

# 中華民國第 54 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

## 最佳創意獎

080402

給我 360~其餘免談

學校名稱：南投縣私立普台國民小學

作者：  小五 黃御婷  小五 陳亞琪  小五 林格妤  小五 曾莉蓁  小六 傅琬華	指導老師：  黃偉婷  謝明潭
---	-----------------------------

關鍵詞：正多面體、360 度、鑲嵌圖形

## 摘要

本研究目的在瞭解正四面體隨意剪開後的展開圖，為何能拼貼成平面鑲嵌圖形。我們發現圖形間組合的部位，要構成 360 度的圓周角，才能形成一個緊密、無空隙的平面填充圖形；如果立體圖形展開圖是正多邊形或凸四邊形，隨意剪開後的展開圖，拼貼後必能緊密、無空隙的鑲嵌成完整的平面填充圖形。正四面體剪開後的展開圖進行平移、旋轉後，不規則的展開圖能復原成正三角形和平行四邊形(凸四邊形)兩種符合鑲嵌原則的圖形，展開圖必能拼貼成平面鑲嵌圖形，展開圖間組合的部位及鑲嵌的方式都一樣，具有規律性；正六面體的展開圖不是凸四邊形或正多邊形，不符合鑲嵌原則，相鄰兩個面展開後產生的位移情形，及圖形周圍和裡面形成的角度為 90、270 度，導致剪開後的展開圖有許多變化，無法緊密的鑲嵌。

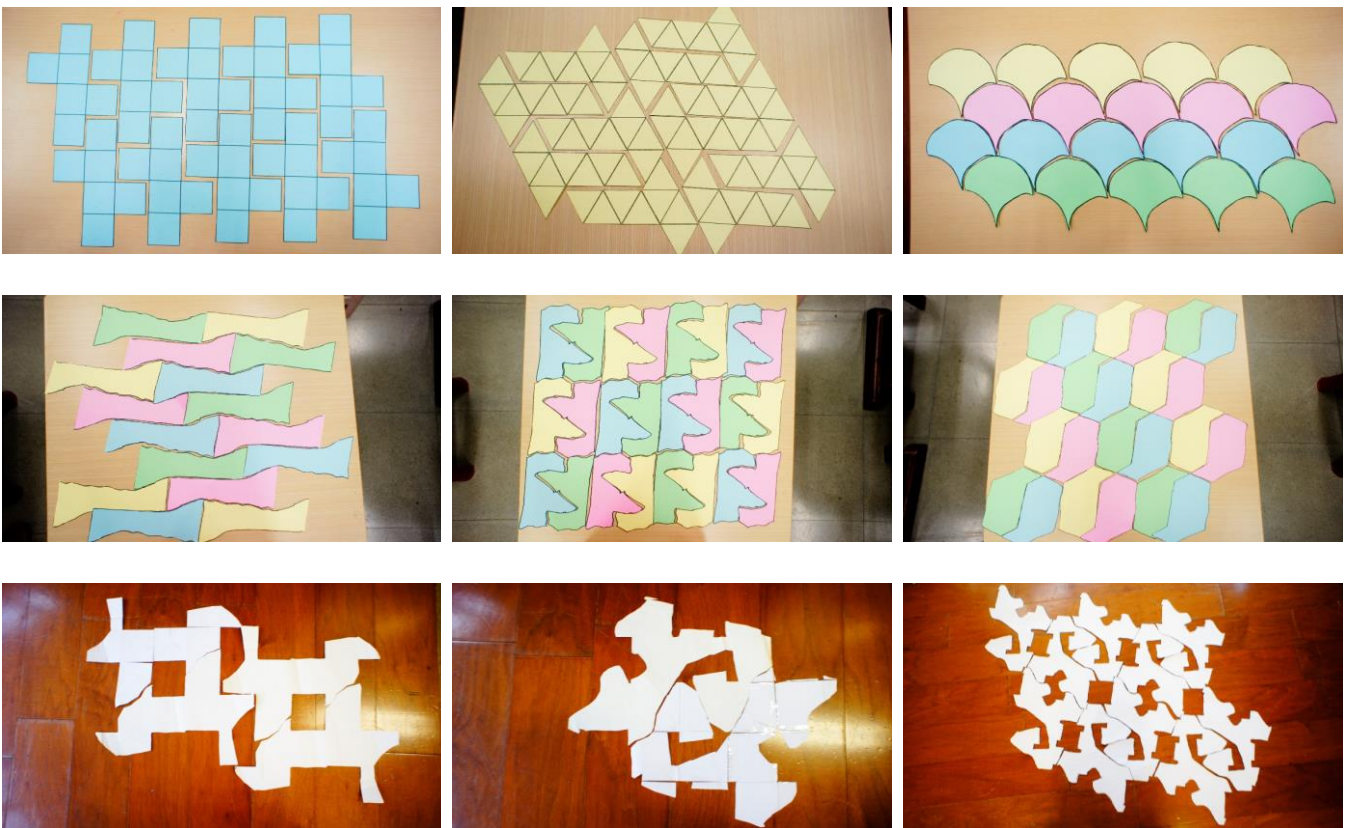
## 作品名稱：給我 360~其餘免談

### 壹、研究動機：

五年級上學期上數學課的時候，各種的平面圖形引起我們的好奇心，好奇心旺盛的我們便呼朋引伴，一行人到圖書館查詢和平面圖形有關的各種資料。其中的一本書裡面提到一個相當有趣的正四面體奇妙實驗，主要是將正四面體的立體圖形隨意的剪開後，然後攤開成展開圖並進行複製，最後再拼拼看能不能成功的拼貼成一個完整的平面填充圖形。這樣的奇妙實驗激起了我們的好奇心，於是我們就將我們的疑問告訴科展團隊的老師，老師也建議我們可以試著更進一步深入研究和探討為什麼正四面體的會有這樣的特性呢！那如果是其它的正多面體是不是也會有同樣的效果呢？因此我們就決定更進一步的深入研究，試著找出其中的原因。

### 貳、研究問題與目的：

- 一、認識鑲嵌圖形與正多面體。
- 二、利用正四、六、八面體的展開圖，能不能順利的拼貼成一個完整的平面填充圖形呢？
- 三、將正四、六面體隨意剪開後攤平所形成的圖形，是否能拼貼成完整的平面填充圖形呢？
- 四、沿著剪的痕跡，利用不同顏色的彩色筆加上記號，複製後進行平面填充圖形的拼貼，了解各種正多面體剪開圖的那些部位在進行拼貼時可以互相組合在一起。
- 五、正四面體隨意剪開後的展開圖為什麼可以拼貼成平面的填充圖形呢？



### 參、實驗設備與材料：

剪刀、膠帶、筆記本、鉛筆、各種顏色的 A4、A3 影印紙 (80 磅)、量角器、透明膠片、奇異筆。

## 肆、研究過程與方法：

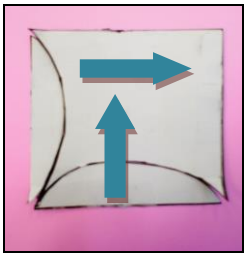
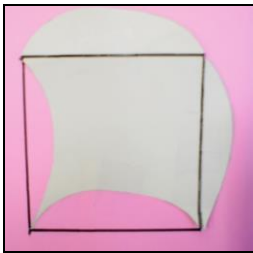

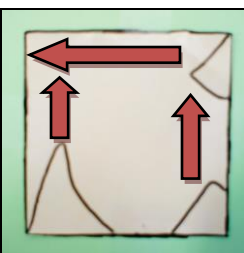
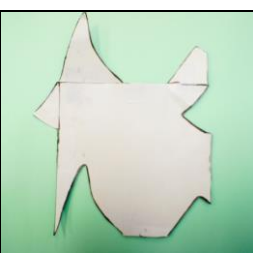
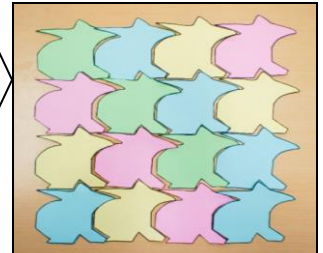
### 一、認識鑲嵌圖形和正多面體。

#### ※資料整理和蒐集~

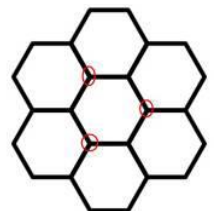
#### (一) 認識鑲嵌圖形。

- 鑲嵌圖形是指由一種或兩種以上全等圖形，重複且緊密排列，沒有縫隙圖形，不會重疊，可以無限延伸鋪滿整個平面的圖形。因為凸四邊形內角和為 360 度，故任意凸四邊形分別以四個角構成一週角，即可密鋪成鑲嵌圖形。但如果不是四邊形，因其內角和不是 360 度，要組成鑲嵌圖形，就必須要有幾個角度的和為 360 度或是 180 度，才可以構成一個圓周角；再加上邊長條件，即可組成鑲嵌圖形。(如下表 1-1)。

