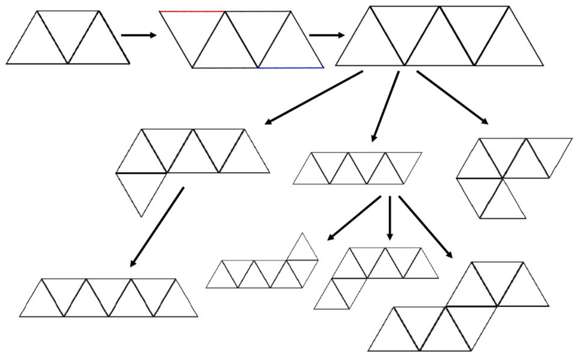


圖 4-6-9：攤開法製作出來的圖形都可以當作基底。可是圖形會有重覆的問題，如圖 4-6-5，所以要將重覆的圖形刪除。

2、目前用攤開法攤出的基底如圖 4-6-10。我們將圖 4-6-10 做成表 4-6-2，希望對接下來的研究有幫助。

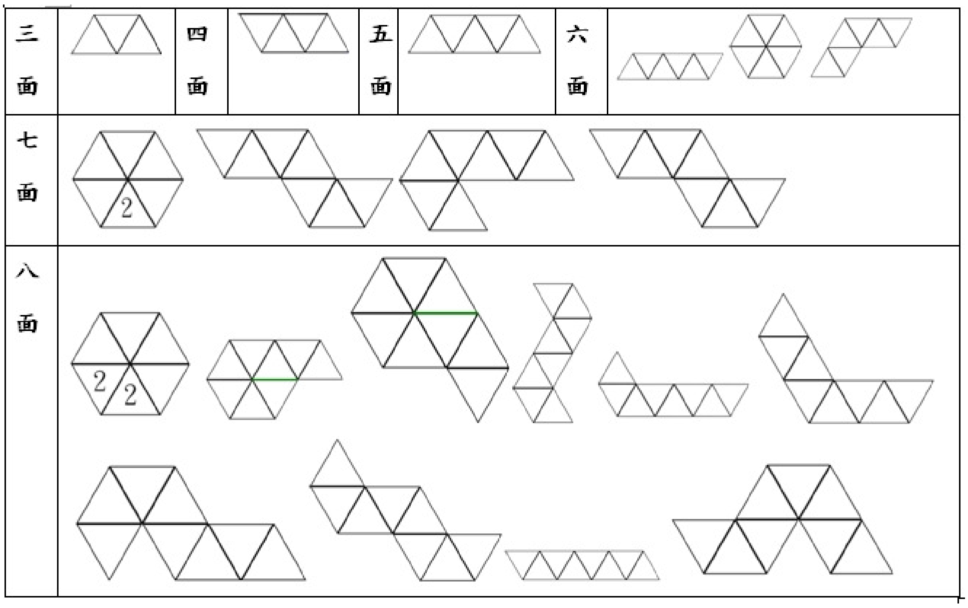


圖 4-6-10：用攤開法製成的基底。

	3 面展開圖	4 面展開圖	5 面展開圖	6 面展開圖	7 面展開圖
種類	1 種	1 種	1 種	3 種	4 種
每組需要確定的連接邊	3 條	4 條	5 條	6 條	7 條

表 4-6-2：展開圖種類數目統計表

3、攤開法的優點就是能夠根據 N 面基底找出 N+1 面基底。缺點就是當我們要找出 20 面基底的時候我們要先找出 3 面→4 面→5 面……→18 面→19 面→20 面

4、為了方便記錄基底，我們利用連接邊來記錄基底，說明如 4-6-11。

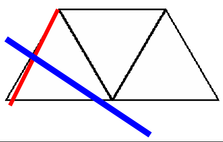
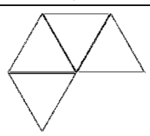
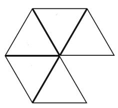
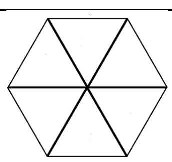
	以第 1 塊三角形的連接邊為準，第 2 塊三角形在第 1 塊的左邊，所以記為 L。第 3 塊三角形在第 2 塊的右邊，所以記為 R。第 4 塊三角形在第 3 塊的左邊，所以記為 L。所以記為 LRL
	記為 LRRL
	記為 LRRRL
	記為 LRRRRL

圖 4-6-11：利用 R（右邊）與 L（左邊）記錄基底

（八）展開圖製作方法---利用拼湊法和攤開法的相似處（連線法）

1、我們發現拼湊法和攤開法的種類數列都是 1、1、1、3、4（如圖 4-6-12）而拼湊法的可連接邊數量與攤開法的每組需要確定的連接邊數量都是 3、4、5、6、7（如圖 4-6-13）。所以我們思考拼湊法和攤開法所形成的圖形是否有關係呢？我們做成表 4-6-3 來觀察。

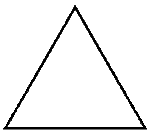
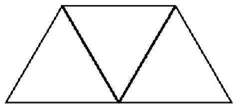
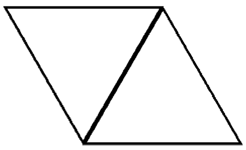
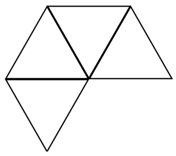
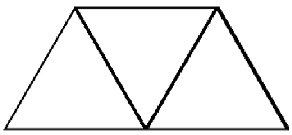
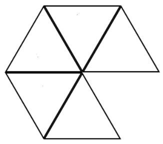
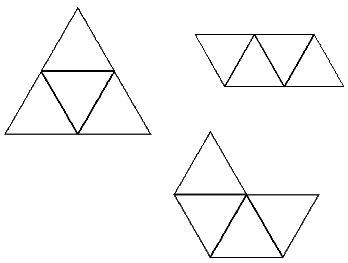
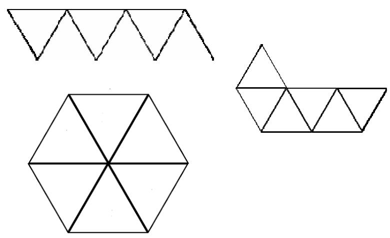
拼湊法圖形	攤開法圖形	攤開法連接方式
		LRL
		LRRL
		LRRRL
		LRLRLR LRRLRR LRRRRL

表 4-6-3：拼湊法圖形與攤開法基底和連線方式統計表

我們發現拼湊法圖形和攤開法基底之間應該是有對應關係。為了更清楚的找到對應關係，我們從簡單的圖形開始比較。

2、從第一列的圖形比較：將表 4-6-3 的第一列圖形拿來對應如下表：表 4-6-4

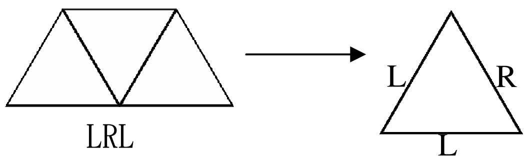
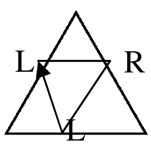
	我們將連接邊看做三角形中的一邊，把他標記起來。
	我們可以看到從第 1 條連接邊到第 3 條連接邊依序是 LRL，所以我們推測：從第 N 連接邊到第 N+1 連接邊的符號會是相反的。所以第 1 個是 L 第 2 個會是 R，第 3 個會是 L..依此類推。

表 4-6-4：從上表我們推測：從第 N 連接邊到第 N+1 連接邊的符號會是相反的。

3、比較第 2 列的圖形：將表 4-6-3 的第二列圖形拿來對應如下表：表 4-6-5

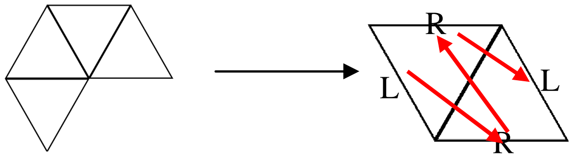
 LRRL	我們在這個圖形裡看到第 1、2 和 3、4 之間的規律，與我們在第一列觀察到的相同。但第 2、3 之間雖然相連，但符號卻不相同，所以我們推測：下一條連接邊與其平行時，符號會相同。

