中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080405

無鎖不能－在 n×n 方格中卡住五連方格的探討

學校名稱：彰化縣員林鎮員林國民小學

作者：	指導老師：
小五 徐翊睿	陳麗君
小五 黃郁芸	陳美慧
小五 賴弘昇	
小六 廖迅威	
小六 賴唯紳	

關鍵詞：五連方格、對稱、最少解

摘 要

本研究探討在 n×n 的方格表中，8 種五連方格之 $f_i(n)$ 值，其中 $f_i(n)$ 表示要使第 i 種五連方格無法置入時，最少要挖去 1×1 方格的個數。研究結果發現：

一、除了 $f_5(n)$ 與 $f_8(n)$ 之值外，其餘 $f_i(n)$ 均可得到公式。（公式詳見表 6-1）

二、雖然 $f_5(n)$ 與 $f_8(n)$ 之值無法得到公式，但可得到上下界。（上下界詳見表 6-1）

壹、研究動機

有一天，老師在資優班五年級數學課堂上拿了一份數學比賽題目，當中有一題五連方格的題目，題目為在 8×8 方格表中最少要挖去幾個小方格，才無法從剩餘的方格表中，裁剪出一片完整的 T 型五連方格的圖形？引起大家的討論，激發了我們的興趣，因此我們著手設計了下列在 3×3 方格表中的八個五連方格圖形，希望能夠尋找當中的秘密，探討出最終的一般解，以下便是我們的研究。

貳、名詞釋義

一、本研究所指的五連方格八種圖形，由左而右依序為 T 形、樓梯形、鉗子形、刀子形、 S 形、凹形、 L 形、十字形。(如圖 2-1)

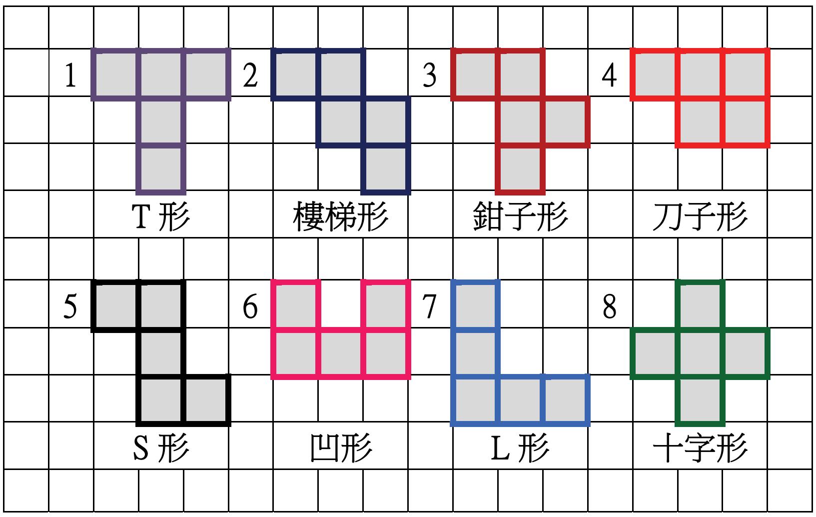


圖 2-1

二、$f_i(n)$表示 n×n 方格表中，要使第 i 種五連方格無法置入時，最少要挖去 1×1 方格的個數。

三、[甲]表示小於等於甲的最大自然數。

四、min{甲,乙}表示甲和乙的最小值。

參、研究目的

一、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓 T 形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_1(n)$之值。
二、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓樓梯形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_2(n)$之值。
三、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓鉗子形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_3(n)$之值。
四、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓刀子形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_4(n)$之值。
五、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓 S 形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_5(n)$之值。
六、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓凹形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_6(n)$之值。
七、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓 L 形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_7(n)$之值。
八、探討 3×3、4×4、5×5…n×n 的方格表中，最少要挖去幾個 1×1 個小方格，才能讓十字形的完整五連方格圖形無法置入，亦即$f_8(n)$之值。

肆、研究設備及器材

方格紙、筆、尺、平板電腦、繪圖軟體

伍、研究過程及方式

一、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-1-1 的完整 T 形五連方格圖形無法置入。

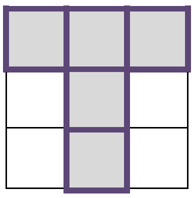


圖 5-1-1

(一)觀察：首先在 3×3 表中找出無法連成上述圖形的解法，並從 3×3 中推衍 4×4 方格表中挖去最少空格數的解法。並從繪出的方格表中試著看看二者的圖形是否為最少的解法。其中還要注意如何挖去才能較有規律而且圖形較能顯現出對稱性，再依據發現的特點依序做出 5×5… 8×8 的解法，最後得到如圖 5-1-2 的解法。

(二)尋找關係：從上述的圖形中，原本我們隨意剪下任意的方格，都無法探索出其中的關連性，直到做到 7x7 的方格表中發現如果我們把方格表中的對角線先找出來，並從對角線的方格挖空，並一直挖到對角線的最後方格；挖空空格中間的圖形讓它形成一個雙樓梯形狀的圖形〈如圖 5-1-2 所示〉再往雙樓梯圖形旁的斜角線整行挖空，並且讓挖去的空格數能夠在對角線的兩側呈現的數目相同。或許較容易找出破解的方式。經過不斷測試從中發現此種作法的圖形較規律而且似乎較容易找出最少解的挖法，但我們也發現圖形中的對角線的第一個及最後一個其實可以不用挖去，如圖 5-1-2。

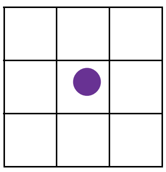
(三)猜測：當圖形一一解出並經過不斷地測試先假設每一個圖形皆是最少的解法，發現當圖形被解出時其中的數字好像有些許的關連性，因此我們把每一個圖形所解出來的解法先當成最少解並表列如下：(見表 5-1-1)

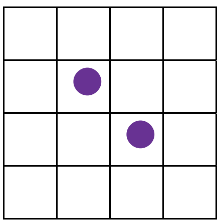
表 5-1-1

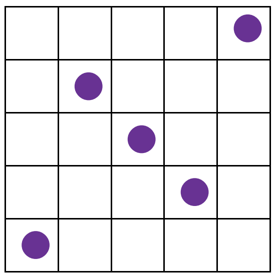
方格表格子數	挖去的個數	方格表格子數	挖去的個數	方格表格子數	挖去的個數
3x3	1	4x4	2	5x5	5
6x6	8	7x7	11	8x8	14

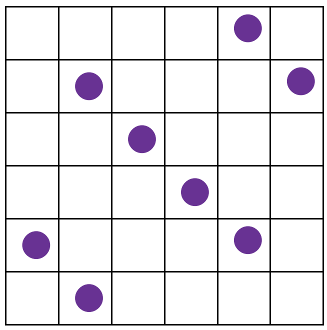
我們發現挖去的小方格數字呈現一種規律性的數列增加。

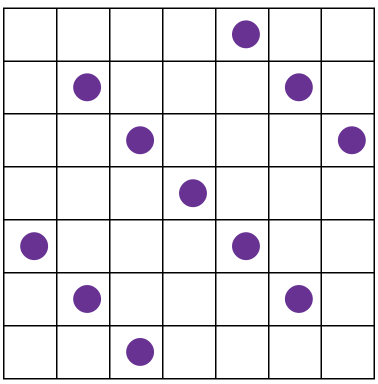
(四)檢驗：根據上述的規律性，我們做出一個推論，預測下一個方格表 9x9 挖去空格數字應該為 19。結果發現沒有錯，正好它呈現的圖形如圖 5-1-2，挖去的空格數也正好是 19。因此我決定擴大檢驗我們的推論沒有錯誤，所以往下作出至 20x20 得到了如圖 5-1-2、表 5-1-2 的結果。

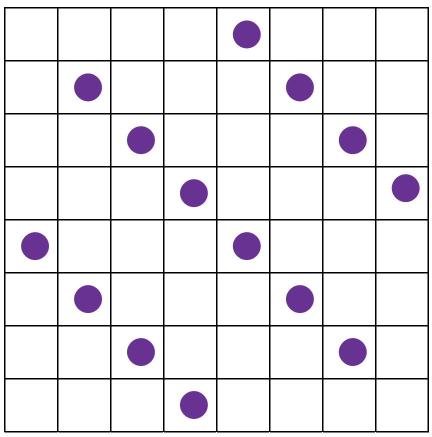

3X3 (1)

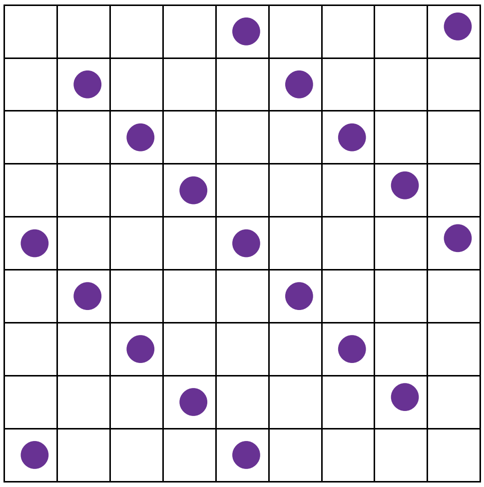

4X4 (2)


5X5 (5)

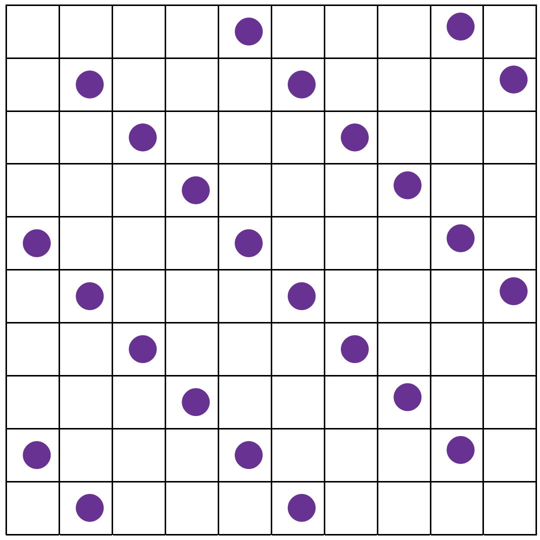

6X6 (8)


7X7 (11)


8X8 (14)



9X9 (19)



10X10 (24)

圖 5-1-2

註：11x11~20x20 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現。

表 5-1-2

方格表格子數	挖去的個數	規律差距數	方格表格子數	挖去的個數	規律差距數
3x3	1		4x4	2	1
5x5	5	3	6x6	8	3
7x7	11	3	8x8	14	3
9x9	19	5	10x10	24	5
11x11	29	5	12x12	34	5
13x13	41	7	14x14	48	7
15x15	55	7	16x16	62	7
17x17	71	9	18x18	80	9
19x19	89	9	20x20	98	9

(五)證明：

1.根據(一)~(四)，可觀察出 $f_1(n)$的規律性。我們發現當 n 被 4 除餘 0 或 1、或 2、或 3，在求$f_1(n+1)$時，可以透過圖 5-1-2 的方式求得。

