中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080403

『星』“角”相隨，有『法』有『度』

學校名稱：國立東華大學附設實驗國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳登堯	許育程
小六 王楦淳	
小六 黃川哲	
小六 曹慶丞	
小六 沈博徵	
小六 董少鈞	

關鍵詞：P 葉槽楓葉型、跳點數、類對稱軸

摘要

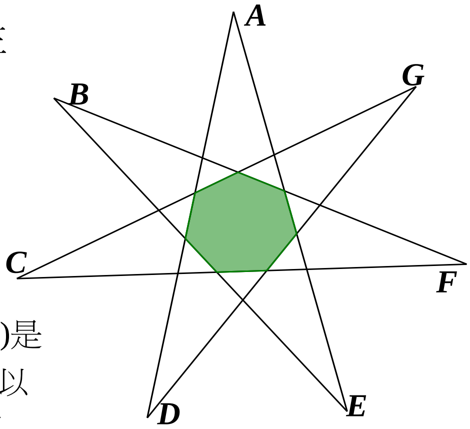
探討各種有規律的 N 角星形中 N 個“芒星角”的角度總和公式,並以釐清修正坊間所說:

N 角星形的角度公式為 $(N-4)\times 180^{\circ}$ 的偏差,且建立另一套簡易的計算角度公式。

壹、 研究的動機:

五年級下學期為了參加 2013 奧林匹亞數學競賽,我們積極的訓練準備,雖然最終成績差強人意。不過,在此次的訓練中,我們總算見識了一些平常不易見到的數學題目,也學到了加深、加廣的知識。更學到了一些幾何上的定理與性質!也燃起了我對數學研究熱情與渴望。在老師的推薦下,我在學校圖書館找到了一套中村義作著的『數學天才 100』, 其中在第❷集的【問題 19】可引起了我莫大的興趣,於是,我就找了幾位志同道合的同學共同參與研究,並隨時請教老師。

右圖是個 7 角星形。中間的 7 邊形為正 7 邊形,而正 7 邊形 7 個邊相互交錯延長,就形成一個 7 角星形。試問: 突出於外側的 7 個角(即七角星形的 7 個角)合計多少度?



『數學天才 100❷』【問題 19】

【解法一】:(書上解法) (如圖一) (如圖二)

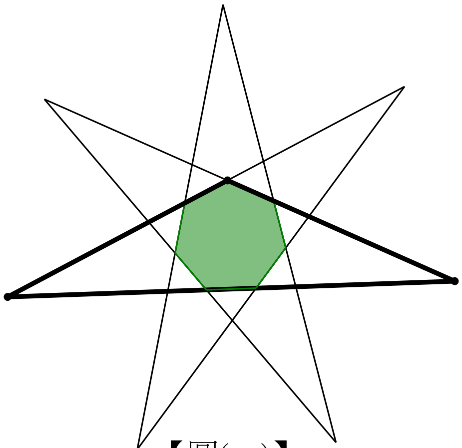
首先,請注意粗線的等腰三角形。其中 1 角(即頂角)是正 7 邊形的 1 個內角,因為正 7 邊形有 7 個內角,所以可形成 7 個全等的等腰三角形(圖一)。又因為中間的正七邊形,可分成 5 個三角形(圖二)。

因此中間正 7 邊形的每個頂角為:$180^{\circ}\times 5\div 7=128\frac{4}{7}$(度)

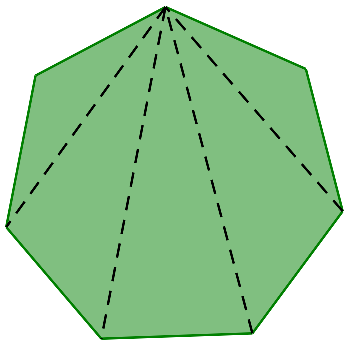
這也是畫粗線的等腰三角形的頂角,

所以 7 角星形的 1 個角度: $(180-128\frac{4}{7})\div 2=25\frac{5}{7}$(度)

故 7 角星型的 7 個角度合計是: $25\frac{5}{7}\times 7=180$(度) 。



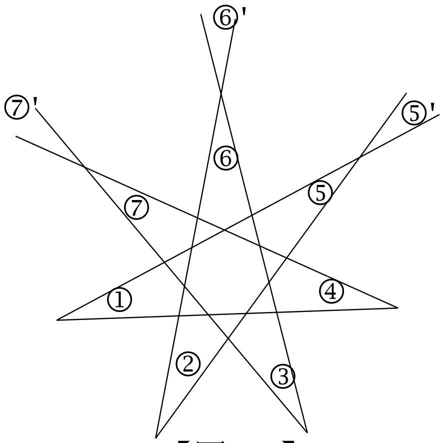
【圖(一)】



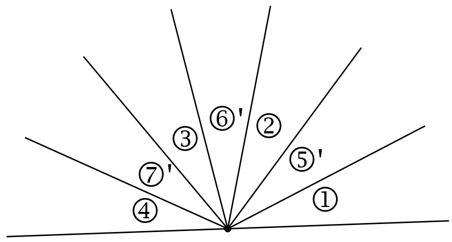
【圖(二)】

【解法二】:(書上解法) (如圖三) (如圖四)

如果將七角星形的 7 個角以①~⑦表示,在⑤~⑦的對面作成⑤'~⑦'(圖三)。接著將在①~④和⑤'~⑦'集中在 1 處,(圖四)所示,合計為 180 度。



【圖(三)】



【圖(四)】

而且,這種想法可適用於任何一種中間為 7 邊形的 7 角星形。即使隨意用中間為 7 邊形所作成的7角星形的7個角度數和合計通常都是180度。以上作者的解法與論述,都讓我們覺得煩瑣與懷疑,因而提出了以下的問題,並繪成表。

1.【解法一】中,是否只適用於中間為正 7 邊形,但若中間不為正 7 邊形時,而為一般 7 邊形,那結果又會如何?
2.【解法二】中,是否只能每次將各個星形角度逐一剪下黏貼,來尋找星形角度和?難道就沒有更好的方法嗎?
3. 隨意用中間為 7 邊形所作成的 7 角星形的 7 個角合計通常都是 180 度?

貳、研究的目的:

(一).N 角星形的圖形如何定義?如何分類?又那一類的 N 角星形的角度和才有公式?

(二).找出 N 角星形分類後的角度和公式

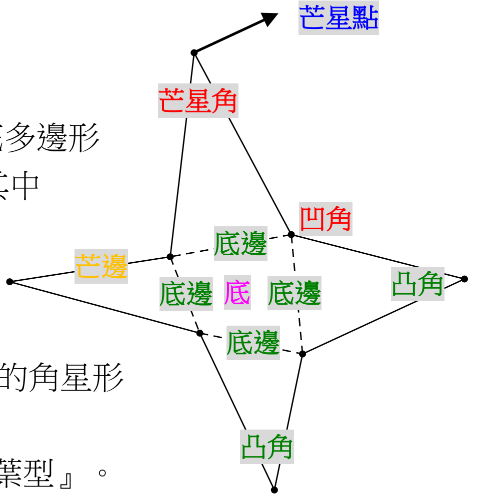
參、研究的問題: 繪製成下表。

(一).N 角星形的圖形可分為那幾類呢?又何類 N 角星形的度數和才有固定值?
(二).芒邊的延長線成一直線且“跳點數”相同的 N 角星形圖形是怎麼得來的?它又與相鄰的“芒星點”兩兩相連所成的外 N 多邊形具有何種關係?又凡具有此種關係的是否都能“1 筆劃”畫出“較完美”(較對稱)的 N 角星形?
(三). 1 種外 N 邊形中，是否只能畫出 1 種角度有固定值的 N 角星形呢?若不是，那有什麼規律?
(四).N 角星形的度數是否一定如坊間參考書所說的 $(N-4)\times180°$ 呢?若不是,那又需附帶何種條件呢?
(五).為什麼芒邊延長線成一直線且“跳 1 點”的 N 角星形，都適用 $(N-4)\times180°$ 的公式呢?
(六).N 角星形內的『P 葉槽楓葉型』中,葉槽(凹角)個數與 N 角星形的角度總和有何關係?

(七).在『P 葉槽楓葉型』的 N 角星形中,其葉槽(凹角)個數與角星形中“跳點數”有何關係？又為什麼呢？
(八).“跳 k 點”的 N 角星形與 N 角星形的角度總和有何關係呢？
(九).芒邊延長線成一直線,但“跳點數”不盡相同的 N 角星形是否仍具有角度總和公式？又為什麼呢？芒邊延長線成一直線,但“跳點數”不盡相同的 N 角星形是否仍具有角度總和公式？這又為什麼呢？

肆、研究的器材:直尺、圓規、量角器、GSP繪圖軟體

伍、解釋名詞:



(一).角星形：

凡是以多邊形邊為底所作的各個三角形與底多邊形所成的圖形,就稱為「角星形」。(如右圖),其中

(1).底邊的對角暫稱為「芒星角」

(2).芒星角的頂點暫稱為「芒星點」

(3).底邊以外的邊稱為「芒邊」

(二).N角星形：凡是由N個芒星角與底多邊形所組成的角星形即稱為N角星形。(如右上圖為4角星形)

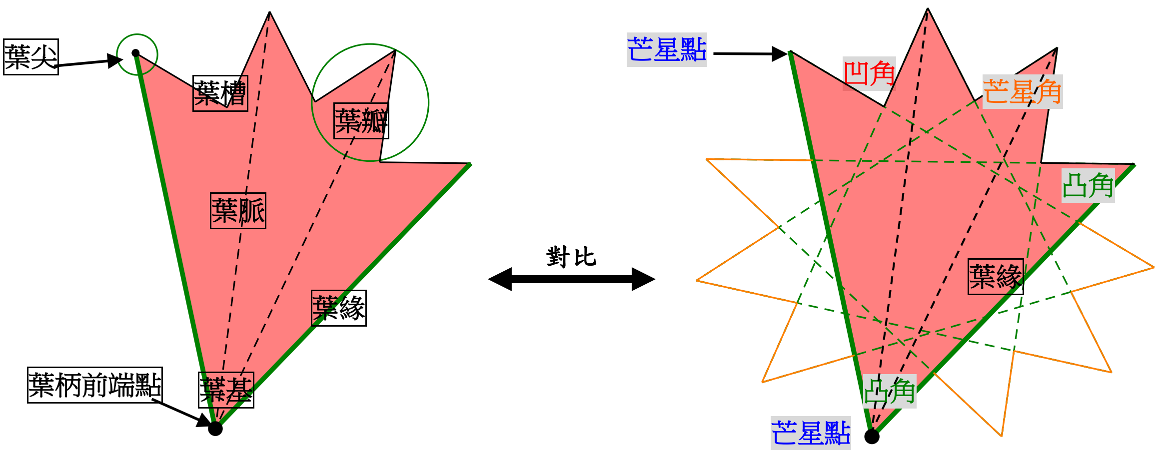
(三).楓葉型：(如下2圖)因圖形形似楓葉而稱之『楓葉型』。

也因楓葉圖狀與N角星形圖狀具有密不可分的關係,而將兩者對比,可得

(1).楓葉型的“葉槽”即為N角星形的凹角

(2).楓葉型的“葉基與葉瓣”即為N角星形的凸角(芒星角)

(3).楓葉型的“葉柄前端點”與“葉尖”是N角星形的凸角頂點,也就是N角星形的芒星點。



陸、預備知識:

1. N邊形內角度數總和$=(N-2)\times 180^\circ$　2. N邊形對角線數$=\dfrac{N\times(N-3)}{2}$

3. N邊形外角度數總和$=360^\circ$

柒、預備定理:

(一).蝴蝶定理(暫稱):(如右圖五.1)

[已知]: $\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於O

[求証]: $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

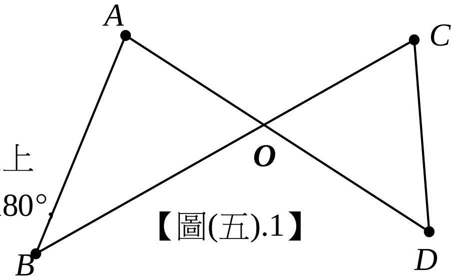
[証明]:因為A,O,D在一條直線上,B,O,C也在一條直線上

所以$\angle AOB+\angle BOD=180°,\angle COD+\angle BOD=180°$,

因此$\angle AOB=\angle COD$

所以$\angle AOB+\angle A+\angle B=180°=\angle COD+\angle C+\angle D$

故$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$



【圖(五).1】

(二).鏢型定理:(暫稱) (如右圖五.2)

[已知]:一凹四邊形$EFIG$

[求証]: $\angle FIG=\angle E+\angle F+\angle G$

[証明]: 連E,I ;則∠❸+∠❼+∠❺=180°=∠❶+∠❺

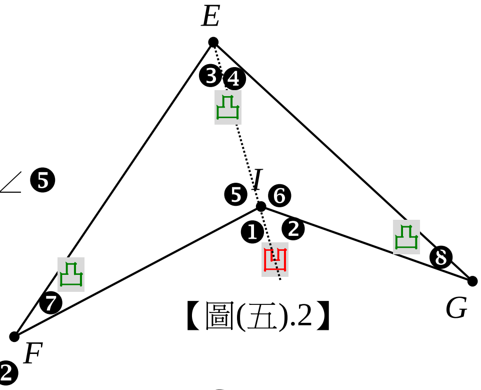
∠❹+∠❻+∠❽=180°=∠❷+∠❻

故 ∠❸+∠❼+∠❺+∠❹+∠❻+∠❽

=∠❶+∠❷+∠❺+∠❻

所以(∠❸+∠❹)+∠❼+∠❽=∠❶+∠❷

故 $\angle FIG=\angle FEG+\angle F+\angle G$



【圖(五).2】

(三).楓葉型定理:(暫稱) (如右圖五.3)

引用[鏢型定理]得: $\angle 1=\angle A+\angle 6+\angle AOB$,

$\angle 2=\angle 7+\angle 8+\angle COB$

$\angle 3=\angle 9+\angle 10+\angle COD$

$\angle 4=\angle 11+\angle 12+\angle DOE$

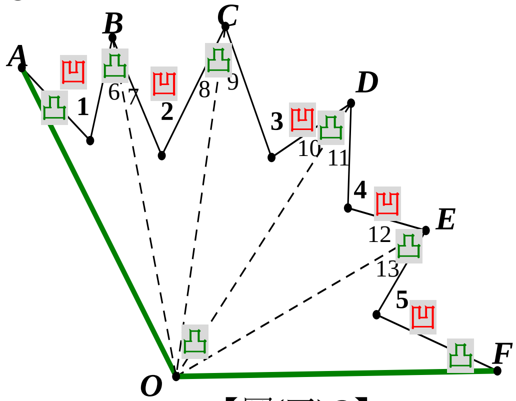
$\angle 5=\angle F+\angle 13+\angle EOF$

故$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=\angle A+(\angle 6+\angle 7)+(\angle 8+\angle 9)+(\angle 10+\angle 11)+(\angle 12+\angle 13)$