表 4-6-5：表 4-6-3 的第二列圖形與表 4-6-4 的規律有所衝突，經觀察發現圖形改變的地方為平行部分。所以我們推論下一條連接邊與其平行時，符號會相同。

4、比較第 3 列的圖形：將表 4-6-3 的第三列圖形拿來對應如下表：表 4-6-6

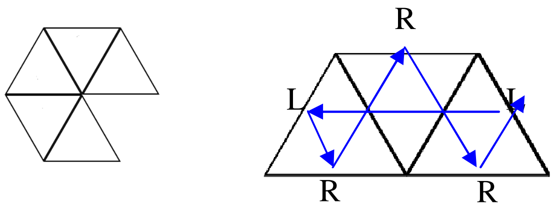
 LRRRL	左邊圖形點比較多所以我們嘗試了很多種跑法，比較與前面發現的 2 個規律相同的跑法，我們發現第 3 個規律：如是正確跑法，最後會在圖形裡面將每個大三角形都切割為 4 個小三角形。

表 4-6-6：從表 4-6-4～表 4-6-6 我們發現有共同的特徵

5、歸納圖形間的關係：我們發現 3 面的展開圖和 1 個三角形圖案有關係，4 面的展開圖和 2 個三角形圖案有關係，5 面的展開圖和 3 個三角形圖案有關係..依此類推。我們發現了下面幾點規律

（1）N 面莫比烏斯盤展開圖基底和 N-2 塊三角形的拼圖有關係。

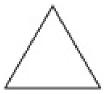
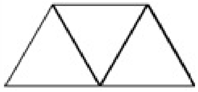
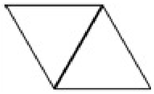
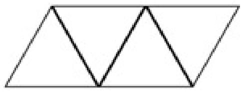
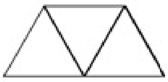
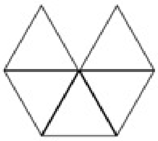
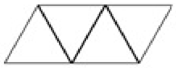
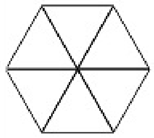
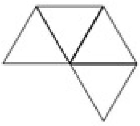
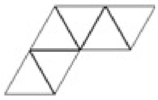
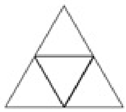
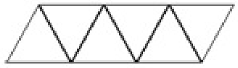
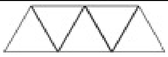
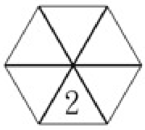
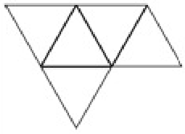
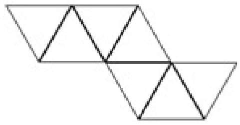
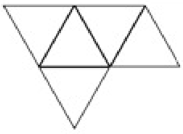
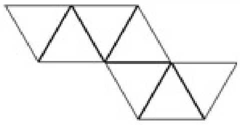
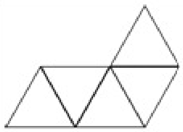
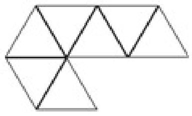
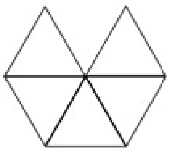
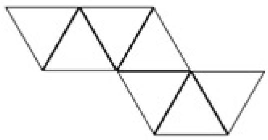
（2）我們發現的規律有優先度的先後順序：

A 規律：每個三角形拼圖的正確跑法，到最後會將所有三角形切割成 4 個小三角形---最優先

B 規律：在圖形上，上下兩條邊互相平行時，2 條連接邊符號會相同--第 2 優先

C 規律：相鄰 2 條連接邊的方向會是相反的—第三優先。

6、有了上面 A、B、C3 規律，我們就可以隨心所欲的創造 N 面莫比烏斯盤的基底。舉例來說：我們如果要 8 面莫比烏斯盤的基底，那就需要先將 6 塊三角形拼出圖案，再依據正確跑法紀錄下連接邊的符號。最後利用符號將 8 塊連接邊拼湊起來。我們用三角形拼圖透過連線法做成 3-8 面的基底。如表 4-6-7

面數	工具	基底	面數	工具	基底
3			4		
5			6 A		
6 B			6 C		
7 A			7 B		
7 B			7 C		
7 D			表 4-6-7：拼圖工具與各面基底的對應表。		

七、研究三：如何從展開圖摺成莫比烏斯盤

（一）從 N+1 到 N：我們發現 N+1 面的展開圖可以摺成 N 面的展開圖。舉例來說：雖然 6 面展開圖有 3 種，但這 3 種展開圖都可以摺成 5 面展開圖，依此類推到不管是幾面展開圖最後都可以摺成圖 4-5-1 的形狀。

（二）偶數面莫比烏斯盤的 3 組摺法都一樣，奇數面莫比烏斯盤的第 2 組摺法則和第 1、3 組摺法相反。因為在奇數面莫比烏斯盤的展開圖中第 2 組是翻過來放的。

（三）先將摺線標記起來比較好摺：我們發現 N+1 面的展開圖可以摺成 N 面的展開圖。如此下去，我們可以先將摺線畫出，摺的時候就很容易摺了。如圖 4-7-1 在線上的數字 5 表示摺這條線可以使 6 面展開圖變成 5 面展開圖。數字 4 表示摺這條線可以使 5 面展開圖變成 4 面展開圖

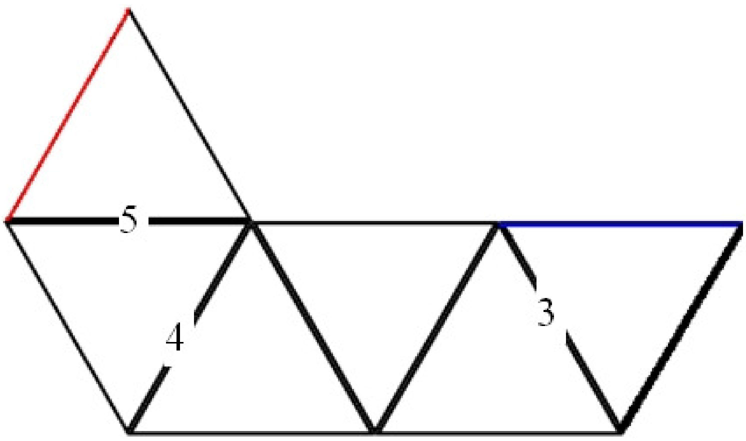


圖 4-7-1：此圖形為 6 面基底，圖形中數字「5」表示摺此線可將 6 面基底變成「5」面基底，依此類推。

如圖 4-7-2 為 6 面展開圖變成 3 面展開圖的方法，我們發現雖然摺成 3 面展開圖，但不一定能將 6 面完全翻出來。可能有些面會卡住再也翻不出來了。

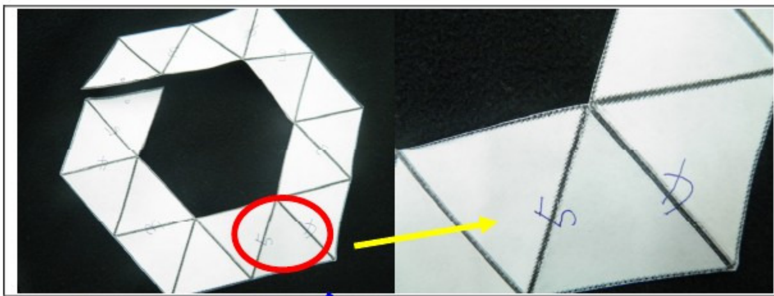
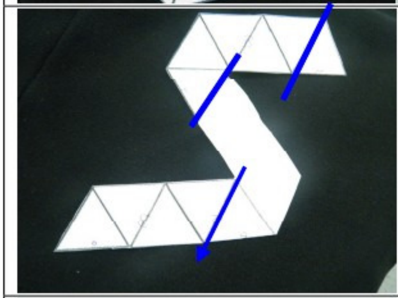
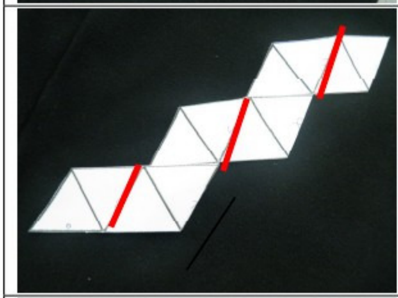
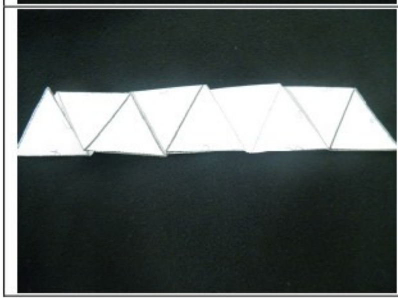
	左圖是 6 面展開圖，在要摺疊成 6 面莫比烏斯盤之前先標記好摺疊的記號，這樣摺疊時比較好摺疊，不會出錯。圖上數字 5 是表示以此線段摺疊會形成 5 面展開圖。
	6 面展開圖摺疊 3 次就會形成 5 面展開圖。（左圖是 5 面展開圖的形狀）
	5 面展開圖摺疊 3 次就會形成 4 面展開圖。（左圖是 4 面展開圖的形狀）
	4 面展開圖摺疊 3 次就會形成 3 面展開圖。

