中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第一名

080404

一擊兩得～頂點全等最小值之探討

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋實驗高級中學

作者：	指導老師：
小六 許睦毅	楊錦花
小六 何裕騰	吳宣鋒
小六 周芳震	
小六 黃裕鈞	
小六 彭　惟	

關鍵詞：奇、偶數、數形關係、頂點全等

得獎感言

今年的科展我們參加數學組，其實去年我就想參加了，但因為要去參加化學組的科展，所以沒能參加。今年參加了之後，我發現數學的科展比化學的科展還難很多，不但要找出一堆公式和算一堆題目，還要一直思考公式的由來。讓我知道遇到一個題目不僅僅是解決它，還要去延伸並且找出一個通用的公式。（睦毅）

在研究的過程中，我一直搞不懂某些公式，幸好我有一群超強的研究團隊，願意幫助我一一瞭解這些公式，裕騰擅長角柱、裕鈞條理清晰且反應極快、芳震擅長程式、我們的主將睦毅除了擅長角錐外，還整合了我們的所有公式，這讓我瞭解到團隊合作的重要。（彭惟）

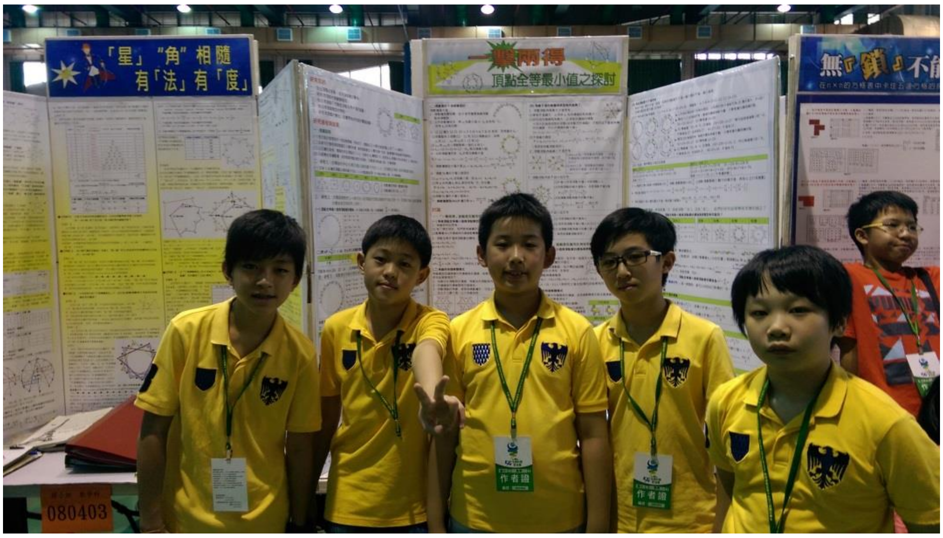
在這次的研究中，我所負責的其中一個部份是以電腦程式的遊戲呈現研究內容。最初在初審和複審時，因為受限於評審的審查方式，及時間的限制，無法充分介紹電腦程式展現給評審看。但是到了國展的時候，我終於有機會把這套程式給評審做詳細的解說，加上開放給一般民眾參觀的時候，許多人都使用這套程式玩遊戲，這可真是這次科展中最讓我興奮的事情了！（芳震）

對我而言，最享受的是研究過程中的每一個細節，從一開始尋找主題到最後的成果報告，整個過程我都樂在其中，我們隊友之間最有趣的討論方式就是彼此之間會互相辯論，這不但可以發現我們發表內容上的漏洞，讓我們的研究一天比一天的紮實，內容一天比一天的豐富，更是我們團隊增進友誼及合作默契的方法。（裕鈞）

雖然我們會互相質疑，但我們也會互相鼓勵，互相幫助，我覺得這些日子雖辛苦，但也充滿著歡笑，每當我們解決一個問題，我們也都會大聲的歡笑。我也覺得數學是充滿奇妙的，很多東西雖相同，但都是有原因的，不只是巧合，像是我們們基本型和角錐奇數的最大值公式相同，但題型卻蘊含著同構的奧妙，而且我們也發現，一個東西也可以用兩種方式證明。這一路走來似乎不可思議，但我們還是做到了！（裕騰）

當然，我們最要感謝的不是我們的隊伍，而是幕後的老師和家長們，家長們有時候會給我們小驚喜「鼓舞士氣」，讓累個半死的我們，有活力衝下去，繼續奮鬥。

我們偉大的老師，指導我們如何將夾雜在天才與瘋子之間的鬼畫符與爭執，轉變成井然有序的報告，獲得評審的青睞，一路過關斬將，最後居然奪下了全國第一！雖然活動圓滿落幕了，但這對我們來說卻是研究興趣的起點！



帥哥五人組（比賽前合影）。


風雨無阻，臨陣磨槍，不利也光。


第一名的榮譽屬於最佳團隊（包括老師和家長）。

一擊兩得 ~ 頂點全等最小值之探討

摘要

本研究源自建中「通訊解題」90 期，原題規則如下：「電腦在正 n 邊形的每個頂點上隨機放一個介於 0～10 的數字，然後玩家可任意用滑鼠點擊正 n 邊形的邊，當他每點擊正 n 邊形的邊一次時，點擊的邊其兩端點數字都增加 1，直到每個頂點的數字均相等就可過關。」

我們將題目單純化為放一個介於 1～n 的數字，但又變化題型至直線型、角錐型與角柱型的研究，發現成功以最少的點擊次數使正 n 邊形頂點全等的「頂點全等最小值」與「頂點數」維持一個均衡的關係 $n\mathrm{P}=\sum_{i=1}^{n} a_i + 2\mathrm{K}$。

由這個關係式我們發現遊戲中「奇數」比「偶數」單純，「變化型」的遊戲也都與「原型」息息相關，也由這個關係式，我們導出本遊戲各類型遊戲 P 值的範圍及偶數邊在各種題型的限制。

壹、 研究動機

當我們在玩電腦上的遊戲時，往往發現裡面蘊含著一些數學規律及原理，所以我們一直想發明一個簡單、好玩，但是卻有著數學原理的遊戲。

今年學校舉辦的冬令營裡，數學老師提出了一個遊戲和我們的想法不謀而合，那就是這個「一擊兩得」的遊戲，於是我們就用「scratch」軟體設計遊戲，奇數邊沒問題，偶數邊出題時卻卡住了，電腦隨機出的題，無法每次都有解，這讓我們覺得很奇怪，到底這簡單的遊戲，隱藏著哪些我們沒發現的數學原理？所以，我們就以這個遊戲當作我們的科展主題，進行一連串的研究。

貳、 研究目的

一、找出頂點全等最小值與頂點數的關係。

二、研究本遊戲快速解題模式。

三、找出本遊戲不同題型頂點全等 P 值的範圍。

四、找出本遊戲題型的限制。

五、研究本遊戲的變化，並實際做成有趣的電腦遊戲。

參、 研究設備及器材

筆記本、筆、黑板、電腦、角錐模型、角柱模型。

肆、　　研究過程與結果

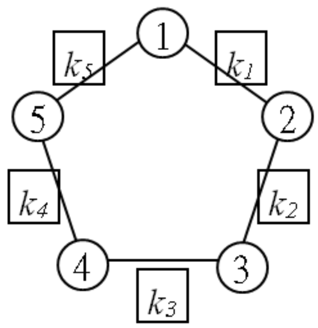
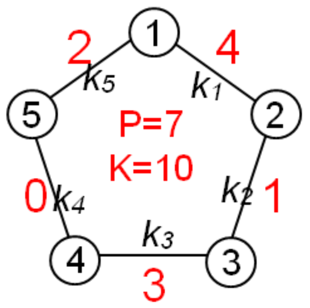
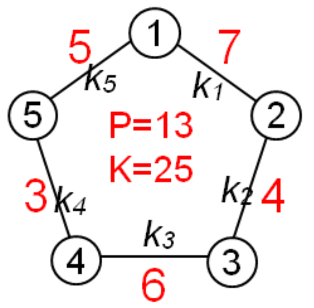
一、遊戲說明

(一) 程式設計師想設計一款益智遊戲，規則如下： 電腦在正 n 邊形的每個頂點上放了 1~n 個數字。

(二) 玩家可任意用滑鼠點擊正 n 邊形的邊，當他每點擊正 n 邊形的邊一次時，點擊邊的兩端點數字都會增加 1。

(三) 以五邊形為例，電腦依序在頂點放了 1~5（如圖 1）；玩家在 k_1 邊點擊 1 次；則原來 k_1 兩邊的①和②各增加「1」變成②和③。

(四) 玩家需在各邊點擊，直到每個頂點的數字均相等，且點擊次數為最小值，才算過關。

遊戲說明	過關	不過關
		

二、名詞定義

(一) 頂點數值：

1、原頂點順時鐘方向分別以 a_1、a_2、$a_3 \cdots a_n$ 命名；

2、p_1、p_2、$p_3 \cdots p_n$，分別代表為點擊後各頂點的數值，因為 $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_n$，故成功點擊後的頂點值統稱為 P。

(二) $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ (原頂點和)

(三) 點擊邊的次數：依順時鐘方向分別標以 k_1、k_2、$k_3 \cdots$、k_n；$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-1} + k_n = K$。

三、文獻探討：

(一)相關作品分析

作品出處	題目	研究範疇
建中通訊解題 90 期	9004 程式設計師設計益智遊戲(詳見附錄)	七邊形與 99 邊形「點擊上限」的最小值 k_{min}。(無詳細推論)
第 52 屆全國科展國中組數學	萬數歸一－圖形上點邊數字和為定值之研究	平面圖形的變化及 k_{min} 有解、無解及總點擊數的探討。

(二)我們的研究特色

1、我們由平面圖形變化至立體的角錐與角柱的研究，並將點擊規則由正(加)轉為負(減)的推導。

2、我們發現成功以最少的點擊次數使正 n 邊形頂點全等的「頂點全等最小值」與「原頂點數值」維持一個均衡的關係 $nP=\sum_{i=1}^{n} a_i+2K$，而且適用於所有的變化型遊戲。