$+(\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOF)+\angle F$

$=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle AOF$

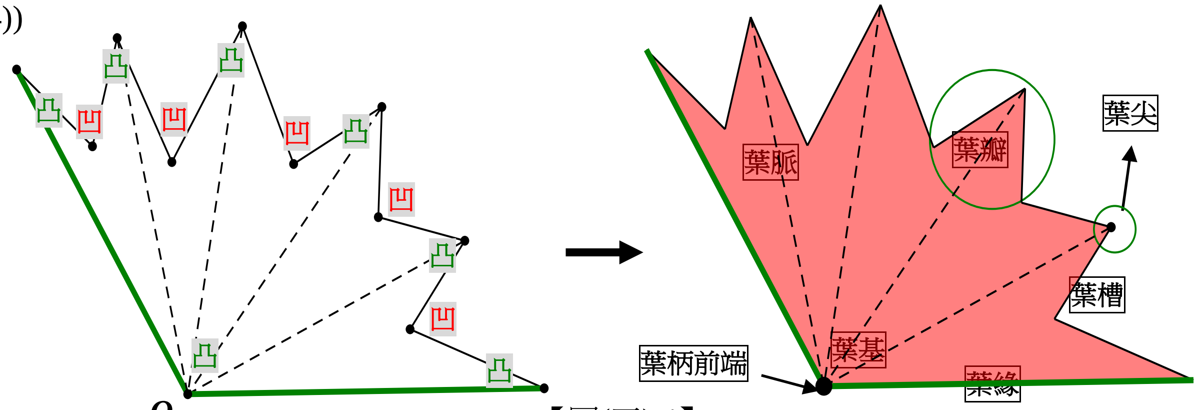


【圖(五).3】

【推廣】:楓葉型圖形中,凹角(葉槽)度數總和=凸角(「葉基」與「葉瓣」)度數總和

因而,往後對每一種楓葉型我們依其葉槽數量P個,而暫命名為『P葉槽楓葉型』。其中楓葉型葉槽個數=楓葉型凹角個數。顯而易見楓葉型葉槽數=楓葉型凸角個數-2;

所以楓葉型葉槽數$=N$角星形中 “芒星點個數”$-2=N$角星形中 “芒星角數”-2 。(如(圖五.4))

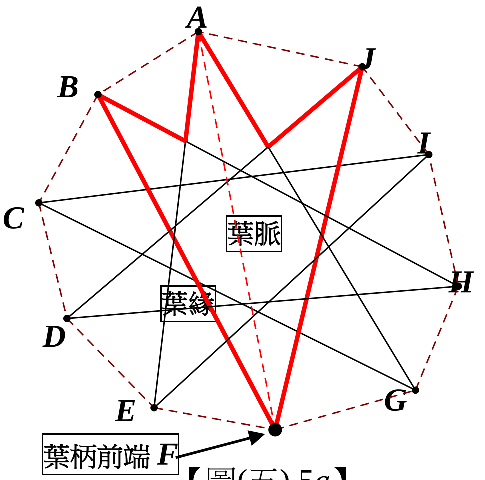


【圖(五).4】

【結論】:

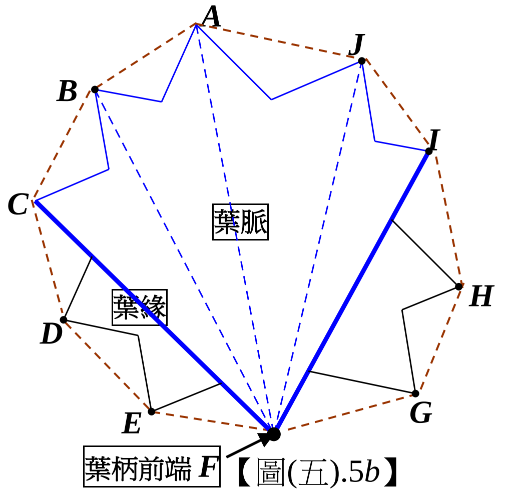
1. 『P葉槽楓葉型』中，葉基與葉瓣(凸角)個數 = 葉槽(凹角)個數+2 = P+2。
2. 『P 葉槽楓葉型』中， P 個葉槽(凹角)度數總和= (P+2)個凸角(葉基與葉瓣)度數和
3. 每一『P 葉槽楓葉型』中，葉柄前端也為 N 角星形中的“1 個芒星點”，而葉緣就是相鄰芒星點兩兩相連所成外 N 多邊形其中的 1 條對角線。
   (就以“10 角星形”為例,如下(圖五.5*a*) (圖五.5*b*) (圖五.5*c*)
4. **※每一『P 葉槽楓葉型』(含鏢型)兩葉緣之間的圖狀排列為「葉尖、葉槽、葉尖、葉槽、……、葉尖、葉槽、葉尖」，也就是兩葉緣之間的圖狀排列為「凸角、凹角、凸角、凹角、……、凸角、凹角、凸角」。**
5. N 角星形就是由 N 個『P 葉槽楓葉型』所組合而成的。其原因是:
   因為每“1 芒星點”都可為『P 葉槽楓葉型』的葉柄前端點,所以可作得 N 個『P 葉槽楓葉型』而組成 N 角星形。例如:(如圖五.6) 10 角星形是由 10 個『4 葉槽楓葉型』所組合而成的(葉柄前端點分別為黃、綠、紅、橘、紫、深藍、灰、淺藍、粉紅、棕色等 10 個粗點)。

【2 葉槽楓葉型的 10 角星形】



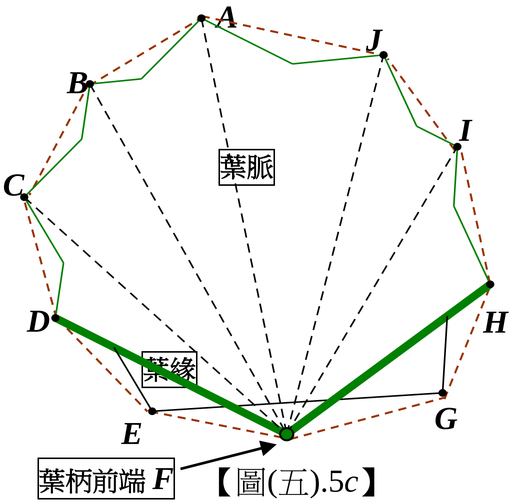
【圖(五).5*a*】

【4 葉槽楓葉型的 10 角星形】

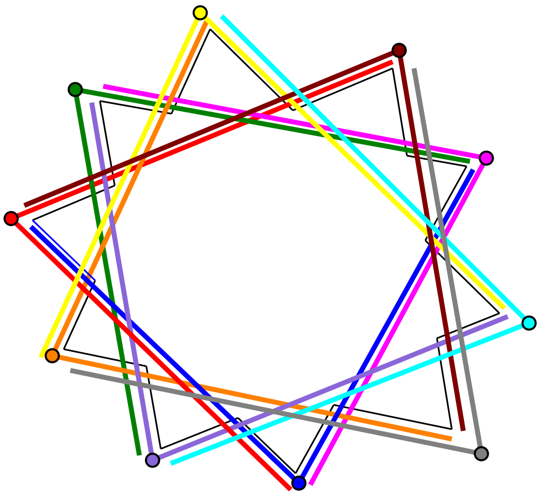


【圖(五).5*b*】

【6 葉槽楓葉型 10 角星形】



【圖(五).5*c*】



【圖(五).6】

捌、研究方法與過程:

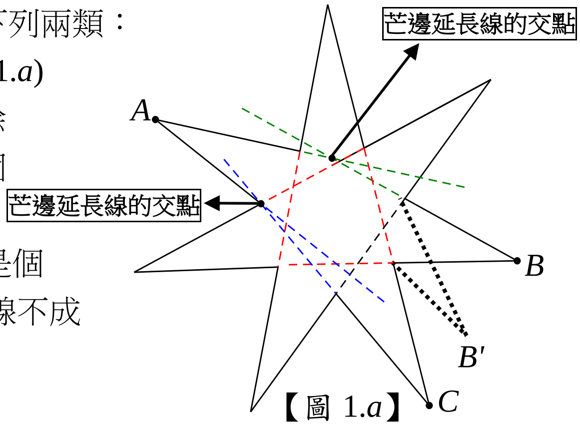
【問題一】: N 角星形的圖形可分為那幾類呢？又何類 N 角星形的度數和才會有固定值？

【過程一】:

在所有 N 角星形圖形中，若依照 N 角星形芒邊的延長線是否會與其餘芒邊的的延長線形成一直線的關係，而可分為下列兩類：

a、芒邊延長線不成一直線：(如右圖 1.a)

在此類中，因為芒邊延長線與其餘芒邊延長線不成一直線，所以每個芒星角可大可小(如$\angle B \neq \angle B'$)。故此類的 N 個芒星角角度總和會是個不定值，因此對於此類(芒邊延長線不成一直線者)情形，我們不作討論。



【圖 1.a】

b、芒邊延長線成一直線:

又可依芒邊延長線成一直線(為外 N 邊形對角線)一側的較少"芒星點"個數(我們稱為"跳芒星點數",簡稱"跳點數")相同與否,分成:

(i). 芒邊延長線會成一直線,且外側 "跳點數"相同:

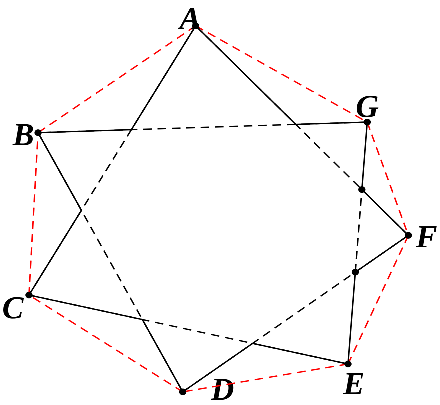
在此類中，不但芒邊延長線會與其他芒邊延長線成一直線，且在此一直線外側"跳點數"也相同(指"跳點數"較少者),又將相鄰的"芒星點"兩兩相連會得 1 個(外)N 多邊形,而成一直線的芒邊延長線也為外 N 多邊形其中的 1 條對角線。

而在此類的 7 角星形中,至少計有兩種。其差異是在芒邊延長線的一直線中,外側"跳點數"的不同。

[註]:本文"跳點數"是取外 N 邊形對角線所分成兩側的"芒星點數較少者"。

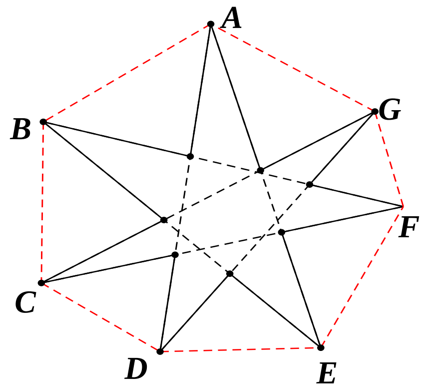
(如[圖 1b.1]為"跳 1 點"的 7 角星形而[圖 1b.2]為"跳 2 點" 的 7 角星形)

【"跳 1 芒星點"的 7 角星形】



【圖 1b.1】

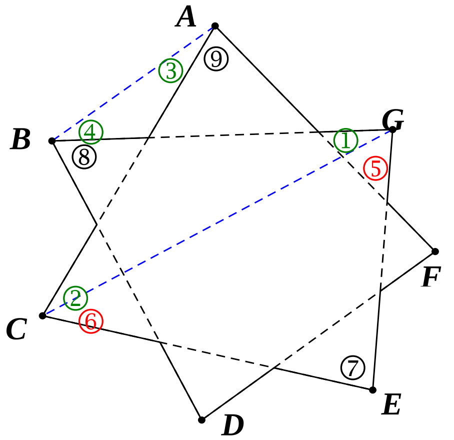
【"跳 2 芒星點"的 7 角星形】

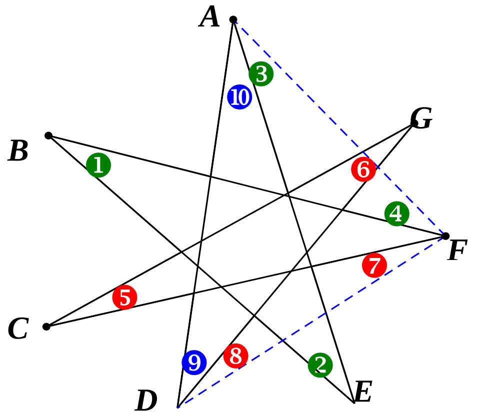


【圖 1b.2】

我們利用【蝴蝶定理】,將"跳 1 點"的 7 角星形,分成 1 個三角形與 1 個四邊形,所以"跳 1 點"的 7 角星形度數總和=540 度。而將"跳 2 點"的 7 角星形,補成 1 個三角形,所以"跳 2 點"的 7 角星形度數總和=180 度。(如下 2 圖)

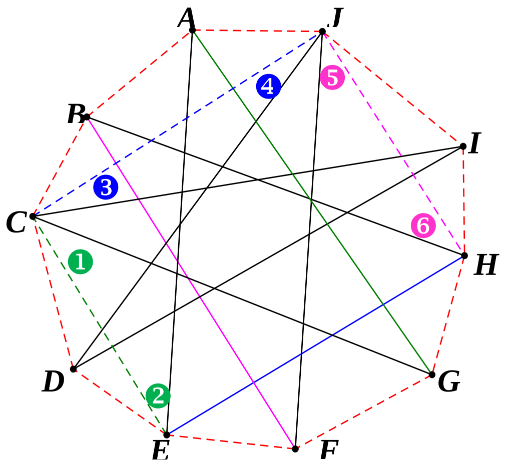
【"跳 1 芒星點"的 7 角星形】 **【"跳 2 芒星點"的 7 角星形】**





(ii).芒邊延長線成一直線,但"跳點數"不盡相同:

在此類中，芒邊延長線仍會與其他芒邊延長線成一直線，但每 1 直線外側,"跳點數"不盡相同,此時,將相鄰"芒星點"兩兩相連也會得 1 個外 N 邊形,且成一直線的芒邊延長線也為外 N 邊形其中的 1 條對角線。(如下圖)而此類的 N 角星形中,我們還是可以使用【蝴蝶定理】切補成數個或 1 個多邊形,進而找到角度總和為一固定值。



【"跳不同個數的芒星點"】

因為 $\angle$❶ + $\angle$❷ = $\angle A+\angle G$

$\angle$❸ + $\angle$❹ = $\angle D+\angle I$

$\angle$❺ + $\angle$❻ = $\angle B+\angle F$

所以合併成四邊形 $CEHJ$

故合計為 360°

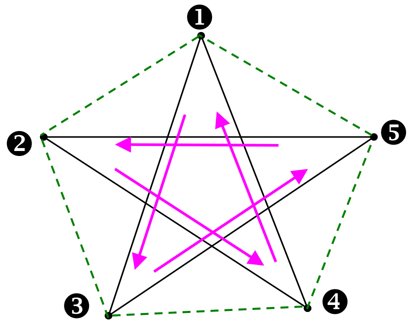
這不也說明了坊間所述的 N 角星形的角度公式 $(N-4)\times180^\circ=(7-4)\times180^\circ=540^\circ$ 只是其中的一種。而中間為七邊形的 7 角星形的度數和也不一定為 180°。但是否還有其他更簡易的方法呢？我們留待後面討論。

因此,我們猜想:只要芒邊的延長線會成一直線的 N 角星形,則不論"跳點數"是否相同,它都可以用【蝴蝶定理】切補成 1 個或數個多邊形,而推出各種 N 角星形的角度總和。只不過單就 7 角星形的切補就讓我絞盡腦汁、氣喘如牛了！更何況還有比 7 角星形更多芒星角的 N 角星形 $(N>7)$ 呢！