當 n 是 4 的倍數，考慮(n+1)x(n+1)的方格如圖 5-1-3 所示。

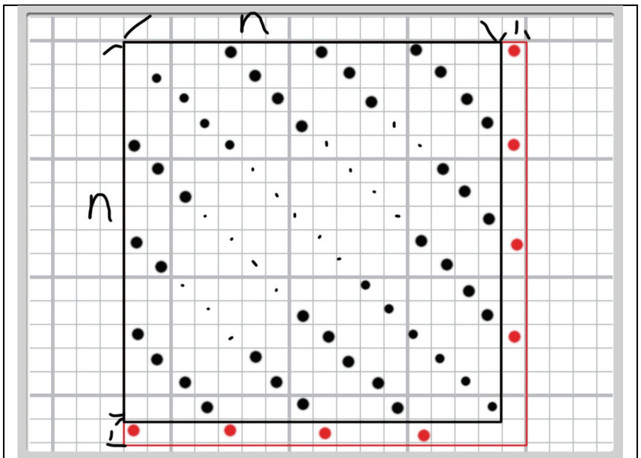


圖 5-1-3

2.圖 5-1-3 中，紅色標示的 1×(n+1)或(n+1)×1 方格，我們需考慮其界面鄰近 2 行或 2 列，透過檢視 3x3 方格的 $f_1(3)$值，共檢驗 2n-3 次，可發現 $f_1(n+1)=f_1(n)+\left(\frac{n}{2}+1\right)$，n 為 4 的倍數。

3.同理，我們發現 $f_1(n+2)=f_1(n+1)+\left(\frac{n}{2}+1\right)$，$f_1(n+3)=f_1(n+2)+\left(\frac{n}{2}+1\right)$，n 為 4 的倍數。

(六)公式：

根據(一)~(五)，我們歸納出

$$f_1(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}-2 & \text{，若 n 為 4 的倍數}\\[2mm] \dfrac{n^2}{4}-\dfrac{5}{4} & \text{，若 n 除以 4 餘 1 或 3}\\[2mm] \dfrac{n^2}{4}-1 & \text{，若 n 除以 4 餘 2}\end{cases}$$

二、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-2-1 的完整樓梯形五連方格圖形無法置入。

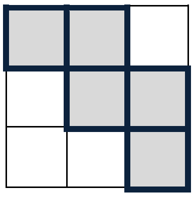
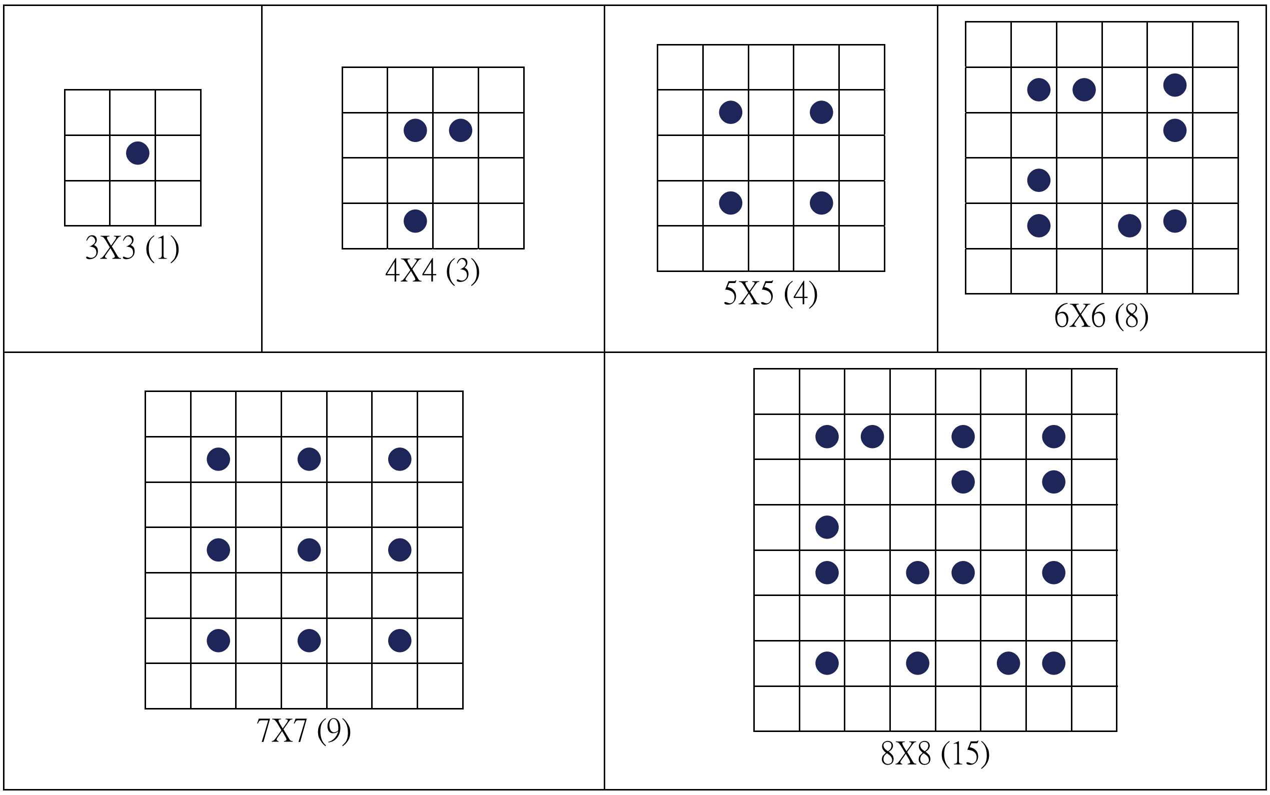
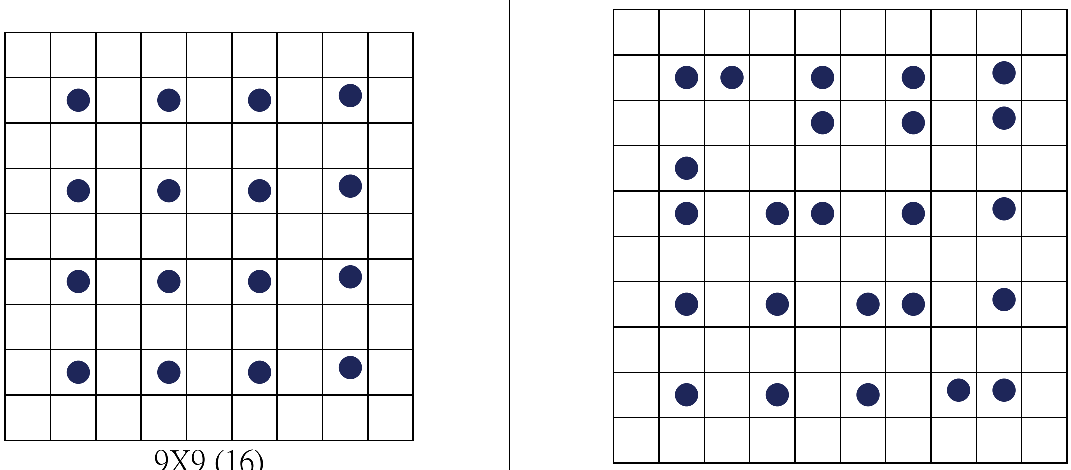


圖 5-2-1

(一)　觀察：參照 T 形的步驟(一)~(四)的做法，得到如圖 5-2-2 的解法，並歸納出表 5-2-1。





9X9 (16)　　10X10 (24)

圖 5-2-2

註：11x11~13x13 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現。

表 5-2-1

方格表格子數	挖去的個數	規律差距數	方格表格子數	挖去的個數	規律差距數
3x3	1		4x4	3	2
5x5	4	1	6x6	8	4
7x7	9	1	8x8	15	6
9x9	16	1	10x10	24	8
11x11	25	1	12x12	35	10
13x13	36	1			

(二) 證明：

1.根據圖 5-2-2 可觀察出 $f_2(n)$的規律性。我們發現此圖形可分為奇、偶數方格表二種不同的規律性。可以透過圖 5-2-2 的方式求得。當 n 是奇數，需考慮(n+2)x(n+2)的方格如圖 5-2-3 所示。

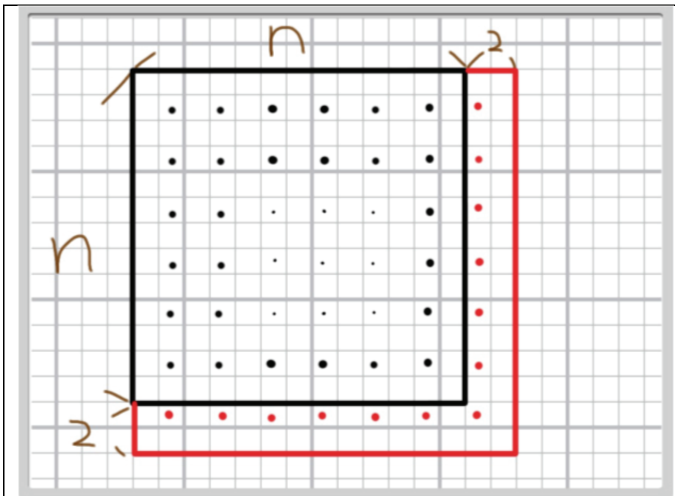


圖 5-2-3

2.圖 5-2-3 中，紅色標示的 2×(n+2)或(n+2)×2 方格，我們需考慮其界面鄰近 1 行或 1 列，透過檢視 3×3 方格的 $f_2(3)$值，共檢驗 2n-1 次，可發現 $f_2(n+2)$=$f_2(n)+n$，n 為奇數。

3.同理，我們發現當 n 為偶數時 $f_2(n+2)$=$f_2(n)$+$(n+1)$。

(三) 公式：

根據(一)~(二)，我們歸納出

$$f_2(n)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)^2}{4}，若\ n\ 為奇數\\ \dfrac{n^2}{4}-1，若\ n\ 為偶數\end{cases}$$

三、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-3-1 的完整鉗子形五連方格圖形無法置入。

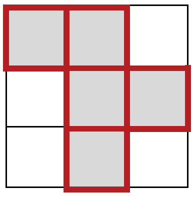
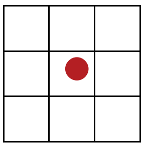
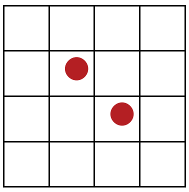


圖 5-3-1

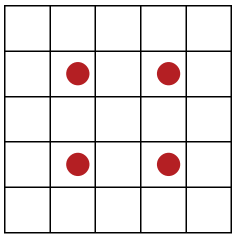
（一）觀察：參照 T 形的步驟(一)~(四)做法，得到如圖 5-3-2 的解法，並歸納出表 5-3-1。