3、我們的研究皆由「圖形」出發去思考解題模式，進而推導出我們研究的種種公式。

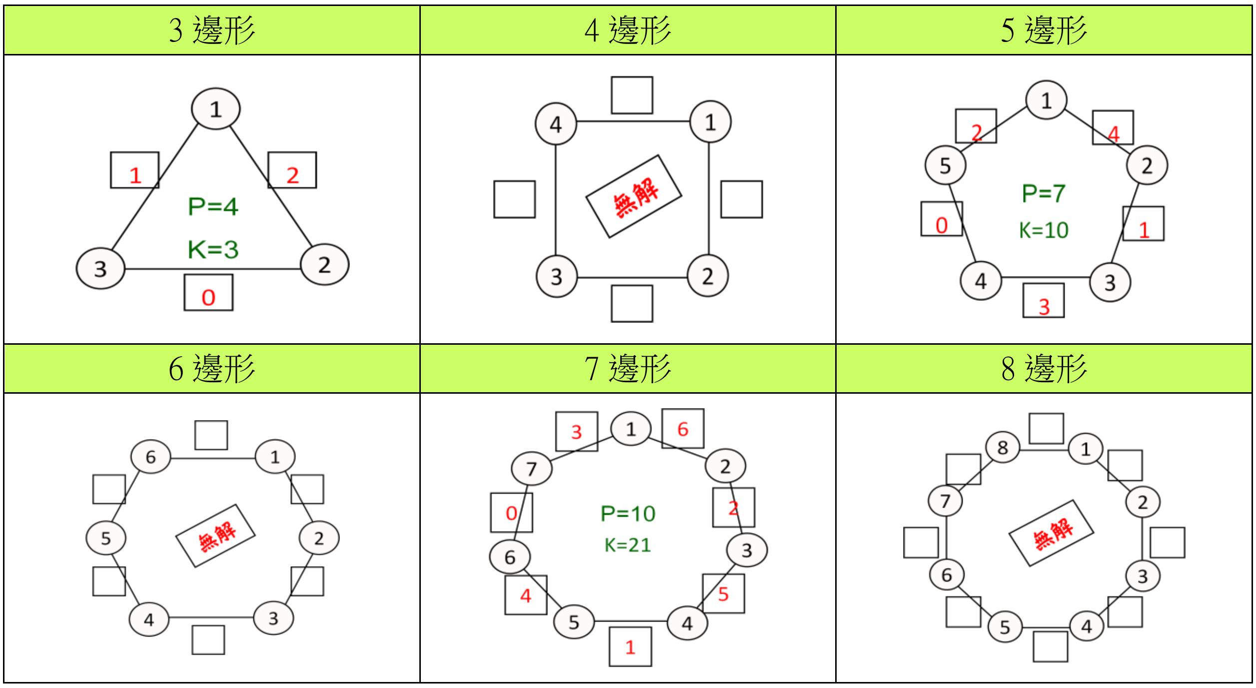
4、我們的創意：

(1) 角錐和角柱的研究由立體而轉為平面思考，並提出「減值」與「增值」的想法，求出頂點全等的最小值，應屬立體題型的重大突破。

(2) 點擊規則由正(＋)變為負(－)的研究，我們發現了一個有趣的「鏡像世界」，幫我們快速的解決點擊規則為「－」的遊戲公式。

四、研究 1：若電腦依序在 N 邊形頂點以順時鐘方向放入 1~n，求頂點全等最小值與頂點數的關係。

(一) 記錄 3~8 邊形頂點以順時鐘方向放入 1~n 點擊結果。(P 代表頂點全等最小值，K 代表總點擊數。)



發現：若頂點依順時鐘方向或反時鐘方向，依序填入數字，則奇數邊題型有解，偶數邊題型無解。

(二) 可否求出奇數邊的 P 值的一般式？

1、奇數邊形頂點以順時鐘方向放入 1~n，點擊記錄。

N 邊形	3	5	7	9
點擊後頂點值 P	4	7	10	13

2、求奇數邊的 P 值

$$\mathrm{N}=3;\ P=4=3+1=3+\frac{3-1}{2}$$

$$\mathrm{N}=5;\ P=7=5+2=5+\frac{5-1}{2}$$

$$\mathrm{N}=7;\ P=10=7+3=7+\frac{7-1}{2}$$

……

$$\mathrm{N}=n\ ;\ \mathrm{P}=n+\frac{n-1}{2}$$

3、奇數邊形的 P 值＝$n+\dfrac{n-1}{2}$

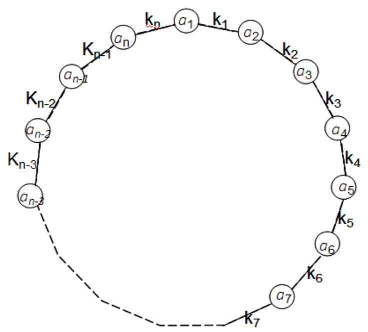
(三) N 邊形頂點以順時鐘方向放入 1~*n*，點擊成功後各頂點的數值 P 值一般式如下：

1、奇數邊形的 P 值＝$n+\dfrac{n-1}{2}$

2、偶數邊無解；換句話說，電腦在這種依序排列頂點數字的狀況下，無法以偶數邊出題。

五、研究 2：電腦在 N 邊形頂點，隨意放入 1~n（每個數字只能出現一次），求頂點全等最小值與頂點數的關係。

(一) 頂點全等最小值與頂點數的關係



$$p_1=k_n+a_1+k_1$$
$$p_2=k_1+a_2+k_2$$
$$p_3=k_2+a_3+k_3$$
……
$$p_{n-1}=k_{n-2}+a_{n-1}+k_{n-1}$$
$$p_n=k_{n-1}+a_n+k_n$$
$$p_1+p_2+p_3...+p_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n+2(k_1+k_2+k_3+...+k_{n-1}+k_n)$$
$$nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2\mathrm{K}\ ;\mathrm{P}\geq n$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ；故 $\displaystyle nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2K=\frac{n(n+1)}{2}+2K$

(二) P 值的奇偶數探討？

1、用 $nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2\text{K}$ 檢視 P 值的奇、偶數。

2、將奇數邊分為 4m+1 (5、9、…)與 4m+3 (7、11、…)型討論。

(1) 若 n＝4m+1，則 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(4m+1)(4m+2)}{2}=(4m+1)(2m+1)$ 為奇數(奇×奇＝奇)

右式：$\sum_{i=1}^{n}a_i$ (奇)＋2K(偶)為奇數。

左式：n 為奇數，P 需為奇數，nP(奇×奇)為奇數，等式才能成立。

故 n＝4m+1 型的 P 值為奇數。

(2) 若 n＝4m+3，則 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(4m+3)(4m+4)}{2}=(4m+3)(2m+2)$ 為偶數(奇×偶＝偶)

右式：$\sum_{i=1}^{n}a_i$ (偶)＋2K(偶)為偶數。

左式：n 為奇數，故 P 需為偶數，nP(奇×偶)才能為偶數，等式才成立。

故 n＝4m+3 型之 P 值為偶數。

3、將偶數邊分為 4m（4、8、12、…）與 4m+2（6、10、14、…）討論。

(1) 若 n＝4m，$\sum_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{4m(4m+1)}{2}=2m(4m+1)$ 為偶數(偶×奇＝偶)。

右式：$\sum_{i=1}^{n}a_i$ (偶)＋2K(偶)為偶數。

左式：因 n 為偶數，nP(奇×偶＝偶；偶×偶＝偶)必為偶數。

故 P 可為奇數，可為偶數。

(2) 若 n＝4m+2，$\sum_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(4m+2)(4m+3)}{2}=(2m+1)(4m+3)$ 為奇數(奇×奇＝奇)。

右式：$\sum_{i=1}^{n}a_i$ (奇)＋2K(偶)為奇數。

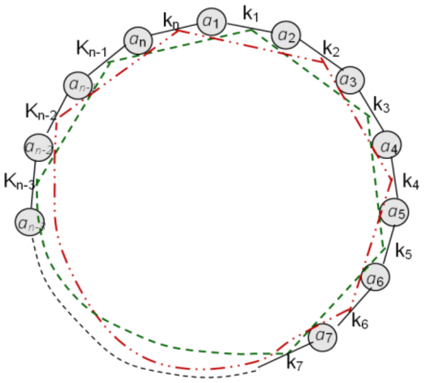
左式：因 n 為偶數，nP 必為偶數，左式(偶)≠右式(奇)，故 4m+2 邊形無法適用本遊戲。

4、$nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2K$ 代入多邊形整理 P 之值如下：

N 邊形	3	4	5	6	7	8	9	10	11
點擊後頂點值 P	4	4	5、7、…	無解	8、10、…	8、9、…	9、11、...	無解	12、14、…

六、研究 3：偶數邊形有解題型探討

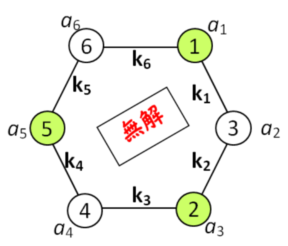
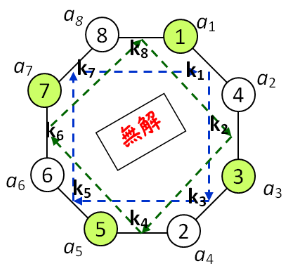
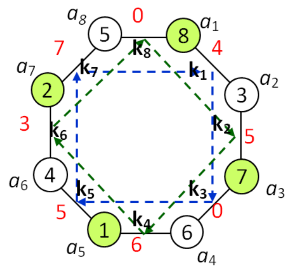
(一)由研究 2 發現偶數邊 4m＋2 邊題型無解，4m 邊題型有解，但 4m 邊題型卻在「研究 1」依序填入的題型無解，故偶數邊到底有何題型限制？

	$k_1+a_2=k_3+a_3 \rightarrow k_3=k_1+a_2-a_3$ $k_3+a_4=k_5+a_5 \rightarrow k_5=k_3+a_4-a_5=k_1+a_2-a_3+a_4-a_5$ $k_5+a_6=k_7+a_7 \rightarrow k_7=k_5+a_6-a_7=k_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7$ ...... $k_{n-1}=k_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+...+a_{n-2}-a_{n-1}$......(1) $k_{n-1}+a_n=k_1+a_1 \rightarrow k_{n-1}=k_1+a_1-a_n$......(2) (1)式＝(2)式＝$k_{n-1}$ $k_1+a_2-a_3+a_4-a_5+...+a_{n-2}-a_{n-1}=k_1+a_1-a_n$ $a_2+a_4+a_6+...+a_{n-2}=a_1+a_3+a_5+...+a_{n-1}$ 故奇數頂點和與偶數頂點和必須相等。

(二)偶數邊形的有解題型的條件

1、因 $nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2K$，故頂點和 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 需為偶數

2、奇數頂點和與偶數頂點和相等的題型，才是有解的題型。

題型	4m+2	4m(無解)	4m(有解)
條件 1： $\sum_{i=1}^{n}a_i$ ＝偶數	$\sum_{i=1}^{n}a_i$ ＝奇數（不符合）	$\sum_{i=1}^{n}a_i$ ＝偶數（符合）	$\sum_{i=1}^{n}a_i$ ＝偶數（符合）
條件 2： 奇數頂點和 ＝偶數頂點和	(奇)1+2+5＝8 (偶)3+4+6＝13 8(奇)≠13(偶)…不符合	(奇)1+3+5＋7＝16 (偶)4+2+6＋8＝20 16(奇)≠20(偶)…不符合	(奇)8+7+1+2＝18 (偶)3+6+4+5＝18 18(奇)＝18(偶)…符合
圖例			

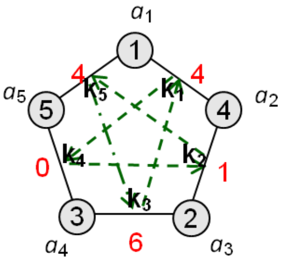
(三) 4m＋2 邊形(6、10、…)頂點和 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 為奇數，奇數無法分成和相等的兩組，故無解。

(四) 4m 邊形(4、8、…) 頂點和 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 為偶數，但也必須符合奇數頂點和與偶數頂點和相等的題型，才是有解的題型。