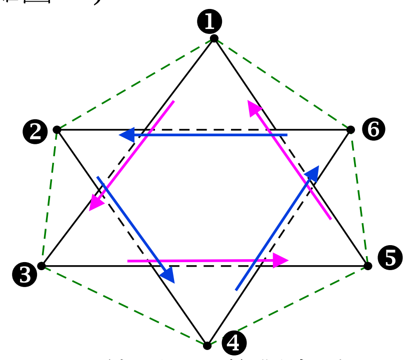
【問題二】: 芒邊的延長線成一直線且"跳點數"相同的 N 角星形圖形是怎麼得來的？它又與相鄰的"芒星點"兩兩相連所成的外 N 多邊形具有何種關係？又凡具有此種關係的是否都能"1 筆劃"畫出"較完美"(較對稱)的 N 角星形？

【過程一】: 在日常生活中,我們總可不經意隨手"1 筆劃"畫出 1 個"較完美"(較對稱)的 5 角星形(如圖 2a)。如果我們將 5 角星形的相鄰"芒星點"兩兩相連,會發現:『5 角星形

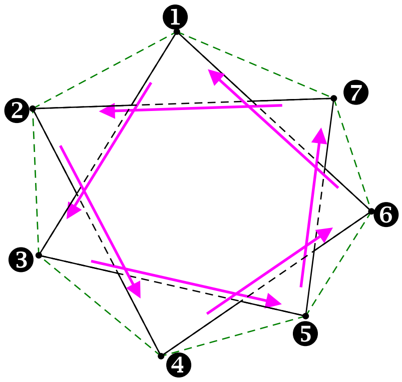
芒邊的延長線,恰為相鄰“芒星點”兩兩相連所成外五邊形的 5 條對角線』。我們繼續操作了 6 角星形(如圖 2*b*)與 7 角星形(如圖 2*c*)(如圖 2*d*)



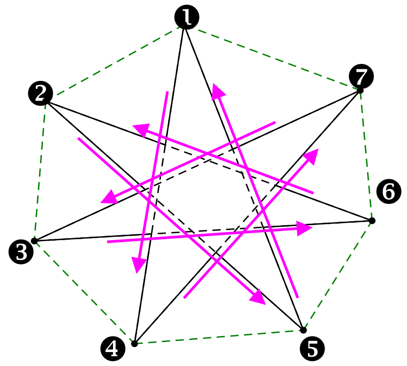
(使用了 5 條對角線)
【圖 2*a*】



(使用了 6 條對角線)
【圖 2*b*】



【跳 1 芒星點】
(使用了 7 條對角線)
【圖 2*c*】



【跳 2 芒星點】
(使用了 7 條對角線)
【圖 2*d*】

結果繪製成表後發現:

1.『*N* 角星形芒邊延長線會成一直線的圖形,皆為 *N* 角星形相鄰“芒星點”兩兩相連所成的“外 *N* 邊形”中的 1 條對角線』。
2.“外 *N* 邊形”對角線的 2 端點就是 *N* 角星形的 2 個“芒星點”。
3.每一 *N* 角星形是由“外 *N* 邊形”的 *N* 條“跳點數”相同的對角線所組成的。

但為什麼 6 角星形無法“1 筆劃”,而 5、7 角星形都可“1 筆劃”呢？又為何 5、6 角星形圖形都只有一種,而 7 角星形圖形卻至少有 2 種？(如上 4 圖)

【過程二】:

如果想要“1 筆劃”完成 1 個圖形,那就需從同 1 個點出發，再從同 1 個點結束。而 *N* 角星形圖形的結構來自於“外 *N* 邊形”中“跳點數”相同的對角線所圍成的,所以我們將 *N* 角星形的各“芒星點”標上數碼 1,2,3…;而將相同“跳點數”依次遞增操作,若可回至出發點(1 號)的位置,又每 1 數碼皆出現 1 次，那就代表它可以“1 筆劃”完成 1 個“較完美” (較對稱)的星角圖形。例如:

(*i*).5 角星形 5 芒星點分別標示編號 1,2,3,4,5。而“跳 1 點”的流程: $1\rightarrow3\rightarrow5\rightarrow7$(視為編號2) $\rightarrow9$(視為編號4) $\rightarrow11$(視為編號1) 所以可以“1 筆畫”完成 1 個 5 角星形圖

(*ii*).6 角星形 6 芒星點分別標示編號 1,2,3,4,5,6。而“跳 1 點”的流程:
$1 \to 3 \to 5 \to 7(1)$ 。雖然已回至出發點(1 號)的位置。但還未經過 2,4,6,因此無法以“1 筆劃”完成 1 個 6 角星形圖。

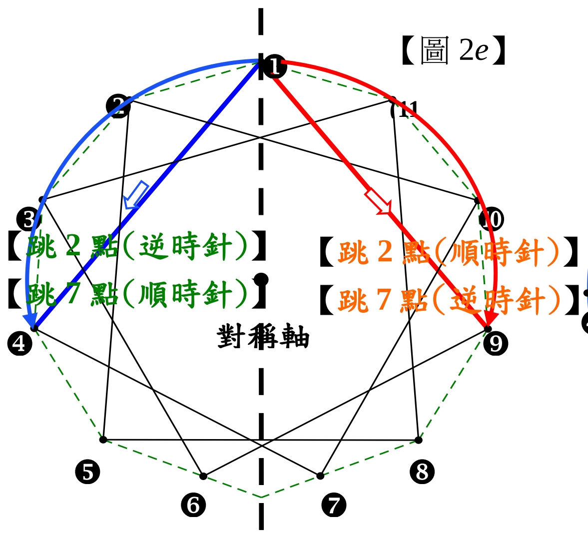
(*iii*).7 角星形 7 芒星點分別標示編號 1,2,3,4,5,6,7。而“跳 1 點”的流程:
$1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9(2) \to 11(4) \to 13(6) \to 15(1)$ 。
所以可以“1 筆劃”完成 1 個“跳 1 點”的 7 角星形圖。

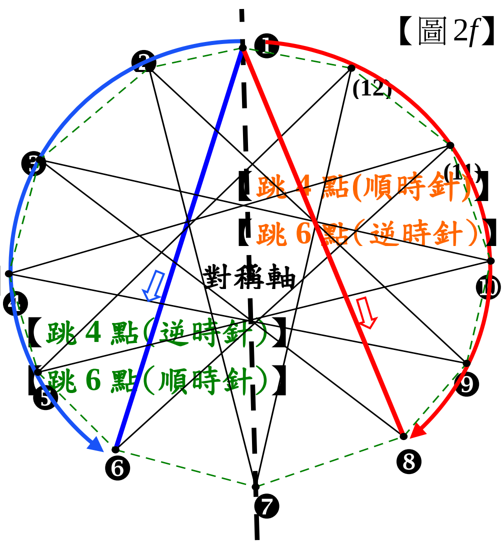
(*iv*).7 角星形 7 芒星點分別標示編號 1,2,3,4,5,6,7。而“跳 2 點”的流程:
$1 \to 4 \to 7 \to 10(3) \to 13(6) \to 16(2) \to 19(5) \to 22(1)$ 。
所以也可以“1 筆畫”完成 1 個“跳 2 點”的 7 角星形圖。

再觀察上述所有的流程,發現:“跳點數”相同的 *N* 角星形圖形,有如 1 種等差數列,只要其“公差(亦即“跳點數+1”)”與 *N* 互質,就可以“1 筆劃”完成 1 個“跳點數”相同的“較完美” *N* 角星形圖形。例如:

11 角星形	小於 **11** 且與 **11** 互質之數									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
跳點數	**0**	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
可一筆畫	╳	○	○	○	○	○	○	○	○	╳
註: 1.同顏色為“順逆圖形” (視為同一種圖形) (如圖 2*e*) **2.「╳」為 11 邊形而非 11 角星形**										

12 角星形	小於 **12** 且與 **12** 互質之數			
	1	5	7	11
跳點數	**0**	**4**	**6**	**10**
可一筆畫	╳	○	○	╳
註: 1.同顏色為“順逆圖形” (視為同一種圖形) (如圖 2*f*) **2.「╳」為 12 邊形而非 12 角星形** **3. 「跳 4 點」**。(即是國旗國徽 12 角星形能“1 筆畫”完成畫法的理由)				





因此在 N 角星形中,「跳 k 點」與「跳 $(N-k-2)$ 點」是互為「對稱的順逆圖形」。

【問題三】: 1 種外 N 邊形中，是不是只能畫出 1 種角度有固定值的 N 角星形呢？若不是，那又有什麼規律呢？

【過程一】:

觀察【問題二】的 4 個圖(圖 2.*a*~2.*d*)，發現了:

1.「5 邊形的 5 條對角線恰可得到一個 5 角星形，6 邊形的 9 條對角線只產生 1 個 6 角星形，而 7 邊形的 14 條對角線可得到 2 個不同型式的 7 角星形」。
2.『*N* 角星形芒邊的延長線,皆為外 *N* 邊形中,“跳點數”相同所連成的對角線』。
3.*N* 角星形芒邊的延長線的 2 端點就是 *N* 角星形的 2 芒星點。
4.每種不同型式 *N* 角星形都會使用外 *N* 邊形中的 *N* 條對角線。

所以 1 個外 N 邊形可否造成多種不同型式的 N 角星形是受限於外 N 邊形對角線總數的多少。

【過程二】: 參照【過程一】的結論以及【問題二】圖形，我們作了實際操作，整理而得到下表：

***N* 邊形**	**對角線總數** $\frac{N(N-3)}{2}$	不同形狀的 *N* 角星形種類數	***N* 角星形“跳同芒星點數”**	**剩餘的對角線數**
3	0	[0/3]=0		0
4	2	[2/4]=0		2
5	5	[5/5]=1	跳 1	0
6	9	[9/6]=1	跳 1	3
7	14	[14/7]=2	跳 1，跳 2	0
8	20	[20/8]=2	跳 1，跳 2	4
9	27	[27/9]=3	跳 1，跳 2，跳 3	0
10	35	[35/10]=3	跳 1，跳 2，跳 3	5
11	44	[44/11]=4	跳 1，跳 2，跳 3，跳 4	0
12	54	[54/12]=4	跳 1，跳 2，跳 3，跳 4	6
13	65	[65/13]=5	跳 1，跳 2，跳 3，跳 4，跳 5	0
14	77	[77/14]=5	跳 1，跳 2，跳 3，跳 4，跳 5	7
……	……	……	……	……
k	*k*(*k*-3)／2	[(*k*-3)／2]	……	0 或 *k*/2
……	……	……	……	……
N	*N*(*N*-3)／2	[(*N*-3)／2]	……	0 或 *N*/2

註：因為 N 邊形的對角線數 $=\dfrac{N\times(N-3)}{2}$;所以 N 角星形種類

$$=[\frac{N\text{邊形的對角線數}}{N}]=[\frac{\frac{N(N-3)}{2}}{N}]=[\frac{N(N-3)}{2}\div N]=[\frac{N-3}{2}]$$

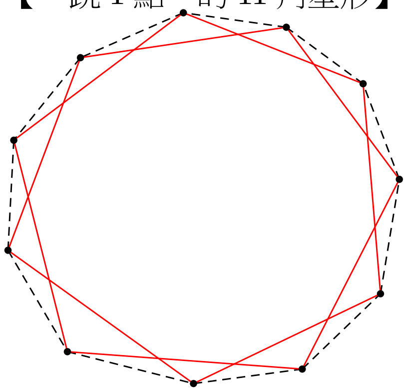
故(i)、若 N 為奇數時，則形成 N 角星形的種類有$[\frac{N-3}{2}]$

(ii)、若 N 為偶數時，則形成 N 角星形的種類有$[\frac{N-3}{2}]$，且剩餘的對角線數為 $\frac{N}{2}$

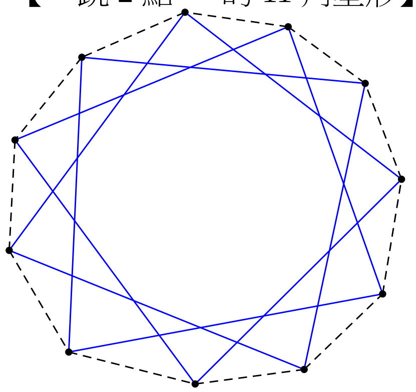
(iii)、N 角星形中，若$[\frac{N-3}{2}]=k$時；其型式就有跳 1 角、跳 2 角…………跳 k 角等 k 種 N 角星形。

＜例如＞：在 11 邊形中，可有紅、藍、綠、黃等四種($[\frac{11-3}{2}]=4$)角度呈固定值但型式不同的 11 角星形(如下 4 圖)。

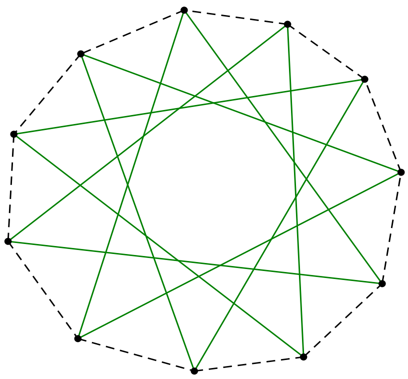
【“跳 1 點”的 11 角星形】



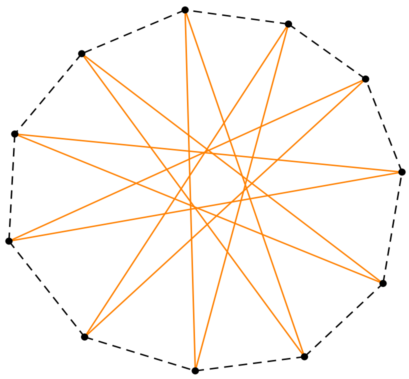
【“跳 2 點” 的 11 角星形】



【“跳 3 點” 的 11 角星形】



【“跳 4 點” 的 11 角星形】

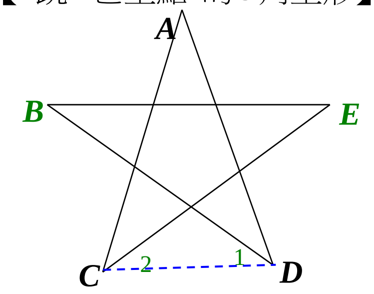


【問題四】:N 角星形的度數是否一定如坊間參考書所說的$(N-4)\times180°$呢？若不是,那又需附帶何種條件呢？

【過程一】:

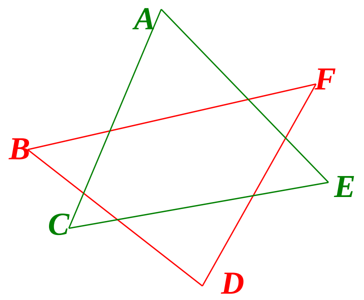
從【問題一】的討論中,知:單就 7 角星形,它有 2 種分別為 180 度與 540 度等 2 種型式的 7 角星形,所以 N 角星形的度數不一定會等於坊間參考書所說的$(N-4)\times180°$。但各種 N 角星形的度數中,是否有某種型式的 N 角星形的度數都適合$(N-4)\times180°$？為此,我們以“跳點數”的多寡作為分類,並針對“跳 1 點”的 5 角到 10 角等六種角星形,作了以下的操作,並以【蝴蝶定理】加以說明。如下六圖