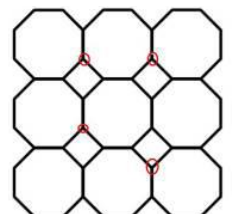
表 1-1 利用正方形來製作鑲嵌圖形的操作紀錄表

項目	第一個步驟	第二個步驟	鋪設完成的平面鑲嵌圖形
鑲嵌圖形 A			
操作過程	將正方形中剪下左邊一塊平移拼至右邊，再將下方一塊剪下平移拼至上方，完成的圖形在進行複製，最後拼貼在一起形成鑲嵌圖形，利用圖片互補的方式形成鑲嵌圖形。		
鑲嵌圖形 B			
操作過程	將正方形中的下方兩小塊圖形剪下平移拼至上方，再將右方塊剪下平移拼至左方，完成的圖形再進行複製，最後拼貼在一起形成鑲嵌圖形，利用圖片互補的方式形成鑲嵌圖形。		

- 正則鑲嵌圖形：由單一全等的正多邊形重複且緊密排列，頂點接頂點，邊接邊，不重疊，沒有縫隙，可以無限延伸鋪滿整個平面，且其中每一個頂點處所圍繞的正多邊形都是同一規律的圖形。例如右圖是用正六邊形重複且緊密排列而成，且可以無限延伸鋪滿整個平面。其中頂點接頂點，邊接邊，不重疊，沒有縫隙，每一個頂點處所圍繞的正多邊形，其排列都是正六邊形、正六邊形、正六邊形。



- 半正則鑲嵌圖形：由兩種以上的全等正多邊形重複且緊密排列，可以無限延伸鋪滿整個平面，且其中每一個頂點處所圍繞的正多邊形都是同一規律的圖形，稱之為半正則鑲嵌圖形。例如右圖是用正八邊形和正方形緊密排

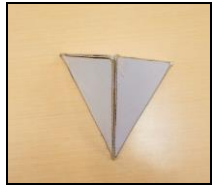

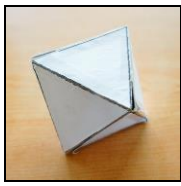
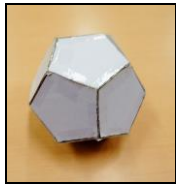



列而成的，可以無限延伸鋪滿整個平面。其中每一個頂點處所圍繞的正多邊形，其排列都是正方形、正八邊形、正八邊形。

### (二) 認識柏拉圖正多面體。

1. 每個面都是由全等的正多邊形所組成的形體，就是正多面體。正多面體包括五個，分別為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。

表 1-2 各種柏拉圖正多面體的說明

項目	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
立體圖					
面的形質	正三角形	正方形	正三角形	正五邊形	正三角形
組成	4 個正三角形	6 個正方形	8 個正三角形	12 個正五邊形	20 個正三角
面的數目	4	6	8	12	20
頂點數目	4	8	6	20	12
邊緣數目	6	12	12	30	30

2. 根據尤拉公式指出，正多面體頂點的數目 + 面的數目 - 邊的數目 = 2。

3. 經過正多面體立體圖形的實際觀察後，我們發現各種正多面體會有以下幾個特點：

- (1) 正多面體的每個面都是全等的正多邊形。
- (2) 正多面體各條邊、各個面、各個角都會是相等的或是全等的。
- (3) 各個正多面體不管從任何一個角度、邊或面的中心點觀看，所觀察到的圖形都是一樣的。

### (三) 認識正四面體、正六面體、正八面體的展開圖。

表 1-3 正四面體的展開圖

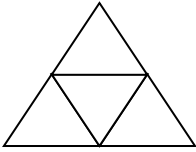
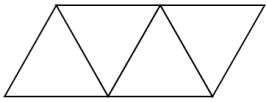
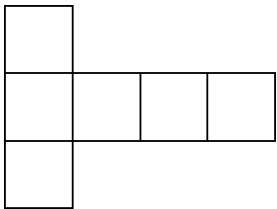

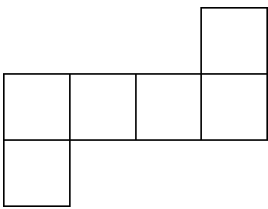
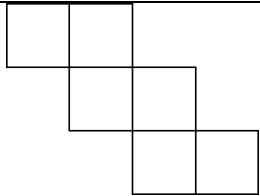
正四面體的兩種展開圖	A		B	
說明	<p>1. 正四面體的展開圖總共有 A、B 兩種不同形式，兩種展開圖都是由四個正三角形所組成的圖形；展開圖 A 是一個正三角形，展開圖 B 則是一個平行四邊形。</p> <p>2. 每個展開圖最基本的組成單位是正三角形，且每種圖形都是由四個正三角形所組成的圖形。</p>			

表 1-4 正六面體的展開圖

			
---	---	--	---

說明	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正六面體的展開圖總共有 11 種不同的形式。</li> <li>2. 每個展開圖最基本的組成單位是正方形，且每種圖形都是由六個正方形所組成的圖形。</li> </ol>		

表 1-5 正八面體的展開圖

說明	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正八面體的展開圖總共有 11 種不同的形式。</li> <li>2. 每個展開圖最基本的組成單位是正方形，且每種圖形都是由八個正三角形所組成的圖形。</li> </ol>		

(四) 資料整理後發現：

1. 正四面體、正六面體、正八面體，分別有 2 種、11 種、11 種的不同形式的展開圖。
2. 正四面體、正八面體和正二十面體展開圖最基本的組成元素是正三角形，正六面體展開圖最基本的組成元素則是正方形，正十二面體展開圖最基本的組成元素則會是正五邊形。
3. 正四面體和正八面體的展開圖分別會由 4 個和 8 個全等的正三角形所組成，正六面體的展開圖則會是由 6 個全等的正方形所組成。

(五) 問題與討論：

1. 因為正十二面體、正二十面體的展開圖有很多種的組合方式，所以我們就決定先選擇正四面

體、正六面體、正八面體的展開圖做為主要的研究對象。

2. 正四面體、正六面體、正八面體的展開圖，分別有 2 種、11 種、11 種的不同形式，而這也讓我們思考到一個問題，如果利用正各種四面體、正六面體、正八面體展開圖進行平面填充圖形的拼貼時，是不是也能夠順利的拼貼成一個完整的平面填充圖形呢？

二、利用正四、六、八面體的展開圖，能不能順利的拼貼成一個完整的平面填充圖形呢？

(一) 分別利用兩種正四面體的展開圖進行平面圖形的拼貼。

表 2-1 利用正四面體展開圖進行平面圖形拼貼的結果紀錄表

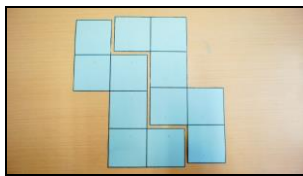
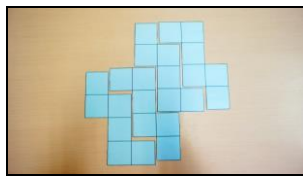
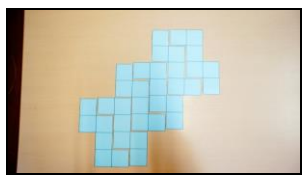
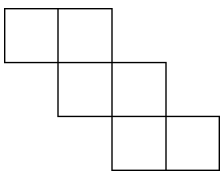
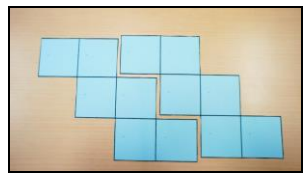
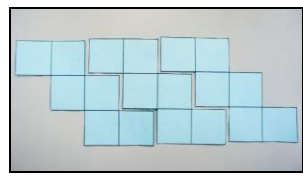
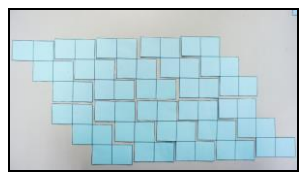
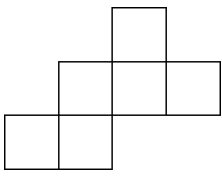
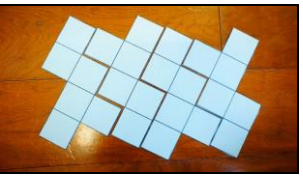
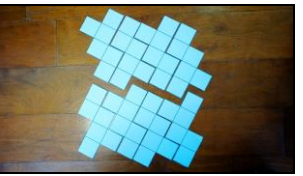
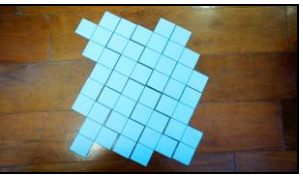
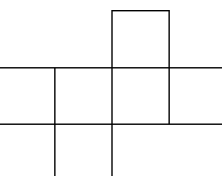
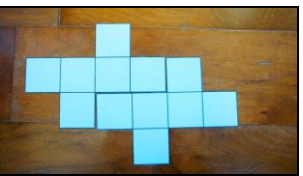
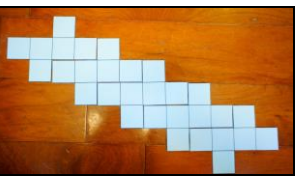
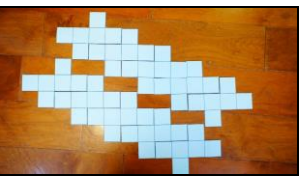
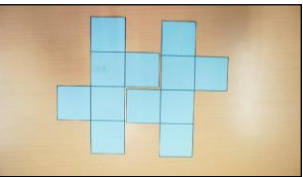
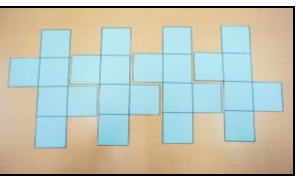
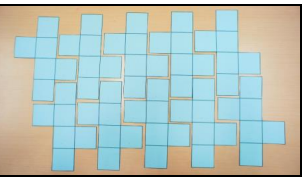
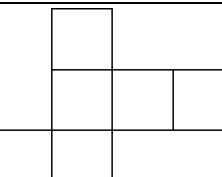
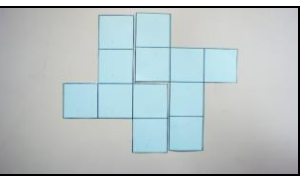
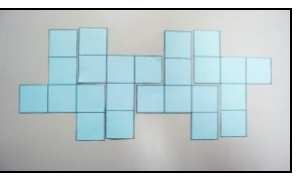
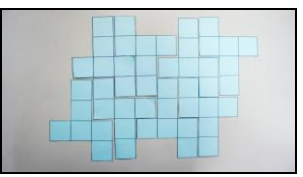
正四面體的展開圖	正四面體展開圖的平面拼貼圖形		
	A		
	B		
<b>操作結果紀錄</b>	1. 正四面體的展開圖有 A、B 兩種，利用兩種不同形式的展開圖進行平面填充圖形的拼貼後，都分別會有一種形式的平面填充圖形。 2. A 的部分是兩個正三角形互相的組合；B 的部分則是兩個平行四邊形互相的組合在一起。		
<b>綜合歸納</b>	1. 正四面體的兩種展開圖都能夠順利的完成平面填充圖形的拼貼。 2. 正四面體的展開圖可以拼貼出 2 種不同形式平面填充圖形。		