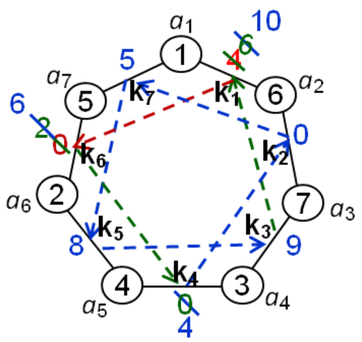
七、研究 4：「一擊兩得」遊戲有無快速的解題技巧？

(一) 奇數邊：星形跳法

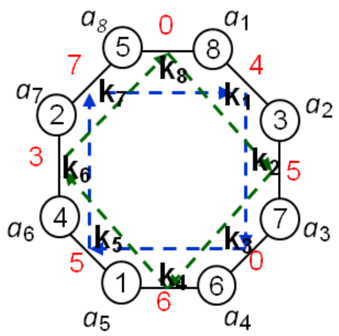
1、奇數邊可用「星形跳法」加快解題。

(以五邊形為例) 	比較 a_1 與 a_5，$a_1+k_1=a_5+k_4$， a_1 為 1，a_5 為 5，則設 $k_1=4$，$k_4=0$ 比較 a_4 與 a_3，$a_4+k_4=a_3+k_2$，則 $3+0=2+(1)$， $k_2=1$ 比較 a_2 與 a_1，$a_2+k_2=a_1+k_5$，$4+1=1+(4)$， $k_5=4$ 比較 a_5 與 a_4，$a_5+k_5=a_4+k_3$，$5+4=3+(6)$， $k_3=6$ 比較 a_3 與 a_2，$a_3+k_3=a_2+k_1$，$2+6=4+(4)$， $k_1=4$（與原先假設同） $p_1=1+4+4=9$；$p_2=4+4+1=9$；$p_3=2+1+6=9$； $p_4=3+6+0=9$；$p_5=5+0+4=9$； $P=p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=9$

2、若與原先假設不同則需調整(以七邊形為例)

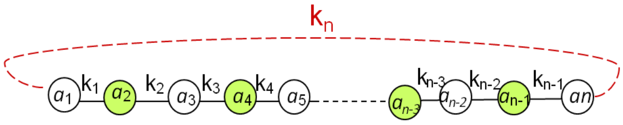
(以七邊形為例) 	比較 a_1 與 a_7，則 $1+(4)=5+(0)$，故 k_1 與 k_6 分別填入 4 與 0 比較 a_6 與 a_4，則 $2+(2)=4+(0)$，k_6 與 k_4 需分別填入 2 與 0；原先 k_6 的 0 改為 2，k_1 的 4 改為 6 比較 a_4 與 a_3，則 $3+(4)=7+(0)$，k_4 與 k_2 需分別填入 4 與 0；原先的 k_4 的 0 改為 4，k_6 的 2 改為 6，k_1 的 6 改為 10 比較 a_2 與 a_1，則 $6+(0)=1+(5)$，k_7 填入 5，其餘不變 比較 a_7 與 a_6，則 $5+(5)=2+(8)$，k_5 填入 8，其餘不變 比較 a_5 與 a_4，則 $4+(8)=3+(9)$，k_3 填入 9，其餘不變 比較 a_3 與 a_2，則 $7+(9)=6+(10)$，k_1 填入 10，與原先同。 $P=p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=p_7=16$

(二) 偶數邊：雙迴圈跳法

(以八邊形為例) 	比較 a_1 與 a_2，則 $8+(0)=3+(5)$，故 k_8 與 k_2 分別填入 0 與 5； 比較 a_3 與 a_4，則 $7+5=6+(6)$，k_4 填入 6； 比較 a_5 與 a_6，則 $1+6=4+(3)$，k_6 填入 3； 比較 a_7 與 a_8，則 $2+3=5+(0)$，k_8 填入 0；（綠色迴圈） 比較 a_2 與 a_3，則 $3+(4)=7+(0)$，故 k_1 與 k_3 分別填入 4 與 0； 比較 a_4 與 a_5，則 $6+0=1+(5)$，k_5 填入 5； 比較 a_6 與 a_7，則 $4+5=2+(7)$，k_7 填入 7； 比較 a_8 與 a_1，則 $5+7=8+(4)$，k_1 填入 4；（藍色迴圈） $P=p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=p_7=p_8=12$

(三) 點擊數「0」的位置在哪裡？

1、將連接 a_1 與 a_n 兩頂點的 k_n 邊為設為點擊數「0」的位置，



(1) 由左而右可發現：

$a_1=a_2+k_2$；$k_2=a_1-a_2$；$\because k_2\geqq 0$ 且 $a_1\neq a_2$；$\therefore a_1>a_2$

$k_2+a_3=k_4+a_4$；$k_4=k_2+a_3-a_4=a_1-a_2+a_3-a_4$；$\because k_4\geqq 0 \therefore (a_1+a_3)\geqq(a_2+a_4)$

$k_4+a_5=k_6+a_6$；$k_6=k_4+a_5-a_6=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$；

$\because k_6\geqq 0 \therefore (a_1+a_3+a_5)\geqq(a_2+a_4+a_6)$

…

$k_{n-1}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{n-2}-a_{n-1}$；$\because k_{n-1}\geqq 0 \therefore (a_1+a_3+\cdots+a_{n-2})\geqq(a_2+a_4+\cdots+a_{n-1})$

(2) 將 k_n 連接的 a_1 與 a_n 兩頂點視為端點，以偶數頂點為切點，奇數頂點和≧偶數頂點和。即奇 1＞偶 1；奇 1＋奇 2≧偶 1＋偶 2；奇 1＋奇 2＋奇 3≧偶 1＋偶 2＋偶 3；…

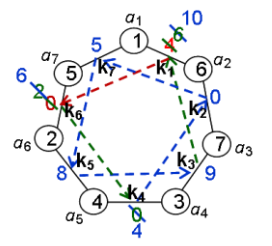
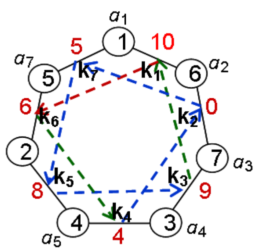
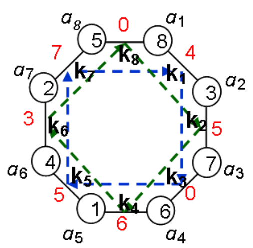
(3) 由右而左亦發現相同的狀況

$a_n>a_{n-1}$； $(a_n+a_{n-2})\geqq(a_{n-1}+a_{n-3})$；…

2、最小點擊邊「0」位置的發現，幫我們掌握解題起點的位置，減少錯誤的修正，達到迅速解題的效果。

下圖中：a_2-a_3 連線，6＞1，7＞3；6+5≧1+2；7+4≧3+2…，就可把 6-7 視為端點，將 6-7 間的連線當成星形跳法的起跳點「0」的位置。

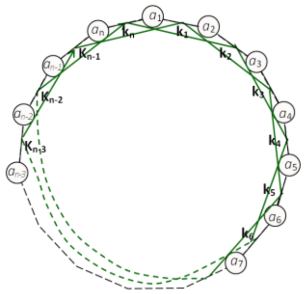
下圖右：綠色迴圈的 5-8 連線與藍色迴圈的 7-6 連線都可視為迴圈的起跳點，幫助我們快速解題。

		
沒先找出「0」的位置，由 a_1-a_2 連線 1-6 之間開始，需修正錯誤嘗試。	先找出「0」的位置在 6-7 之間，再進行星形跳法。	找出「0」的位置也適用於偶數邊形的雙迴圈

八、研究 5：N 邊形不同排列方式的題型，P 值是否也有其範圍？

(一)奇數邊題型 P 值最大與最小的探討：

1、P≧n，故將 a_1 設為「n」，$p_1＝a_1＋k_1＋k_n$ 思考 k_1 與 k_n 與頂點排列的關係。



$$k_1+a_2=k_3+a_3\rightarrow k_3=k_1+a_2-a_3$$
$$k_3+a_4=k_5+a_5\rightarrow k_5=k_3+a_4-a_5=k_1+a_2-a_3+a_4-a_5$$
$$k_5+a_6=k_7+a_7\rightarrow k_7=k_5+a_6-a_7=k_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7$$
......
$$k_n=k_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+...+a_{n-2}-a_{n-1}$$
$$=k_1+(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$$

2、P 值與頂點的排列關係

(1) 設 $k_1＝0$，則 $a_2＞a_3$；$a_2＋a_4≧a_3＋a_5$；⋯

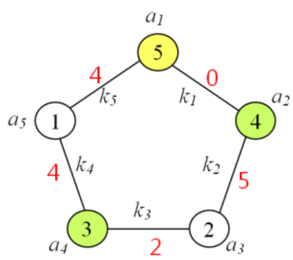
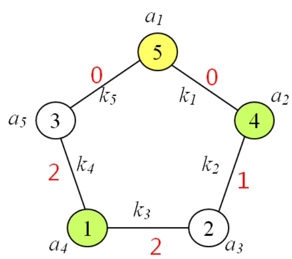
故 $k_n=(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$

且 $(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})\geq(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$

(2) $p_1＝a_1＋k_1＋k_n$ ，$k_1＝0$，故

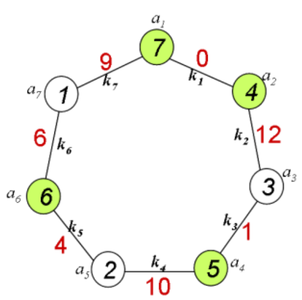
$(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$越大，$p_1$ 的值就越大；

$(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$越小，$p_1$ 的值就越小。

五邊形 P 值最大題型	五邊形 P 值最小題型
	
$(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$ ＝(4+3)－(2+1)＝4；P＝5+4+0＝9	$(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$ ＝(4+1)－(2+3)＝0；P＝5+0+0＝5

3、奇數頂點不同排列方式的最大 P 值探討

(1) P 值的最大題型為 $(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$ 為最大值

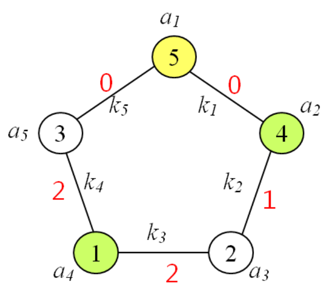
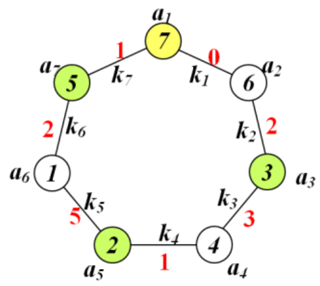


$$k_n=[(n-1)+(n-2)+...+(\frac{n-1}{2}+1)]-[\frac{n-1}{2}+(\frac{n-1}{2}-1)+...+1]$$
$$=\frac{n-1}{2}\times\frac{n-1}{2}=(\frac{n-1}{2})^2$$
$$p_1＝a_1＋k_1＋k_n$$
$$=n+0+(\frac{n-1}{2})^2=\frac{4n+n^2-2n+1}{4}=\frac{n^2+2n+1}{4}=(\frac{n+1}{2})^2$$