【“跳 1 芒星點”的 5 角星形】



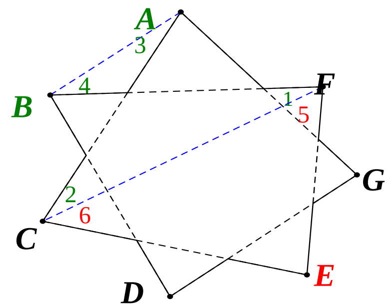
※形成 1 三角形符合 $(5-4)\times 180°=180°$

【“跳 1 芒星點”的 6 角星形】



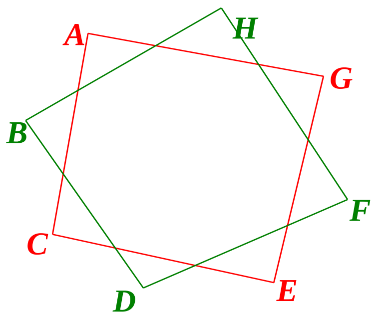
※為 2 個三角形的結合 符合 $(6-4)\times 180°=360°$

【“跳 1 芒星點”的 7 角星形】



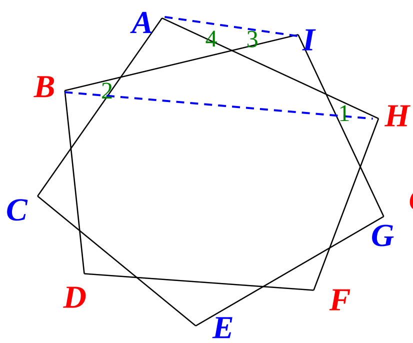
※形成 1 四邊形 1 三角形 符合 $(7-4)\times 180°=540°$

【“跳 1 芒星點”的 8 角星形】



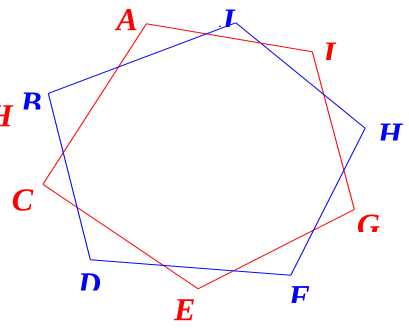
※為 2 個四邊形的結合 符合 $(8-4)\times 180°=720°$

【“跳 1 芒星點”的 9 角星形】



※形成 1 四邊形 1 五邊形 符合 $(9-4)\times 180°=900°$

【“跳 1 芒星點”的 10 角星形】



※為 2 個五邊形的結合 符合 $(10-4)\times 180°=1080°$

結果發現:坊間參考書所說的 N 角星形的度數=$(N-4)\times 180°$，似乎只適用於“跳 1 點”N 角星形。

【問題五】: 為什麼“跳 1 點”的 N 角星形，只適用 $(N-4)\times 180°$ 的公式呢？

【過程一】:

所謂“跳 1 點”的 N 角星形，是由外 N 邊形所有對角線外側“跳 1 點”的所圍成的 N 角星形。而此每一條對角線只會與“跳 1 點”的“跳點”所作的左右兩條對角線相交於兩點(如下圖“跳點(A_9)”所作的對角線($\overline{A_2A_9}$)與對角線($\overline{A_7A_9}$)分別交對角線 $\overline{A_1A_8}$ 於 A_1' 與 A_9';又因為外 N 邊形的每 1 條對角線為 2“芒星點”所共用，所以在 N 角星形的內部恰好會產生一個有同邊數的內 N 邊形。而此內 N 邊形的外角和又剛好等於外 N 邊形中扣除掉 N 角星形的其餘角度的度數和。＜例如＞:

在外 9 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ 中，$A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'A_7'A_8'A_9'$ 為內 9 邊形，

因為

$\angle$❶$+\angle$①$=\angle$❷$+\angle$②$=\angle$❸$+\angle$③$=\angle$❹$+\angle$④$=\angle$❺$+\angle$⑤$=\angle$❻$+\angle$⑥

$=\angle$❼$+\angle$⑦$=\angle$❽$+\angle$⑧$=\angle$❾$+\angle$⑨$=180°$

所以 $\angle$❶$+\angle$①$+\angle$❷$+\angle$②$+\angle$❸$+\angle$③$+\angle$❹$+\angle$④$+\angle$❺$+\angle$⑤$+\angle$❻$+\angle$⑥

$+\angle$❼$+\angle$⑦$+\angle$❽$+\angle$⑧$+\angle$❾$+\angle$⑨$=180°\times 9=1620°$ …………(1)

又因為 $\angle$①$+\angle$②$+\angle$③$+\angle$④$+\angle$⑤$+\angle$⑥$+\angle$⑦$+\angle$⑧$+\angle$⑨

$=(9-2)\times 180°=1260°$ …………(2)

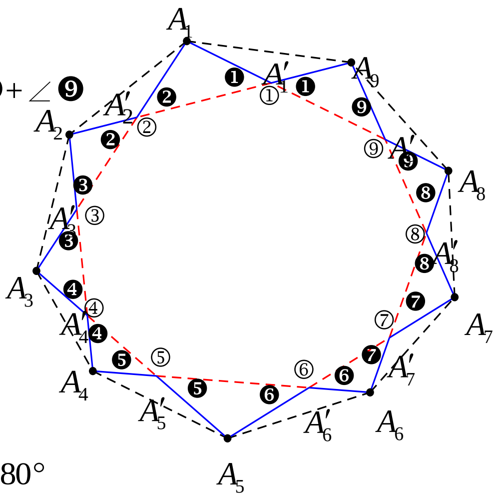
(1) − (2) 得

$\angle❶+\angle❷+\angle❸+\angle❹+\angle❺+\angle❻+\angle❼+\angle❽+\angle❾$

$=360°=2\times180°$

(至此也得內 N 邊形外角和=360º)

故"跳 1 芒星點"的 N 角星形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$



度數和=9個三角形度數和−

$2\times(\angle❶+\angle❷+\angle❸+\angle❹+$

$\angle❺+\angle❻+\angle❼+\angle❽+\angle❾)$

$9\times180°-2\times2\times180°=(9-2\times2)\times180°=(9-4)\times180°$

同樣的道理,推廣至

"跳 1 點"的 N 角星形 $A_1A_2A_3A_4\cdots\cdots A_n$ 度數和= $N\times180°-2\times2\times180°$

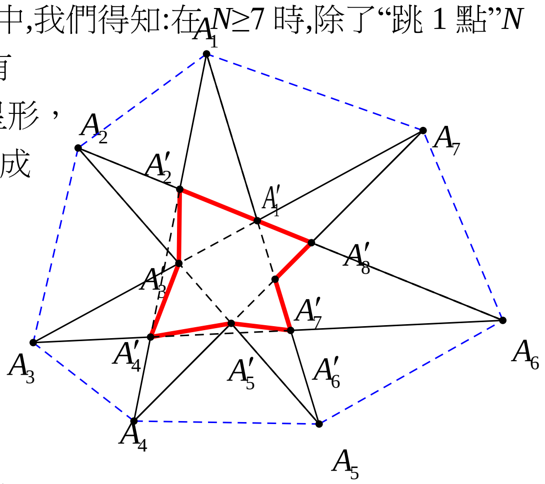
$=(N-4)\times180°$

因此"跳 1 點"的 N 角星形，只適用坊間所說的 $\mathbf{(N-4)\times180°}$ 的星形角度公式。

【問題六】: N 角星形內的『P 葉槽楓葉型』中,其葉槽(凹角)個數與 N 角星形的角度總和有何關係？

【過程一】: 在証得:『"跳 1 點"的 N 角星形，都適用坊間所說的 $\mathbf{(N-4)\times180°}$ 的星形角度公式』後,原本想一鼓作氣,繼續証出:"跳 k 點"N 角星形的角度總和公式。

但在【問題一】【問題三】與【問題五】的討論中,我們得知:在 $N\geq7$ 時,除了"跳 1 點"N 角星形的度數和= $\mathbf{(N-4)\times180°}$ 之外，還可能有其他的度數,也由於在「非"跳 1 點"」的 N 角星形，是由外 N 邊形中「非"跳 1 點"」的對角線所圍成的，因此就有對角線上方的突出點不止一個的情形產生，所以向左或向右的對角線，就不止兩條，而每兩條對角線交點所形成的凹角



(如 $\angle A_2'A_3'A_4'$)可能在某條對角線之下,

造成凹角頂點所形成的多邊形為凹多邊形,
而不再具有外角和為 360 度的性質,因此,我們無法再使用【問題五】的証法,導出其他有固定值的 N 角星形度數(如右上圖, $A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'A_7'A_8'$ 為內凹 7 邊形)。為此,我們不得不另起爐灶,重新出發尋找新方法。

【過程二】:

為了找出 N 角星形中 "非跳 1 點" 的角度和為固定值的 N 角星形度數度數公式。我們再次使用了【預備定理】中的【鏢型定理】【楓葉型定理】及【結論】。

嘗試証明出

『P 葉槽楓葉型』的 N 角星形中,其 N 角星形的角度總和

= 『P 葉槽楓葉型』中的葉槽(凹角)個數 $\times180°=P\times180°$

[說明]:首先，因為 N 角星形是由外 N 邊形中"跳同點數"的對角線所圍成的,也是由 N 個"P 葉槽數"的楓葉型所疊合組成的(見【預備定理】【結論 5】)。
又因為葉槽個數(P)= "芒星點" 個數 $-2=$ "芒星角" 個數 -2;所以『P葉槽楓葉型』中的 "芒星點" 個數 $=\mathrm{P}+2$,『P葉槽楓葉型』中的 "芒星角" 個數 $=\mathrm{P}+2$ 。

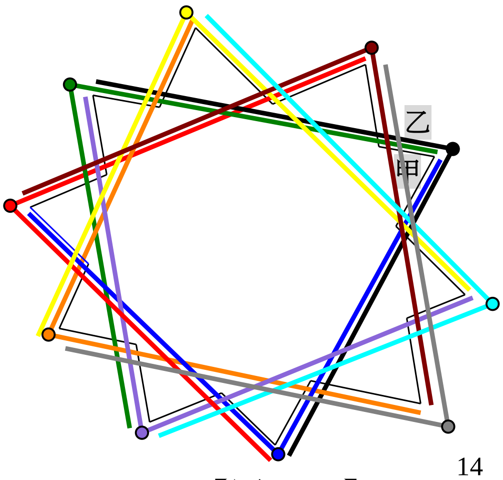
也因為在1個為『P葉槽楓葉型』圖狀的N角星形中,會有N個相同型式的『P葉槽楓葉型』出現,而總計出現了$(N\times P)$個葉槽,又『楓葉型』的葉槽就是N角星形中的凹角,所以N角星形中的每1個凹角也就重複P次。
同理:在此時『P葉槽楓葉型』中的凸角會重複$(P+2)$次,總計出現了$[N\times(P+2)]$個凸角,亦即N角星形中的每1個凸角重複$(P+2)$次。所以N角星形中的$[N\times(P+2)]$個凸角角度總和=N角星形中的$(N\times P)$個凹角角度總和。

如下左圖【圖(五).6】為『4葉槽楓葉型』,而其中的甲凸角就同時為10角星形中,葉柄前端點為**黑色**粗點、深藍色粗點、紫色粗點、橘色粗點、紅色粗點、綠色粗點等6個楓葉型的凸角。
而乙凹角也同時為10角星形中,葉柄前端點為深藍色粗點、紫色粗點、橘色粗點、紅色粗點等4個『4葉槽楓葉型』的凹角。
因此在『4 葉槽楓葉型』的 10 角星形中,**每一個凸角都會重覆 6 次,而每個凹角都會重覆 4 次**。所以 6 次的 10 個 N 角星形凸角度數總和=4 次的 10 個 N 角星形凹角度數總和。

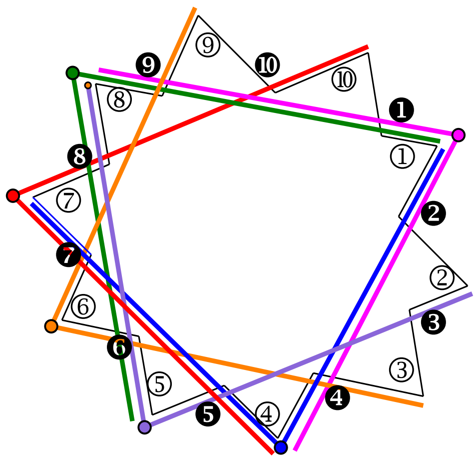
【証明】:(以 10 角星形為例)如下右圖(五).7

∠❶+∠❷+∠❸+∠❹=∠①+∠②+∠③+∠④+∠⑦+∠⑩
∠❷+∠❸+∠❹+∠❺=∠②+∠③+∠④+∠⑤+∠⑧+∠①
∠❸+∠❹+∠❺+∠❻=∠③+∠④+∠⑤+∠⑥+∠⑨+∠②
∠❹+∠❺+∠❻+∠❼=∠④+∠⑤+∠⑥+∠⑦+∠⑩+∠③
∠❺+∠❻+∠❼+∠❽=∠⑤+∠⑥+∠⑦+∠⑧+∠①+∠④
∠❻+∠❼+∠❽+∠❾=∠⑥+∠⑦+∠⑧+∠⑨+∠②+∠⑤
∠❼+∠❽+∠❾+∠❿=∠⑦+∠⑧+∠⑨+∠⑩+∠③+∠⑥
∠❽+∠❾+∠❿+∠❶=∠⑧+∠⑨+∠⑩+∠①+∠④+∠⑦
∠❾+∠❿+∠❶+∠❷=∠⑨+∠⑩+∠①+∠②+∠⑤+∠⑧
+) ∠❿+∠❶+∠❷+∠❸=∠⑩+∠①+∠②+∠③+∠⑥+∠⑨

4×(∠❶+∠❷+∠❸+∠❹+∠❺+∠❻+∠❼+∠❽+∠❾+∠❿)
=6×(∠①+∠②+∠③+∠④+∠⑤+∠⑥+∠⑦+∠⑧+∠⑨+∠⑩)



【圖(五).6】



【圖(五).7】

同理:我們推得:『P 葉槽楓葉型』的 N 角星形中,每一個凸角都會重覆(P+2)次,而每個凹角也會重覆 P 次。所以『P 葉槽楓葉型』的 N 角星形中,其(P+2)次的 N 個凸角度數總和=其 P 次的 N 個凹角度數總和。

又因為 N 角星形凸角度數總和即是 N 角星形度數總和。故

$$\frac{N\text{角星形中凹角度數總和}}{N\text{角星形中凸角度數總和}}=\frac{(P+2)\times N\text{角星形中凸角度數總和}}{P\times N\text{角星形中凸角度數總和}}=\frac{P+2}{P}$$ 。即

即『P 葉槽楓葉型』的 N 角星形中,凹角度數總和=$\frac{P+2}{P}\times N$ 角星形度數總和

且 N 角星形相鄰“芒星點”兩兩相連可生成 1 個外 N 多邊形及 N 個周邊三角形。

(如右圖以 9 角星形為例,形成外 9 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ 及周邊 $\Delta A_1A_2'A_2$ 、