圖 4-7-2：從 6 面展開圖變成 3 面展開圖。

（四）為了能更清楚的瞭解莫比烏斯盤的摺法，我們把所有可能的摺法都摺過一遍。並利用「O」和「C」做紀錄。「O」代表那一條邊的 2 側三角形要攤開，「C」代表那條邊的 2 側三角形要合起來。如圖 4-7-3

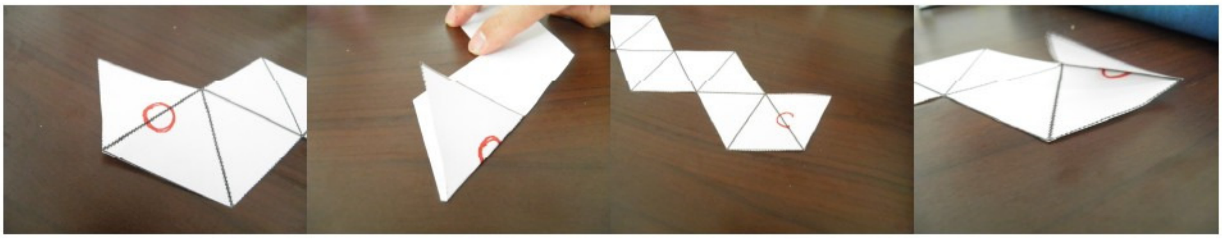


圖 4-7-3：「O」代表要攤開＝open，「C」代表要闔起來=close

我們將所有可能的摺法都列出來，結果發現在同一種展圖中正確摺法不只一種，如表 4-7-1。而且我們發現摺法的結果會有對稱性，真是有趣。

表 4-7-1：我們發現根據摺法的不同會有不同的結果。且因為摺法的對稱性，結果也會有對稱性。值得一提的是，如果將 2 種對稱摺法看做是一種摺法，那麼在一張展開圖上的正確摺法就只有一種了。

3 面莫比烏斯盤		4 面莫比烏斯盤			5 面莫比烏斯盤			
1	可翻幾面	1	2	可翻幾面	1	2	3	可翻幾面
o	3 面	o	o	4 面	o	o	o	5 面
c	3 面	o	c	3 面	o	o	c	3 面
		c	o	3 面	o	c	o	4 面
		c	c	4 面	o	c	c	3 面
					c	o	o	3 面
					c	o	c	4 面
					c	c	o	3 面
					c	c	c	5 面

6A					6B					6C				
1	2	3	4	可翻幾面	1	2	3	4	可翻幾面	1	2	3	4	可翻幾面
o	o	o	o	6 面	o	o	o	o	6 面	o	o	o	o	6 面
o	o	o	c	3 面	o	o	o	c	3 面	o	o	o	c	3 面
o	o	c	o	3 面	o	o	c	o	4 面	o	o	c	o	3 面
o	o	c	c	5 面	o	o	c	c	3 面	o	o	c	c	3 面
o	c	o	o	4 面	o	c	o	o	3 面	o	c	o	o	4 面
o	c	o	c	5 面	o	c	o	c	4 面	o	c	o	c	3 面
o	c	c	o	3 面	o	c	c	o	3 面	o	c	c	o	3 面
o	c	c	c	2 面	o	c	c	c	3 面	o	c	c	c	4 面
c	o	o	o	2 面	c	o	o	o	3 面	c	o	o	o	4 面
c	o	o	c	3 面	c	o	o	c	3 面	c	o	o	c	3 面
c	o	c	o	5 面	c	o	c	o	4 面	c	o	c	o	3 面
c	o	c	c	4 面	c	o	c	c	3 面	c	o	c	c	4 面
c	c	o	o	5 面	c	c	o	o	3 面	c	c	o	o	3 面
c	c	o	c	3 面	c	c	o	c	4 面	c	c	o	c	3 面
c	c	c	o	3 面	c	c	c	o	3 面	c	c	c	o	3 面
c	c	c	c	6 面	c	c	c	c	6 面	c	c	c	c	6 面

（五）6 面摺法和 5 面摺法的關係：在一開始我們試著要把 6 面莫比烏斯盤摺出來的時候，我們有一個猜想，那就是 N+1 面的莫比烏斯盤摺法與 N 面的莫比烏斯盤摺法有關係。我們認為只要將 5 面的摺法找出來之後，那 6 面的摺法就是將 6 面展開圖摺成 5 面展開圖的形狀，之後再接著 5 面的摺法，就可以將 6 面莫比烏斯盤摺出來了。不過這個猜測經過實驗發現是不正確的。

八、研究四：展開圖上的數字有何分佈規律：我們想知道沒有將展開圖摺成莫比烏斯盤之前，是否可以透過規律瞭解展開圖上各面分佈的狀況？所以我們做了以下的觀察。

（一）3 面展開圖的數字：我們將 3 面莫比烏斯盤看到的第一面填上數字「1」，翻開的第二面填上數字「2」，再遇到的第三面填上數字「3」，之後再翻一次我們就可以看到數字「1」。之後我們剪開展開圖觀察其上數字規律，將規律列述如下：

1. 數字「1、2、3」成一個圓環：
數字 1、2、3 的關係如圖 4-8-1 是一個圓環，
特別一提，因為是圓環所以 3+1＝1。
我們推測之後 N 面莫比烏斯盤的數字也是 N+1＝1

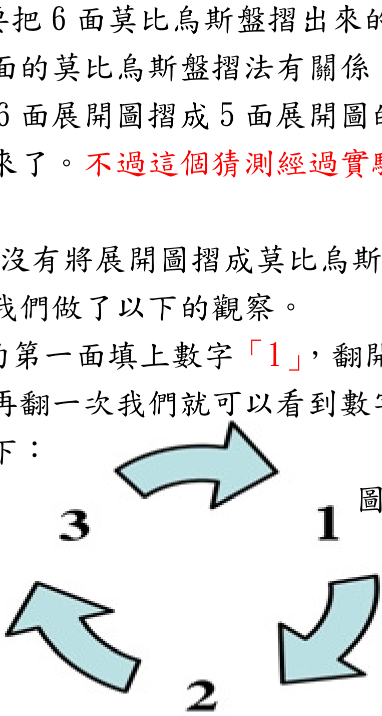


圖 4-8-1：3+1＝1

2. 正反面相差 1：數字填入展開圖後，我們可以看到正反面的數字都相差 1
還有，如圖 4-8-2

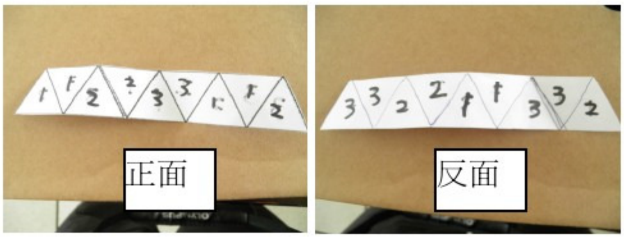


圖 4-8-2 根據左圖和上面的表格我們可以知道：正反面的數字都相差 1。

我們將基底上的數字列成表 4-8-1，我們發現表格中 1、3 欄的正面數字+1＝反面數字，第 2 欄的反面數字+1＝正面數字。

正面	**1**	**1**	**2**
反面	**2**	**3**	**3**

表 4-8-1：根據我們發現的規律，我們推測奇數欄正面數字+1＝反面數字，偶數欄反面數字+1＝正面數字。所以我們猜測N 面基底上的數字分佈規律應該如圖 4-8-3 一樣的軌跡+1 可得空白欄位。