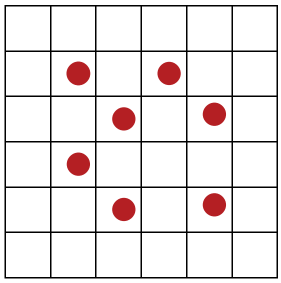
3X3（1）



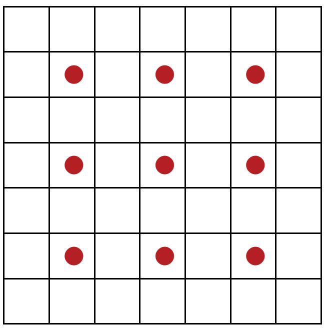
4X4（2）



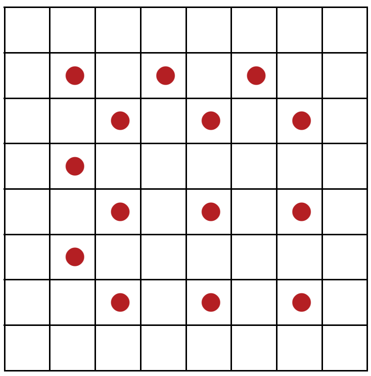
5X5（4）



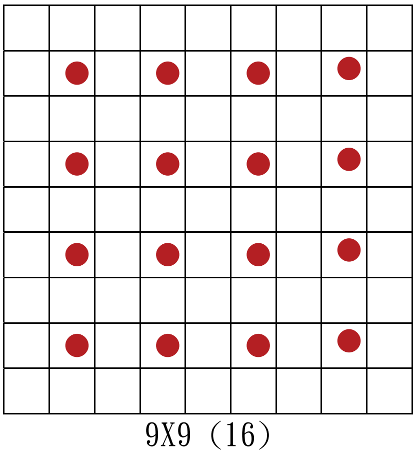
6X6（7）



7X7（9）



8X8（14）



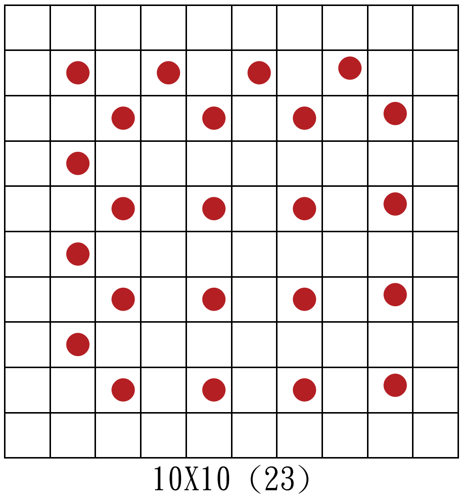


圖 5-3-2

註：11×11~16×16 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現。

表 5-3-1

方格表格子數	挖去的個數	規律差距數	方格表格子數	挖去的個數	規律差距數
3x3	1		4x4	2	1
5x5	4	2	6x6	7	3
7x7	9	2	8x8	14	5
9x9	16	2	10x10	23	7
11x11	25	2	12x12	34	9
13x13	36	2	14x14	47	11
15x15	49	2	16x16	62	13

(二)證明：

1.根據圖 5-3-2，可觀察出 $f_3(n)$的規律性。我們發現此圖形可分為奇、偶數方格表二種不同的規律性。可以透過圖 5-3-2 的方式求得。當 n 是奇數，需考慮(n+2)×(n+2)的方格如圖 5-3-3 所示。

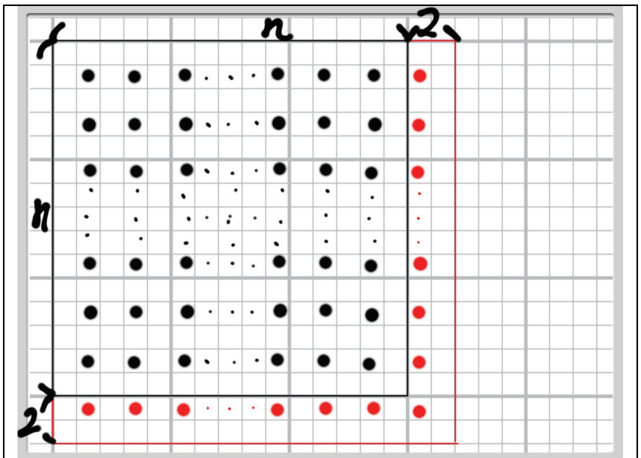


圖 5-3-3

2.圖 5-3-3 中，紅色標示的 2x(n+2)或(n+2)x2 方格，我們需考慮其界面鄰近 1 行或 1 列，透過檢視 3x3 方格的 $f_3(3)$值，共檢驗 2n-1 次可發現 $f_3(n+2)$=$f_3(n)+n$，n 為奇數。

3.同理，我們發現當 n 為偶數時 $f_3(n+2)$=$f_3(n)$+$(n+1)$。

(三)公式：

根據(一)~(二)，我們歸納出

$$f_3(n)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)^2}{4}\text{，若 n 為奇數}\\[2ex] \dfrac{n^2}{4}-2\text{，若 n 為偶數}\end{cases}$$

四、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-4-1 的完整刀子形五連方格圖形無法置入。

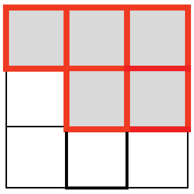
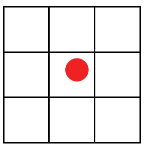
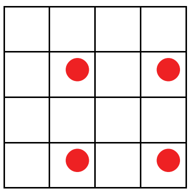


圖 5-4-1

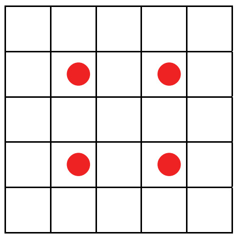
（一）觀察：參照 T 形的步驟(一)~(四)做法，得到圖 5-4-2 的解法，並歸納出表 5-4-2。



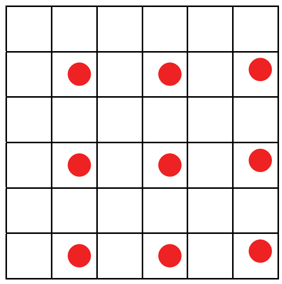
3X3 (1)



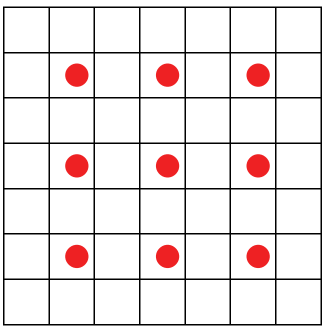
4X4 (4)



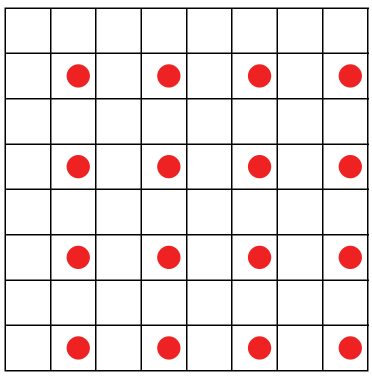
5X5 (4)



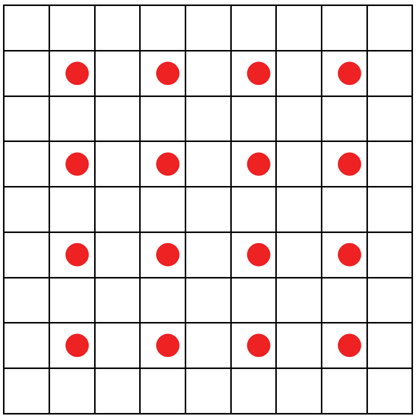
6X6 (9)



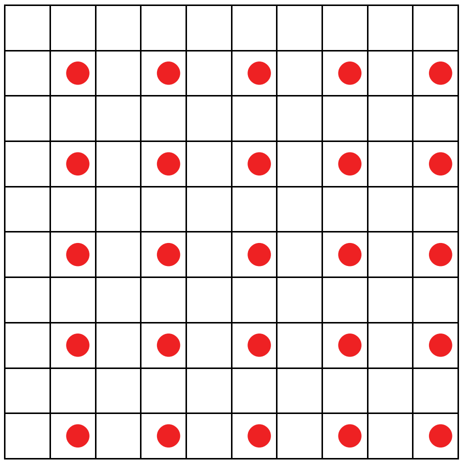
7X7 (9)



8X8 (16)



9X9 (16)



10X10 (25)

圖 5-4-2

註：11x11 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現。

表 5-4-2

方格表格子數	挖去的個數	規律差距數	方格表格子數	挖去的個數	規律差距數
3x3	1		4x4	4	3
5x5	4	0	6x6	9	5
7x7	9	0	8x8	16	7
9x9	16	0	10x10	25	9
11x11	25	0			

(二)證明:

1.根據圖 5-4-2，可觀察出 $f_4(n)$的規律性。我們發現此圖形可分為奇、偶數方格表二種不同的規律性。可以透過圖 5-4-2 的方式求得。當 n 是奇數，需考慮(n+2)x(n+2)的方格如圖 5-4-3 所示。

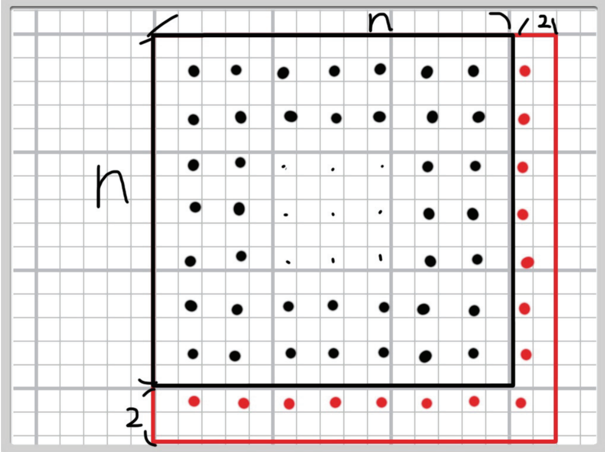


圖 5-4-3

2.圖 5-4-3 中，紅色標示的 2x(n+2)或(n+2)x2 方格，我們需考慮其界面鄰近 1 行或 1 列，透過檢視 3x3 方格的 $f_4(3)$值，共檢驗 2n-1 次可發現 $f_4(n+2)$=$f_4(n)+n$，n 為奇數。

3.同理，我們發現當 n 為偶數時 $f_4(n+2)=f_4(n)+(n+1)$。

(三)公式：
根據(一)~(二)，我們歸納出

$$f_4(n)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)^2}{4}\text{，若 n 為奇數}\\ \dfrac{n^2}{4}\text{，若 n 為偶數}\end{cases}$$

五、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-5-1 的完整 S 形五連方格圖形無法置入。

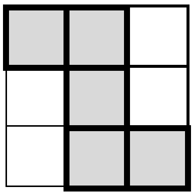
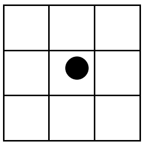
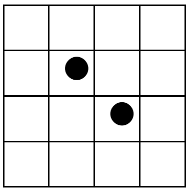