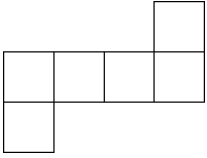
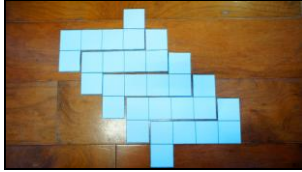
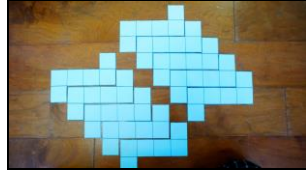
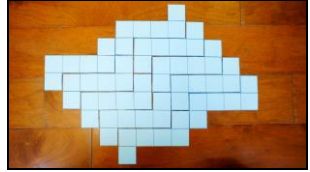


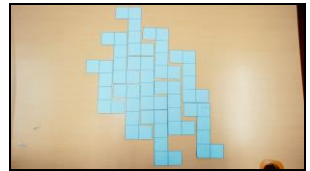
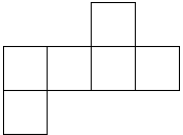
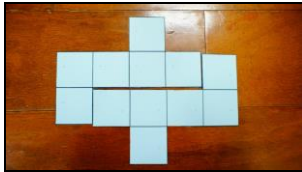
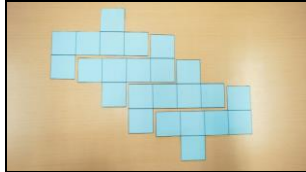
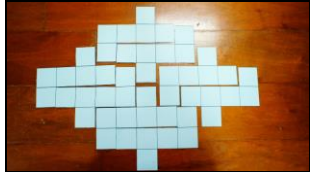

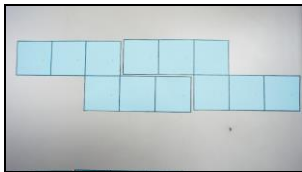
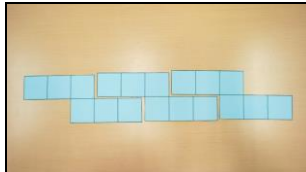
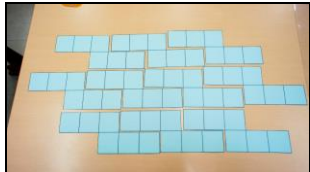
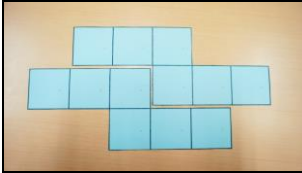
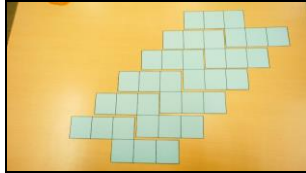
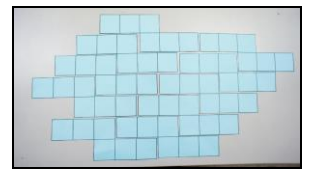
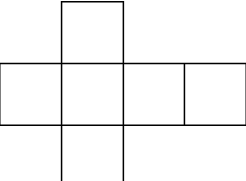
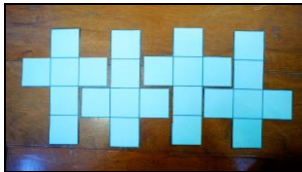

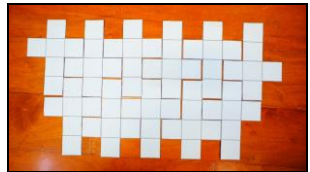
(二) 分別利用 11 種正六面體展開圖進行平面圖形的拼貼。

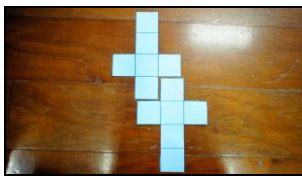
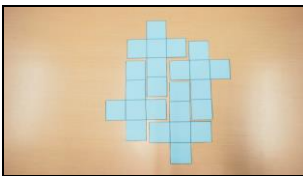

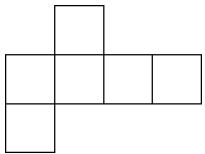
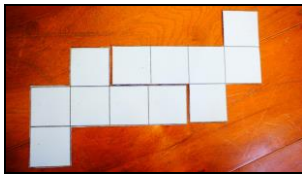


表 2-2 利用正六面體展開圖進行平面圖形拼貼的結果紀錄表

正六面體的展開圖	正六面體展開圖的平面拼貼圖形		
	A		
	B		
<b>操作結果紀錄</b>	總共可以拼貼出 A、B 兩種形式的平面填充圖形： A：會由三個部件組合成一個圖形模式，每組再拼貼在一起，其中一個部件會與前一組重疊，最後拼貼成一個完整的平面填充圖形。 B：會由兩個部件反方向（鏡射）排列，形成一組圖形模式，接著再將每個部件從上到下依序排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。		
	A		



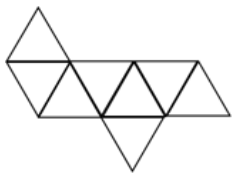
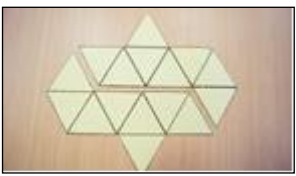
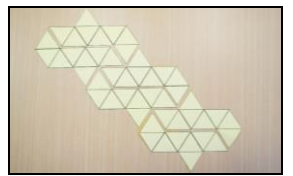
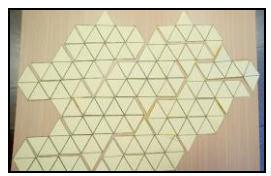
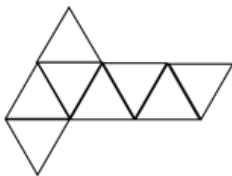
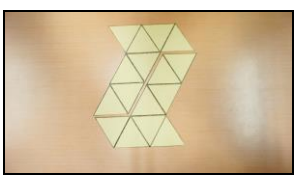
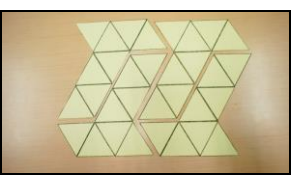
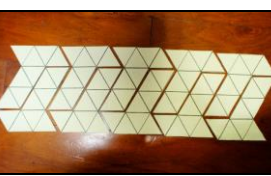
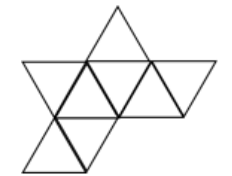


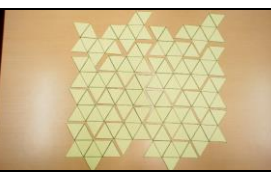
	B			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>共有 A、B 兩種形式的平面拼貼圖形：</p> <p>A：每一個部件即是一個圖形模式，從左到右依序排列組合，再將上下兩組拼貼組合即可形成一個完整的平面填充圖形。</p> <p>B：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，再將每組圖形以階梯的方式拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	A			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：將每一個部件以相同方向從左到右依序排列，再將上下兩組拼貼組合即可形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	A			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，並從左到右依序排列，再將上下兩組拼貼組合，就可形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	A			
	B			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>總共可以拼貼出 A、B 兩種形式的平面填充圖形：</p> <p>A：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，再將每組圖形以階梯方式向右下方拼貼組合，即可形成一個完整平面填充圖形。</p> <p>B：將每一個部件以相同方向從左到右依序排列，再將上下兩組拼貼組合就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	A			
<b>操作</b>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180</p>			