$\Delta A_1A_2'A_2$ 、 $\Delta A_2A_3'A_3$ 、$\Delta A_3A_4'A_4$ 、 $\Delta A_4A_5'A_5$ 、$\Delta A_5A_6'A_6$ 、$\Delta A_6A_7'A_7$ 、$\Delta A_7A_8'A_8$ 、

$\Delta A_8A_9'A_9$ 、$\Delta A_9A_1'A_1$ 等 9 個三角形)而 N 個周邊三角形的度數總和

$-$ 外 N 多邊形的內角總和

$= N\text{角星形中所有凹角度數總和} - N\text{角星形中所有凸角度數總和}$

$= N\text{角星形中所有凹角度數總和} - N\text{角星形度數總和}$

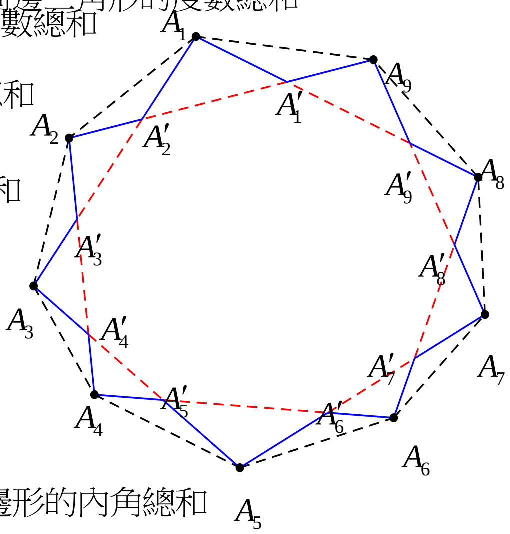
$=\frac{P+2}{P}\times N\text{角星形度數總和} - N\text{角星形度數總和}$

$=(1+\frac{2}{P})\times N\text{角星形度數總和} - N\text{角星形度數和}$

$= N\text{角星形度數總和}$

$+\frac{2}{P}\times N\text{角星形度數總和} - N\text{角星形度數總和}$

$=\frac{2}{P}\times N\text{角星形度數總和}$



所以 N 個周邊三角形的度數總和 $-$ 外 N 多邊形的內角總和
$= N\times180^\circ-(N-2)\times180^\circ = N\times180^\circ - N\times180^\circ + 360^\circ = 360^\circ$

故在『P 葉槽楓葉型』中的 N 角星形,一律可得: $\frac{2}{P}\times N\text{角星形度數總和}=360^\circ$

即在『P 葉槽楓葉型』中的 N 角星形中的

$$N\text{角星形度數總和}=360^\circ\div\frac{2}{P}=360^\circ\times\frac{P}{2}=P\times180^\circ$$

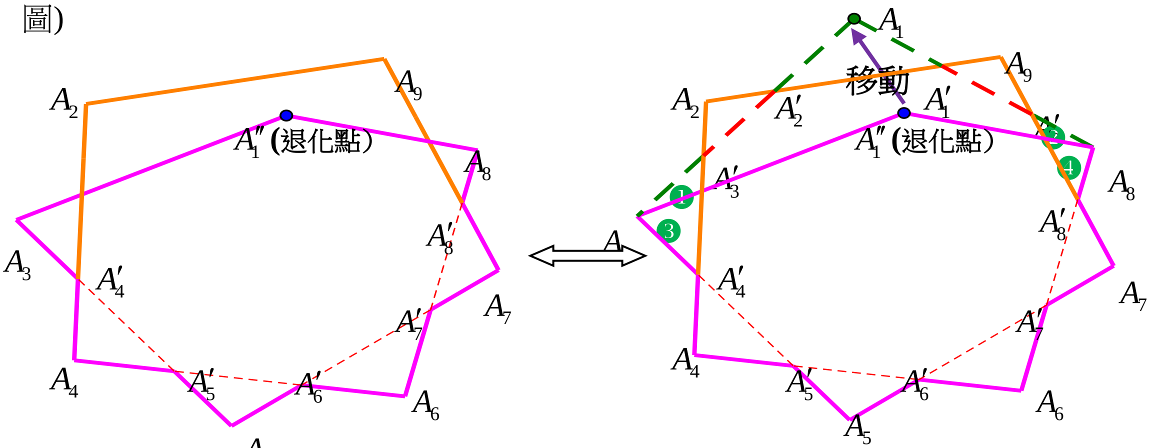
我們將『P 葉槽(凹角)楓葉型』與 N 角星形度數總和的關係整理成下表:

P 葉槽(凹角)楓葉型	**N 角星形角度總和**
1	180
2	360
3	540
4	720

5	900
……	……
P	180*P*

【結論】: 在 N 角星形的圖形中,可觀察每 1 芒星點是否為突出圖形外側的『P 葉槽楓葉型』的「**葉柄前端點**」且是否每 1『楓葉型』都為同一型式的『P 葉槽楓葉型』決定。若是,即可算得 N 角星形角度總和。

又若有『"退化式"角星形』(如芒星點 $A_1 \xrightarrow{\text{退化至}} A_1''$, 芒星點 $A_3 \xrightarrow{\text{退化至}} A_3''$)時,我們仍可將"退化點"移動至對角線之外,如還能符合各芒星點皆為「**葉柄前端點**」,那麼我們仍可利用 $P\times180°$ 的公式,推算出 "退化式"角星形的角度總和。(如下 4 圖)



如上 2 圖,左圖為『"退化式"角星形』,而右圖為『"移動後"角星形』,

依【鏢形定理】(【楓葉型定理】)可得 $\angle A_1''=\angle$❶$+\angle$❷$+\angle A_1$,

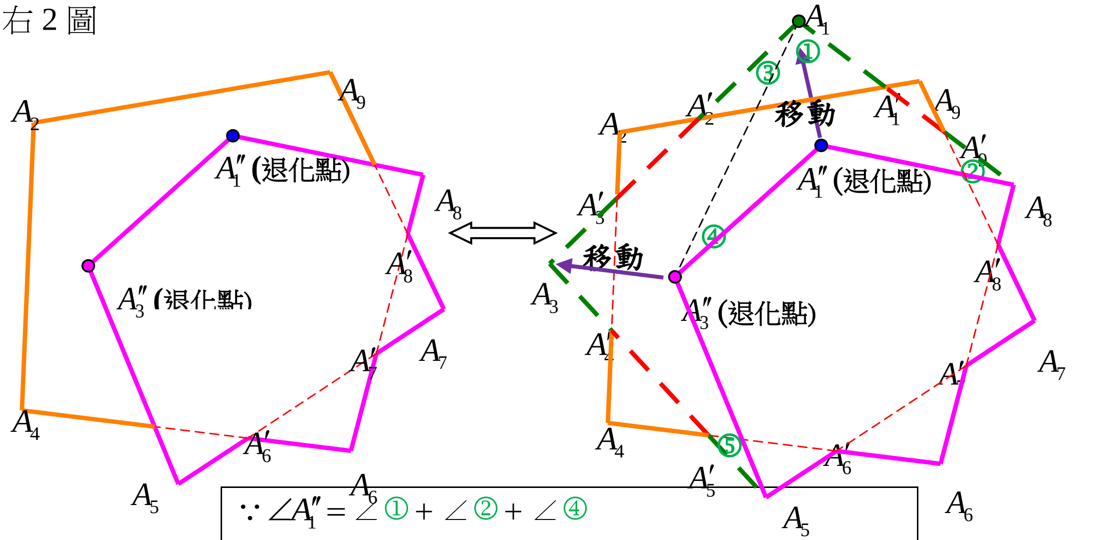
使得($\angle A_1''+\angle$❸$+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7+\angle$❹)$+(\angle A_9+\angle A_2)$

$=\angle A_1+(\angle$❶$+\angle$❸$)+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7+(\angle$❷$+\angle$❹$)+(\angle A_9+\angle A_2)$

$=\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3'A_3A_4'+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7+\angle A_8'A_8A_9'+\angle A_9$

而不影響其 N 角星形的度數總和,且為『5 葉槽楓葉型』,故星形角度總和 $900°$。

再如右 2 圖



$\because \angle A_1''=\angle$①$+\angle$②$+\angle$④

$\angle A_3''+\angle$④$=\angle$③$+\angle A_3+\angle$⑤

$\therefore \angle A_1''+\angle A_3''=\angle$①$+\angle$②$+\angle$③$+\angle$⑤$+\angle A_3$

故仍為『5 葉槽楓葉型』,星形角度總和 $900°$。

例 1：如下圖：為『1 葉槽楓葉型』的 7 角星形 *ABCDEFG* 中(【“跳 2 點”】)

【解法】:(如下左圖) 因為內角星形*CGD*與外角星形*ABCDEF*為單一複合星形，所以將*G*點移動至G_1點，可得“跳 2 點”的楓葉型而為『1 葉槽楓葉型』

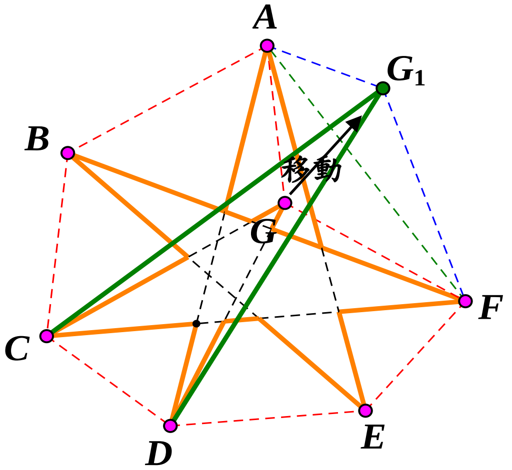
因此 P=1，故“跳 2 芒星點”的 7 角星形度數總和=1×180° =180°

例 2：如下圖：為『2 葉槽楓葉型』的 8 角星形 *ABCDEFGH* 中(【“跳 2 點”】)

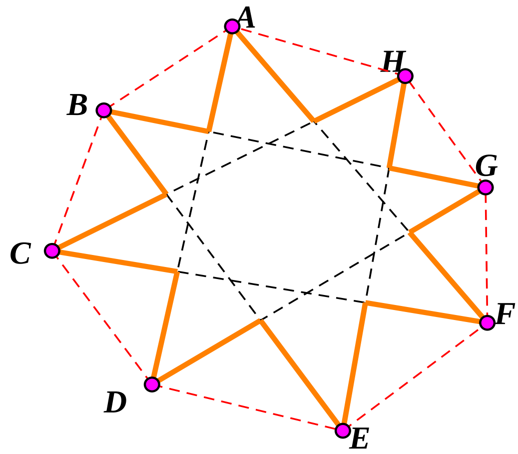
【解法】:(如下右圖) 因為在 8 角星形中“跳 2 點”的楓葉型為『2 葉槽楓葉型』

所以 P=2，故跳 2 星角點的 8 角星形度數總和=2×180° =360°

【1 葉槽楓葉型】



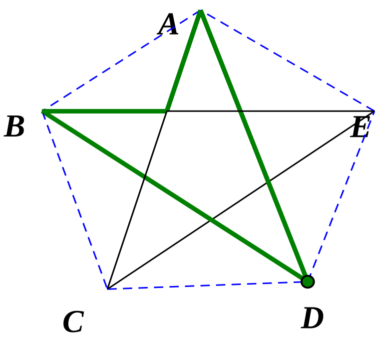
【2 葉槽楓葉型】



【問題七】: 在『*P* 葉槽楓葉型』的 *N* 角星形中,其葉槽個數與角星形中“跳點數”有何關係？又為什麼呢？

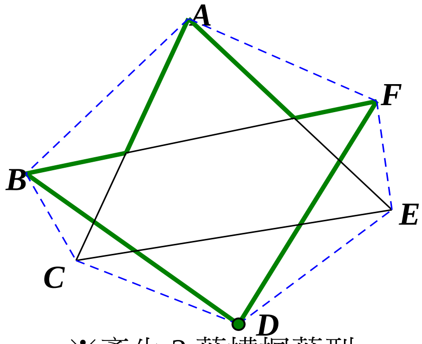
【過程一】: 觀察【問題四】的討論中，我們分別操作了“跳 1 點” “跳 2 點” “跳 3 點”等 *N* 角星形(如下各圖)