圖 5-5-1

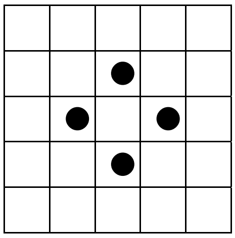
（一）觀察：參照 T 形的步驟(一)~(四)做法，得到如圖 5-5-2 的結果，並歸納出表 5-5-1。



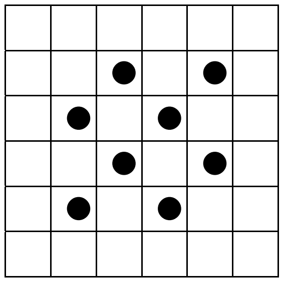
3X3 (1)



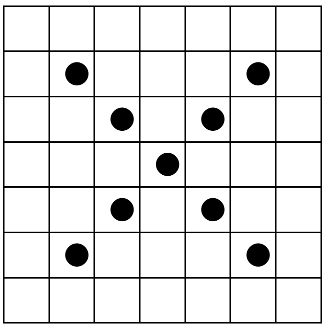
4X4 (2)



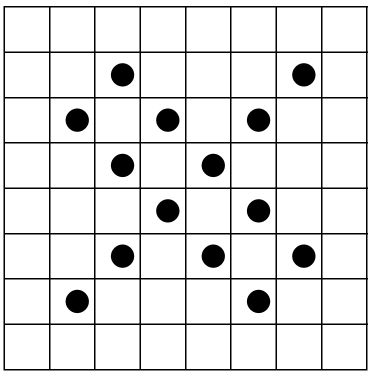
5X5 (4)



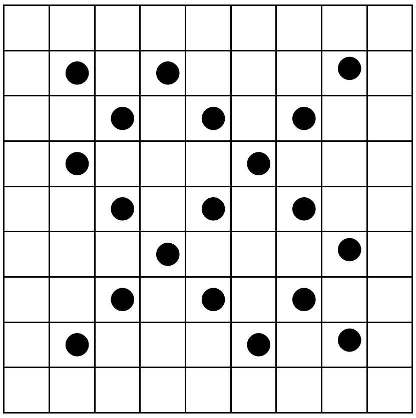
6X6 (8)



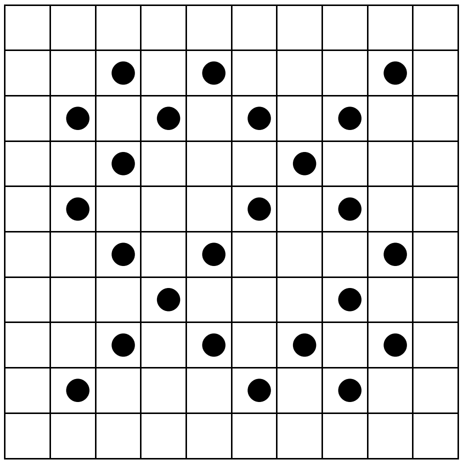
7X7 (9)



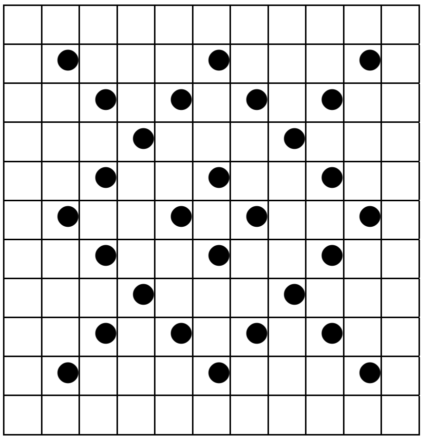
8X8 (14)



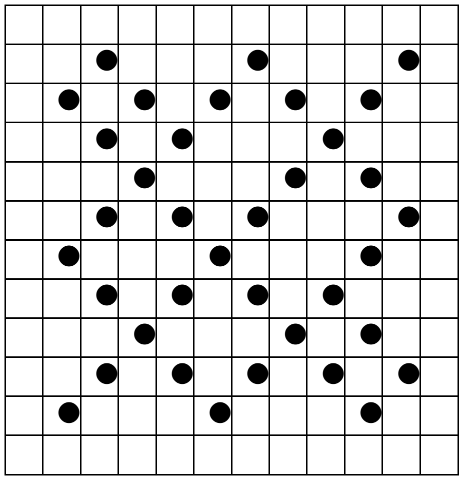
9X9 (19)



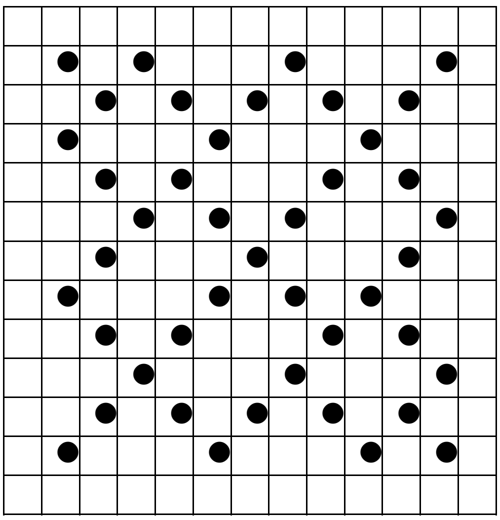
10X10 (24)



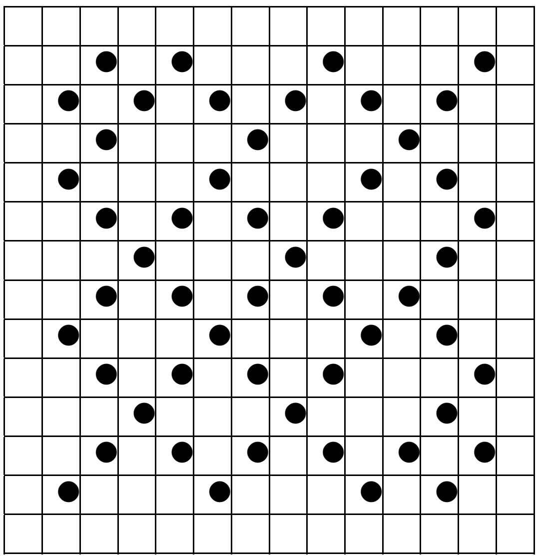
11×11(28)



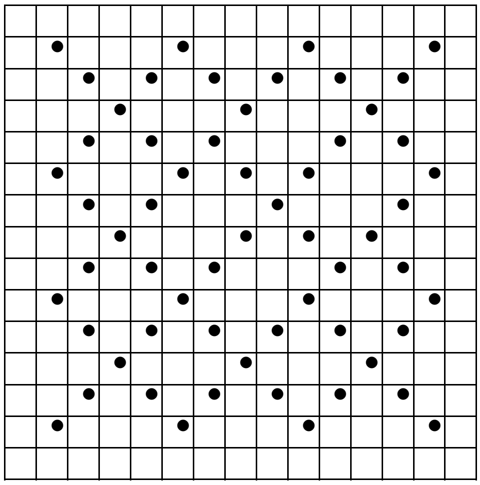
12×12(36)



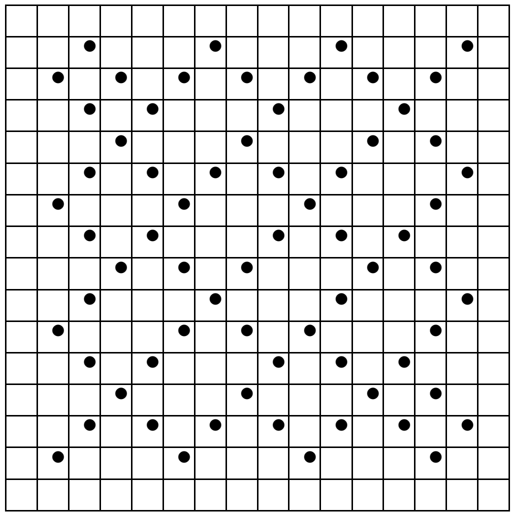
13×13(43)



14×14(52)



15×15(59)



16×16(68)

圖 5-5-2

註：17×17~23×23 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現。

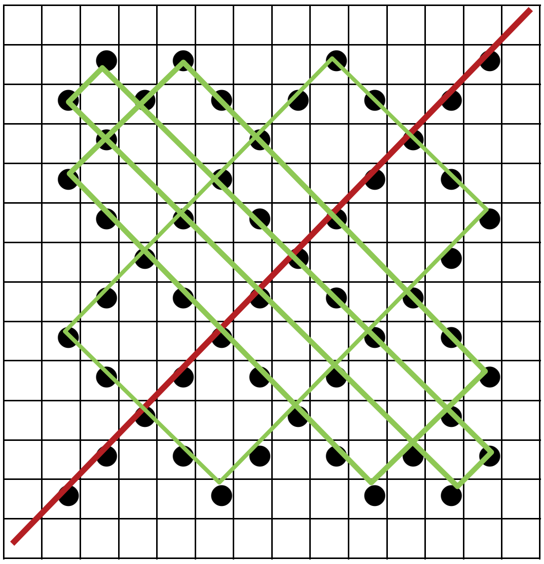
表 5-5-1

方格表	挖去的個數	方格表	挖去的個數	方格表	挖去的個數
3×3	1	4×4	2	5×5	4
6×6	8	7×7	9	8×8	14
9×9	19	10×10	24	11×11	28
12×12	36	13×13	43	14×14	52
15×15	59	16×16	68	17×17	79
18×18	90	19×19	99	20×20	112
21×21	125	22×22	138	23×23	151

(二)證明：

從圖5-5-2及表5-5-1中，我們發現使完整S形五連方格圖形無法置入的解法，並無明顯的規律，亦無法推論出其公式，因此我們進一步嘗試著求出其上下界。

1. 當$(n-2)$ 為4的倍數時，若$n=14$，如圖5-5-3所示，圖形約略可分為3個矩形與1條對角線，



在 14×14 的方格表中

5	9	11	|	12
8	4	2		

求出解為

$$(13\times 2-4)\times 3+12-3\times 2-3\times 4$$

圖5-5-3

2.另外觀察18×18的圖，亦可約略區分為 4個矩形與1條對角線

5	9	13	15	|	16
12	8	4	2		

求出解為 $(17\times 2-4)\times 4+16-4\times 2-6\times 4$

3.當(n－2) 為4的倍數時，在 n×n 的方格表中，會呈現如下述之分佈情形

5	9	13	………………………	n －5	n －3	|	n －2
n －6	n －10	………………………………		4	2		

共 $\left(\frac{n-2}{4}\right)$ 組矩形　　　　對角線

共有$\left(\frac{n-2}{4}\right)$ 組個數為 $2\times\left(n-6+5\right)-4$ 的矩形，及個數為（ n －2）的一條對角線，再扣除矩形與對角線及兩兩矩形間相交重複計算的個數，可以得到

$$\left[2\times\left(n-6+5\right)-4\right]\times\left(\frac{n-2}{4}\right)+(n-2)-\left(\frac{n-2}{4}\right)\times 2-\left[\frac{(n-2)(n-6)}{8}\right]=\frac{3n^2-8n+4}{8}$$