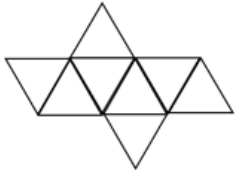
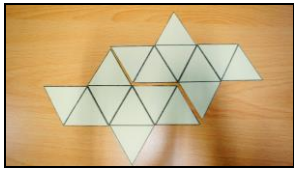
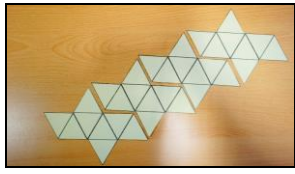
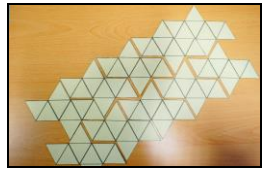
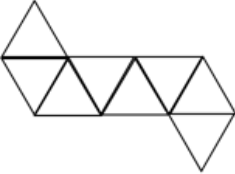
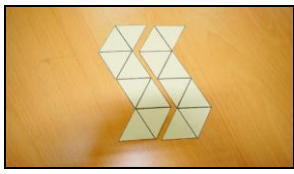
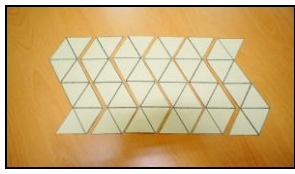
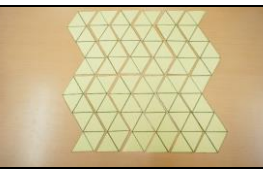
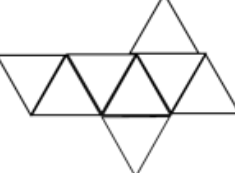
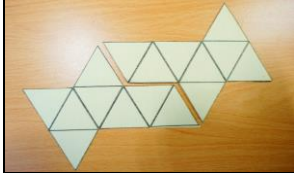
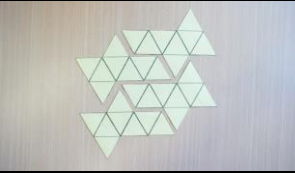

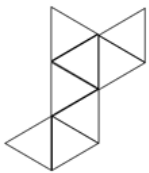



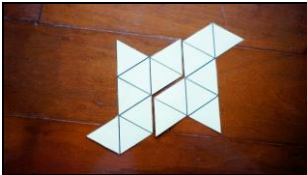

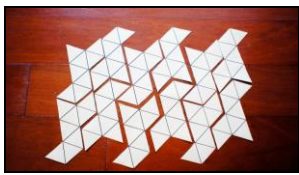
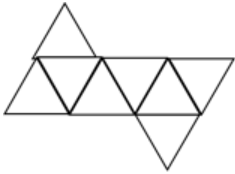
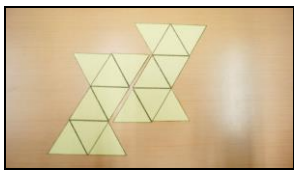
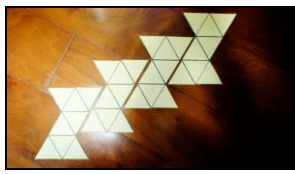
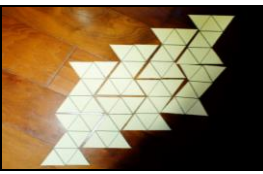
<p><b>結果 紀錄</b></p>	<p>度組合成一個圖形模式，並從左到右依序排列，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一平面填充圖形。一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
	<p>B</p>			
<p><b>操作 結果 紀錄</b></p>	<p>總共可以拼貼出 A、B 兩種形式的平面填充圖形：  A：將每一個部件以階梯方式同方向向右下方依序排列，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。  B：將每個部件同方向以階梯的方式向右下方排列，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p><b>操作 結果 紀錄</b></p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，再將每組圖形以階梯的方式向右下方拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p>B</p>				
<p><b>操作 結果 紀錄</b></p>	<p>總共可以拼貼出 A、B 兩種形式的平面填充圖形：  A：將每一個部件以相同方向從左到右依序排列，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。  B：將每個部件同方向以階梯的方式向左下方排列，形成一個圖形模式，再將左右兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			

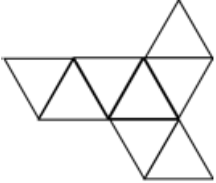
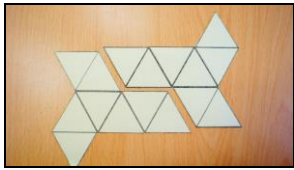
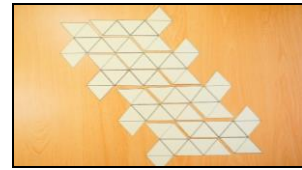

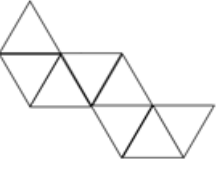

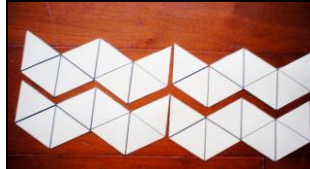




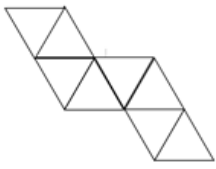


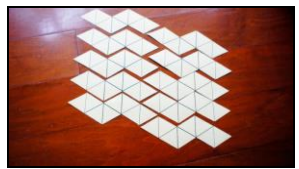
	B			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>總共可以拼貼出 A、B 兩種形式的平面填充圖形：</p> <p>A：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，再將每組從左到右依序排列，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p> <p>B：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，再將每組以階梯方式向右下方排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	A			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，再依序向下排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
<b>綜合歸納</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正六面體的 11 種展開圖都能夠順利的完成平面填充圖形的拼貼。</li> <li>2. 每一種的展開圖至少都能拼貼出 1 到 2 種的不同形式的平面填充圖形。</li> <li>3. 總計全部共可以歸納出 17 種不同形式的平面填充圖形。</li> </ol>			

(三) 分別利用 11 種正八面體展開圖進行平面圖形的拼貼。

表 2-2 利用正八面體展開圖進行平面圖形拼貼的結果紀錄表

	A			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，每組以階梯的方式依序向右下排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	A			
<b>操作結果紀錄</b>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，將每組從左到右依序排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	A			

<p>操作 結果 紀錄</p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 90 度組合成一個圖形模式，再將每組從上到下依序排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p>操作 結果 紀錄</p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：將每個部件同方向以階梯的方式向左下方排列，形成一個圖形模式，再將兩組上下拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p>操作結 果紀錄</p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：將每一個部件以相同方向從左到右依序排列，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p>操作 結果 紀錄</p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，將每組從上到下依序排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p>B</p>	<p>B</p>			
<p>操作 結果 紀錄</p>	<p>總共可以拼貼出 A、B 兩種形式的平面填充圖形： A：將每個部件同方向以階梯的方式向右下方排列，形成一個圖形模式，再將左右兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。 B：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，將每組以階梯的方式向左下方排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			

<p><b>操作 結果 紀錄</b></p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：將每個部件同方向以階梯的方式向左下方排列，形成一個圖形模式，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p><b>操作 結果 紀錄</b></p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，將每組以階梯的方式向右下方排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p>B</p>				
<p><b>操作 結果 紀錄</b></p>	<p>總共可以拼貼出 A、B 兩種形式的平面填充圖形：  A：將每一個部件以相同方向從上到下依序排列，再將上下兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。  B：兩個部件為一組，其中一個旋轉 180 度組合成一個圖形模式，將每組從左到右依序排列，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
	<p>A</p>			
<p><b>操作 結果 紀錄</b></p>	<p>只能拼貼出一種形式的平面填充圖形：將每個部件同方向以階梯的方式向左下方排列，形成一個圖形模式，再將左右兩組拼貼組合，就可以形成一個完整的平面填充圖形。</p>			
<p><b>綜合 歸納</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正八面體的 11 種展開圖都能夠順利的完成平面填充圖形的拼貼。</li> <li>2. 每種展開圖至少都能拼貼出 1 到 2 種的不同形式的平面填充圖形。</li> <li>3. 總計全部共可以歸納出 13 種不同形式的平面填充圖形。</li> </ol>			

**(四) 我們的發現：**

1. 分別將正四面體、正六面體和正八面體的每種展開圖複製後，進行拼貼平面圖形的拼貼，都能夠順利的互相組合成一個完整的平面填充圖形。
2. 正四面體、正六面體和正八面體的每種展開圖，至少都能拼貼出 1 到 2 種的不同形式的平面填充圖形；且正四面體、正六面體和正八面的展開圖分別可以拼貼出 2 種、17 種和 13 種不同形式的平面填充圖形。
3. 正四面體和正八面體拼貼成的 360 度平面，會由 6 個正三角形所構成；至於正六面體所拼