(2) 奇數頂點不同排列方式的題型可能出現的最大 P 值為 $(\frac{n+1}{2})^2$

4、奇數頂點不同排列方式的最小 P 值探討

(1) P 值最小題型為 $(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$ 為最小值

	
4m+1 型，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 為奇數，a_1＝n(奇數)，故 $(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$ 最小值＝0， P 最小值 p_1＝a_1＋k_1＋k_n＝n+0+0＝n	4m+3 型，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 若為偶數，a_1＝n(奇數)，故 $(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$ 最小值＝1， 故 P 最小值 p_1＝a_1＋k_1＋k_n＝n+0+1＝n+1

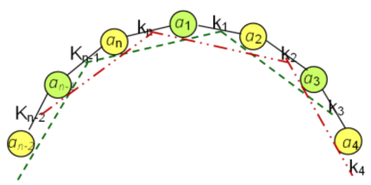
(2) 奇數邊題型 4m+1 型最小 P 值＝n；4m+3 型最小 P 值＝n＋1。

5、頂點大小位置的安排，可以使點擊邊的大小有不同的數值，我們將這種頂點間結合的鍊，稱為「貢品鍊」。

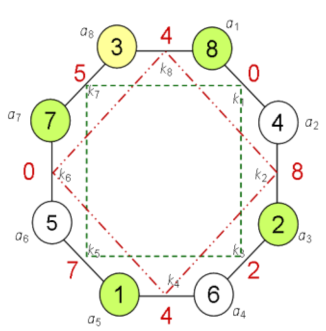
(1) k_n的貢品鍊就是 a_2－a_3＋a_4－a_5＋⋯＋a_{n-1}－a_n。貢品鍊的值越大，點擊邊的次數就越大，貢品鍊的值越小，點擊邊的次數就越小。

(2)「貢品鍊」的概念，對我們找 P 值的最大題型與最小題型幫助很大。

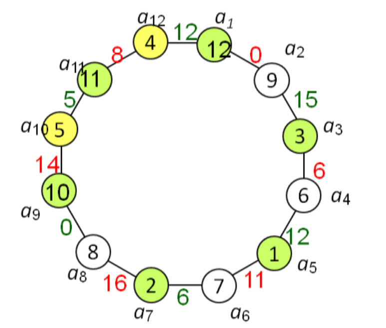
(二)偶數邊形 P 值最大題型探討：

	1、偶數邊為雙迴圈，「貢品鍊」的考量需兼顧奇數點與偶數點的安排。 2、沿用奇數邊做法，將 a_1 為最大值 n，k_1 安排為「0」，思考 k_n(a_{n-1}－a_n＋a_{n-3}－a_{n-2}＋⋯)的最大值。

1、八邊形：

	1、8-7-2-1(3-4-5-6)為例，奇數組只有兩個數比偶數組大，故將 a_1 放入奇數點的最大值 8，a_7 放入奇數點的次大值 7，而 a_8 放入偶數點的最小值 3， 2、則 k_8＝7－3＝4；p_1＝a_1＋k_n＋k_1＝8＋4＋0＝8＋7－3 3、8 與 7 皆為奇數點最大值，而 1＜5、2＜6；1+2＜5+6，1+2＜4+6 故對 k_1 與 k_6 而言，必是「0」的位置； 4、故八邊形 P 的最大值＝8＋7－3＝12

2、12 邊形：



1、12-11-10-1-2-3 (4-5-6-7-8-9) 奇數點有 3 個數比偶數點大。

2、a_1 放入奇數點的最大值 12，將奇數頂點較大數 11 與 10 放入 a_{11} 與 a_9，偶數頂點較小數 4 與 5 放入 a_{12} 與 a_{10}，

3、則 k_1 為 0，$k_n=(10-5)+(11-4)=12$；
$p_1=a_1+k_n+k_1=12+12+0=24$

4、故 12 邊形 P 的最大值＝12＋11＋10－(5+4)＝24

3、偶數 N 邊形 P 最大值探討

(1) k_n的最大值＝$(\frac{n}{4}-1)$個奇數頂點較大數－$(\frac{n}{4}-1)$個偶數頂點較小數

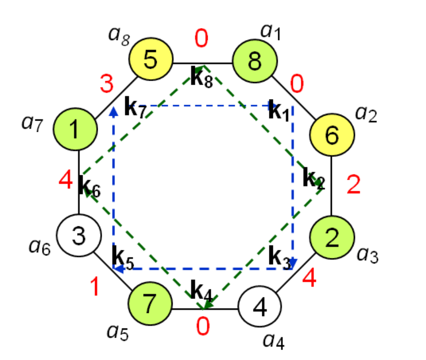
$$[(n-1)+(n-2)+\ldots+(n-\frac{n}{4}+1)]-[(\frac{n}{2}-1)+(\frac{n}{2}-2)+\ldots+(\frac{n}{4}+1)]$$

$$=\frac{n}{2}\times(\frac{n}{4}-1)$$

$$=\frac{n}{2}\times\frac{n-4}{4}=\frac{n(n-4)}{8}$$

(2)頂點全等 P 的最大值 $p_1=a_1+k_n+k_1=n+\frac{n(n-4)}{8}+0=\frac{n(n+4)}{8}$

4、偶數 N 邊形 P 最小值探討



(1) $p_1=a_1+k_n+k_1$ 欲為最小值，則 $a_1=n$，$k_n=k_1=0$

(2)將 a_1 的兩邊 k_1 與 k_n 都安排為「0」的位置；
即 $a_2>a_3$，$a_2+a_4\geqq a_3+a_5$；$a_8>a_7$，$a_8+a_6\geqq a_7+a_5$

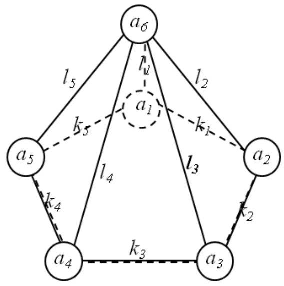
(3) $p_1=a_1+k_n+k_1=n+0+0=n$

(4) 偶數 N 邊形 P 最小值為 n

(三) 不同題型 P 值可能出現的範圍

題型		P 值範圍
奇數	4m+1	$n\sim(\frac{n+1}{2})^2$ 之間的奇數
	4m+3	$(n+1)\sim(\frac{n+1}{2})^2$ 之間的偶數
偶數(4m)		$n\sim\frac{n(n+4)}{8}$ 之間的正整數

伍、　　討論



一、「一擊兩得」遊戲是否適用於角錐形？

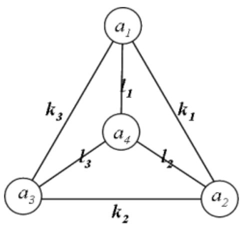
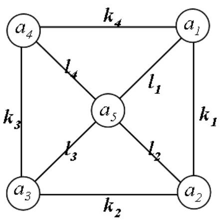
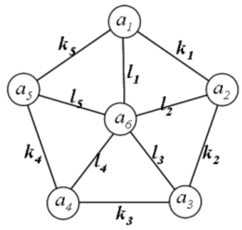
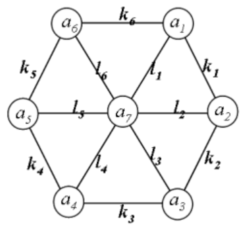
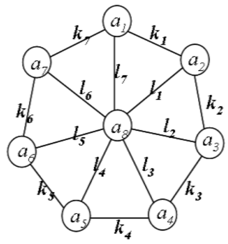
(一) 角椎頂點全等最小值與頂點數的關係與原題型(環型)有何區別？

1、角錐研究的思考

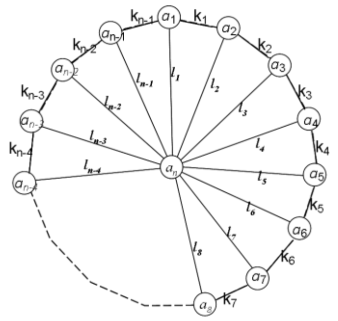
(1) 角錐與環型最大的區別，在於多一頂點，且角錐頂點與底面的每一頂點都有連線，為了便於研究，我們將角錐圖形平面化。(角錐頂點移為底面多邊形的中心)

(2) 角錐頂點與底面多邊形的連線，我們命名為內連線(以 l_1、l_2、…l_n)，底面多邊形的連線命名為外連線，沿用之前的 k_1、k_2、k_3…k_n。

(3) 點擊數 K＝外連線與內連線點擊數的和。

三角錐	四角錐	五角錐	六角錐	七角錐
				

2、角錐頂點與連線整理



$$p_1 = a_1 + k_1 + k_{n-1} + l_1$$
$$p_2 = a_2 + k_1 + k_2 + l_2$$
$$p_3 = a_3 + k_2 + k_3 + l_3$$
......
$$p_{n-1} = a_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-1} + l_{n-1}$$
$$p_n = a_n + l_1 + l_2 + l_3 + ... + l_{n-1}$$
$$p_1 + p_2 + p_3 ... + p_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + 2(k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} + l_1 + l_2 + ... + l_{n-1})$$
$$nP = \sum_{i=1}^{n} a_i + 2\text{K}\text{；P} \geq n$$

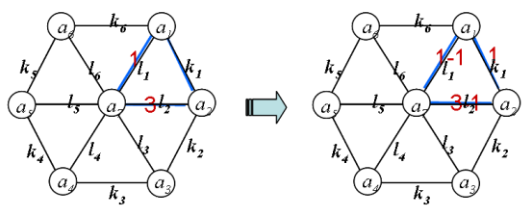
3、與基本型的結果 $nP = \sum_{i=1}^{n} a_i + 2K$ ，P≧n 相同。

(二) 角錐形快速解題模式

角錐題型因連線分內連線與外連線，故快速解題模式無法直接套用基本型，我們研究結果整理如下：

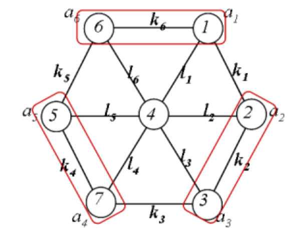
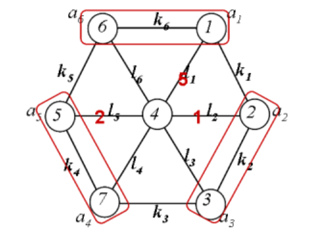
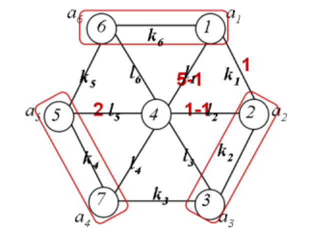
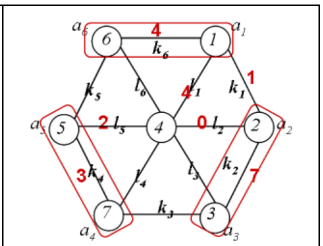
1、先解決外頂點與外連線，再解決內頂點與內連線。