故得，當(n－2) 為 4 的倍數時，$f_5(n-1)+1\leq f_5(n)\leq\frac{3n^2-8n+4}{8}$， n ≥ 6。

4.同理，當(n－2)被 4 除餘 1 時，在 n×n 的方格表中，會呈現如下述之分佈情形

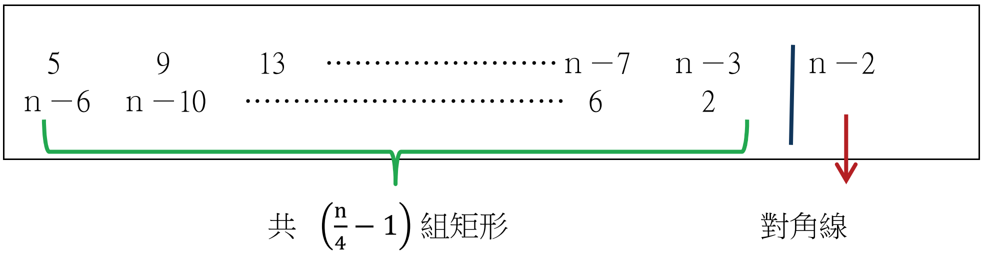
5	9	13	………………………	n －10	n －6	|	n －2
n －6	n －10	………………………………		9	5		n －2

共 $\left(\frac{n-7}{4}\right)$ 組矩形　　　　對角線

共有$\left(\frac{n-7}{4}\right)$ 組個數為 $2\times\left(n-6+5\right)-4$ 的矩形，及個數為（ n －2）的 2 條對角線，再扣除矩形與對角線及兩兩矩形間相交重複計算的個數，可以得到

$$\left[2\times\left(n-6+5\right)-4\right]\times\left(\frac{n-7}{4}\right)+(n-2)\times 2-\left(\frac{n-7}{4}\right)\times 2\times 2-1-\left[\frac{(n-7)(n-11)}{8}\right]$$
$$=\frac{3n^2-14n+23}{8}$$

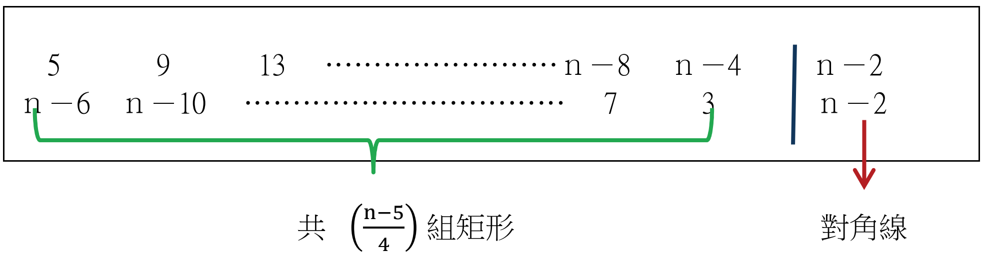
5.當(n－2)被 4 除餘 2 時，在 n×n 的方格表中，會呈現如下述之分佈情形



共有$\left(\frac{n}{4}-1\right)$組個數為 $2\times\left(n-6+5\right)-4$ 的矩形，及個數為（n－2）的 1 條對角線，再扣除矩形與對角線及兩兩矩形間相交重複計算的個數，可以得到

$$\left[2\times\left(n-6+5\right)-4\right]\times\left(\frac{n}{4}-1\right)+(n-2)-\left(\frac{n}{4}-1\right)\times 2-\left[\frac{(n-4)(n-8)}{8}\right]=\frac{3n^2-12n+16}{8}$$

6. 同理，當(n－2)被 4 除餘 3 時，在 n×n 的方格表中，會呈現如下述之分佈情形



共有$\left(\frac{n-5}{4}\right)$組個數為 $2\times\left(n-6+5\right)-4$ 的矩形，及個數為（n－2）的 2 條對角線，再扣除矩形與對角線及兩兩矩形間相交重複計算的個數，可以得到

$$\left[2\times\left(n-6+5\right)-4\right]\times\left(\frac{n-5}{4}\right)+(n-2)\times 2-\left(\frac{n-5}{4}\right)\times 2\times 2-1-\left[\frac{(n-5)(n-9)}{8}\right]$$
$$=\frac{3n^2-10n+15}{8}$$

（三）公式：

根據上述做法 1~6，我們可以歸納出

$$f_5\left(n-1\right)+1\ \le\ f_5\left(n\right)\ \le\begin{cases}\dfrac{3n^2-8n+4}{8}\text{，若 } n-2 \text{ 為 4 的倍數，} n\ \ge\ 6\\ \dfrac{3n^2-14n+23}{8}\text{，若 } n-2 \text{ 被 4 除餘 1，} n\ \ge 11\\ \dfrac{3n^2-12n+16}{8}\text{，若 } n-2 \text{ 被 4 除餘 2，} n\ \ge\ 8\\ \dfrac{3n^2-10n+15}{8}\text{，若 } n-2 \text{ 被 4 除餘 3，} n\ \ge\ 9\end{cases}$$

六、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-6-1 的完整凹形五連方格圖形無法置入。

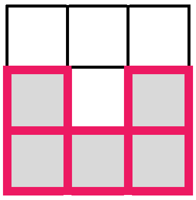
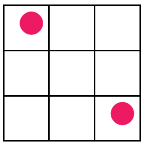
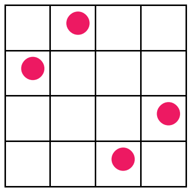
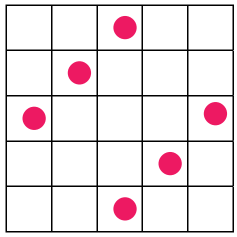


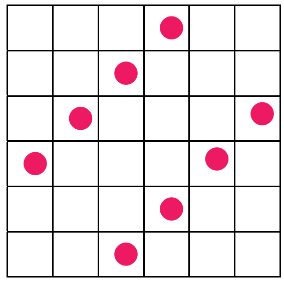
圖 5-6-1

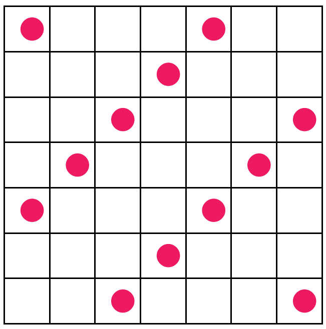
（一）觀察：參照 T 形的步驟(一)~(四)做法，得到如圖 5-6-2 的結果，並歸納出表 5-6-1。

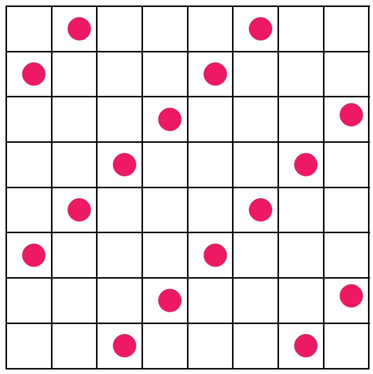

3X3 (2)

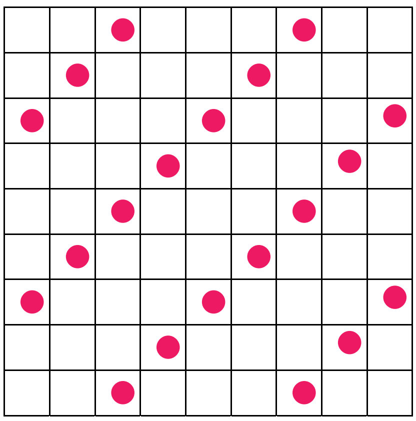

4X4 (4)


5X5 (6)


6X6 (8)


7X7 (12)


8X8 (16)


9X9 (20)

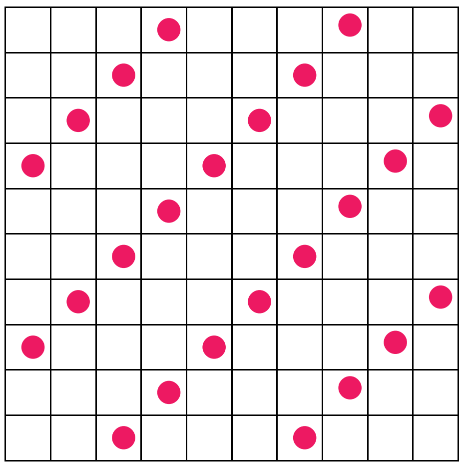

10X10 (24)

圖 5-6-2

註:11x11~14x14 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現

表 5-6-1

方格表格子數	挖去的個數	規律差距數	方格表格子數	挖去的個數	規律差距數
3x3	2		4x4	4	2
5x5	6	2	6x6	8	2
7x7	12	4	8x8	16	4
9x9	20	4	10x10	24	4
11x11	30	6	12x12	36	6
13x13	42	6	14x14	48	6

(二)證明：

1.根據圖 5-6-2，可觀察出$f_6(n)$的規律性。我們發現當 n 被 4 除餘 0，或 1、或 2、或 3 在求$f_6(n+1)$時，可以透過圖 5-6 的方式求得。

當 n 是 4 的倍數，需考慮(n+1)×(n+1)的方格如圖 5-6-3 所示。

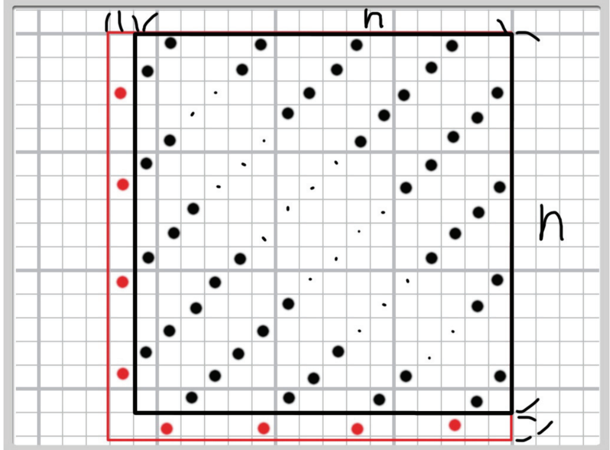


圖 5-6-3

2.圖 5-6-3 中，紅色標示的 1×(n+1)或(n+1)×1 方格，我們需考慮其界面鄰近 2 行或 2 列，透過檢視 3x3 方格的$f_6(3)$值，共檢驗 2n-3 次可發現 $f_6(n+1)$=$f_6(n)+\frac{n}{2}$，n 為 4 的倍數。

3.同理，我們發現 $f_6(n+2)$=$f_6(n+1)+\frac{n}{2}$，$f_6(n+3)$=$f_6(n+2)+\frac{(n+2)}{2}$， n 為 4 的倍數。