貼成的 360 度平面，則會由 4 個正方形所組成。

4. 正四面體、正六面體和正八面體展開圖拼貼完成的平面填充圖形，都是由單一種正多邊形（正三角形、正方形）所構成的，因此都是屬於正則鑲嵌圖形。

### （五）問題與討論：

1. 拼貼一個完整平面圖形的過程中，能夠相互組合的部位，必須要剛好能構成一個 360 度的圓周角，這樣才能夠形成一個緊密、沒有空隙的平面填充圖形；因為每個展開圖的形式並不相同，所以不同正多面體展開圖拼貼時，需要的條件如下：

(1) 正四面體展開圖 A 的三條邊是 180 度的平角，且三個內角為 60 度；因此進行平面圖形拼貼時，只要兩個平角互相組合（只要兩條邊相互組合在一起）；或者利用 6 個 60 度角來組合，同樣可以完成拼貼出一個完整的平面填充圖形。

(2) 正六面體展開圖的拼貼，要順利組合成一個完整的 360 度平面，我們找出了四種角度的組合方式：

① 第一種：由一個 90 度的直角和 270 度的角度來組合。

② 第二種：由兩個 180 的平角組合而成。

③ 第三種：由 90 度、90 度、180 度所組成。

④ 第四種：由四個 90 度的直角組合而成。

由上面四種角度的組合方式，才能構成一個完整的平面填充圖形。

(3) 正八面體展開圖的拼貼過程中，要順利組合成一個完整的 360 度平面，我們則找出了五種角度的組合方式：

① 第一種：需要一個 120 度角和 240 度角來相互配合。

② 第二種：由兩個 60 度角和 240 度的角相互組合。

③ 第三種：由兩個 60 度角和兩個 120 度角組合而成。

④ 第四種：由兩個 180 度的平角組合而成。

⑤ 第五種：由 60 度、120 度、180 度所組成。

由上面五種角度的組合方式，才能拼貼成一個完整的的平面填充圖形。




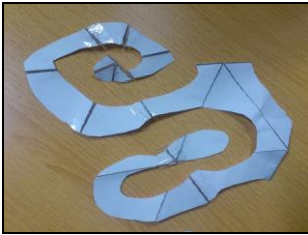
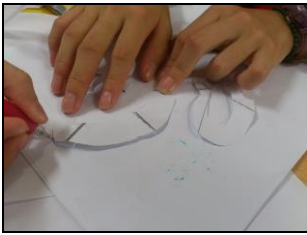

2. 如果不利用多面體的基本展開圖來進行拼貼，而是直接使用剪刀將正多面體的立體圖剪開，然後攤開成平面的展開圖，這樣的展開圖是不是還能夠完整的拼貼成平面圖形呢？而且正四、六、八面體展開圖拼貼成平面填充圖形，都是屬於正則鑲嵌圖形，也因此我們推測隨意剪開後的圖形應該可以相互拼貼在一起。

三、將正四、六面體隨意剪開後攤平所形成的圖形，是否能拼貼成完整的平面填充圖形呢？

(一) 作法：

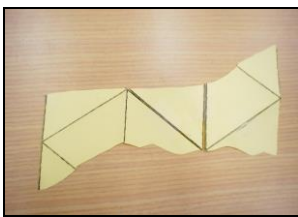
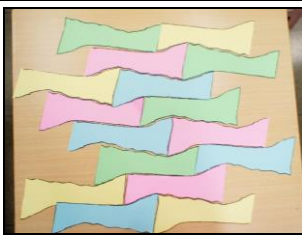
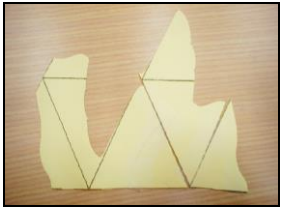





1. 使用剪刀將正四面體、正六面體的立體圖形隨意剪開，然後打開攤平成一個展開圖。  
(剪的過程中後形成的展開圖不能被剪成兩半)
2. 利用這個展開的圖形作為底圖，在另一張紙利用鉛筆描出圖形的輪廓。
3. 使用影印機複製多份，然後將複製後的圖形剪下來。
4. 利用這些展開圖進行平面圖形的拼貼，看看能不能順利的完成一個完整的平面填充圖形。

(二) 過程圖示：

		
▲圖 3-1 製作正四、六面體 的立體圖形	▲圖 3-2 製作完成 的正多面體	▲圖 3-3 利用剪刀將正多面體 隨意剪開
		
▲圖 3-4 剪開後，攤開成展開圖	▲圖 3-5 將展開圖複製許多份	▲圖 3-6 試著拼貼成平面填充圖形


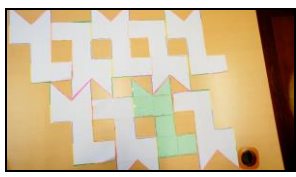
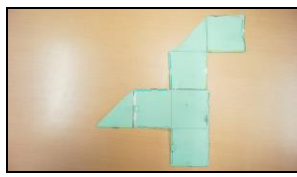

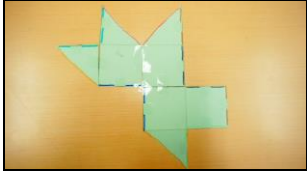



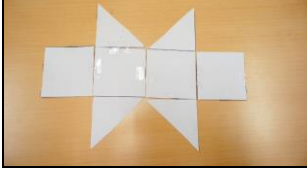


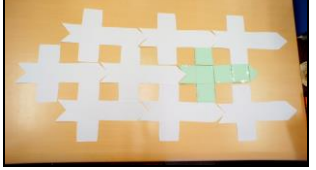
(三) 過程記錄：

表 3-1 正四面體剪開後的展開圖和平面填充圖形的拼貼結果紀錄表

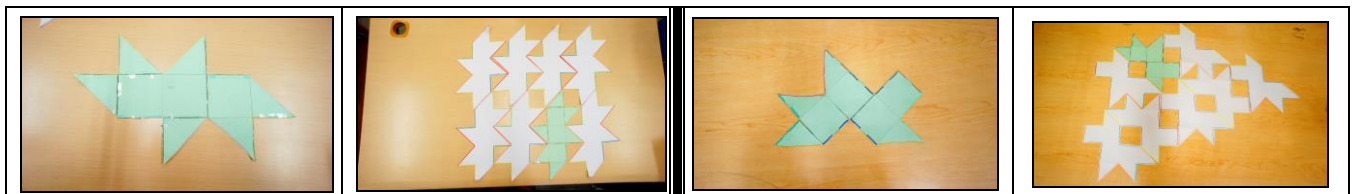
剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形	剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形
			
			

			
			
			
			
<b>操作後的觀察發現</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 正四面體剪開後的展開圖會變成一個較不規則的圖形。</li> <li>2. 進行拼貼的時候，每個相同的圖形彼此之間，都能夠剛剛好緊密且沒有空隙的組合在一起，形成一個具有規律且完整的平面填充圖形。</li> </ol>		

表 3-2 正六面體剪開後的展開圖和平面填充圖形拼貼結果紀錄表（較規則的剪法）

展開圖形成的角度等於 45 度、90 度和 135 度			
剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形	剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形
			
			
			





操作後的  
觀察發現

1. 正六面體剪開後的展開圖，會變成一個不規則的圖形，圖形中間會有著三角形或正方形的空隙。
2. 展開圖周圍形成的角度為 45 度、90 度或 135 度。
3. 進行拼貼時，圖形彼此間沒有辦法完全緊密且沒有空隙的組合在一起，拼貼成為一個完整的平面填充圖形；但還是能夠找到互相組合在一起的部分。
4. 雖然圖形無法完全拼貼成完整的面，但是拼貼後的圖形形成一個規律的圖形，由 2 或 3 個全等的多邊形重複的排列在一起，並且無限的延伸鋪滿整個平面。

展開圖周圍形成的角度等於 45 度、90 度和 135 度

剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形	剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形

操作後的  
觀察發現

1. 正六面體剪開後的展開圖，會變成一個不規則的圖形，展開圖周圍形成的角度等於 45 度、90 度和 135 度。
2. 進行拼貼時，圖形彼此間可以找到互相組合的部分，而且完全緊密且沒有空隙的組合在一起，拼貼成為一個完整的平面填充圖形。

表 3-3 正六面體剪開後的展開圖和平面填充圖形拼貼結果紀錄表（較不規則的剪法）

比較不規則的剪法（最後形成的圖形會比較複雜）			
剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形	剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形
操作後的 觀察發現	1. 正六面體剪開後的展開圖，會變成一個比正四面體剪開後的展開圖更為複雜且不規則的圖形。		

	<p>2. 進行拼貼時，圖形彼此間沒有辦法完全緊密且沒有空隙的組合在一起，拼貼成完整的面；但還是能夠找到互相組合在一起的部分，拼貼後的圖形形成一個規律的圖案。</p> <p>3. 拼貼出來的圖形，會由 2 到 4 個全等的多邊形重複的排列在一起（包含圖形本身和中間空隙），展開圖和空隙兩者互相組合，而且可以無限的延伸鋪滿整個平面，形成一個具有規律的平面圖形。</p>
--	---