2、內連線與外連線具有可替換性。

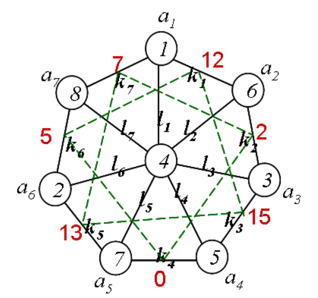
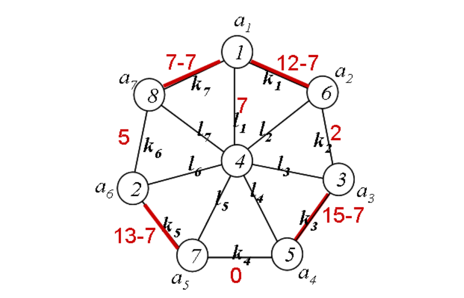
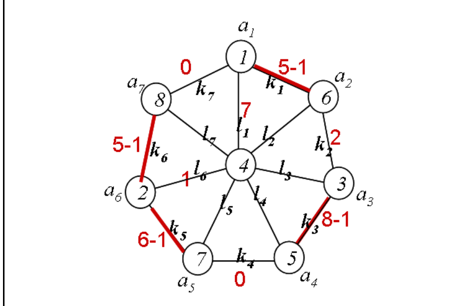
	形成三角形的內連線與外連線具有可替換性 例：對 a_1 而言，$l_1+1=k_1+1$； 　　對 a_2 而言，$l_2+1=k_1+1$ 故我們可將內連線的 l_1 的「1」與 l_2 的「1」同時轉移至 k_1；或將外連線 k_1 的「1」轉移至 l_1 與 l_2。

3、可利用內連線與外連線的可替換性，進行「增值」或「減值」求得該題型 P 的最小值。

4、奇數頂點的角錐，底面為偶數邊形，可加上底面「兩兩成對法」求出 P 之最小值。
以七角錐為例：

			
將底面頂點兩兩一組，利用內連線使同組的兩頂點相等。	此時外面 3 組頂點分別為 6、3、7，而中間頂點為 12 最大。	內連線 l_1 與 l_2 可用「減值」法同減 1，將 1 移至 k_1。	再將 k_6、 k_2、k_4 分別填入 4、7、3，使內、外頂點都同為「10」。

5、偶數頂點的角錐，底面為奇數邊形，可加上底面「星形跳法」求出 P 之最小值。
以七角錐為例：

		
以「星形跳法」完成外連線。此時外部頂點同為 20，而內部頂點只有 4。	以「減值」法將 k_1、 k_3、k_5、k_7 同減 7，將外部頂點同減 7；a_1 被減 2 次，故 l_1 需加 7，此時外部頂點為 13，內部頂點為 11。	再以「減值」法將 k_1、 k_3、k_5、k_6 同減 1，將外部頂點同減 1，a_6 被減 2 次，故 l_6 需加 1，此時外部頂點與內部頂點同為 12。

(三) 角錐題型限制探討

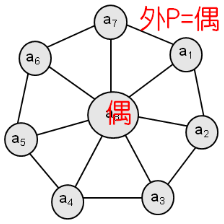
1、角錐頂點與連線的關係還是適用原型的 $nP=\sum_{i=1}^{n} a_i + 2K$ ，故

(1) 奇數頂點沒問題。

(2) 總頂點數為 6、10、14 的 4m+2 型的角錐，即 5 角錐、9 角錐、13 角錐不適用本遊戲。

2、總頂點數為 4m 型的角錐，有解的題型有何限制？

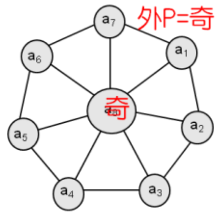
(1) 由七角錐解題模式可看出角錐以星形跳法求出底面 7 邊形的 P 值後，再將（外部頂點 P 值＋內部頂點）÷ 2 即為該題型的 P 值。



(2) 偶數頂點(4m)的和一定為偶數，

- 若中間為偶數，則外圈頂點和為偶數，則外圈 P 值必為偶數；

（$nP=\sum_{i=1}^{n} a_i + 2K$ ； $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 為偶數，n 為奇數，故 P 必為偶數）。



- 若中間為奇數，則外圈頂點和為奇數，則外圈 P 值必為偶數；

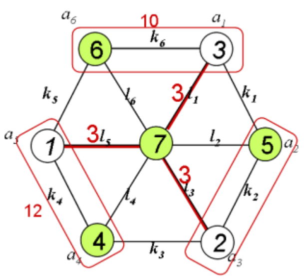
（$nP=\sum_{i=1}^{n} a_i + 2K$ ； $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 為奇數，n 為奇數，故 P 必為奇數。）

(3) 內外圈 P 值同為奇數或偶數，就能透過內外連線的移轉，而求得 P 的最小值。

(4) 換句話說，總頂點數為 4m 型的角錐題型，並不像基本型需有「奇數頂點和＝偶數頂點和」的限制。

(四) 角錐 P 值的範圍與原型有何差異？

1、奇數頂點角錐最大 P 值思考：

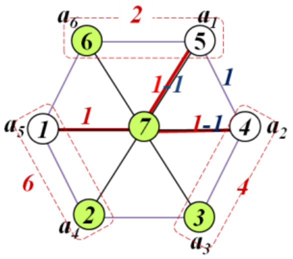
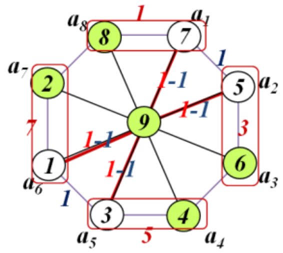
	(1) 要使 P 值為最大，必須使 a_n 和內連線的和為最大。 (2) 可連成三角形的內連線，可以同時轉移至外連線，故欲形成內連線和為最大，必須使外連線的偶數點分別大於兩兩成對的奇數點(或奇數點大於偶數點)，才能形成不會被移轉的內連線。(同為奇數內連線或偶數內連線) (3) 內連線的最大值＝$\frac{n-1}{2}$ 個較大數－$\frac{n-1}{2}$ 個較大數（n 除外）

(1) 內連線最大值為$[(n-1)+(n-2)+...+(\frac{n-1}{2}+1)]-[\frac{n-1}{2}+(\frac{n-1}{2}-1)+...+1]=(\frac{n-1}{2})^2$

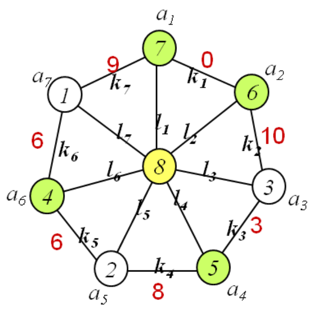
(2) $\mathrm{P}=a_n+l_1+l_3+l_5+...+l_{n-2}=n+(\frac{n-1}{2})^2=\frac{4n+n^2-2n+1}{4}=\frac{n^2+2n+1}{4}=(\frac{n+1}{2})^2$

(3) 奇數頂點角錐 P 最大值＝$(\frac{n+1}{2})^2$ （與原型奇數頂點題型相同）

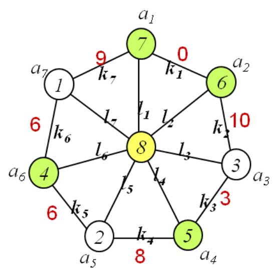
2、奇數頂點角錐最小 P 值思考：

	
4m+1 型，有奇數組內連線，一定有 1 內連線無法遞移至外連線，故 P 最小值 n+1	4m+3 型，有偶數組內連線，可全部遞移至外連線，故 P 最小值＝n

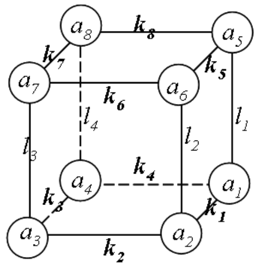
2、偶數頂點角錐 P 最大值思考：

	(1) 偶數頂點角錐的 P 值＝（外部頂點＋內部頂點）÷ 2 (2) 內部頂點的極大值為 n， 外部頂點 P 極大值$=[\frac{(n-1)+1}{2}]^2=(\frac{n}{2})^2$ 。 (3) 故偶數頂點角錐 P 的最大值＝ $[n+(\frac{n}{2})^2]\div 2=\frac{4n+n^2}{4\times 2}=\frac{n(n+4)}{8}$ （與原型偶數頂點相同）

3、偶數頂點角錐 P 最小值思考：

	(1) 內部頂點的極大值為 n， (2) 則外部頂點 P 極小值＝n。 (3) 故偶數頂點角錐 P 的最小值＝（n＋n）÷2＝n （與原型偶數頂點相同）

二、「一擊兩得」遊戲是否適用於角柱形體？



(一) 角柱頂點全等最小值與頂點數的關係與原題型(環型)有何區別？

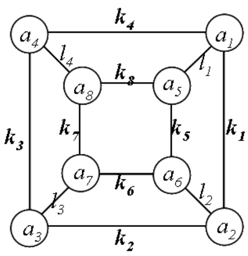
1、角柱研究的思考

(1) 角柱與環型最大的區別，在於多一底面及 n 個側面，為了便於研究，我們將角柱圖形平面化。(角柱上底面一縮小，下底面擴大成雙環狀。)

(2) 角柱上、下多邊形所形成側面的連線，我們命名為內連線(以 l_1、l_2、⋯l_n)，底面多邊形之間的連線命名為外連線，沿用之前的 k_1、k_2、k_3⋯k_n。點擊數 K＝外連線與內連線點擊數的和。

(3) 角柱頂點皆為偶數點，故只需討論頂點為 4m 型的 4 角柱、6 角柱、8 角柱、⋯。

2、角柱頂點與連線整理



$$p_1 = a_1 + k_1 + k_{n-1} + l_1$$
$$p_2 = a_2 + k_1 + k_2 + l_2$$
$$p_3 = a_3 + k_2 + k_3 + l_3$$
......
$$p_{n-1} = a_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-1} + l_{\frac{n}{2}-1}$$
$$p_n = a_n + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_{\frac{n}{2}}$$
$$p_1 + p_2 + p_3 \ldots + p_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} + l_1 + l_2 + \ldots + l_{\frac{n}{2}})$$
$$nP = \sum_{i=1}^{n} a_i + 2\mathrm{K}\text{；}\mathrm{P} \geq n$$

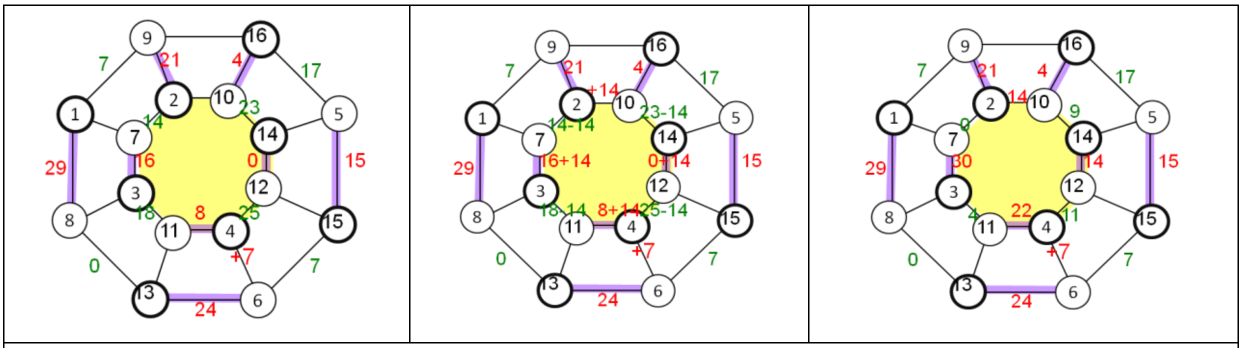
3、角柱頂點全等最小值與頂點數的關係為 $nP = \sum_{i=1}^{n} a_i + 2K$ ，P≧n；與研究 2 基本型(環形)的結果相同。