(三)公式：

根據(一)~(二)可歸納出

$$f_6(n)=\begin{cases}\frac{n^2}{4}\text{，若 n 為 4 的倍數}\\ \frac{n^2-1}{4}\text{，若 n 被 4 除餘 1 或 3}\\ \frac{n^2}{4}-1\text{，若 n 被 4 除餘 2}\end{cases}$$

七、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-7-1 的完整 L 形五連方格圖形無法置入。

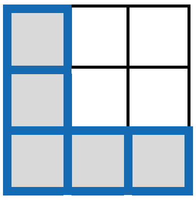
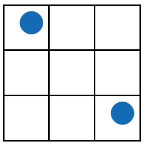
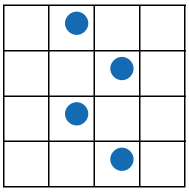


圖 5-7-1

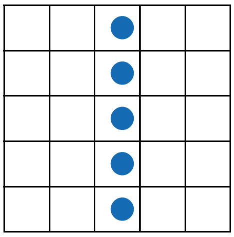
（一）觀察：參照 T 形的步驟(一)~(四)做法，得到圖 5-7-2 的結果，並歸納出表 5-7-1。



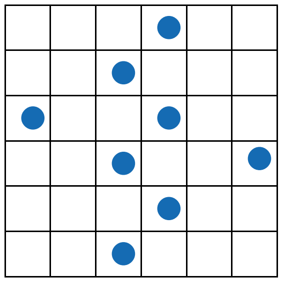
3X3 (2)



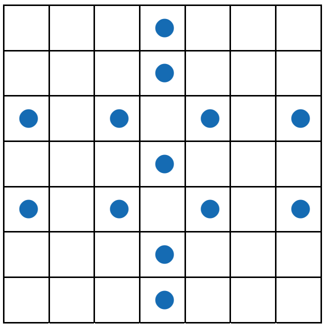
4X4 (4)



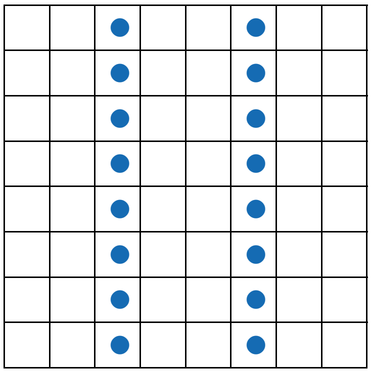
5X5 (5)



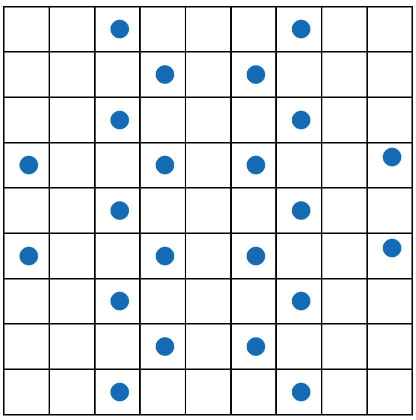
6X6 (8)



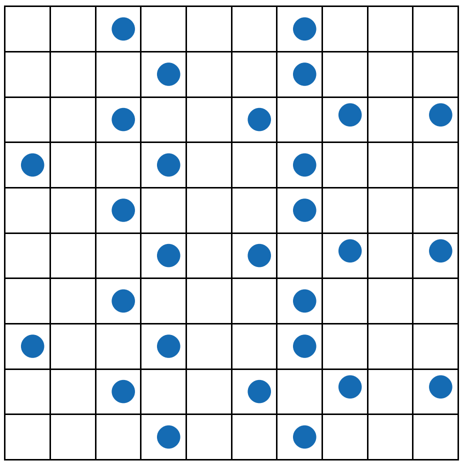
7X7 (13)



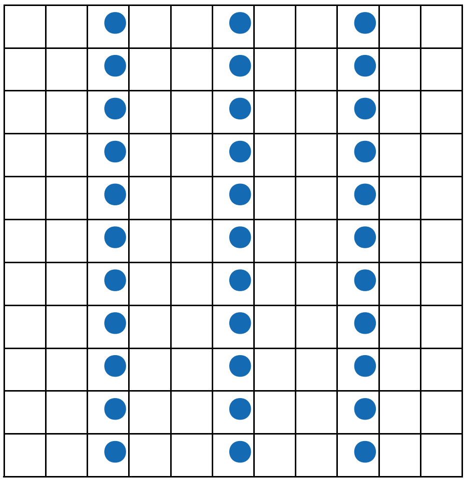
8X8 (16)

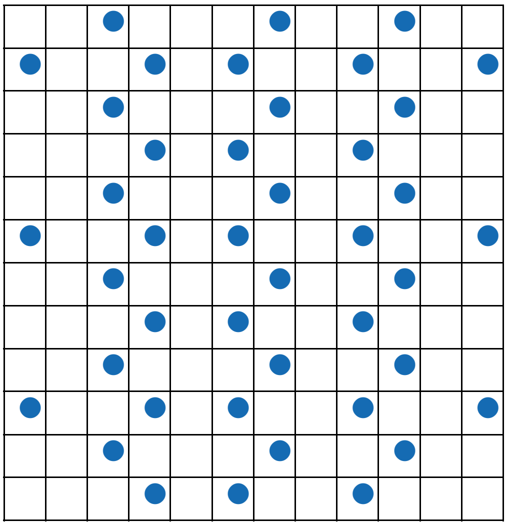


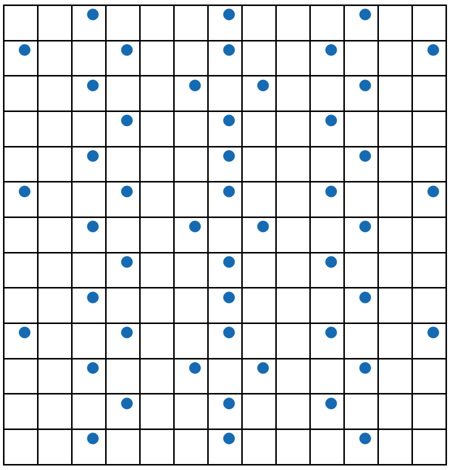
9X9 (22)

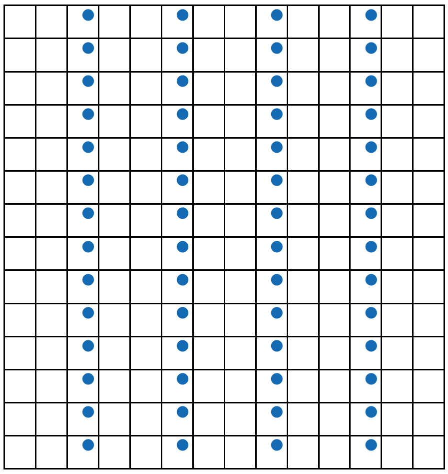


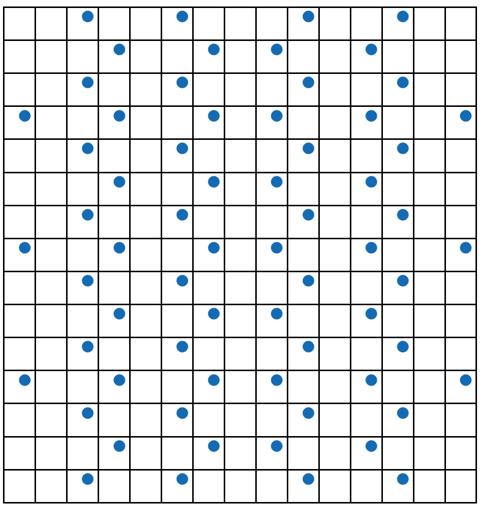
10X10 (28)

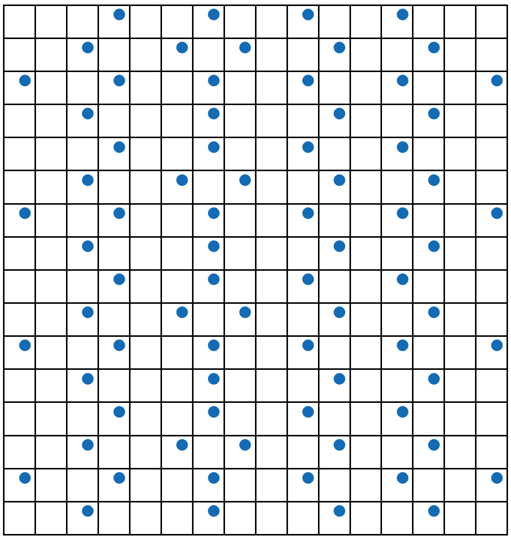

11×11(33)

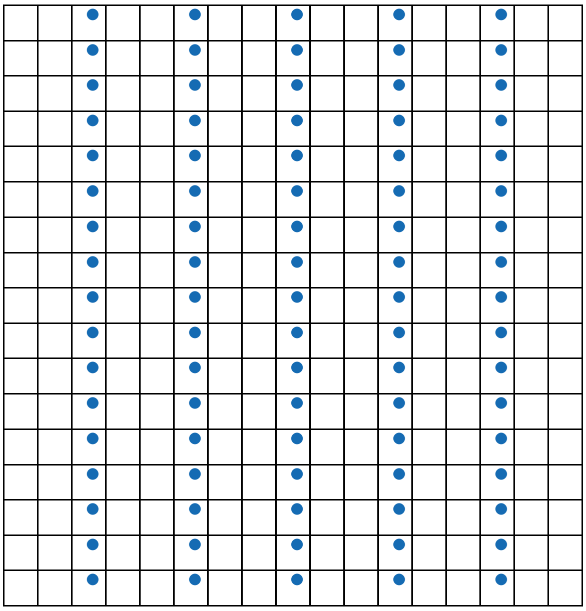

12×12(42)


13×13(48)

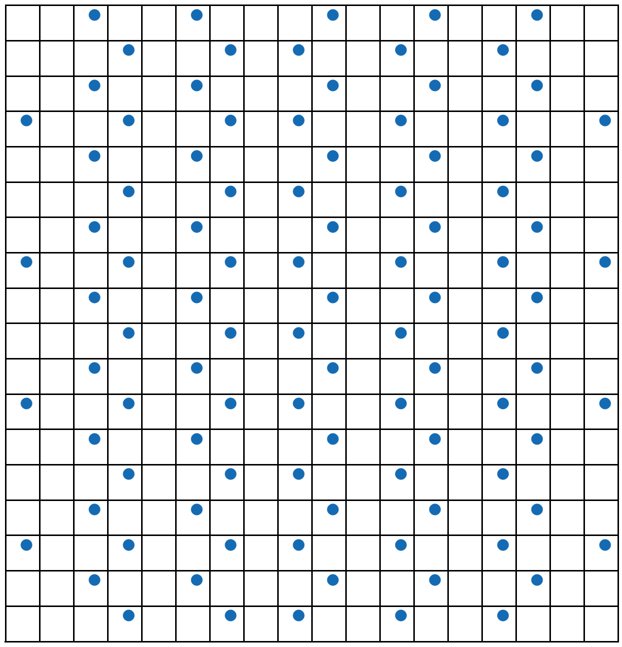

14×14(56)