**（四）我們的發現：**

1. 正四面體的拼貼圖形，都能夠找到完全互相緊密組合在一起的部分，並順利的由單一個圖形重複且緊密排列，沒有重疊，沒有縫隙，無限延伸鋪滿整個平面，互相拼貼成為一個規律且完整的平面填充圖形。
2. 將正六面體以較規則的剪法來處理的話，圖形周圍所形成的角度為 45 度、90 度和 135 度，但是進行拼貼後，卻會出現以下兩種情形：
  - （1）展開圖間能夠緊密無空隙的拼貼在一起，形成一個完整的平面填充圖形。
  - （2）圖形彼此間沒有辦法完全緊密且沒有空隙的組合在一起，但還是能夠找到互相組合在一起的部分，並由 2 到 3 個全等的多邊形重複的排列在一起，無限的延伸鋪滿整個平面，成為一個具有規律的平面圖形。
3. 利用較不規則的方式處理正六面體，剪開後的展開圖會變成一個比正四面體剪開後的展開圖更複雜且不規則的圖形。進行拼貼時，圖形彼此間沒有辦法完全緊密且沒有空隙的組合在一起，但還是能夠找到互相組合在一起的部分，並由 2 到 4 個全等的多邊形重複的排列在一起，無限的延伸鋪滿整個平面，成為一個具有規律的平面圖形。

**（五）問題與討論：**






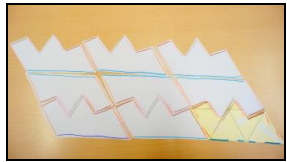
1. 為了幫助我們找到或更清楚的了解拼貼平面填充圖形的過程中，圖形間能夠相互組合、拼貼在一起的原因。接下來的活動，我們將利用下列的方法：
  - （1）利用不同顏色的彩色筆將剪過的痕跡畫上不同記號，再拼貼成平面填充圖形。
  - （2）拼貼的時候，仔細觀察畫在圖形上面的顏色記號會出現什麼樣的情形。

四、沿著剪的痕跡，利用不同顏色的彩色筆加上記號，複製後進行平面填充圖形的拼貼，了解各種正多面體剪開後的展開圖哪些部位在進行拼貼時可以互相組合在一起。

(一) 作法：

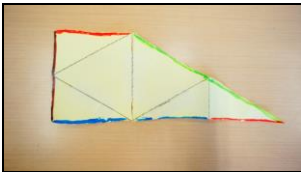
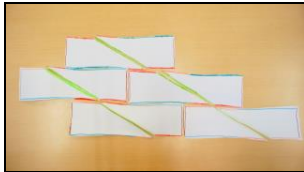
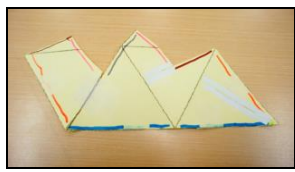




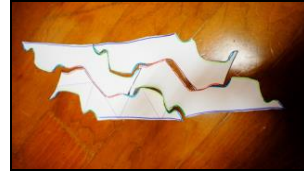
1. 將正多面體的立體圖形隨意剪開，然後打開攤平成展開圖。
2. 剪的過程中，沿著剪的地方，利用不同的色筆進行顏色的標示。
3. 利用這個展開圖形作為底圖，在另一張紙利用鉛筆描出它的輪廓。
4. 沿著複製後圖形輪廓剪下，然後使用影印機複製多份，並利用色筆進行顏色的標示。
5. 最後試試看能不能將這些同樣的展開圖形拼貼成一個完整 360 的平面填充圖形。
6. 從互相拼貼的過程中，找出相同顏色相同的地方，並且互相拼貼，然後從當中觀察有沒有哪些規則存在。

(二) 過程圖示：

		
▲圖 4-1 利用剪刀直接將正多面體剪開	▲圖 4-2 剪的過程中，利用色筆沿著剪的痕跡做上記號	▲圖 4-3 利用空白紙將原稿複製多份
		
▲圖 4-4 用剪刀將複製後的展開圖剪下來	▲4-5 將每個複製後的圖形全部都做上記號	▲圖 4-6 顏色對顏色，將圖形互相的拼貼成平面填充圖形



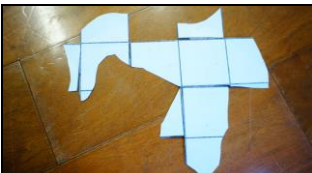


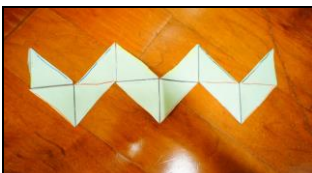


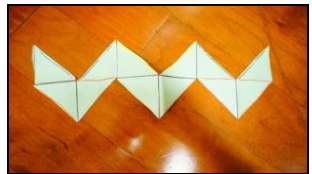

(三) 過程記錄：

表 4-1 正四面體剪開後展開圖的拼貼紀錄表 (剪過的地方使用不同顏色的色筆做上記號)

剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形	剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形
			
			

			
操作後的 觀察發現	依照相同顏色對相同顏色的方式進行拼貼時，展開圖和展開圖之間，相同顏色的部分會剛好互相的組合在一起，互相緊密且沒有空隙的拼貼在一起，形成一個完整的平面填充圖形。		

表 4-2 正六面體剪開後展開圖的拼貼紀錄表（剪過的地方使用不同顏色的色筆做上記號）

比較規則的剪法		比較不規則的剪法（較複雜的圖形）	
剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形	剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形
			
			
操作後的 觀察發現	依照相同顏色對相同顏色的方式進行拼貼時，展開圖和展開圖之間都沒有辦法緊密、沒有空隙的組合在一起，無法拼貼成一個完整的平面填充圖形，但還是能夠找到互相拼貼在一起的部位，展開圖和空隙兩者互相組合，形成一個具有規律的平面圖形。		
展開圖周圍形成的角度等於 45 度、90 度和 135 度			
剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形	剪開後攤開的展開圖	展開圖的拼貼圖形
			
▲ 圖 A 不按照顏色對顏色的拼法			
			
▲ 圖 B 按照顏色對顏色的拼法			
操作後的 觀察發現	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 原本不按照顏色對顏色的拼法，圖形可以拼成平面填充圖形（如上圖 A）。</li> <li>2. 若是按照顏色對顏色的拼法，拼貼出來的圖形依然會出現正方形的缺口，展開圖和展開圖之間沒有辦法緊密且沒有空隙的組合在一起，無法拼貼成一個完整的平面填充圖形；但還是能夠找到互相拼貼在一起的部位，展開圖和空隙兩者互相組合，形成一個具有規律的平面圖形（如上圖 B）。</li> </ol>		

**(四) 我們的發現：**

1. 正四面體剪開後的展開圖，展開圖和展開圖之間，每個圖形能夠互相組合在一起的地方，都會剛剛好是原來利用色筆做記號的地方，且能夠緊密、沒有空隙的拼貼在一起，形成一個完整的平面填充圖形。
2. 正六面體的剪開後攤開的展開圖，展開圖和展開圖之間，每個圖形能夠互相組合在一起的地方，都會剛剛好是原來利用色筆做記號的地方；但卻無法完全緊密、沒有空隙的拼貼成一個完整的平面，展開圖和空隙會形成一個具有規律的圖形。

**(五) 問題與討論：**

1. 每一個正四面體的剪開後的展開圖，都能夠緊密且沒有空隙的拼貼成為一個完整的平面圖形，我們推測可能的原因如下：
  - (1) 正四面體的立體圖展開後形成的展開圖 A 和 B，相鄰的兩個面展開的時候，會形成一個完整的 180 度平角，最後變成一個正三角形或平行四邊形（如下表 4-3）。
  - (2) 相鄰的兩個面展開的時候，所形成的 180 度平角，能夠提供一個完整的面讓我們來剪。

**表 4-3 正四面體的展開圖示意圖**

項目	將正四面體以展開圖的方式剪開	沿著剪開的邊展開成為一個正三角形的展開圖	相鄰的面展開的時候會形成一個完整的 180 度平角
展開圖 A			
展開圖 B			

2. 每一個正六面體的剪開後的展開圖，拼貼後可能會出現三角形、四邊形或更複雜的空隙，而無法緊密的拼貼在一起，形成一個完整的平面圖形的原因可能如下（下表 4-4）：
  - (1) 正六面體的 11 種展開圖，相鄰的兩個面展開後，則會形成 90 度的缺角，原本可以剪的 180 度少了 90 度可以來剪，且圖形周圍和圖形裡面所形成的角度會是 90 度或 270 度。
  - (2) 相鄰的兩個面展開後，會產生位移的情形，導致剪開後圖形也會產生比較多的變化。