正面	數字A		數字C	。。。	數字N
反面		數字B		。。。。。	

圖 4-8-3：我們猜測在 N 面時只要先按照規律找到左圖的數字，空白格子是上或下格子數字+1。

2. 當遇到奇數面的莫比烏斯盤時，因為第 2 組展開圖是翻過來放的，所以數字也會顛倒出現，

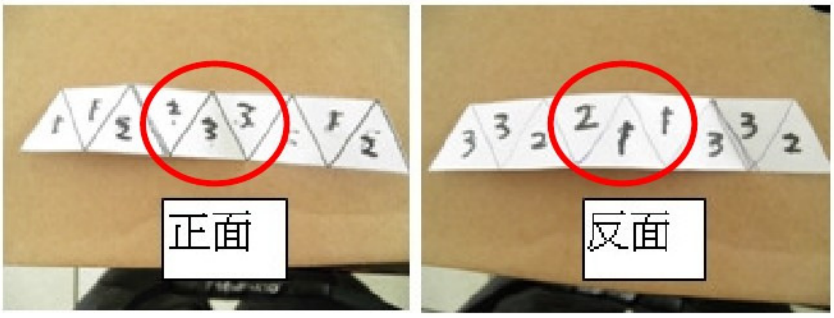


圖 4-8-4:1、3 組的數字位置相同，第 2 組數字位置相反。

（二）找出展開圖數字策略：為了找出展開圖上的數字分佈，擬定了以下的策略，如圖 4-8-4。

1、假設莫比烏斯盤在展開圖上的數字分佈是有規律的且 3 面與其他面規律一致。

2、在莫比烏斯盤上翻開第一面填 1，第二面填 2，依此類推。

3、將莫比烏斯盤填上數字後剪開成展開圖觀察規律。

4、觀察 3 面的規律並將英文字母填至莫比烏斯盤上後剪開成展開圖。

5、透過 3 面的規律將英文字母轉化成 1234

6、觀察轉換後在展開圖上的數字規律

7、找到數字分佈規律，並從規律中找到直接在展開圖上標示數字的辦法。

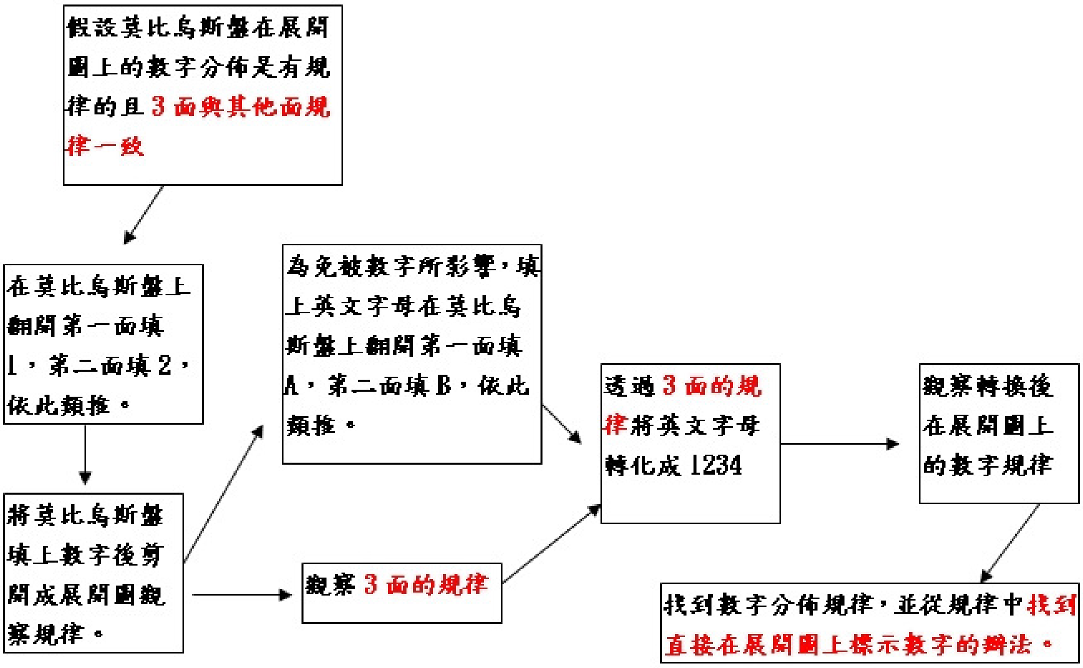


圖 4-8-5：找出展開圖數字策略流程圖

（三）將莫比烏斯盤填上數字後剪開成展開圖觀察規律，如圖 4-8-6

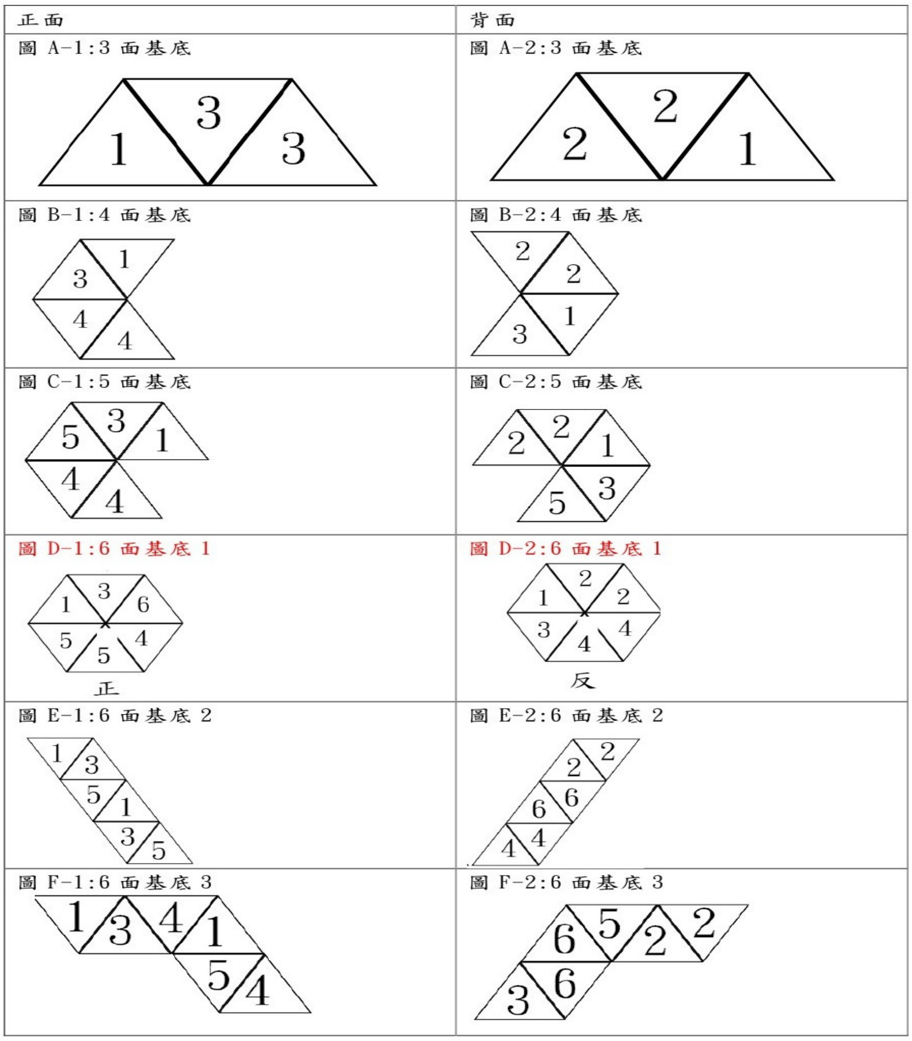


圖 4-8-6：在莫比烏斯盤上翻開的第 1 面填上 1，第 2 面填上 2，依此類推。填完數字後將其剪開成展開圖，並觀察數字在基底上的規律。結果發現按照此法填上數字，則 3 面與其他面的基底數字分佈規律不同。