【“跳 1 點”的 5 角星形】



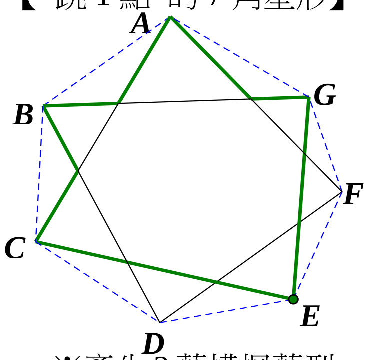
※產生 1 葉槽楓葉型

【“跳 1 點”的 6 角星形】



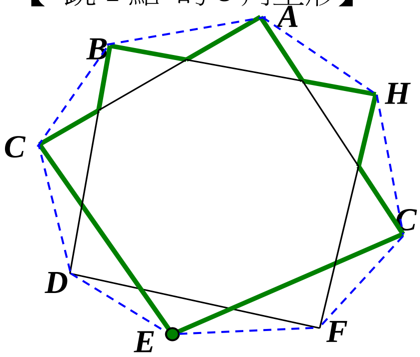
※產生 2 葉槽楓葉型

【“跳 1 點”的 7 角星形】



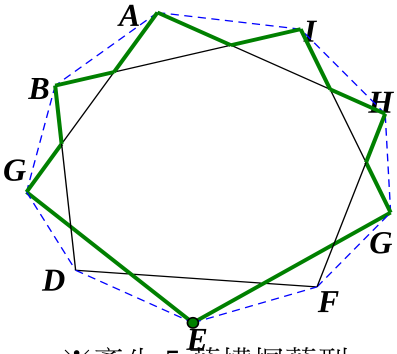
※產生 3 葉槽楓葉型

【“跳 1 點”的 8 角星形】



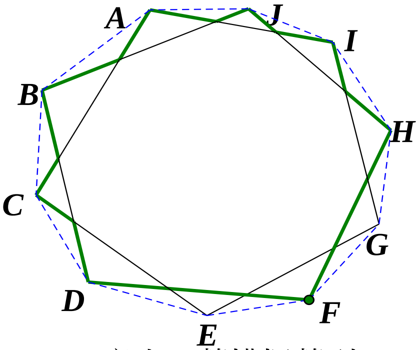
※產生 4 葉槽楓葉型

【“跳 1 點”的 9 角星形】



※產生 5 葉槽楓葉型

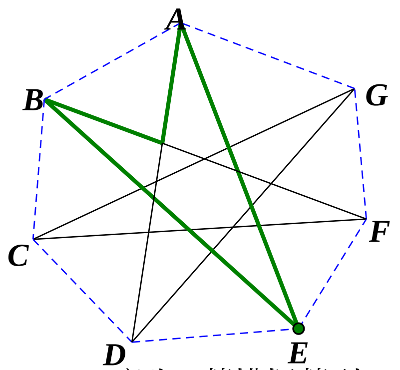
【“跳 1 點”的 10 角星形】



※產生 6 葉槽楓葉型

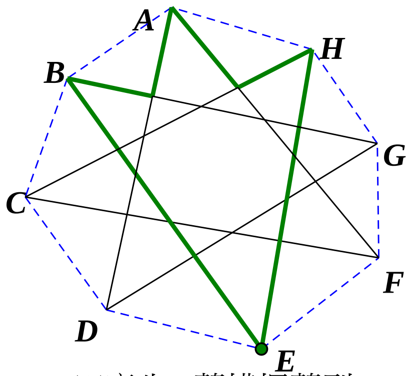
再操作多邊形中，“跳 2 芒星點”的對角線所形成的楓葉型：

【“跳 2 點”的 7 角星形】



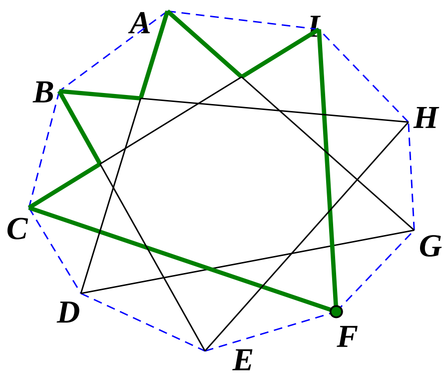
※產生 1 葉槽楓葉型

【“跳 2 點”的 8 角星形】



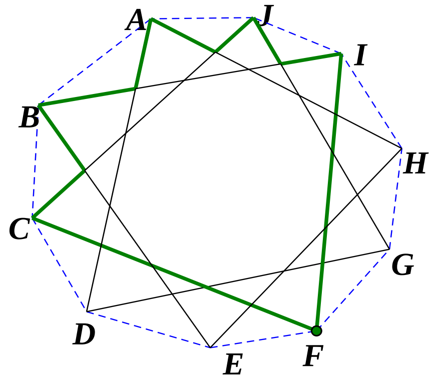
※產生 2 葉槽楓葉型

【“跳 2 點”的 9 角星形】



※產生 3 葉槽楓葉型

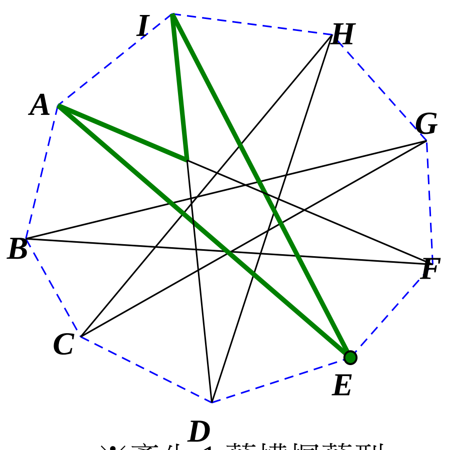
【“跳 2 點”的 10 角星形】



※產生 4 葉槽楓葉型

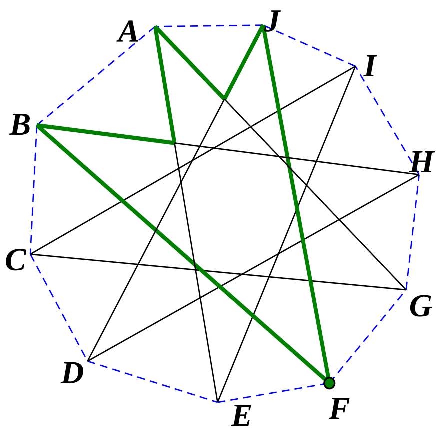
再操作多邊形中，“跳 3 芒星點”的對角線所形成的楓葉型：

【“跳 3 點”的 9 角星形】



※產生 1 葉槽楓葉型

【“跳 3 點”的 10 角星形】



※產生 2 葉槽楓葉型

依此類推,整理成下表:

“跳 1 芒星點”的對角線會形成『$(N-4)$ 葉槽楓葉型』的 N 角星形。
“跳 2 芒星點”的對角線會形成『$(N-6)$ 葉槽楓葉型』的 N 角星形
“跳 3 芒星點”的對角線會形成『$(N-8)$ 葉槽楓葉型』的 N 角星形
…………………….
N 邊形中“跳 k 點”的對角線會形成『$[N-2\times(k+1)]$葉槽楓葉型』的 N 角星形。

我們再將以上的操作，把「N 角星形」「 P 凹角楓葉型凹角數」「“跳 k 點數”」三者的關係,也整理成表：

P 葉槽數 \ N 角星 / 跳點數	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	…	N
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…	$(N-4)$
2			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	$(N-6)$
3					1	2	3	4	5	6	7	8	…	$(N-8)$
4							1	2	3	4	5	6	…	$(N-10)$
5									1	2	3	4	…	$(N-12)$
6											1	2	…	$(N-14)$
…..													…	…..
k													…	§

即“跳 k 點”的 N 角星形會產生 $P=[N-2\times(k+1)]$ 的「P 葉槽楓葉型」。

$\S=[N-2\times(k+1)]$

【過程二】:由【過程一】的討論中，我們知道: “跳 k 點”的 N 角星形會產生 $P=[N-2\times(k+1)]$ 的「P 葉槽楓葉型」。但這是為什麼呢？(如圖 7a、7b)

因為 1 個「P 葉槽楓葉型」的葉槽(凹角)恰為「P 葉槽楓葉型」2 相鄰「葉尖」連線段所圍成周邊三角形(如 ΔAZJ)頂角(如 $\angle AZJ$)的對邊 $(\overline{AJ})$,也為相鄰芒星點所連成外 N 邊形的 1 個邊,所以「P 葉槽楓葉型」的葉槽(凹角)個數

=「P 葉槽楓葉型」相鄰「葉尖(芒星點)」兩兩相連成的外多邊形的邊數。

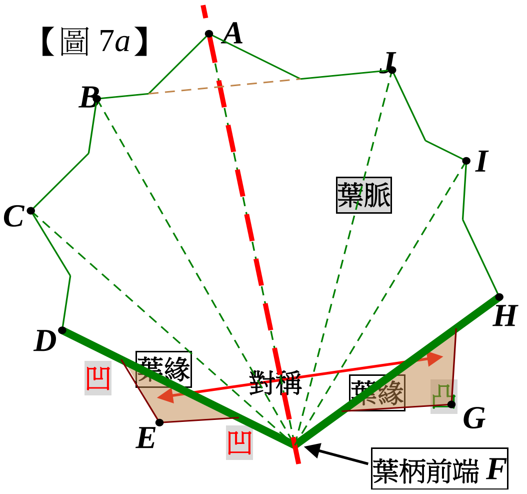
又利用『線對稱』圖形的觀念,在過「P 葉槽楓葉型」“葉柄前端點”作 1 條類對稱軸可得「P 葉槽楓葉型」「葉緣」兩側有同「葉尖」數(即“跳同點數”);

又因「葉緣」外側的「葉尖」數(即“跳點數”)會比「葉緣」外側的「葉槽」數(即凹角數)少 1,即「葉緣」外側的「葉槽」數(即凹角數)比「葉緣」外側的「葉尖」數多 1,所以「P 葉槽楓葉型」的葉槽(凹角)個數=外多邊形的邊數$-2\times$(“跳點數(k)”+1)

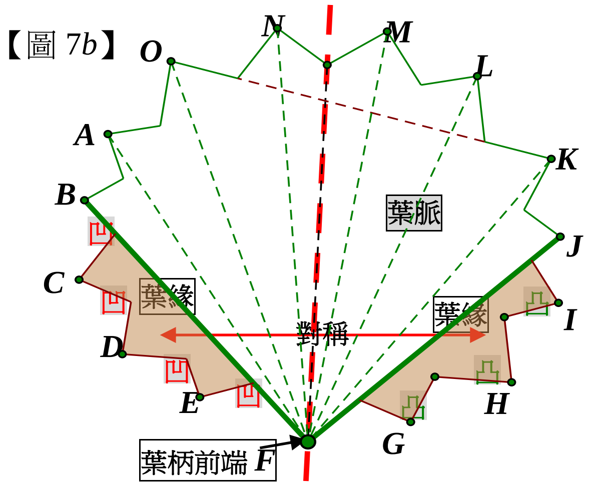
故「P 葉槽楓葉型」的葉槽(凹角)個數=N 角星形芒星點數(N)$-2\times$(“跳點數(k)”+1)

即 $P=N-2(k+1)$ 且 $k\le[\dfrac{N-2}{2}]$

【跳 1 芒星點 6 葉槽楓葉型】



【跳 3 芒星點 7 葉槽楓葉型】



例如: 10 角星形中，“跳 1 點”時，所得楓葉型的葉槽數 $P=10-2(1+1)=6$。(如圖 7*a*)

15 角星形中，“跳 3 點”時，所得楓葉型的葉槽數 $P=15-2(3+1)=7$ (如圖 7*b*)

【問題八】: “跳 *k* 點”的 *N* 角星形與 *N* 角星形的角度總和有何關係呢？

【過程一】: 我們將【問題六】【問題七】過程中所推得的結論

“跳 *k* 點”的 *N* 角星形會產生 $P=[N-2\times(k+1)]$ 的「*P* 葉槽楓葉型」

與

N 星形角度數和=「*P* 葉槽楓葉型」的凹角個數$(P)\times180^\circ$

加以合併，將上式代到下式得到：

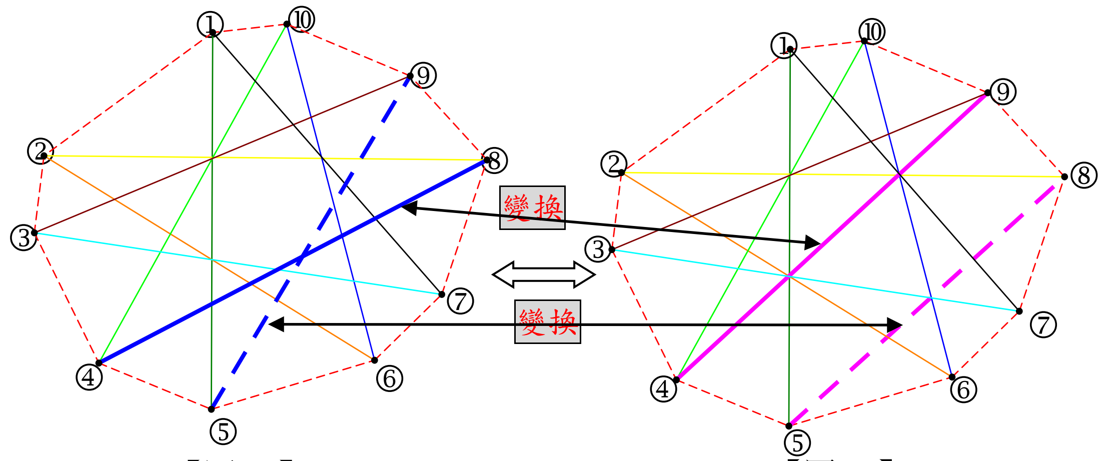
K、*P* 與 *N* 關係	*N* 角星形角度數和
$k=1$，$P=N-4$	$P\times180^\circ=(N-4)\times180^\circ$
$k=2$，$P=N-6$	$P\times180^\circ=(N-6)\times180^\circ$
$k=3$，$P=N-8$	$P\times180^\circ=(N-8)\times180^\circ$
$k=4$，$P=N-10$	$P\times180^\circ=(N-10)\times180^\circ$
……………..	………………………..
$k=t$，$P=N-2\times(t+1)$	$P\times180^\circ=[N-2\times(t+1)]\times180^\circ$

因此也解決了【問題六】【過程一】的“跳 *k* 點”時, *N* 角星形的角度總和公式。

【問題九】芒邊延長線成一直線,但“跳點數”不盡相同的 *N* 角星形是否仍具有角度總和公式？ 又為什麼呢？

【過程一】: (如下圖 9*a*、9*b*),若芒邊延長線成一直線,但“跳點數”不盡相同的 *N* 角星形,經實際操作圖狀,得“跳點總數”不變:

“跳 3 芒星點” 的 10 角星形　　　不一定 “跳 3 芒星點” 的 10 角星形

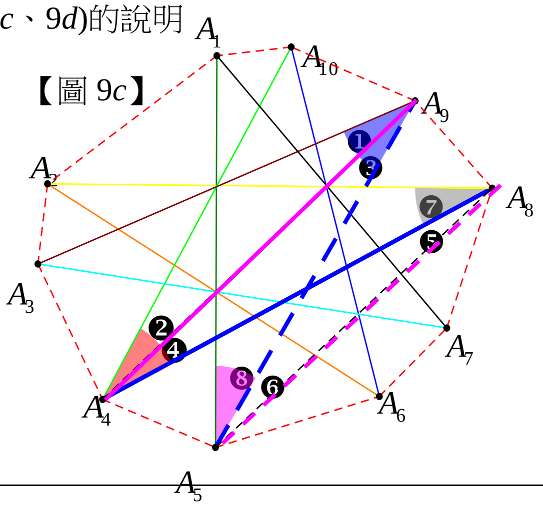


【圖 9*a*】　　　　【圖 9*b*】

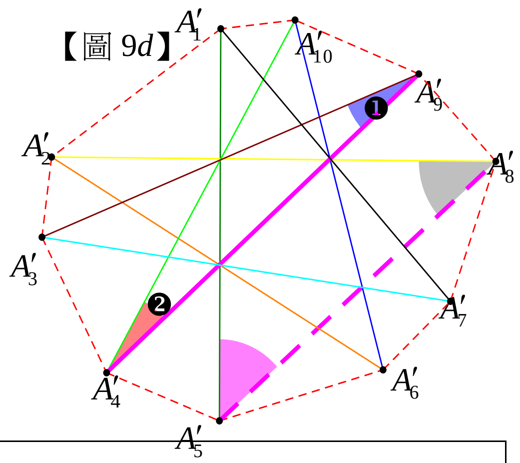
(*i*)左圖 9*a*: 10 角星形各芒星點分別標示①~⑩;。其流程為:
① $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑤ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑨ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ③ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑦ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ①
② $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑥ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑩ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ④ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑧ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ②
合計跳 30 芒星點
(*ii*)右圖 9*b*: 10 角星形各芒星點分別標示①~⑩;。其流程為:
① $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑤ $\xrightarrow{\text{跳2點}}$ ⑧ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ② $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑥ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑩
⑩ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ④ $\xrightarrow{\text{跳4點}}$ ⑨ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ③ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ⑦ $\xrightarrow{\text{跳3點}}$ ①
合計跳 30 芒星點

顯而易見:當我們將上述右圖疊至左圖時,兩個 10 角星形的角度和,並未有所增減。見(圖 9*c*、9*d*)的說明

【圖 9*c*】



【圖 9*d*】



因為 $\angle A_1=\angle A_1',\angle A_2=\angle A_2',\angle A_3=\angle A_3',\angle A_6=\angle A_6',\angle A_7=\angle A_7',\angle A_{10}=\angle A_{10}'$,

又因為∠❸+∠❹=∠❺+∠❻(蝴蝶定理)