(二) 角柱形快速解題模式

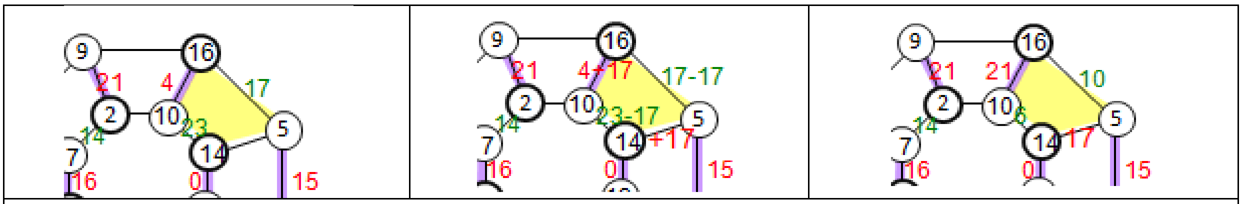
角柱型因連接線分內連線與外連線，故快速解題模式無法直接套用基本型，我們研究結果整理如下：

1、先將角柱轉換成基本型(環形)解題。

2、可利用偶數頂點環形與方形迴圈連線的可替換性，進行「增值」或「減值」，將偶數邊增值到最大。



內圈偶數邊(紫線)值較小，故內圈需進行增值。
內圈紫線的 0、8、16，可透過環形迴圈連線的可替換性，增值為 14、22、30。

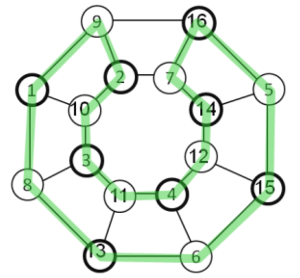
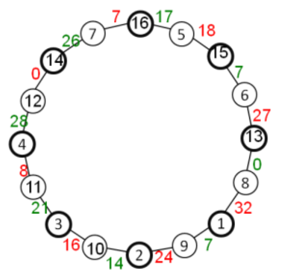
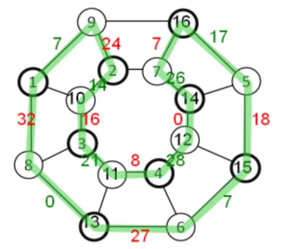
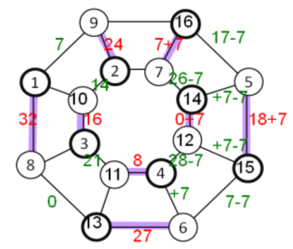
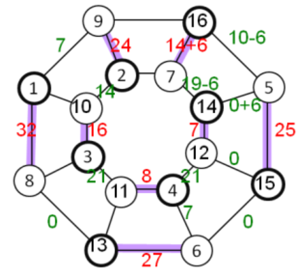
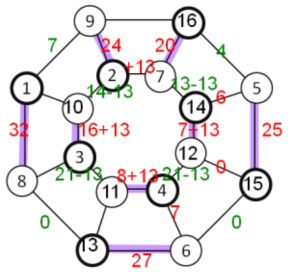
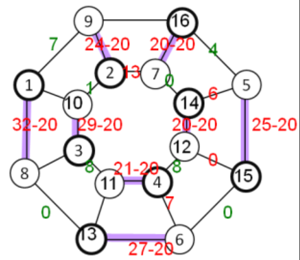
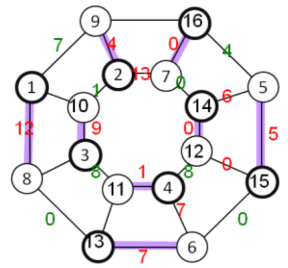


紫線的 16-10 間的「4」可透過方形迴圈連線的可替換性，增值為 21。

3、再將偶數邊同減其最小值，求得該題型 P 的最小值。

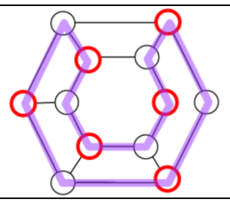
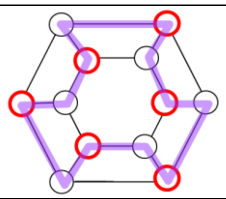
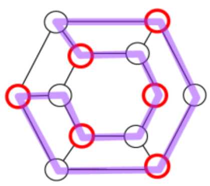
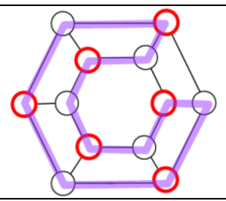
4、減值快速估算方法為「轉折點」，因為轉折點需同時顧及內(外)圈「0」的增值與轉折線的增值。

5、角柱解題說明 (以八角柱為例)：

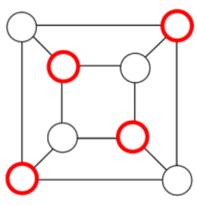
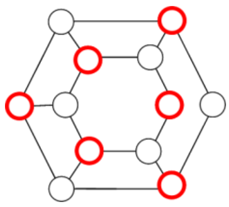
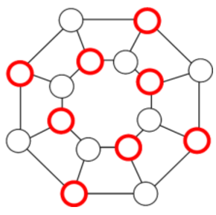
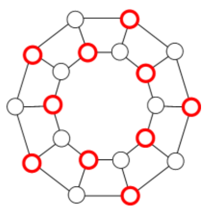
			
①先將所有頂點連成環形(漢米爾頓圈)。	②轉換成環形進行解題。	③將環型解題答案對照關係填回柱型。	③畫出環形偶數邊，確認內圈「0」可否增值，並進行增值。
			
⑤檢視轉折點數字，並進行轉折點增值。	⑥將內圈奇數邊連線遞移 13 至偶數邊。	⑦偶數邊最小值為 20，故同減 20。	完成。 此八角柱 P 值＝20

(三) 角柱題型有何限制？

1、由角柱題型轉換成環形解題，不管如何形成環狀(漢米頓圈)，奇數點與偶數點的相關位置，都如下述位置，故角柱題型限制與基本型的偶數邊題型相同，必須「奇數頂點和＝偶數頂點和。」

			
不同漢米頓圈畫法，奇數點與偶數點的相關位置都相同。			

2、根據實際測試柱形題型，證實紅圈點(為奇數點)與黑圈點(為偶數點) 和相等，才是有解題型。

四角柱	六角柱	八角柱	十角柱
			

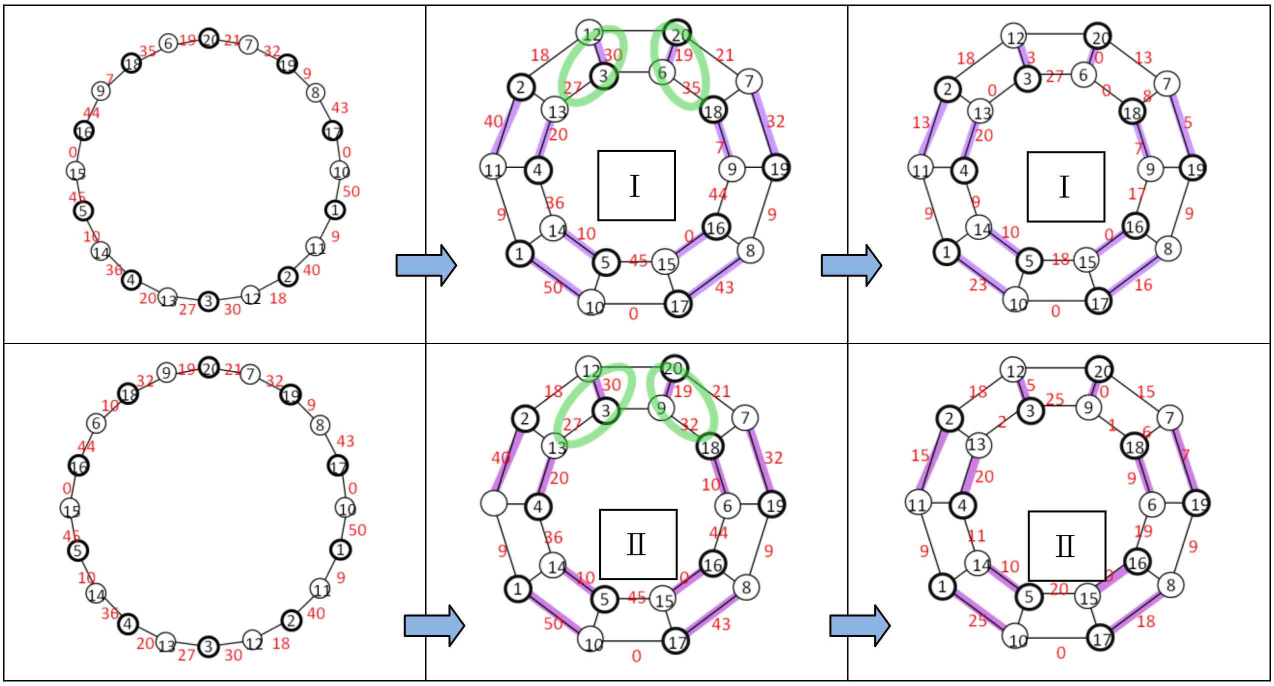
(四) 角柱頂點最大 P 值思考：

1、角柱 P 值＝環形 P 值－減值。

故角柱頂點最大 P 值＝最大環形 P 值－最小減值。

2、怎樣的題型能產生最小的減值？

(1) 以十角柱做討論(奇數點：1-2-3-4-5-16-17-18-19-20；偶數點：6-7-8-9-10-11-12-13-14-15)



(2) 題型 I 與題型 II 的角柱題型，連成為環形時，P 值都同為 20 邊形最大值 60；但經過「減值」的過程，題型 I 的 P 值為 33，題型 II 的 P 值為 35。

(3) 題型 I 的減值思考：紫線外圈皆為較大數，只需考慮內圈與轉折點，35+19<30+27，故只需考慮 35+19。35 須顧慮「19」與「0」的增值，(35+19)÷2＝27，換句話說紫線最小的 0 可增值為 27，故減值為 27；60－27＝33，P 值為 33。