15×15(66)

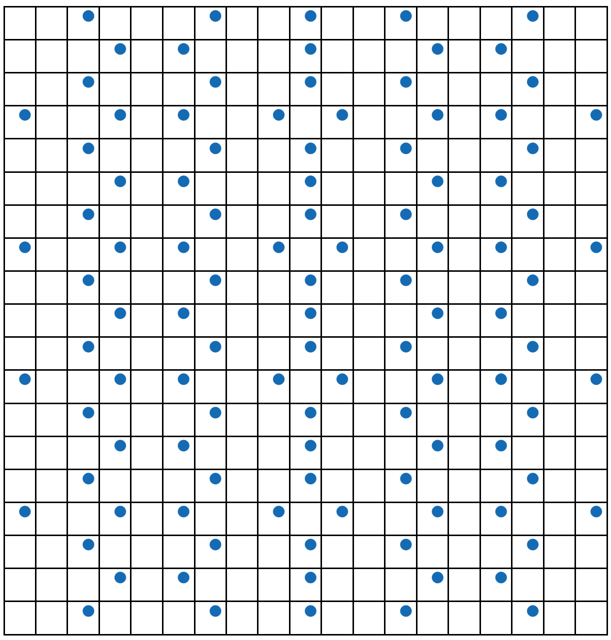

16×16(76)



17×17(85)



18×18(98)



19×19(107)

圖 5-7-2

註：20×20 ~28×28 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現。

表 5-7-1

第一組		第二組		第三組	
方格表格子數	挖去的個數	方格表格子數	挖去的個數	方格表格子數	挖去的個數
3×3	2	4×4	4	5×5	5
6×6	8	7×7	13	8×8	16
9×9	22	10×10	28	11×11	33
12×12	42	13×13	48	14×14	56
15×15	66	16×16	76	17×17	85
18×18	98	19×19	107	20×20	120
21×21	136	22×22	147	23×23	161
24×24	180	25×25	193	26×26	208
27×27	228	28×28	245		

(二)證明：

從圖 5-7-2 及表 5-7-1 中，可發現 n=5、8、11、14、17、20、23、26 之圖有明顯的規律，因此可得到當 n 被 3 除餘 2 時，$f_7(\mathrm{n}) = \mathrm{n} \times (\frac{n-2}{3})$。

另外，觀察 n=6、9、12、15、18、21、24、27 時，可發現最左邊一行與最右邊一行個數相等，其值等於 $[\frac{n}{4}]$，剩下的部份，可觀察出有 $\frac{n-3}{3}$ 條個數等於 n 之規律，故當 n 為 3 的倍數時，$f_7(\mathrm{n}) = \mathrm{n} \times \left(\frac{n-3}{3}\right) + 2 \times \left[\frac{n}{4}\right]$。

最後，檢視 n=13、16、19、22、25、28 的圖，我們發現任一圖都可以分成 2 部分，第一部分是最左一行、中間一行、最右一行，第二部分是剩下來的個數為 n 的有 $\left[\frac{n-3}{3}\right]$條的部份。根據第一部份圖的規律性，可得個數總數等於 3× $[\frac{n}{4}]$，第二部份的總數等於 n×$[\frac{n-3}{3}]$，故得當 n 被 3 除餘 1 時，$f_7(\mathrm{n}) = \mathrm{n} \times \left[\frac{n-3}{3}\right] + 3 \times \left[\frac{n}{4}\right]$，n≥ 13。

(三)公式：

根據(一)~(二)，可歸納出

$$f_7(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n-3)}{3} + 2 \times \left[\dfrac{n}{4}\right] & \text{，若 n 為 3 的倍數} \\ n \times \left[\dfrac{n-3}{3}\right] + 3 \times \left[\dfrac{n}{4}\right] & \text{，若 n 被 3 除餘 1，} n \geq 13 \\ \dfrac{n(n-2)}{3} & \text{，若 n 被 3 除餘 2} \end{cases}$$

八、在方格表中要挖去幾個小方格，才能讓如圖 5-8-1 的完整十字形五連方格圖形無法置入。

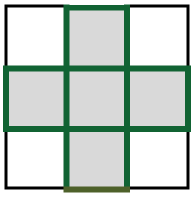
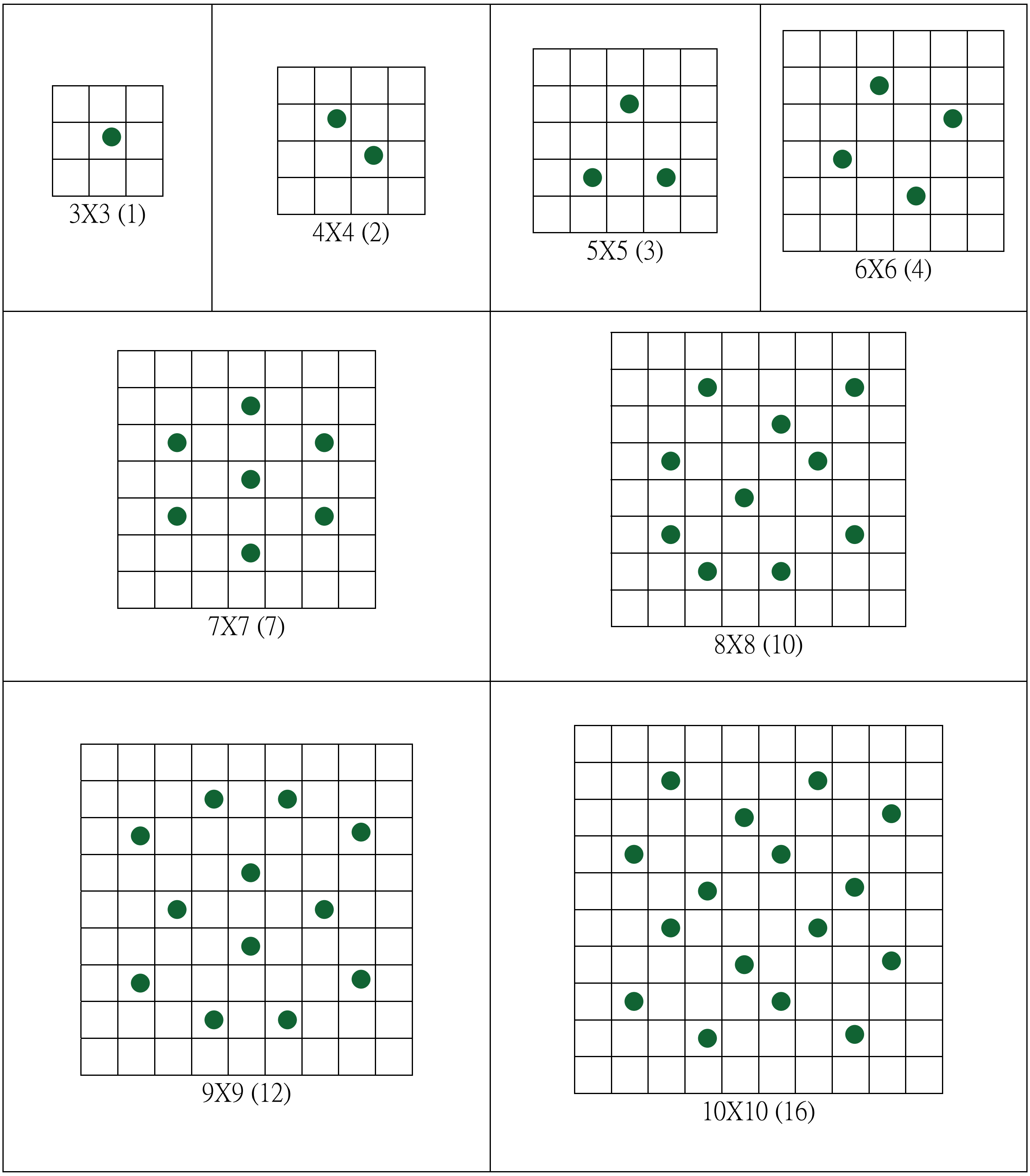