**表 4-4 正六面體的展開圖**

將正六面體以展開圖的方式剪開	沿著剪開的邊展開成為一個多邊形的展開圖	相鄰的面展開的時候會形成 90 度缺角和位移

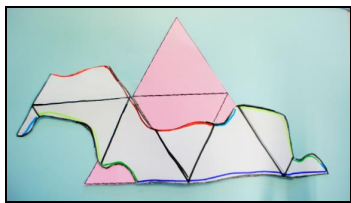
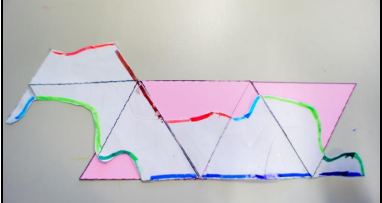
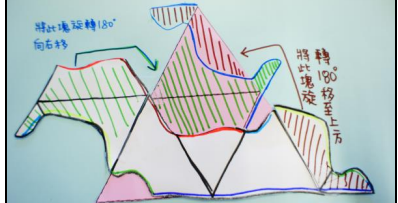
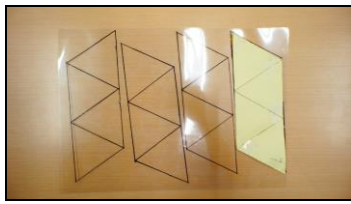
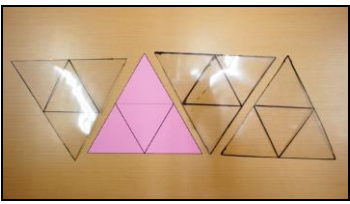
3. 剪刀剪開後的面所形成的兩條邊，一定會是**互補的關係**，這也就是為什麼正四面體或正六面體隨意剪開後的展開圖，相同顏色的部位能夠互相組合在一起，且圖形間可以彼此互相拼貼，因此我們認為正四面體和正六面體剪開後的展開圖能夠互相拼貼的原因，應該會是因為鑲嵌圖形的概念。
4. 正六面體有 11 種基本展開圖，如果要試著將剪開後的圖形拼貼回原本的圖形將會花費相當多的時間，而正四面體只有 2 種基本展開圖；所以接下來的活動，我們將先以正四面體的展開圖配合鑲嵌圖形的概念進行深入的探討和研究。

## 五、正四面體剪開後的展開圖為什麼可以拼貼成平面的填充圖形呢？

### (一) 做法：

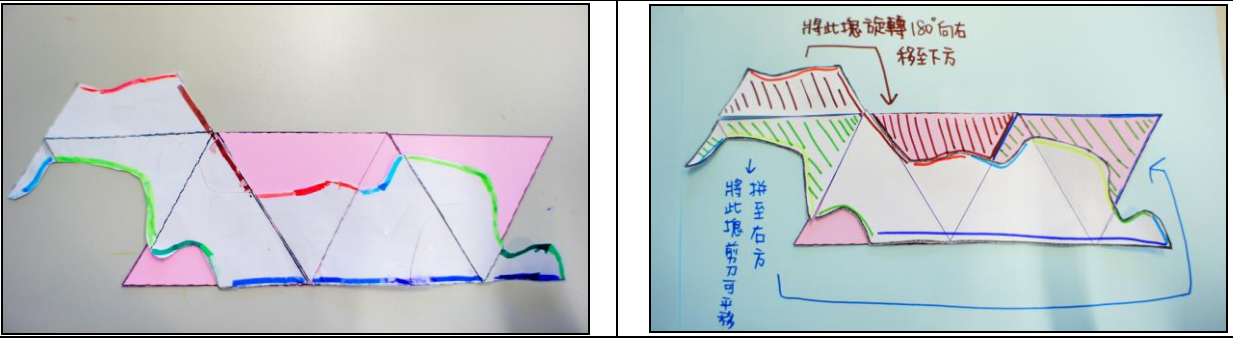
1. 利用透明的塑膠片來製作兩種正四面體的展開的透明圖形。
2. 將兩種展開圖的透明片分別放在各種正四面體隨意剪開後的展開圖形上方。
3. 試著將正四面體隨意剪開後的展開圖，利用移位、翻轉的方式復原成正四面體的兩種基本展開圖形，並從中找出展開圖為什麼能夠鑲嵌在一起的規則。
4. 將正四面體剪開後的展開圖拼貼成平面的填充圖形，然後將兩種四面體展開圖的透明片分別鋪放在拼貼完成的圖形上方，並試著從中找出展開圖之間鑲嵌在一起的規則。

### (二) 過程圖示：

方法一			
	▲圖 5-1 將剪開後的展開圖放在正三角形上方	▲圖 5-2 將剪開後的展開圖放在正三角形上方	▲圖 5-3 試著將剪開後的展開圖復原成原本的圖形
	方法二		
▲圖 5-4 製作正四面體展開圖(平行四邊形)的透明片		▲圖 5-5 製作正四面體展開圖(正三角形)的透明片	▲圖 5-6 將透明片放在拼貼完成的平面圖形上，找出鑲嵌的規則

### (三) 過程記錄：

表 5-1 利用平移和旋轉將正四面體剪開後的展開圖復原成原始的展開圖形

利用平移和旋轉將正四面體剪開後的展開圖復原成原始的展開圖形(平行四邊形)	
圖片說明	
操作步驟	在正四面體剪開後攤開的展開圖下方，放置一個正四面體的基本展開圖形(平行四邊形)作為底圖。 將左方綠色部位平移到右方；左上方咖啡色部位旋轉 180 度向右移。