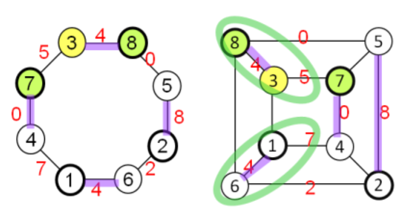
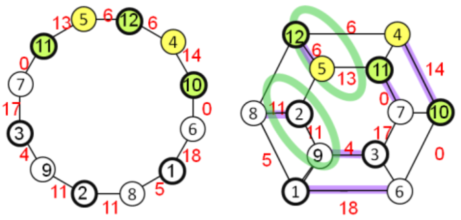
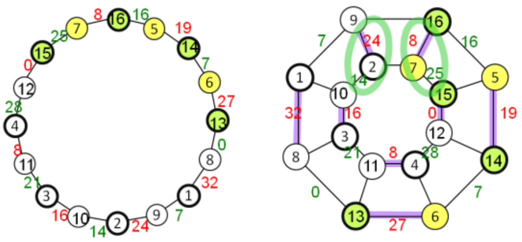
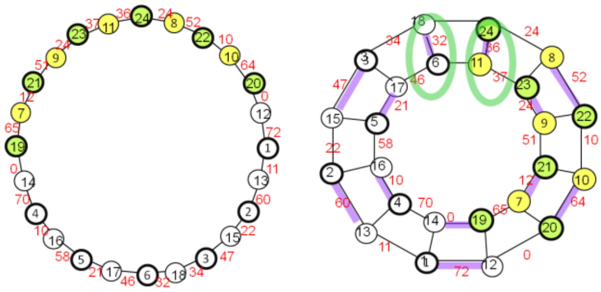
(4) 題型 II 的減值思考：紫線外圈皆為較大數，只需考慮內圈與轉折點，32+19<30+27，故只需考慮 32+19。

32 須顧慮「19」與「0」的增值，(32+19)÷2＝25…1，換句話說紫線最小的 0 可增值為 25，故減值為 25；60－25＝35，P 值為 35。

(5) 以「貢品鍊」解析題型 I 與 II 的減值（貢品鍊見研究 5(一）5)

題型 I （減值 27）	題型 II （減值 25）
35＝(17-8)+(19-7)+(20-6) 19＝(16-9)+(18-6) 35+19＝ (20+19+18+17＋16)－(9+8+7+6*2)＝54 減值＝54÷2＝27	32＝(17-8)+(19-7)+(20-9) 19＝(16-6)+(18-9) 32＋19＝ (20+19+18+17＋16)－(9*2+8+7+6)＝51 減值＝51÷2＝25…1（不考慮餘數）

3、整理四~十二角柱減值最小題型（十角柱見前討論）

	
四角柱：5=8-3 ；4=7-3 減值為 [(8-3)+(7-3)] ÷2=4…1	六角柱：13=(10-4)+(12-5) ；6=11-5 減值為 [(12+11+10)-(5*2+4)] ÷2=9…1
	
八角柱： 25＝13-6+14-5+16-7； 8＝15-7 25+8＝16+15+14+13－(7*2+6+5) 減值為 25+8＝[16+15+14+13－(7*2+6+5)]÷2 ＝16…1	十二角柱： 37=(20-10)+(22-8)+(24-11) ； 36=(19-7)+(21-9) +(23-11) 37+36 =(20-10)+(22-8)+(24-11) +(19-7)+(21-9) +(23-11) 減值為 [(24+23+22+21+20+19)-(11*2+10+9+8+7)]÷2=36…1

4、角柱最小減值為[($\frac{n}{4}$ 奇數點較大數)－($\frac{n}{4}$-1 個偶數點較小數＋其中最大值)]÷2 取整數

$$\{[n+(n-1)+(n-2)+...+(n-\frac{n}{4}+1)]-[(\frac{2n}{4}-1)\times 2+(\frac{2n}{4}-2)+...+(\frac{n}{4}+1)]\}\div 2$$

$$=\{(n+\frac{3n}{4}+1)\times\frac{n}{4}\times\frac{1}{2}-[(\frac{2n}{4}-1)+\frac{3n}{4}\times(\frac{n}{4}-1)\times\frac{1}{2}]\}\div 2$$

$$=(\frac{7n^2}{32}-\frac{3n^2}{32}+\frac{n}{8}-\frac{n}{8}+1)\div 2$$

$$=(\frac{4n^2}{32}+1)\div 2=\frac{n^2}{16}+\frac{1}{2}\Rightarrow\left\lfloor\frac{n^2}{16}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

5、角柱題型最大 P 值＝最大環形 P 值－最小減值。

(1) 最大環形 P 值＝$\frac{n(n+4)}{8}$，最小減值＝$\frac{n^2}{16}$

(2) 角柱頂點最大 P 值＝$\frac{n(n+4)}{8}-\frac{n^2}{16}=\frac{2n^2+8n}{16}-\frac{n^2}{16}=\frac{n^2+8n}{16}=\frac{n(n+8)}{16}$

6、因最小環形 P 值＝n，故角柱題型最小 P 值＝n。

三、修改遊戲的點擊規則，將每點擊一次，兩端頂點「加 1」改為「減 1」，我們的研究結果需做怎樣的修正？

(一)將點擊規則由「＋」，改為「－」，頂點全等最小值與頂點數的關係與原題型有何區別？

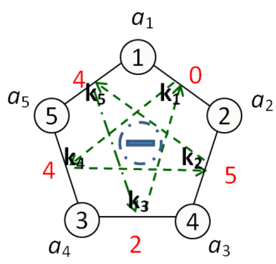
點擊規則	每點擊一次，兩端頂點「＋1」	每點擊一次，兩端頂點「－1」
點擊結果	$p_1=a_1+(k_n+k_1)$；$p_2=a_2+(k_1+k_2)$；…； $p_n=a_n+(k_{n-1}+k_n)$；$p_1=p_2=\cdots=p_n$	$p_1=a_1-(k_n+k_1)$；$p_2=a_2-(k_1+k_2)$；…； $p_n=a_n-(k_{n-1}+k_n)$　；$p_1=p_2=\cdots=p_n$
關係式	$nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2K$　，P≧n	$nP=\sum_{i=1}^{n}a_i-2K$　，P≦1

$nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2K$ 與 $nP=\sum_{i=1}^{n}a_i-2K$ 判斷奇、偶數的方法相同，故我們可套用「原型」P 值奇、偶數的方法整理點擊後的 P 值的奇、偶數。

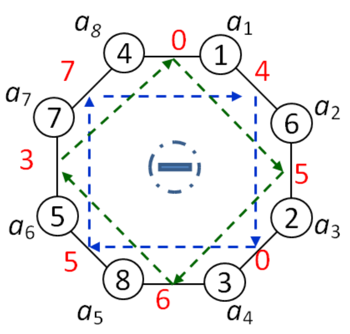
N 邊形	3	4	5	6	7	8	9	10	11
點擊後頂點值 P	0	1	1、-1、…	無解	0、-2、…	1、0、-1、…	1、-1、…	無解	0、-2、…

(二) 最快解題模式

1、奇數邊（以五邊形為例）

	比較 a_1 與 a_5，$a_1-k_1=a_5-k_4$，　a_1 為 1，a_5 為 5，則設 $k_1=0$，$k_4=4$ 比較 a_4 與 a_3，$a_4-k_4=a_3-k_2$，則 $3-4=4-(5)$，　$k_2=5$ 比較 a_2 與 a_1，$a_2-k_2=a_1-k_5$，$2-5=1-(4)$，　$k_5=4$ 比較 a_5 與 a_4，$a_5-k_5=a_4-k_3$，$5-4=3-(2)$，　$k_3=2$ 比較 a_3 與 a_2，$a_3-k_3=a_2-k_1$，$4-2=2-(0)$，　$k_1=0$（與原先假設同） $p_1=1-4-0=-3$；$p_2=2-0-5=-3$；$p_3=4-5-2=-3$； $p_4=3-2-4=-3$；$p_5=5-4-4=-3$；$P=p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=-3$

2、偶數邊：雙迴圈跳法(以八邊形為例)

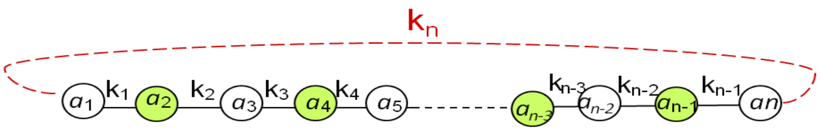
	比較 a_1 與 a_2，則 $1-(0)=6-(5)$，故 k_8 與 k_2 分別填入 0 與 5； 比較 a_3 與 a_4，則 $2-5=3-(6)$，k_4 填入 6； 比較 a_5 與 a_6，則 $8-6=5-(3)$，k_6 填入 3； 比較 a_7 與 a_8，則 $7-3=4-(0)$，k_8 填入 0；（綠色迴圈） 比較 a_2 與 a_3，則 $6-(4)=2-(0)$，故 k_1 與 k_3 分別填入 4 與 0； 比較 a_4 與 a_5，則 $3-0=8-(5)$，k_5 填入 5； 比較 a_6 與 a_7，則 $5-5=7-(7)$，k_7 填入 7； 比較 a_8 與 a_1，則 $4-7=1-(4)$，k_1 填入 4；（藍色迴圈） $P=p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=p_7=p_8=-3$

3、改變點擊規則仍可延用基本型的「星形跳法」與「雙迴圈跳法」。

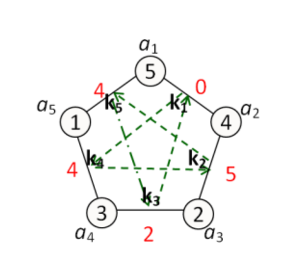
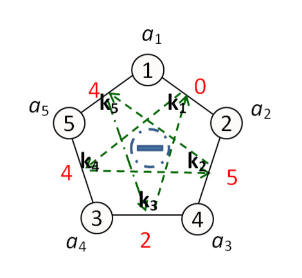
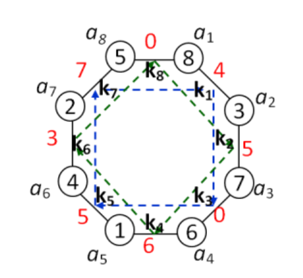
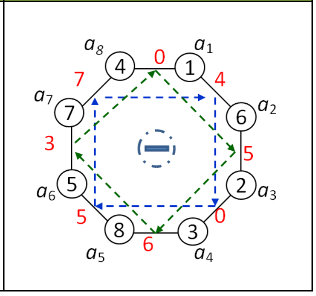
4、「0」的判斷方法改變了，

(1) 點擊規則「＋」時，最少點擊邊 k_n（0 的位置）由兩端點(a_1與 a_n)數起，需呈現：
奇 1＞偶 1；奇 1＋奇 2＞偶 1＋偶 2…；

(2) 而當點擊規則改為「－」(負值)時，最少點擊邊 k_n（0 的位置）由兩端點(a_1與 a_n)數起，需呈現：奇 1＜偶 1；奇 1＋奇 2＜偶 1＋偶 2…；



5、當點擊規則改為「－」時，在解題的過程，我們發現了一個有趣的現象，**點擊規則的改變，就好像製造了一個「鏡像世界」**，每一個題型，都可以找到自己對應的「另一半」，他們頂點的大小排列相反，而點擊數則完全相同，這真是個有趣的現象。