圖 5-8-1

（一）觀察：參照 T 形的步驟(一)~(四)做法，得到圖 5-8-2 的結果，並歸納出表 5-8-1。



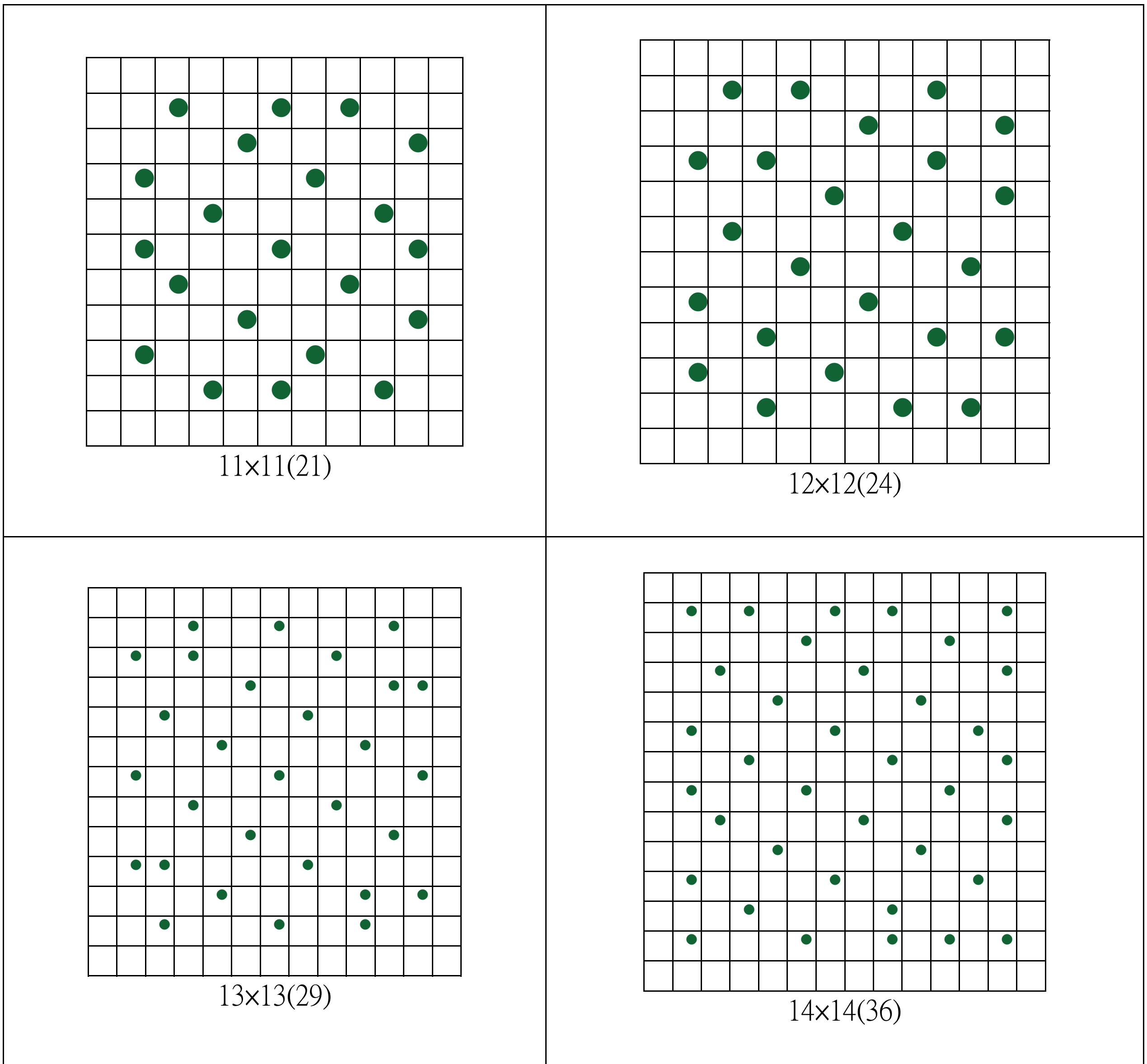


圖 5-8-2

註：15x15~30x30 之圖形，礙於篇幅關係將於看板說明時以附件呈現。

表 5-8-1

方格表格子數	挖去的個數	方格表格子數	挖去的個數	方格表格子數	挖去的個數
3x3	1	4x4	2	5x5	3
6x6	4	7x7	7	8x8	10
9x9	12	10x10	16	11x11	21
12x12	24	13x13	29	14x14	36
15x15	40	16x16	48	17x17	53
18x18	60	19x19	65	20x20	76
21x21	81	22x22	92	23x23	101
24x24	112	25x25	121	26x26	132
27x27	141	28x28	152	29x29	165
30x30	176				

(二)證明：

1. 在 n×n 的方格中，求$f_8(n)$時，也可以透過逐一檢視任意 3x3 的小方格，共有(n-2)×(n-2)種，我們發現一個 3x3 的方格，只挖去 1 個 1x1 小方格，且讓十字形五連方格無法置入時，不考慮旋轉或翻轉，只有圖 5-8-3 的情形。同理，剛好挖去 2 個 1x1 個小方格時只有圖 5-8-4 的情形。

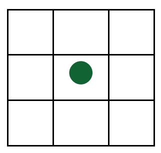


圖 5-8-3

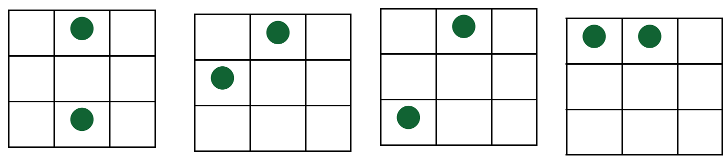


圖 5-8-4

2. 另外，回顧第三種五連方格（鉗子形），我們發現只挖去 1 個 1x1 小方格和剛好只挖去 2 個 1x1 小方格時，其情形分別如圖 5-8-5 及圖 5-8-6 所示。

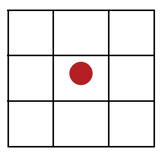


圖 5-8-5

圖 5-8-6

3. 比較圖 5-8-3~圖 5-8-6 後，發現圖 5-8-5 及圖 5-8-6 分別包含於圖 5-8-3 及圖 5-8-4。這意味在任意 3x3 方格中，挖去若干個 1x1 個小方格，且讓鉗子形五連方格無法置入時，此情況下拿十字形五連方格來，也必無法置入，此關係可建立$f_8(n) \leq f_3(n)$，$n \geq 3$。
   同上所述，回顧第四種五連方格（刀子形）時，只挖去 1 個 1x1 小方格和剛好只挖去 2 個 1x1 小方格時，其情形分別如圖 5-8-7 及圖 5-8-8 所示。

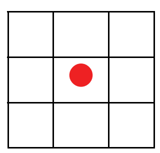


圖 5-8-7

圖 5-8-8

同理可得$f_8(n) \leq f_4(n)$，$n \geq 3$。

因此可推論出，$f_8(n-1)+1 \leq f_8(n) \leq \min\{f_3(n), f_4(n)\}$，$n \geq 3$。

陸、研究結果

研究到此我們發現，只要當方格表的邊長漸漸增加，圖形的規律會漸漸顯現出來，我們只要掌握各圖形的規律挖法，就能讓五連方格無法在 n×n 方格表中置入並能發現最少解。再根據每個圖形的最少解，我們就能將 T 形、樓梯形、鉗子形、刀形、凹形等五種五連方格圖形歸納出下列如表 6－1 的公式。

表 6－1

圖形	推論公式
T　　　形	$f_1(n)=\begin{cases}\frac{n^2}{4}-2\text{，若 n 為 4 的倍數}\\ \frac{n^2}{4}-\frac{5}{4}\text{，若 n 除以 4 餘 1 或 3}\\ \frac{n^2}{4}-1\text{，若 n 除以 4 餘 2}\end{cases}$
樓　梯　形	$f_2(n)=\begin{cases}\frac{(n-1)^2}{4}\text{，若 n 為奇數}\\ \frac{n^2}{4}-1\text{，若 n 為偶數}\end{cases}$
鉗　子　形	$f_3(n)=\begin{cases}\frac{(n-1)^2}{4}\text{，若 n 為奇數}\\ \frac{n^2}{4}-2\text{，若 n 為偶數}\end{cases}$
刀　　　形	$f_4(n)=\begin{cases}\frac{(n-1)^2}{4}\text{，若 n 為奇數}\\ \frac{n^2}{4}\text{，若 n 為偶數}\end{cases}$
S　　　形	無公式，亦無明顯之規律變化，但可推測其挖去最少方格數的上下界為 $f_5(n-1)+1\le f_5(n)\le\begin{cases}\frac{3n^2-8n+4}{8}\text{，若 }n-2\text{ 為 4 的倍數，}n\ge 6\\ \frac{3n^2-14n+23}{8}\text{，若 }n-2\text{ 被 4 除餘 1，}n\ge 11\\ \frac{3n^2-12n+16}{8}\text{，若 }n-2\text{ 被 4 除餘 2，}n\ge 8\\ \frac{3n^2-10n+15}{8}\text{，若 }n-2\text{ 被 4 除餘 3，}n\ge 9\end{cases}$

凹　　　形	$f_6(n)=\begin{cases}\frac{n^2}{4}\text{，若 n 為 4 的倍數}\\ \frac{n^2-1}{4}\text{，若 n 被 4 除餘 1 或 3}\\ \frac{n^2}{4}-1\text{，若 n 被 4 除餘 2}\end{cases}$
L　　　形	$f_7(n)=\begin{cases}\frac{n(n-3)}{3}+2\times\left[\frac{n}{4}\right]\text{，若 n 為 3 的倍數}\\ n\times\left[\frac{n-3}{3}\right]+3\times\left[\frac{n}{4}\right]\text{，若 n 被 3 除餘 1}\\ \frac{n(n-2)}{3}\text{，若 n 被 3 除餘 2}\end{cases}$ ，$n\geq 13$
十　字　形	雖無明確之公式，但可推測其挖去最少方格數的上下界為 $f_8(n-1)+1\leq f_8(n)\leq\min\{f_3(n),f_4(n)\}$，$n\geq 3$

陸、討論

經過了此次的研究我們得到了很多知識，在過程中如 L 形的推論公式中，我們不知如何來表達(取整數後，小數部分捨去)，經請教指導老師後才知可用$\left[\frac{n}{3}\right]$來表示。而且我們一直認為每個圖形應該都可以推算出公式，最後才發現其實不然。當我們設計的圖形在方格表中，所重覆覆蓋的情形愈來愈多，挖去的空格數也愈來愈多，各種圖形的公式也一一推論出，但其中 S 形與十字形兩種五連方格則無法其最少解的公式，試分述如下：

一、S 形五連方格：在進行 S 形解法時發現，它是無法找出推論公式的。因此我們嘗試從圖形中去找出讓完整 S 形五連方格無法置入的最少解之上界，當$(n-2)$除以 4 餘 0、1、2、3 或 4 時，圖形會約略的呈現一規律變化，我們便依此分別求出其數值，作為 $f_5(n)$ 之上界，同時以 $f_5(n-1)+1$ 作為下界，更期待日後能持續推求出更接近 $f_5(n)$之上下界。

二、十字形五連方格：嘗試十字形解法時發現，它是無法找出推論公式的。但我們卻觀察到十字形圖形的特殊點如下：

（一）偶數形圖形的特點：當方格表邊長為偶數時，其挖去空格後的圖形從最中間呈現菱形漸層交錯往外擴散的特色。

（二）奇數形圖形的特點：當方格表邊長為奇數時，其挖去空格後的最中間的菱形中心為奇數，所以中心點一定會挖去，之後的圖形亦呈現菱形漸層交錯的往外的特色。但有二組圖形例外。一個是 9×9，因為它挖去空格後的圖形呈現各菱形交錯成蝴蝶形狀，重疊後中心呈現偶數空格因此中心點可以不用挖去。另一個為 15×15，因為它也呈現出多個菱形重疊交錯圖形（5 個菱形交錯）因此中心不會呈現奇數，因此中心點不用挖去。

雖然十字形無法找出推論公式，因此我們利用十字形五連方格與鉗子形、刀子形兩種圖形的比較，找出十字形解法的上界，同時以 $f_8(n-1)+1$ 作為下界，更期待日後能持續推求出更接近 $f_8(n)$之上下界，俾能使此份報告更臻完備。

柒、結論

本研究運用數學歸納法，針對 T 形、樓梯形、鉗子形、刀子形、 S 形、凹形、 L 形、十字形等八種五連方格，探討其在 n×n 方格表中，最少須挖去幾個 1×1 小方格，才能使得該五連方格無法置入，主要研究結果臚列如下：

一、找到在 n×n 方格表中，用最少小方格卡住五連方格的規律。

二、推論出計算 n×n 方格表中，使五連方格無法置入時，所必須挖去最少小方格數量的公式如表 6-1。（S 形及十字形除外）

三、S 形五連方格無明顯之規律變化，因此無法推論出其公式，但可推測其挖去最少方格數的上下界。。

四、十字形五連方格，雖無明確之公式，但可推測其挖去最少方格數的上下界。

捌、參考資料及其他

一、 九章文教基金會第六屆中國東南地區數學奧林匹克競賽試題。（２００９年）

二、小五數學課本。（南一出版社）

三、小六數學課本。（南一出版社）

【評語】080405

1. 透過「無鎖不能」的歷程探究，讓人驚奇地發現原本看似沒有關係與規律可言的五連方格圖，經歷大膽的猜測與假設，終於推論出 nxn 方格表中使五連方格無法置入時所必須挖去最少的方格數、公式。

2. 面對無法找出最少解的 s 形與十字形，也可以從繁雜的點子圖分析出(推測出)取值範圍，過程中經歷了歸納推理，展示了難能可貴的探索精神。