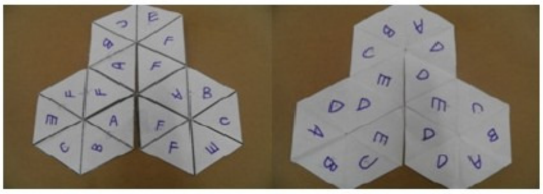
（四）將英文字母填至莫比烏斯盤上後剪開成展開圖

為了能夠更清楚瞭解數字在莫比烏斯盤上出現的規律，我們決定先用英文字母來填入。翻出的第一面寫 a，第二面寫 b…依此類推。圖 4-8-7 是我們標上英文字母後的結果

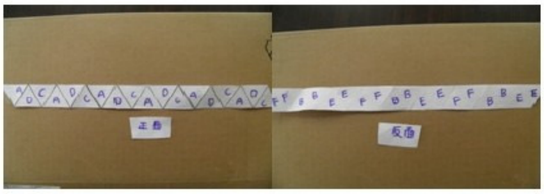
4 面展開圖

5 面展開圖

6 面展開圖



6 面展開圖



6 面展開圖

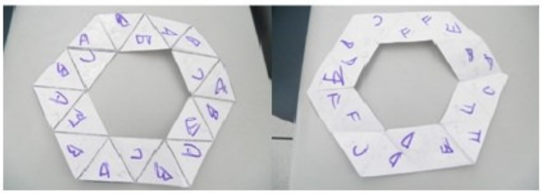


圖 4-8-7：在莫比烏斯盤上塡上英文字母後剪開成展開圖觀察其規律。

（五）透過 3 面的規律將英文字母轉化成 1234：透過觀察 3 面莫比烏斯盤，我們發現有以下幾點規律，並且將 4～6 面的英文字母透過這 3 規律轉為數字，如圖 4-8-7。

1. 每個展開圖可以分成 3 組，每組的數字分佈都是一樣的。
2. 在奇數面莫比烏斯盤之中，第 2 組是翻過來的，所以數字也會是翻過來的。
3. 每個三角形的正面和背面數字都是相差 1，要從正面的數字推到背面的數字可以用+1 和-1。並且我們得到公式：奇數欄正面數字+1＝反面數字，偶數欄反面數字+1＝正面數字