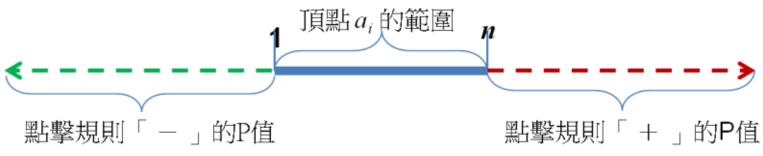
點擊（＋）	點擊（－）	點擊（＋）	點擊（－）
			

6、所以，我們推論，在點擊規則為「－」的遊戲中，可套用基本型發現的點擊數與頂點的關係。

(三) 奇數頂點 P 值的範圍

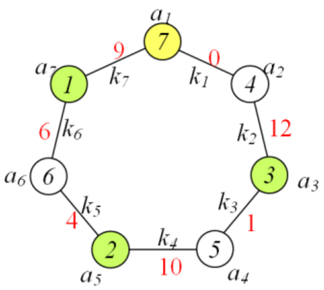
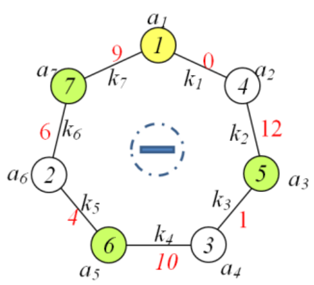
1、當點擊數為「正值」時，頂點值(a)越大，點擊值(k)就越小，所以頂點全等的最小值 P，以「n」為起始點，P≧n。

而當點擊數為「負值」時，頂點值(a)越小，點擊值(k)就越小，所以頂點全等的最小值 P，以「1」為起始點，P≦1。



2、奇數邊形 P 值最大題型探討：

(1) 在基本型中 P 值最大題型為 a_1 與 $(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})-(a_3+a_5+a_7+...+a_n)$ 為最大值，即除了 a_1 外，所有偶數點需大於所有奇數點，根據「負值」是「正值」鏡像世界的猜想，我們必可找到 a_1 與 $(a_3+a_5+a_7+...+a_{n-})-(a_2+a_4+a_6+...+a_{n-1})$ 為最大值的題型。

<table>
<tr><th>點擊（＋）k_n 的最大值</th><th>點擊（－）k_n 的最大值</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

(2) 點擊(－)k_n 的最大值與點擊(＋)的 k_n 相同

$$k_n=[n+(n-1)+(n-2)+...+(\frac{n+1}{2})]-[(\frac{n+1}{2}-1)+(\frac{n+1}{2}-2)+...+2]=(\frac{n-1}{2})^2$$

(3) 故奇數頂點 P 最小值＝$1-(\frac{n-1}{2})^2$

(4) 奇數頂點 P 之最大值

P 之最大值 $k_n=k_1+(a_3+a_5+...+a_n)-(a_2+a_4+...+a_{n-1})$ **需為最小；**

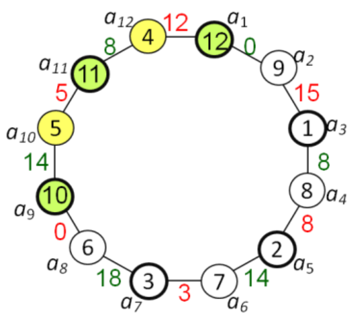
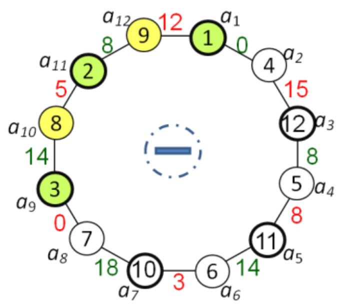
4m+1 型，頂點和 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 為奇數，奇數－1＝偶數，故 k_n 最小值＝0，P＝1－0＝1

4m+3 型，頂點和 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 為偶數，偶數－1＝奇數，故 k_n 最小值＝1，P＝1－1＝0

(四) 偶數頂點 P 值的範圍

1、點擊(＋)的 k_n 的最大值＝$\frac{n(n-4)}{8}$

2、根據「負值」是「正值」鏡像世界的猜想，k_n 最大值＝$\frac{n(n-4)}{8}$

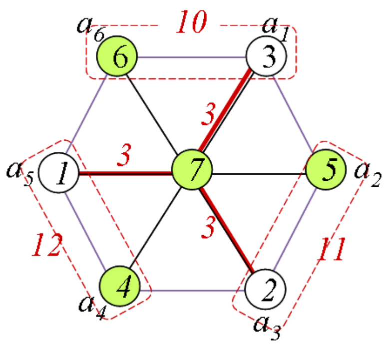
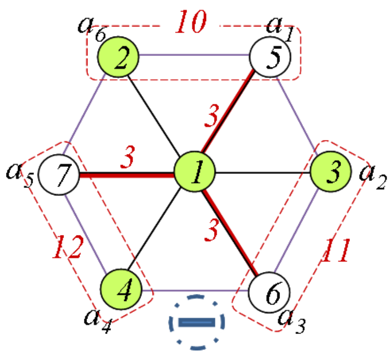
<table>
<tr><th>點擊（＋）k_n 的最大值</th><th>點擊（－）k_n 的最大值</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>k_n＝10-5+11-4＝12</td><td>k_n＝8-3+9-2＝12</td></tr>
</table>

3、偶數頂點 P 最小值＝$1-\frac{n(n-4)}{8}$

4、偶數邊形 P 最大值＝1

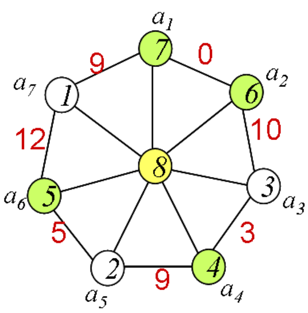
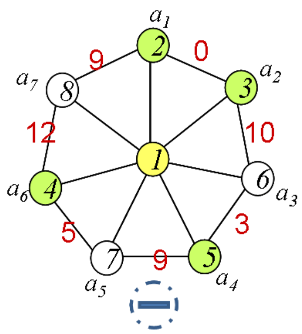
(五) 角錐 P 值的範圍

1、根據「鏡像世界」的猜想，我們也找到奇數頂點角錐內連線的最大值 $=(\frac{n-1}{2})^2$

<table>
<tr><th></th><th>點擊（＋）</th><th>點擊（－）</th></tr>
<tr><td>內連線最大值</td><td>$\frac{n-1}{2}$ 個較大數－ $\frac{n-1}{2}$ 個較小數
（n 除外）</td><td>$\frac{n-1}{2}$ 個較大數－ $\frac{n-1}{2}$ 個較小數
（1 除外）</td></tr>
<tr><td>題型示例</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

(1) 奇數頂點角錐最小 P 值＝ 1－內連線最大值； $P=1-(\frac{n-1}{2})^2$

2、偶數頂點角錐 P 最小值思考：

<table>
<tr><th></th><th>點擊（＋）</th><th>點擊（－）</th></tr>
<tr><td>外部 P 最大值</td><td>$(n-1)+(\frac{n-2}{2})^2$</td><td>$2-(\frac{n-2}{2})^2$</td></tr>
<tr><td>題型示例</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

(1) 偶數頂點角錐的 P 值＝（外部頂點＋內部頂點）÷ 2

(2) 內部頂點的極小值為 1，則外部頂點 P 的極小值 $=2-(\frac{n-2}{2})^2$ 。

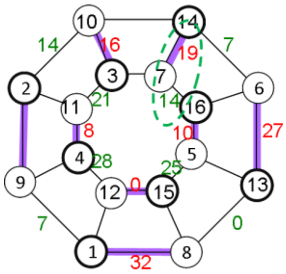
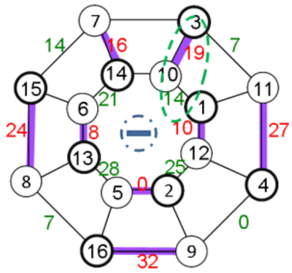
(3) 故偶數頂點角錐 P 的最小值 $=[1+2-(\frac{n-2}{2})^2]\div 2=[3-(\frac{n-2}{2})^2]\div 2=1-\frac{n(n-4)}{8}$

(六) 角柱 P 值的範圍

1、角柱 P 值＝環形 P 值－減值。

2、角柱頂點最大 P 值＝環形 P 值＝1

3、 角柱最小減值思考

	點擊（＋）	點擊（－）
最小減值	14＝13-6+14-7；19＝15-5＋16-7 最小減值＝$\frac{n^2}{16}$	14＝11-4+10-3；19＝12-2+10-1 最小減值＝$\frac{n^2}{16}$
題型示例		

4、角柱頂點最小 P 值， $P=1-[\frac{n(n-4)}{8}-\frac{n^2}{16}]=1-\frac{n^2-8n}{16}=1-\frac{n(n-8)}{16}$

陸、 結論

一、「一擊兩得」遊戲頂點全等最小值與頂點數的關係為 $nP=\sum_{i=1}^{n}a_i+2K$ ，P≧n。

二、「一擊兩得」遊戲快速解題模式依頂點數為奇數或偶數分為星形解題法與雙迴圈解題法。

三、「一擊兩得」遊戲不同題型頂點全等 P 值的範圍，因奇數偶數而有所不同。

四、角錐和角柱題型都可借用基本形的解題模式，配合「增值」、「減值」找出頂點全等的最小值。

五、「一擊兩得」題型原頂點數可不限於 1~n，亦可不限定一定要相異數，可隨意填入任何數字，皆可求出 P 值，但偶數頂點需符合兩個條件：(一) 頂點和需為偶數。(二) 奇數頂點和＝偶數頂點和。

六、點擊規則為「＋」與「－」，各種題型的 P 值，形成了一個奧妙的「鏡像關係」，幫我們快速的解決點擊規則為「－」的遊戲公式。

七、使用 scratch 軟體將「一擊兩得」做成電腦遊戲最需注意的就是題型的限制。

八、一個簡單的「一擊兩得」遊戲，似乎還蘊藏著不少的數學探討空間，等著我們去延伸和探討。

柒、　參考資料及其他

一、建中通訊解題第 90 期：

http://web2.ck.tp.edu.tw/~mathweb/index.php?option=com_content&view=article&id=42:2012-02-07-02-50-11&catid=19:2011-11-23-08-30-15&Itemid=37

二、第 52 屆全國科展國中組數學：萬數歸一 – 圖形上點邊數字和為定值之研究

三、自製「一擊兩得」遊戲網址(示例)：

http://scratch.mit.edu/projects/19000782/

http://scratch.mit.edu/projects/18819196/

http://scratch.mit.edu/projects/18700779/

【評語】080404

1. 團隊默契極佳，作品架構組織完整，井然有序，內容集趣味與益智為一體的設計，很具創意性，看似是一款小遊戲的研究，實際蘊含了豐富的數形結合之關係，且恰到好處。

2. 在整個歷程中，充分展現科學探究的精神，從提出問題、再經分析推理及驗證，歸納出快速的解題模式，並拓展到立體，這點值得稱許，很好地再現了數學是研究數量關係的學科，也為後續的研究提供了思考的空間。