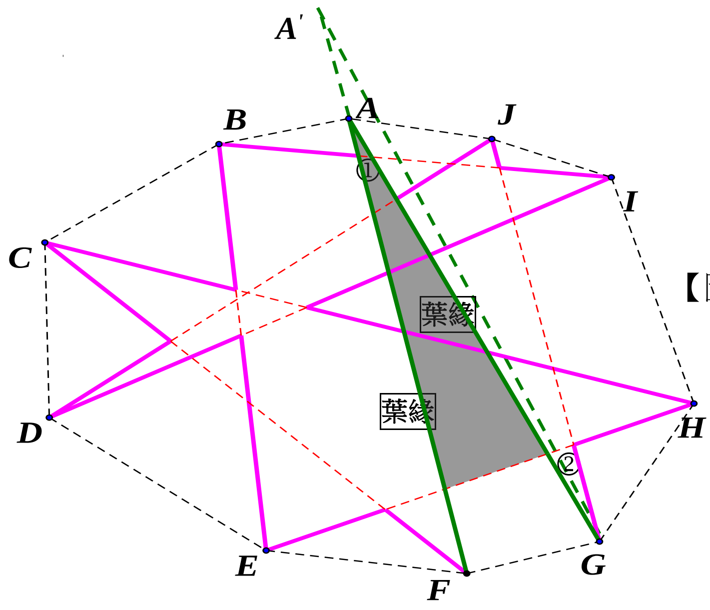
所以(∠❻+∠❽)+(∠❺+∠❼)= $\angle A_5'+\angle A_8'$

故(∠❶+∠❸)+(∠❷+∠❹)+∠❼+∠❽=∠❶+∠❷+(∠❺+∠❼)+(∠❻+∠❽)

所以,我們就可**透過"變換"過程將「不一定"跳同 *k* 點"的 *N* 角星形」轉換成「"跳同 *k* 點"的 *N* 角星形」**,而**不影響其同 *N* 角星形的度數總和**。

然而,事實上『芒邊延長線成一直線,而每一外 *N* 邊形對角線外"跳點數"不盡相同』的 *N* 角星形圖形,只不過是外 *N* 邊形對角線移動的結果,並無改變每一"葉柄前端點"所形成「*P* 葉槽楓葉型」或「鏢型」的圖狀,因此並不影響 *N* 角星形度數總和。
但若 *N* 角星形中不論"跳點數"相同與否,只要突出於外側的 "跳點"(即葉柄前端點)為**非「P 葉槽楓葉型」或「鏢型」的圖狀**(即兩葉緣**間的圖狀排列不為「凸角**、凹角、凸角、凹角、……、凸角、凹角、**凸角」**)。那就會因為不符合前述推導所使用的「*P* 凹槽楓葉型」或「鏢型」圖狀),而不再有固定值的 *N* 角星形度數。 (如圖 9*e*、9*f*)

∠GAF = 14.52°
∠IBE = 78.67°
∠HCF = 26.18°
∠JDI = 9.74°
∠BEH = 74.12°
∠CFA = 35.17°
∠JGA = 14.14°
∠EHC = 37.61°
∠BID = 31.85°
∠GJD = 67.04°

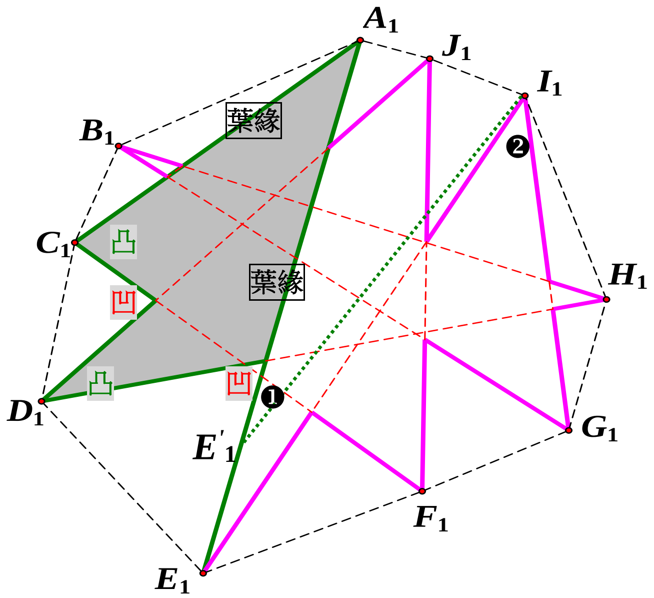


【圖 9*e*】

14.52 + 78.67 + 26.18 + 9.74 + 74.12 + 35.17 + 14.14 + 37.61 + 31.85 + 67.04 = 389.04

∵∠①>∠A', ∠②<∠AGJ；∴∠①+∠AGJ>∠A'+∠②;
故∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G+∠H+∠I+∠J
>∠A'+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠②+∠H+∠I+∠J。
也就是 $ABCDEFGHIJ$ 與 $A'BCDEFGHIJ$ 為同流程的 10 角星形
但角度和不等

$\angle C_1A_1E_1 = 36.54°$
$\angle H_1B_1G_1 = 16.05°$
$\angle A_1C_1F_1 = 78.25°$
$\angle J_1D_1H_1 = 33.59°$
$\angle A_1E_1I_1 = 16.07°$
$\angle C_1F_1J_1 = 51.61°$
$\angle B_1G_1I_1 = 47.65°$
$\angle D_1H_1B_1 = 31.39°$
$\angle G_1I_1E_1 = 37.08°$
$\angle F_1J_1D_1 = 43.90°$



【圖 9f】

36.54 + 16.05 + 78.25 + 33.59 + 16.07 + 51.61 + 47.65 + 31.39 + 37.08 + 43.9 = 392.13

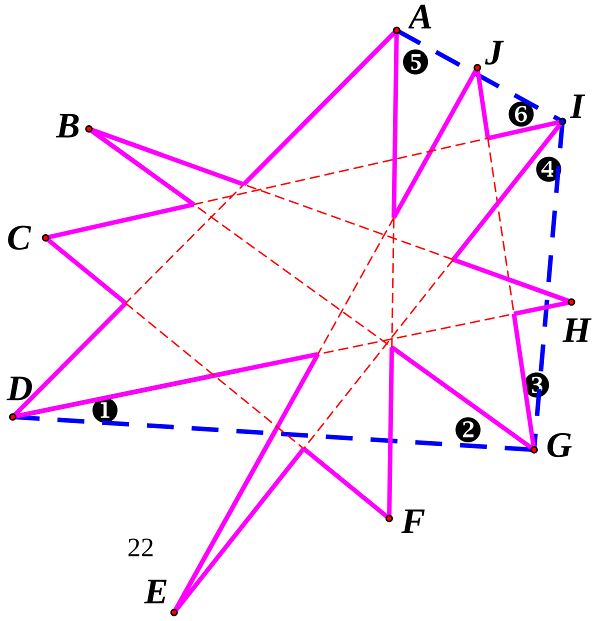
因為∠❶>∠E_1, ∠❷<∠$E'_1I_1J_1$；所以∠❶+∠$E'_1I_1J_1$>∠E_1+∠❷;
故∠A_1+∠B_1+∠C_1+∠D_1+∠E_1+∠F_1+∠G_1+∠H_1+∠I_1+∠J_1
＝∠A_1+∠B_1+∠C_1+∠D_1+∠E_1+∠F_1+∠G_1+∠H_1+∠❷+∠J_1
<∠A_1+∠B_1+∠C_1+∠D_1+∠❶+∠F_1+∠G_1+∠H_1+∠$E'_1I_1J_1$ +∠J_1
也就是 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1I_1J_1$ 與 $A_1B_1C_1D_1E'_1F_1G_1H_1I_1J_1$ 為同流程的 10 角星形
但角度和不等;也就是 10 角星形角度和也為不定值

【註】:綠色粗線間的圖狀為非「P 葉槽楓葉型」(或「鏢型」)的圖狀。

又如下 2 圖(9g 與 9h):儘管 N 角星形圖形頗為怪異,但因每 1 頂點都為「P 葉槽楓葉型」的葉柄前端點,所以仍然符合【問題八】的結論。

(I).

$\angle FAD = 43.90°$
$\angle HBG = 16.05°$
$\angle ICF = 51.97°$
$\angle ADH = 33.59°$
$\angle JEI = 9.24°$
$\angle CFA = 51.61°$
$\angle BGJ = 45.75°$
$\angle DHB = 31.39°$
$\angle EIC = 38.98°$
$\angle GJE = 37.52°$



【圖 9g】

因為∠B+∠H=∠❶+∠❷ 　　∠E+∠J=∠❸+∠❹ 　　∠C+∠F=∠❺+∠❻ 所以∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G+∠H+∠I+∠J 　=∠A+∠❺ +∠❻+∠I+∠❹+∠H+∠❸+∠G+∠❷+∠❶+∠D 合併成四邊形 $ADGI$。 故 10 角星形角度總和合計為 360°

而以『“跳點數”楓葉型』算法:

1. 建立流程:(即建立“跳點數”總數):

$$A \xrightarrow[\text{跳2點}]{} D \xrightarrow[\text{跳3點}]{} H \xrightarrow[\text{跳3點}]{} B \xrightarrow[\text{跳4點}]{} G \xrightarrow[\text{跳2點}]{} J$$

$$(J) \xrightarrow[\text{跳4點}]{} E \xrightarrow[\text{跳3點}]{} I \xrightarrow[\text{跳3點}]{} C \xrightarrow[\text{跳2點}]{} F \xrightarrow[\text{跳4點}]{} A$$

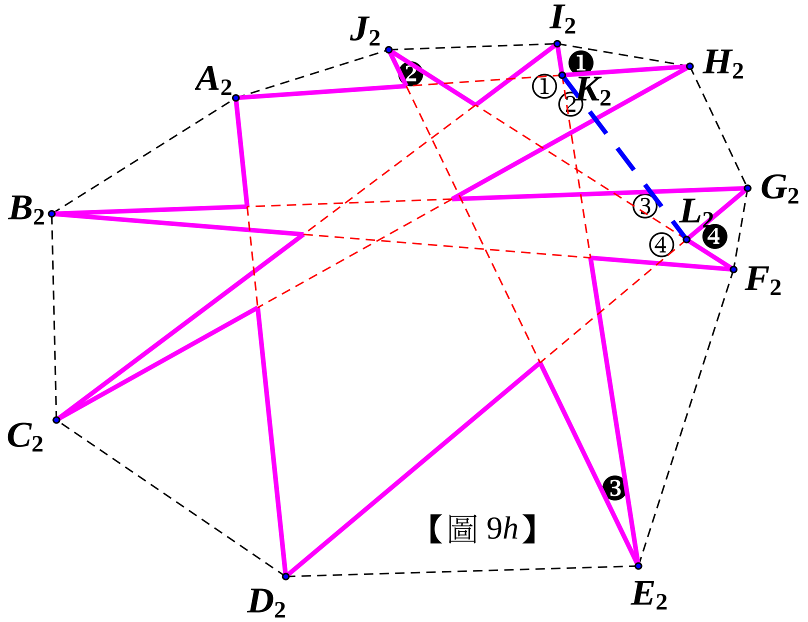
   合計跳 2+3+3+4+2+4+3+3+2+4=30 芒星點; k= 30÷10=3(即為 “跳 3 點”)

2. 代入 N 角星形角度數和=$[N-2\times(k+1)]\times 180^\circ$

   可得 10 角星形角度數和=$[10-2\times(3+1)]\times 180^\circ$ =360°

(II).

$\angle J_2E_2I_2 = 16.49°$
$\angle D_2G_2B_2 = 38.89°$
$\angle B_2F_2J_2 = 28.61°$
$\angle C_2H_2A_2 = 25.94°$
$\angle E_2I_2C_2 = 60.61°$
$\angle E_2J_2F_2 = 31.54°$
$\angle H_2A_2D_2 = 88.38°$
$\angle F_2B_2G_2 = 7.02°$
$\angle I_2C_2H_2 = 7.85°$
$\angle A_2D_2G_2 = 54.67°$



【圖 9h】

16.49 + 38.89 + 28.61 + 25.94 + 60.61 + 31.54 + 88.38 + 7.02 + 7.85 + 54.67 = 360.00

因為∠❶=∠I_2+∠C_2+∠H_2=∠①;∠❹=∠G_2+∠B_2+∠F_2=∠④ 　　∠❷+∠❸=∠②+∠③ 所以∠I_2+∠C_2+∠H_2+∠G_2+∠B_2+∠F_2+∠❷+∠❸+∠A_2+∠D_2 　=∠①+∠②+∠③+∠④+∠A_2+∠D_2　形成四邊形 A_2D_2 L_2K_2 故 10 角星形角度總和合計為 360°

又以『“跳點數”楓葉型』算法:

1.建立流程:(即建立跳“芒星點”總數):

$$A_2 \xrightarrow[\text{跳2點}]{} D_2 \xrightarrow[\text{跳2點}]{} G_2 \xrightarrow[\text{跳4點}]{} B_2 \xrightarrow[\text{跳3點}]{} F_2 \xrightarrow[\text{跳3點}]{} J_2$$

$$(J_2) \xrightarrow[\text{跳4點}]{} E_2 \xrightarrow[\text{跳3點}]{} I_2 \xrightarrow[\text{跳3點}]{} C_2 \xrightarrow[\text{跳4點}]{} H_2 \xrightarrow[\text{跳2點}]{} A_2$$

合計跳 2+2+4+3+3+4+3+3+4+2=30 芒星點; k= 30÷10=3(即為“跳 3 點”)

2.代入 N 角星形角度數和=[$N-2\times(k+1)$]×180°

可得 10 角星形角度數和=[$10-2\times(3+1)$]×180° =360°

【註】: N 角星形內每一圖狀都是「P 葉槽楓葉型」或「鏢型」的圖狀。

因此,我們對求算『芒邊延長線成一直線,雖每一外 N 邊形對角線外的“跳點數”不盡相同,

1.在每 1 芒星點加入①,②,③,…的編號;觀察研判 N 角星形圖形中每一“芒星點”是否皆為「凹槽楓葉型」或「鏢型」圖狀的「葉柄前端點」(也便於計算“跳點數”總數)。若是,就進入下一步驟;否則 N 角星形的度數總和即為角度不定值。
2.算出 N 角星形“跳點數”的總個數,將 $\dfrac{\text{“跳點數”總數}}{N}=k$ (即“跳k點”)
3.再依前述【問題九】的結論 N 角星形角度數和=[$N-2\times(k+1)$]×180°,就可得到: 芒邊延長線成一直線又個數不盡相同的各種 N 角星形的角度總和。

但每一頂點都為「P 葉槽楓葉型」的葉柄前端點』的 N 角星形度數總和,建立了如下的處理步驟:

當然了,既然可用“跳點數”總數算出“跳點數”;那自然就可以利用

$$P(\text{葉槽數})=N-2\times[k(\text{跳點數})+1]\text{的關係,一樣算出}P=\frac{\text{各葉柄前端點“葉槽”總數}}{N}$$

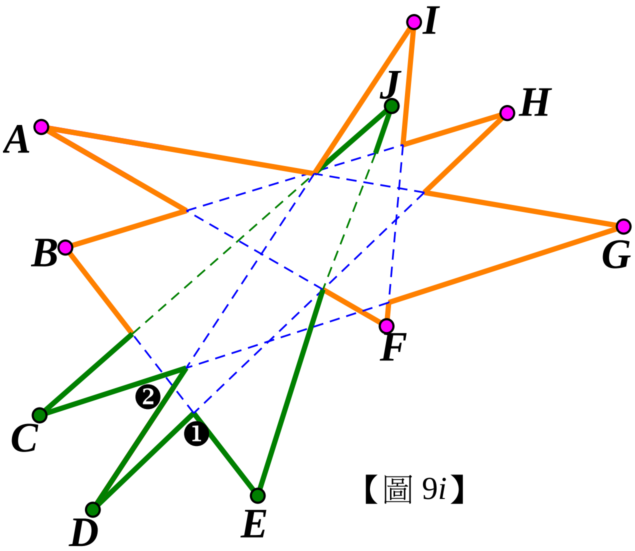
所以,我們對求算『芒邊延長線成一直線,雖每一外 N 邊形對角線外的“跳點數”不盡相同,但每 1 頂點都為「P 葉槽楓葉型」的葉柄前端點』的 N 角星形度數總和,也可建立了另一套簡易的處理步驟:

1. 計算出所有「P 葉槽楓葉型」或「鏢型」的葉槽總數,將 $\dfrac{\text{各葉柄前端點“葉槽”總數}}{N}=P$ (即P葉槽楓葉型的葉槽數)
2. 再依前述【問題六】的結論 N 角星形角度數和=P×180°,就可得到: 芒邊延長線會成一直線又個數不盡相同的各種 N 角星形的角度總和。

而至於上述兩套計算 N 角星形的度數總和的模式,以何者為佳?那可以「葉槽總數」與「“跳點數”總數」何者較少作為決定。

再若(如下 2 圖 9i、9j), N 角星形中芒邊延長線成一直線,但某一芒星點在另一芒星角內或落於底多邊形內部,且不為同 1 型的「P 葉槽楓葉型」時,那就不易推算出“跳點數”總數,也不易推算出「葉槽總數」,更難以用“蝴蝶定理”切補轉換成多邊形。那該怎麼辦呢?此時,我們就可利用「楓葉型定理」(或「鏢形定理」),移動位於「位於」芒星角內或落

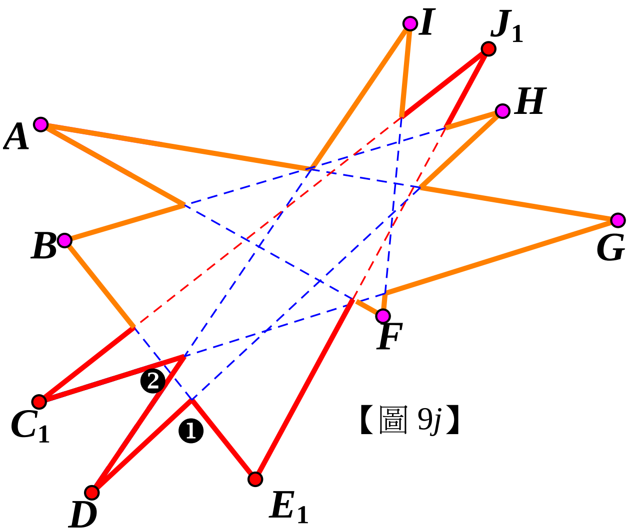
於底多邊形內部的「葉柄前端點」至圖形外側(如上圖 J 移至下圖 J_1),如此,就可順利推算出所有「楓葉型」的葉槽總數(或“跳點數”總數)再除以 N ,即可得「P 葉槽楓葉型」的 P(或“跳點數 k”);進而求得 N 角星形度數總和$=P\times180^\circ$ 。



【圖 9i】

$\angle GAF = 20.02°$
$\angle HBE = 68.39°$
$\angle JCG = 23.19°$
$\angle IDH = 12.92°$
$\angle BEJ = 57.54°$
$\angle AFI = 65.69°$
$\angle CGA = 27.17°$
$\angle DHB = 26.60°$
$\angle DIF = 28.58°$
$\angle CJE = 29.91°$

20.05 + 68.55 + 17.93 + 12.21 + 58.6 + 66.35 + 25.45 + 25.43 + 29.77 + 35.66 = 360.00



【圖 9j】

$\angle GAF = 20.02°$
$\angle HBE_1 = 68.39°$
$\angle J_1C_1G = 20.88°$
$\angle IDH = 12.92°$
$\angle BE_1J_1 = 66.42°$
$\angle AFI = 65.69°$
$\angle C_1GA = 27.17°$
$\angle DHB = 26.60°$
$\angle DIF = 28.58°$
$\angle C_1J_1E_1 = 23.35°$

20.05 + 68.55 + 17.93 + 12.21 + 58.6 + 66.35 + 25.45 + 25.43 + 29.77 + 35.66 = 360.00

因為上圖$\angle$❶+$\angle$❷$=\angle J+\angle C+\angle D+\angle E$
而　下圖$\angle$❶+$\angle$❷$=\angle J_1+\angle C+\angle D+\angle E_1$
所以$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle I+\angle J$
$=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E_1+\angle F+\angle G+\angle H+\angle I+\angle J_1$

再計算上頁圖 9j 的葉槽數(如下表):

葉柄前端點	葉槽數
A	1
B	3
$\boldsymbol{C_1}$	2
D	2
$\boldsymbol{E_1}$	3
F	1
G	2
H	2
I	2
$\boldsymbol{J_1}$	2
合計	20

$$P=20\div10=2;\quad \therefore N\text{角星形度數和}=2\times180°=360°$$

或建立上頁圖 9j 的流程,再計算“跳點數” 的總數:

$$A\xrightarrow[\text{跳4點}]{}F\xrightarrow[\text{跳2點}]{}I\xrightarrow[\text{跳4點}]{}D\xrightarrow[\text{跳3點}]{}H\xrightarrow[\text{跳3點}]{}B$$

$$(B)\xrightarrow[\text{跳2點}]{}E_1\xrightarrow[\text{跳4點}]{}J_1\xrightarrow[\text{跳2點}]{}C_1\xrightarrow[\text{跳3點}]{}G\xrightarrow[\text{跳3點}]{}A$$

合計有:4+2+4+3+3+2+4+2+3+3=30;

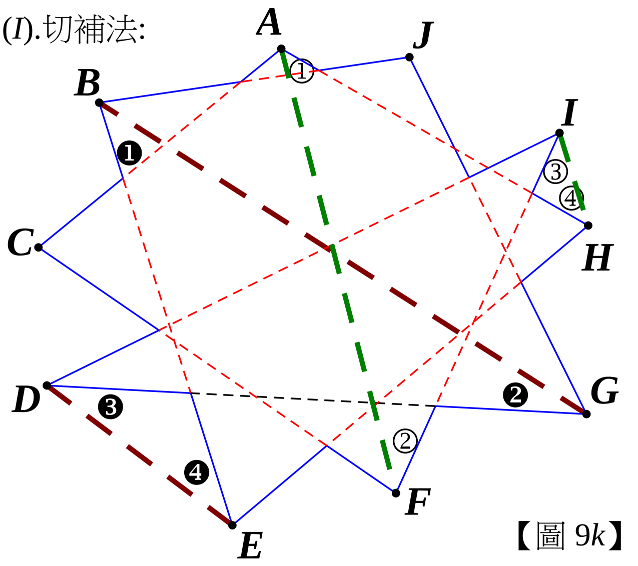
$$k=30\div10=3;\quad \therefore N\text{角星形度數和}=[10-(3+1)]\times180°=360°$$

1.研判每一為“跳點”的“芒星點”是否皆為「P 葉槽楓葉型」或「鏢型」圖狀的「葉柄前端點」且是否皆位於芒邊延長線之外。
2.若“芒星點”(或葉柄前端點)皆位於芒邊延長線之外,則計算 $\dfrac{\text{各葉柄前端點“葉槽”總數}}{N}=P\quad(\text{或}\dfrac{\text{“跳點”總數}}{N}=k)$, 代入 N 角星形度數總和 =P×180°(或[$N-2\times(t+1)$]×180°)
3.若“芒星點” (或葉柄前端點) 位於「底多邊形」之內或某“芒星角” 內部,則將“芒星點”移動至「芒邊延長線所成對角線」之外,再計算 $\dfrac{\text{各葉柄前端點“葉槽”總數}}{N}=P\quad(\text{或}\dfrac{\text{“跳點”總數}}{N}=k)$, 代入 N 角星形度數總和=P×180°(或[$N-2\times(t+1)$]×180°)

綜合以上所述:我們已擬出一套有效率的求算 N 角星形角度總和的方法

最後我們再以(如下 2 圖 9k、9l),比較「切補法」與「P 葉槽楓葉型法(或跳點數法)」的優劣。

(*I*).切補法:



$\angle EBJ = 80.88°$
$\angle ACF = 73.89°$
$\angle IDG = 29.30°$
$\angle BEH = 67.32°$
$\angle CFI = 79.83°$
$\angle DGJ = 60.61°$
$\angle EHA = 70.13°$
$\angle FID = 39.35°$
$\angle GJB = 108.00°$
$\angle HAC = 110.69°$

【圖 9*k*】

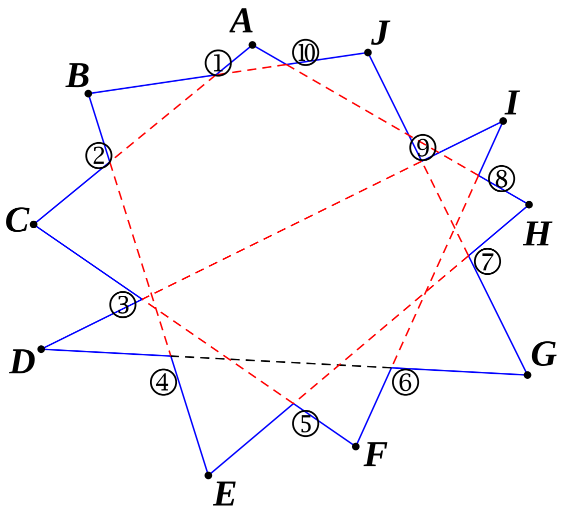
80.88 + 73.89 + 29.3 + 67.32 + 79.83 + 60.61 + 70.13 + 39.35 + 108 + 110.69 = 720.00

因為∠❶+∠❷=∠❸+∠❹, ∠①+∠②=∠③+∠④ 所以補成 1 個四邊形 *DEHI* =360° 而剩餘 Δ*ACF* 與 Δ*BGJ* 各有 180° 所以合計 720°

首先,它須先連 *A* 點與 *F* 點, *B* 點與 *G* 點, *I* 點與 *H* 點, *D* 點與 *E* 點 (單就這些就夠複雜了),還要再利用"蝴蝶定理"並轉換成 1 個四邊形與 2 個三角形。這是何其麻煩與困難呀!

(*II*). 「*P* 葉槽楓葉型法(或"跳點數" 楓葉型法)」算法:

1. 計算各芒星點為「葉柄前端點」的葉槽數,計有 *A*(5) *B*(5) *C*(5) *D*(2) *E*(4) *F*(4) *G*(4) *H*(4) *I*(2) *J*(5),合計 5+5+5+2+4+4+4+4+2+4=40。
   或"跳點總數"=1+2+2+4+2+2+1+2+2+2=20
2. *P*=40÷10=4(或 *k*=20÷10=2),
   故 *N* 角星形角度數和=4×180=720° (或$[10-2\times(2+1)]\times 180° = 720°$)



【圖 9*l*】

這不也再次說明了:「*P* 葉槽楓葉型(或跳點數法)」算法的優點。

玖、最後的心得與結論:

(一)、在角星形圖形中，凡角星形芒邊延長線會與其餘芒邊延長線成一直線者，才具有星形角度公式。

(二)、坊間所述 N 角星形的角度公式 $(N-4)\times180°$ 只適用於 “跳 1 點”N 角星形。

(三)、凡具有星形角度公式的 N 角星形，必是由外 N 多邊形使用其中 N 條的對角線所圍成的。

(四)、在“跳同點數”的 N 角星形中,若(“跳點數”$+1$)與 N 互質,才可“1 筆劃”完成“較完美”(較對稱)的 N 角星形 $(N\geq5)$;而在“跳不同點數”的圖形中(除 6 角星形外),都可“1 筆劃” 完成“較完美”(較對稱)的 N 角星形圖形。

(五)、同一 N 邊形中,依“跳相同芒星點數”的分類,可有$[\dfrac{N-3}{2}]$種 N 角星形。(註:[ ]表高斯符號)

(六)、凡角星形芒邊延長線成一直線的 N 角星形,且外側“跳點數”相同(或 P 葉槽楓葉型凹角數相同),都有如下的「外 N 邊形」、「N 角星形“跳(k)點數”」與「P 葉槽楓葉型凹角數」三者之間的關係：

P 葉槽 \ N 角星數 \ 跳點數	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	…	N
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…	$(N-4)$
2			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	$(N-6)$
3					1	2	3	4	5	6	7	8	…	$(N-8)$
4							1	2	3	4	5	6	…	$(N-10)$
5									1	2	3	4	…	$(N-12)$
6											1	2	…	$(N-14)$
…..													…	…..
k													…	§

即“跳 k 點”的 N 角星形會產生 $P=[N-2\times(k+1)]$ 的「P 葉槽楓葉型」。

§$=[N-2\times(k+1)]$

(七)、凡角星形芒邊延長線成一直線的 N 角星形,且外側“跳點數”相同(或每一 P 凹角(葉槽)楓葉型凹角數相同)時,都具有

N 角星形角度數和$=[\,N-2\times(k+1)\,]\times180^\circ$ (k 為跳點數)

N 星形角度度數和=「P 葉槽楓葉型」的葉槽個數$(P)\times180^\circ$

(八)、N 角星形圖形中,都可依以下流程計算出 N 角星形的度數總和

1. 研判每一為“跳點”的“芒星點”是否皆為「凹槽楓葉型」或「鏢型」圖狀的「葉柄前端點」且是否皆位於芒邊延長線之外。
2. 若“芒星點”(或葉柄前端點)皆位於芒邊延長線之外,

則計算 $\dfrac{\text{各葉柄前端點“葉槽”總數}}{N} = P$ $\left(\text{或}\dfrac{\text{“跳點”總數}}{N} = k\right)$,

代入 N 角星形度數總和 $=P\times180^\circ$ (或$[N-2\times(k+1)]\times180^\circ$)

3. 若“芒星點” (或葉柄前端點) 位於「底多邊形」之內或某“芒星角” 內部,
則將“芒星點”移動至「芒邊延長線所成對角線」之外,

再計算 $\dfrac{\text{各葉柄前端點“葉槽”總數}}{N} = P$ $\left(\text{或}\dfrac{\text{“跳點”總數}}{N} = k\right)$,

代入 N 角星形度數總和$=P\times180^\circ$ (或$[N-2\times(k+1)]\times180^\circ$)

拾、參考資料:

(一)、中村義作著(1999 年 8 月) 「數學天才 100 第(2)集」,新視界出版社

(二)、康軒文教事業 「國小數學第七冊」---角度、三角形

(三)、康軒文教事業 「國小數學第九冊」---平面圖形、線對稱圖形

【評語】080403

1. 本作品討論 N 角星形角度和之計算方式，作者先證明「楓葉型定理並將所求之問題」轉化為「P 葉槽楓型」之問題。經由作者完整正確之幾何證明：此轉化是可行的。
2. 為方便計算上述 N 角形角度和，作者在 N 角星形圖中做了一個適當假設(一般的 N 角星形皆符合之假設條件)。在此條件下，作者得到「N 角形跳 k 點數」與「P 葉槽楓葉型」的關係式，再由此關係式得到 N 角星形角度之簡易計算公式。
3. 本作品之幾何證明清晰正確且討論內容完整。
4. 期許作者討論不同的限制條件下，例如圖 9e 以理論證明：N 角星形角度和非定值。