4 面展開圖

正面	A	B	C	C
反面	D	D	A	B

A=1
B=D+1=3
C=A-1= 4
D=A+1=2

正面	1	3	4	4
反面	2	2	1	3

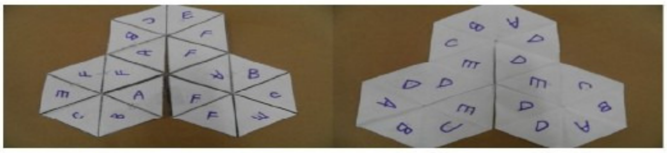
5 面展開圖

正面	A	B	D	E	E
反面	C	C	A	B	D

A=1
B=C+1=3
C=A+1= 2
D=E+1=5
E=B+1=4

正面	1	3	5	4	4
反面	2	2	1	3	5

6 面展開圖

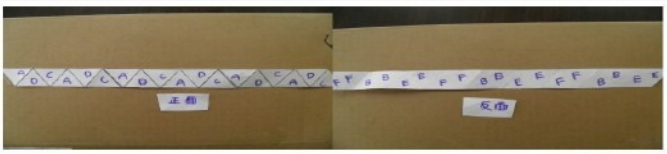


正面	A	B	C	E	F	F
反面	D	D	A	B	C	E

A=1,B=D+1=3
C=F+1= 6
D=A+1=2
E=B+1=4
F=E+1=5

正面	1	3	6	4	5	5
反面	2	2	1	3	6	4

6 面展開圖

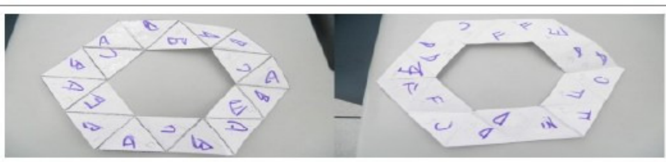


正面	A	D	C	A	D	C
反面	E	E	B	B	F	F

A=1
B=C+1=6
C=D+1=5
D=E+1=3
E=A+1=2
F=D+1=4

正面	1	3	5	1	3	5
反面	2	2	6	6	4	4

6 面展開圖



正面	A	C	B	A	E	B
反面	E	D	D	C	F	F

A=1
B=F+1=4
C=D+1=6
D=B+1=5
E=A+1=2
F=E+1=3

正面	1	6	4	1	2	4
反面	2	5	5	6	3	3

圖 4-8-7：透過 3 規律將展開圖上的英文字母化為數字

（六）從數字規律中找到在展開圖上填數字的方法，如圖 4-8-9：

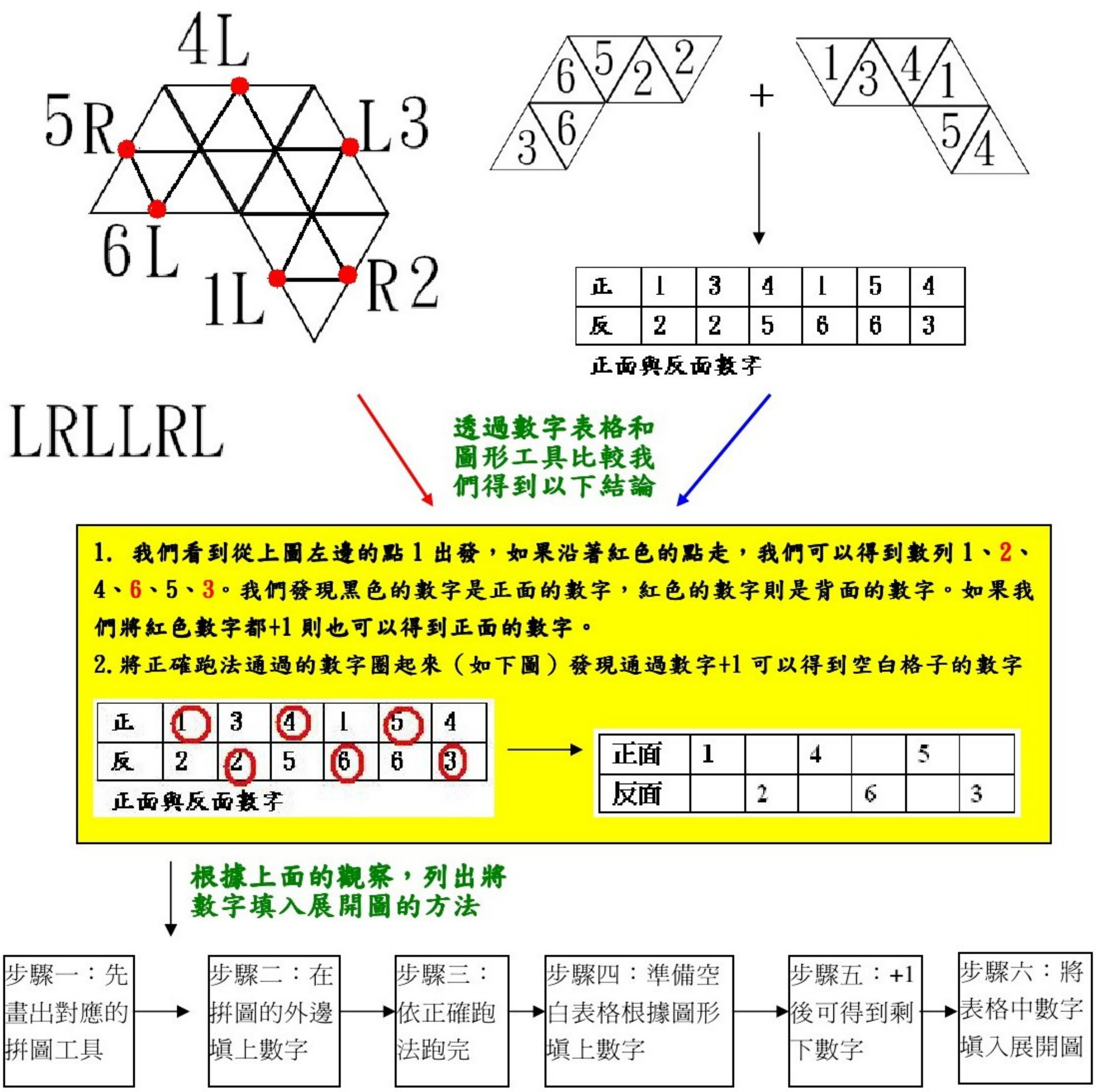


圖 4-8-9：根據上面的方法我們可以直接在展開圖上填上數字。

九、研究五：如何翻出莫比烏斯盤的全部面

（一）先觀察統計圖：為了能更清楚瞭解莫比烏斯盤的的運作情形。我們將 5～6 面莫比烏斯盤的展開圖與翻出路徑做了對應表，如表 4-9-1。

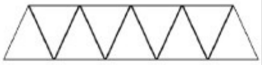
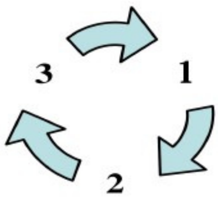
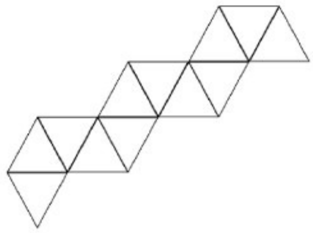
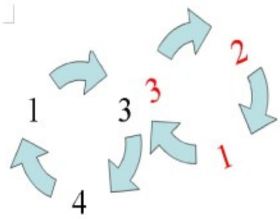
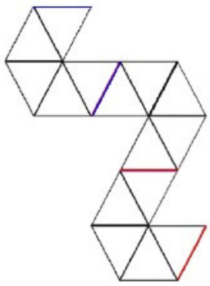
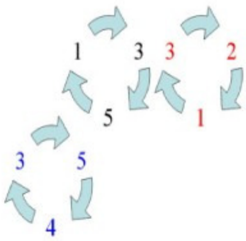
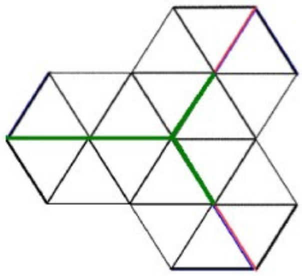
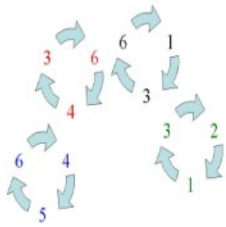
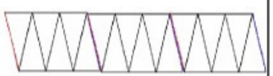
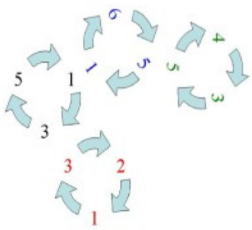
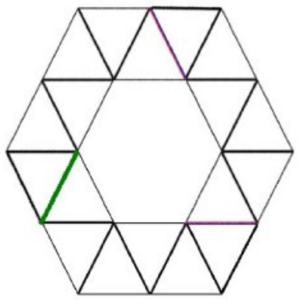
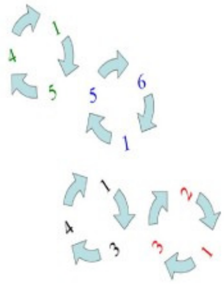
展開圖	路徑	展開圖	路徑
3 面展開圖 	3 面路徑 	4 面展開圖 	4 面路徑 
5 面展開圖 	5 面路徑 	6 面展開圖 1 	6 面路徑 1 
6 面展開圖 2 	6 面路徑 2 	6 面展開圖 3 	6 面路徑 3 

表 4-9-1：3～6 面的展開圖與翻出路徑對應表

（二）我們發現了下面幾點規律：

1、所有的路徑都由 3 個點形成一個圈，每個圈一定都有 3 個點，最多也只有 3 個點。

2、有些點如果無法翻出，則必須先翻到他的上一個點，才能翻出該點。

3、想要翻出莫比烏斯盤全部的面可以在翻完 1～3 面之後從第 2 面開始換方向翻。如果第 2 面都已經翻不出新的面，可以試試第 3 面或剛剛才翻出的 4～5 面。

（三）為了能夠更清楚瞭解莫比烏斯盤的運作過程，我們在展開圖上標上 abc 英文字母，例如第一塊 1 標為 1a 第二塊 1 標為 1b…依此類推，如圖 4-9-1。並利用括號將方塊的轉換過程記錄下來，如圖 4-9-2。

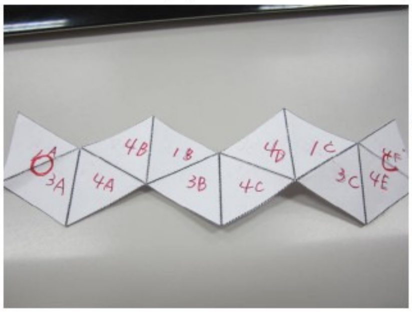
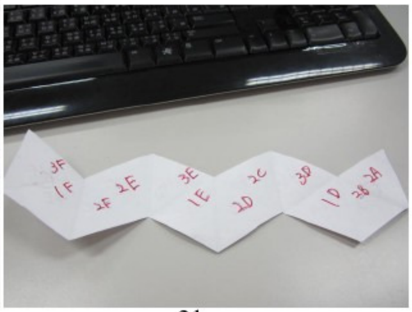



圖 4-9-1：在展開圖上標上 abc 英文字母，例如第一塊 1 標為 1a 第二塊 1 標為 1b…依此類推。

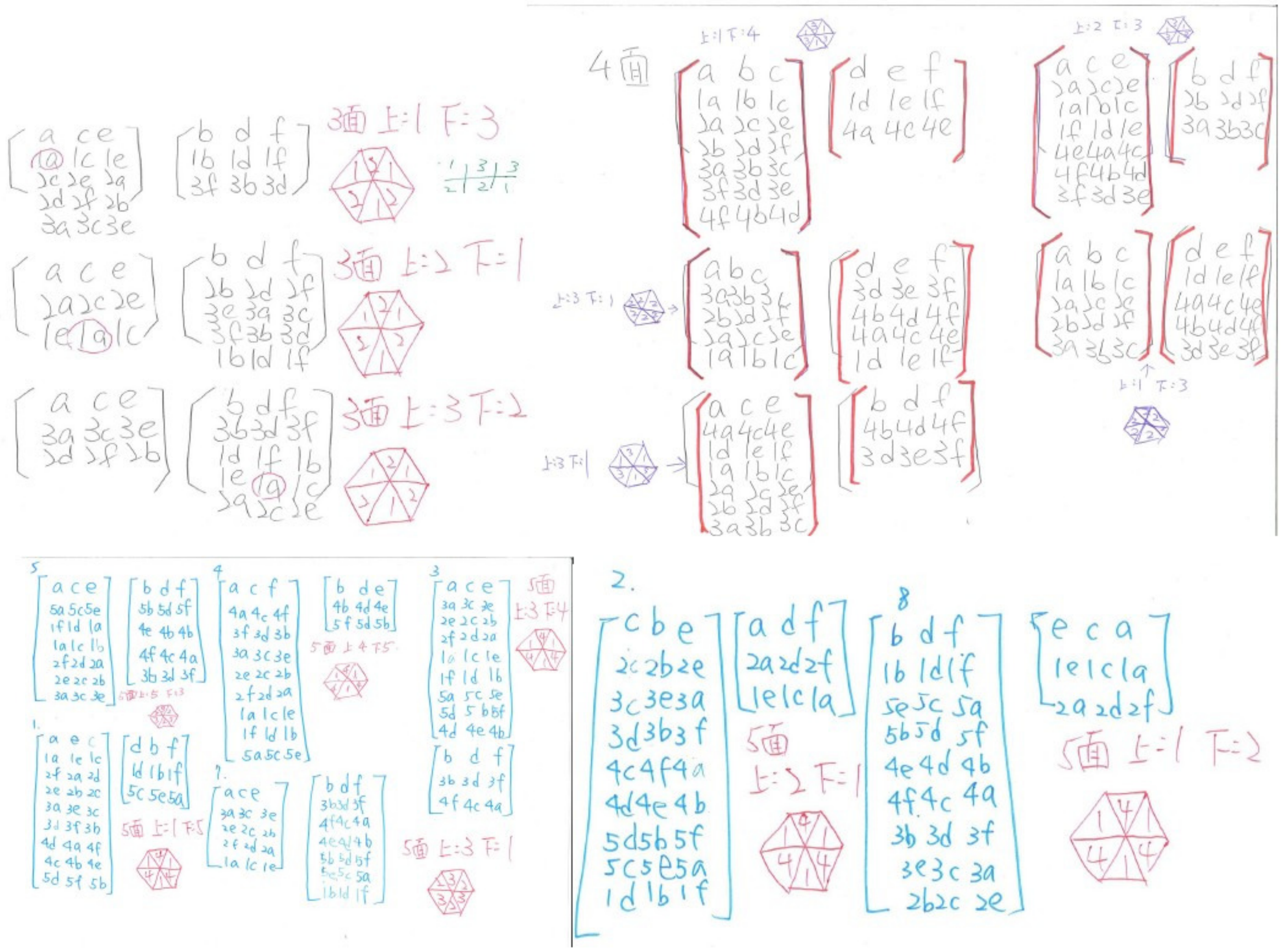


圖 4-9-2：用英文字母與括號將每一塊三角形的移動過程記錄下來

伍、研究結果

一、我們將目前以經知道莫比烏斯盤的結構與原理歸納如下：

1、要形成莫比烏斯盤，展開圖中的三角形除了頭尾之外每個三角形一定只能有 2 條連接邊。

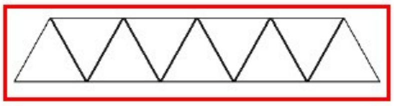


圖 5-1-1

2、所有的展開圖最後一定可以摺成圖 5-1-1 的形狀。

3、圖 5-1-1 摺疊 3 次之後會形成的圖 5-1-2 形狀。

要特別注意的是所有的基底都必須在下一組基底的上面。

所以應該是第 1 組在第 2 組的上面，第 2 組在第 3 組的上面，第 3 組在第 1 組的上面。所以會出現每一組基底都在別人上面，但又沒有任何一組基底是在最上面的有趣情況。

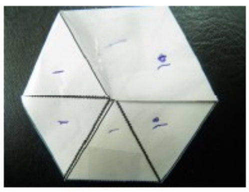
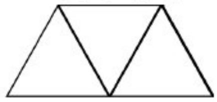


圖 5-1-2

4、圖 5-1-2 可以從中間打開，看到被隱藏的第 2 面。

3 面莫比烏斯盤連續翻開 3 次之後就可以回到第 1 面。



5-1-3 圖

5、每一個基底到最後也都要能夠摺成圖 5-1-3 的形狀，

只是因為面數的增加上面的三角形數目也會增加，

如圖 5-1-4。

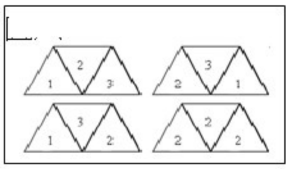


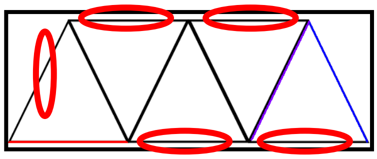
圖 5-1-4

，

6、我們發現在 3 面、6 面莫比烏斯盤展開圖中皆有條狀展開圖，所以推測 3X 面莫比烏斯盤（3X 表示 3 的倍數）皆有條狀展開圖。

二、找到更多面的展開圖與摺法

1、我們可以用「攤開」的方法，從 N 面找到 N+1 面展開圖。



如圖 5-2-1 除了固定不能動的連接邊之外，有 5 條邊可以攤開。 圖 5-2-1

攤開之後把相同及不可摺疊的圖案去掉，即可獲得 6 面展開圖的基底。

2、任一張展開圖都可以分成 3 組基底。偶數面展開圖第 2、3 組頂多旋轉 60、120 度即可連接。奇數面展開圖第 2 組則需要先翻轉後方能才能進行連接。

3、我們可以將展開圖從 N+1 面展開圖摺成 N 面展開圖。例如所有的 6 面展開圖都可以摺成 5 面展開圖。

4、從展開圖摺成莫比烏斯盤的時候應該將摺線先標出來。將 N+1 面展開圖摺成 N 面展開圖再摺成 N-1 面展開圖……依此類推最後可摺成 3 面展開圖的形狀。

5、展開圖摺疊的時候偶數面莫比烏斯盤的 3 組基底摺疊方式都一樣，奇數面莫比烏斯盤的 1、3 組摺疊方式一樣，第 2 組基底因為翻轉過所以摺疊方式與 1、3 組相反。

6、拼湊法的優點是不會漏掉展開圖，缺點則是需要花費很多時間去確定何種才是正確的基底。攤開法則只要能透過 N 面展開圖的基底，就可以找到 N+1 面的基底。

7、從觀察攤開法和拼湊法的圖形，我們發現其中有 A、B、C 三規律

展開圖 A 規律：依正確跑法到最後會將所有三角形切割成 4 個小三角形---最優先

展開圖 B 規律：在圖形上下 2 條連接邊平行時，2 條連接邊的符號相同--第二優先

展開圖 C 規律：相鄰 2 條連接邊的方向會是相反的—第三優先。

8、從上面的 3 個規律，我們找到了很容易就能夠找出 N 面莫比烏斯盤基底的方法。說明如下：如圖 5-2-2

步驟一：N 面莫比烏斯盤基底需要 N-2 塊三角形做工具。

步驟二：將 N-2 塊三角形拼成一個平面圖案。

步驟三：依照正確的跑法將此平面圖案跑完。正確跑法到最後會將所有三角形切割成 4 個小三角形。

步驟四：平面圖案上的每條邊代表 N 面莫比烏斯盤基底的一條連接邊。第 1 條邊標記為 L，第 2 條邊標記為 R，第 3 條邊標記為 L…依此類推。但如遇到前後 2 條邊互相平行，則符號應該相同。

步驟五：將步驟四記錄下的符號依序拼出 N 面莫比烏斯盤基底。

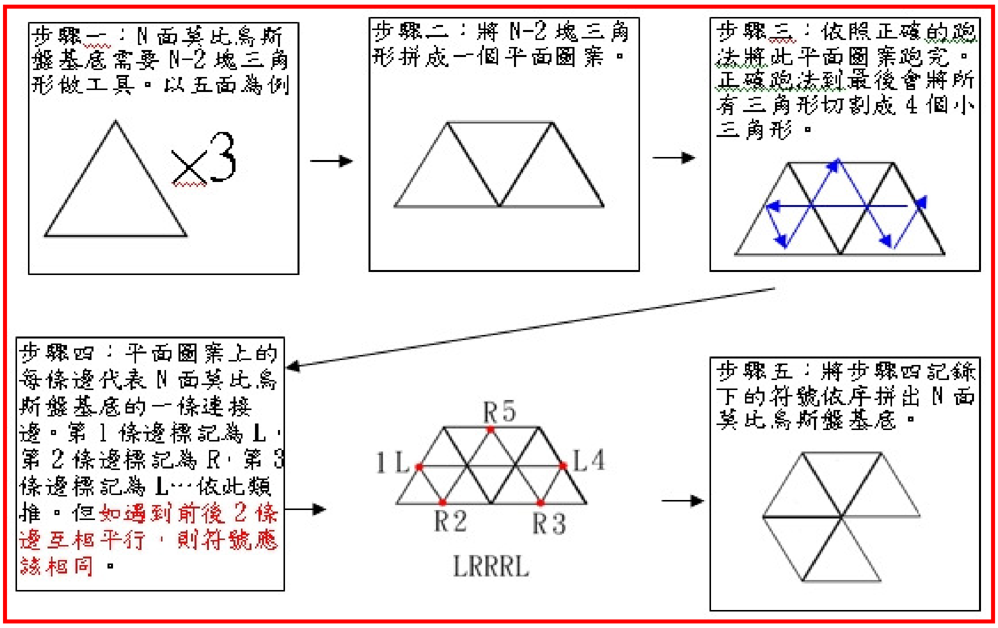


圖 5-2-2：用連線法製作出基底的方法

三、找到展開圖上數字分佈的規律：我們發現有以下幾點規律

填數字規律 A：每個展開圖可以分成 3 組，每組的數字分佈都是一樣的。

填數字規律 B：在奇數面莫比烏斯盤之中，第 2 組是翻過來的，所以數字也會是翻過來的。

填數字規律 C：每個三角形的正面和背面數字都是相差 1，要從正面的數字推到背面的數字可以用+1 和-1。以圖 D-1 來舉例數字由右至左為 1、1、5、4、2、5，我們將這列數字+1 和-1 之後，可以看到 1+1、1-1、5+1、4-1、2+1、5-1→2、6、6、3、3、4（1-1＝0 因為是一個循環所以 0 可以看做 6）。如此我們可以正面去找到背面的數字。如圖 5-3-1

步驟一：先畫出對應的拼圖工具 → 步驟二：在拼圖的外邊填上數字 → 步驟三：依正確跑法跑完 → 步驟四：準備空白表格根據圖形填上數字 → 步驟五：+1後可得到剩下數字 → 步驟六：將表格中數字填入展開圖

圖 5-3-1：規律填上數字的方法

四、如何翻出莫比烏斯盤的全部面，我們發現了下面幾點規律：

路徑規律 A：所有的路徑都由 3 個點形成一個圈，每個圈一定都有 3 個點，最多也只有 3 個點。

路徑規律 B：有些點如果無法翻出，則必須先翻到他的上一個點，才能翻出該點。

路徑規律 C：想要翻出莫比烏斯盤全部的面可以在翻完 1～3 面之後從第 2 面開始換方向翻。如果第 2 面都已經翻不出新的面，可以試試第 3 面或剛剛才翻出的 4～5 面。

五、根據我們發現的連線法，我們也製作出其他形狀的莫比烏斯盤，也製作了類似的立體結構，如圖 5-5-1

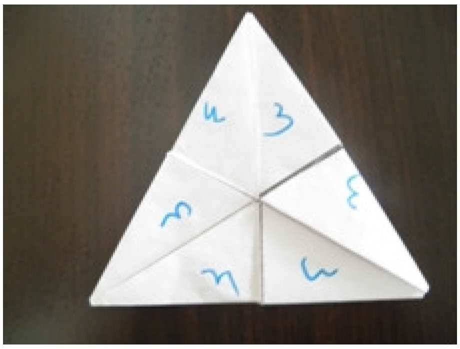
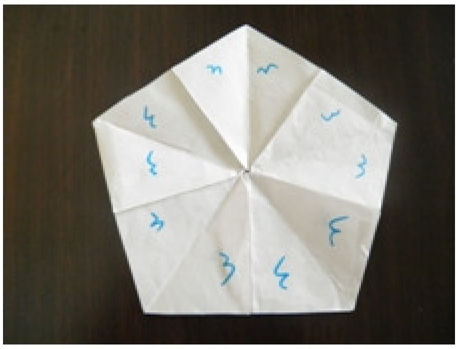
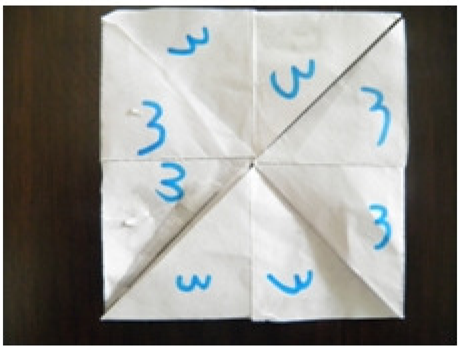
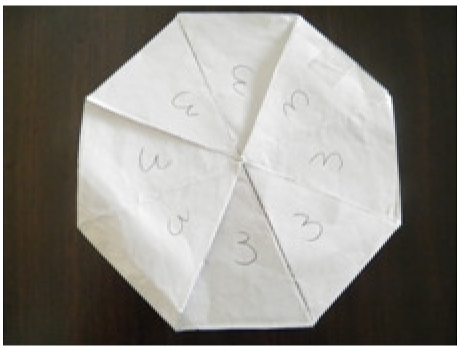
3角形莫比烏斯盤		5邊形莫比烏斯盤	
4邊形莫比烏斯盤		8邊形莫比烏斯盤	

圖 5-5-1：其他形狀的莫比烏斯盤

六、根據我們製作的其他形狀的莫比烏斯盤，我們發現可製作的莫比烏斯盤有以下兩種：

（一)N 邊形莫比烏斯盤每面有 N 個三角形:我們將此種莫比烏斯盤的三角形統計如表 5-6-1

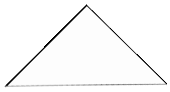
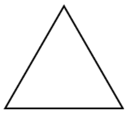
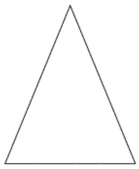
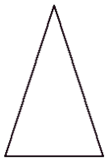
邊數	4	6	8	10	N
摺的次數	2	3	4	5	N-2
角度	45 45 90	60 60 60	67.5 67.5 45	72 72 36	(180-360÷N)÷2 (180-360÷N)÷2 360÷N
形狀					等腰直角三角形 頂角越來越小 底角越來越大

表 5-6-1：第一種莫比烏斯盤的三角形

（二)N 邊形莫比烏斯盤每面有 N×2 個三角形:我們將此種莫比烏斯盤的三角形統計如表 5-6-2

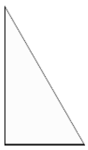
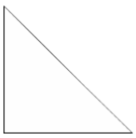
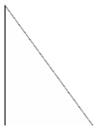
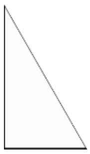
邊數	3	4	5	6	N
摺的次數	3	4	5	6	N
角度	30 60 90	45 45 90	54 36 90	60 30 90	90-360÷2N 360÷2N 90
形狀					直角三角形 底越來越短 高越來越長

表 5-6-2：第二種莫比烏斯盤的三角形

陸、結論

一、這次從上學期 10 月開始研究莫比烏斯盤到現在，算算也花了半年的時間。我們現在已經知道如何製作莫比烏斯盤的展開圖，有三種方法可供我們選擇。

（一）拼湊法：簡單但沒效率。

（二）攤開法：適合初學者，可從較少面往多面推。

（三）連線法：不需要經過其他面的莫比烏斯盤又可以找出 N 面莫比烏斯盤基底。

二、另外我們也發現了莫比烏斯盤的運作規律，所以可以很輕易的從展開圖摺成莫比烏斯盤。在這次研究中，最簡單輕鬆的應該算是翻出莫比烏斯盤全部面的這一項研究，因為只需要翻轉，而且很好玩，總是在沒有料想到的情況下出現下一面。

三、要在空白的展開圖上填上數字也花了我們很多時間去研究，我們發現有很多展開圖其實是同一種，只是將第 1 塊移動到尾巴而已。所以我們必須在 2 種展開圖中謹慎選擇，因為有

的時候規律只會出現在其中一種展開圖上。

四、最後，雖然這次我們研究了很多種的莫比烏斯盤，但我們不禁要思考是否有其他結構的莫比烏斯盤存在？說不定有正方體構成的莫比烏斯盤，又或者正 8 面體也可以構成莫比烏斯盤？這是我們將來研究的方向與目標。

柒、參考資料

一、http://www.chiuchang.org.tw/download/docu/club/topology.pdf 生生不息的莫比烏斯帶-拓樸學奇趣

二、中華民國第 47 屆中小學科學博覽會　數學科　國小組　翻天轉地多角星

三、中華民國第 52 屆中小學科學博覽會　數學科　國中組　**莫比烏斯環和相關紙環**

【評語】080406

本研究從雲端硬碟符號發想，並與莫比烏斯環做結合，製作出 3 面莫比烏斯盤。再由此出發，進而製作出 4 面、5 面……n 面莫比烏斯盤。透過觀察、推測與實作，發現了莫比烏斯盤的運作規律，因而能很輕易的從展開圖摺成莫比烏斯盤。接著，再找出一些規律以便能成功翻出莫比烏斯盤的全部面。處處充滿好玩、有趣。全隊表現精彩，值得鼓勵。