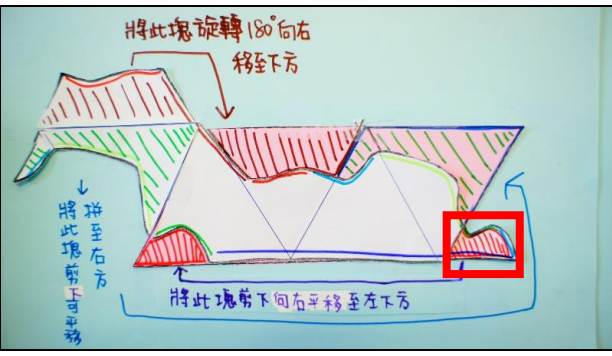
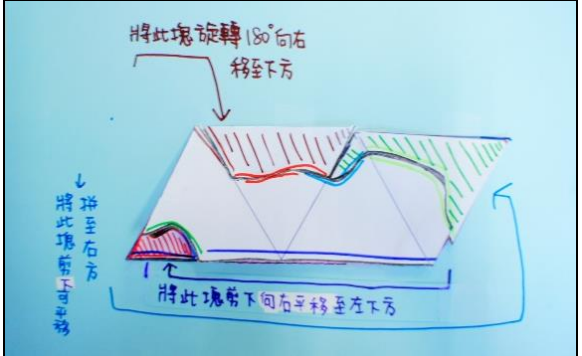
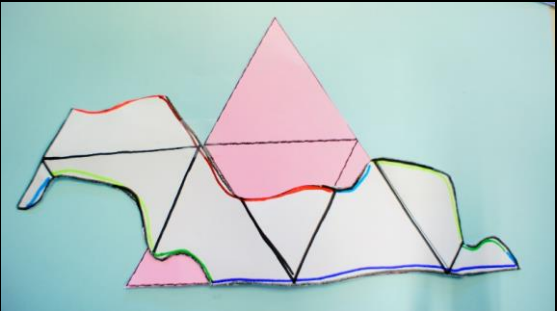
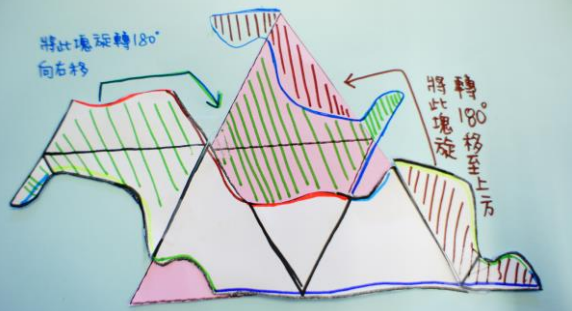
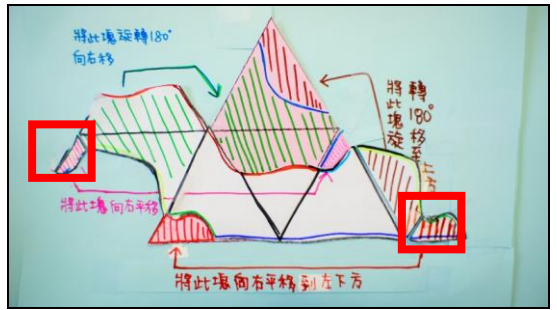
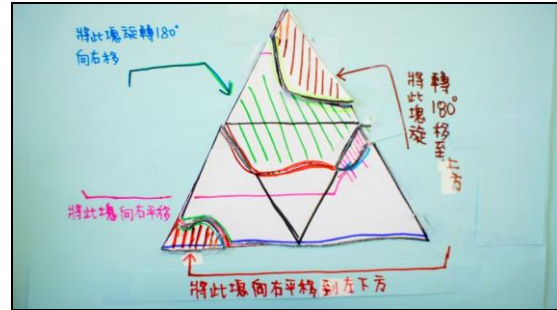
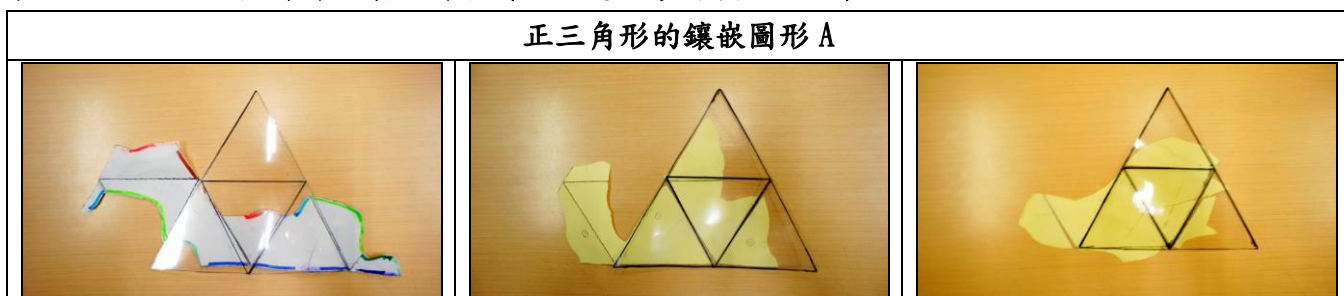
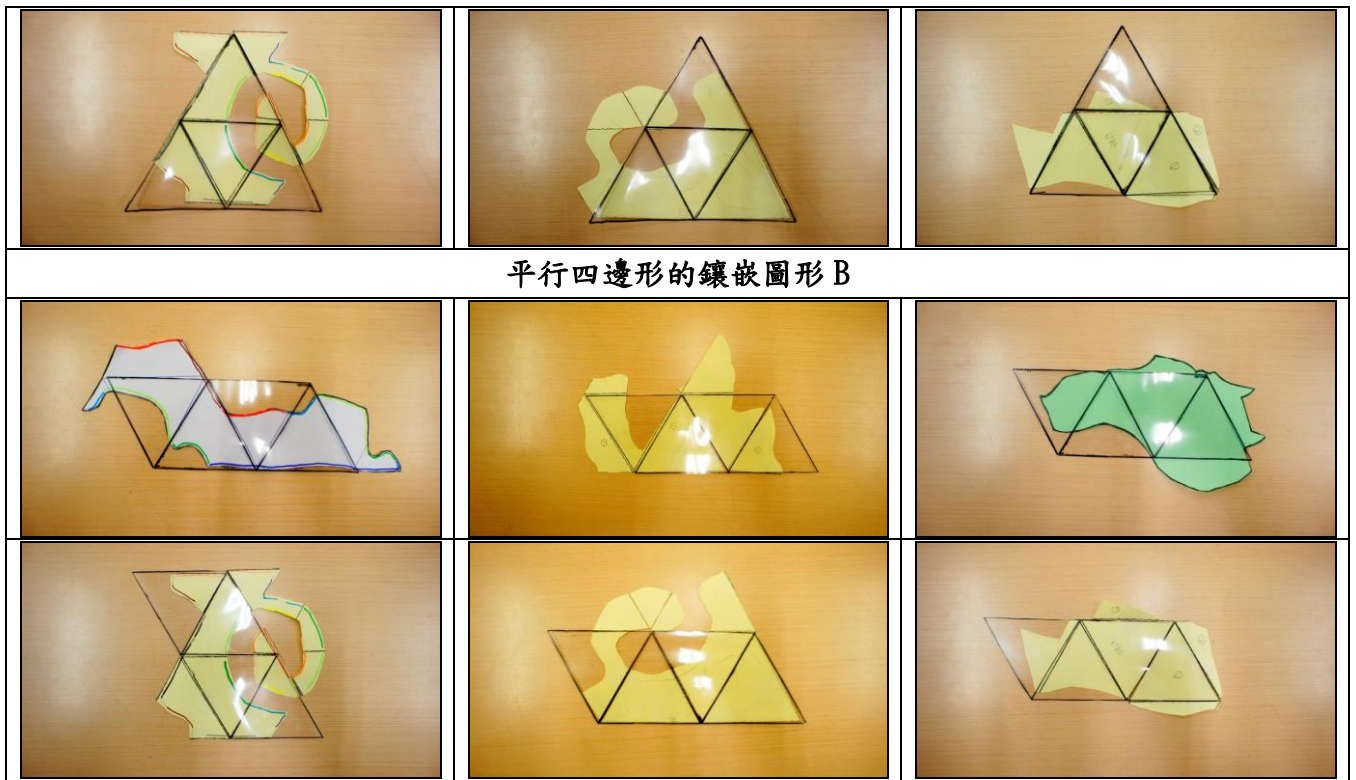
<p>圖片說明</p>		
<p>操作步驟</p>	<p>左下方粉紅色的部分可以由右下角突出的地方來進行填充。</p> <p>剪下圖形，並將圖形分別進行平移和旋轉，就可以順利的將正四面體剪開後的展開圖，復原成一個完整的正四面體展開圖。</p>	
<p>利用平移和旋轉將正四面體剪開後的展開圖復原成原始的展開圖形（正三角形）</p>		
<p>圖片說明</p>		
<p>操作步驟</p>	<p>在正四面體剪開後攤開的展開圖下方，放置一個正四面體的基本展開圖形（正三角形）作為底圖。</p> <p>將左邊綠色部分旋轉 180 度向右移;右下方咖啡色旋轉 180 度移至上方。</p>	
<p>圖片說明</p>		
<p>操作步驟</p>	<p>右下方紅色部份向左平移至左下方;左方粉紅色部分向右平移至右方。</p> <p>剪下圖形，並將圖形分別進行平移和旋轉，放入指定的區域，就可以順利的將正四面體剪開後的展開圖，復原成一個完整的正四面體展開圖。</p>	

表 5-2 正四面體展開圖的鑲嵌圖形（加上透明膠片輔助說明）







平行四邊形的鑲嵌圖形 B

表 5-3 利用透明塑膠片解釋鑲嵌圖形操作紀錄表

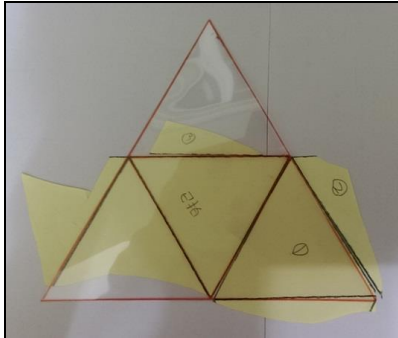

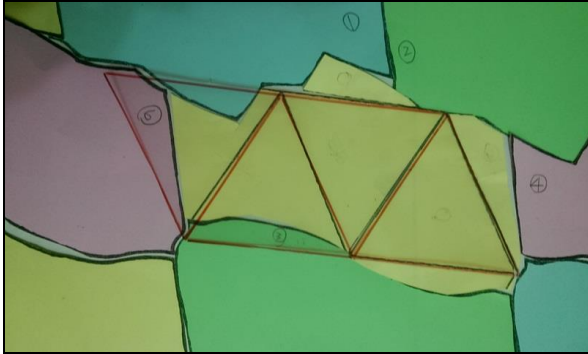
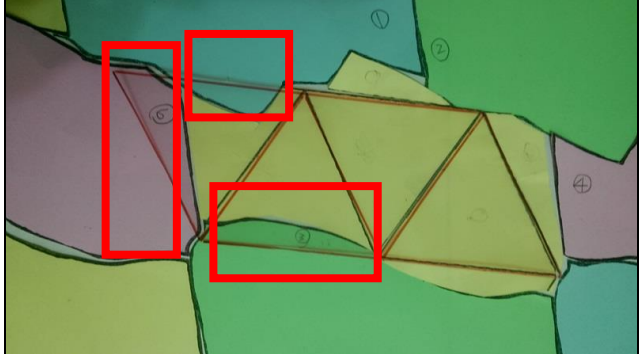
<p>圖片說明</p>		
<p>操作步驟</p>	<p>將粉紅色的透明片(正四面體的基本展開圖-正三角形),放在正四面體剪開後的展開圖(黃色部分)上方。</p>	<p>左上方由複製後的藍色展開圖填補;右上方複製的綠色展開圖填補;左下方由下方複製後的綠色展開圖填補。</p>
<p>圖片說明</p>		
<p>操作步驟</p>	<p>將粉紅色的透明片(正四面體的基本展開圖-平行四邊形),放在正四面體剪開後的展開圖(黃色部分)上方。</p>	<p>左方由複製的粉紅色展開圖填補;左上方由複製後的藍色展開圖填補;左下方由下方複製後的綠色展開圖填補。</p>

表 5-4 利用透明塑膠片解釋鑲嵌圖形操作紀錄表

四面體的展開圖（蓋上正三角形的透明片）		
		
		
四面體的展開圖（蓋上平行四邊形的透明片）		
		
		

**(四) 我的發現：**

1. 正四面體剪開後的各種展開圖，透過將圖形本身進行平移、旋轉的方式，都可以將各種不規則的展開圖復原成到完整的正四面體的基本展開圖（正三角形和平行四邊形）。
2. 正四面體的兩種基本展開圖，正三角形是屬於正則鑲嵌圖形，而平行四邊形則是凸四邊形，兩種圖形都符合鑲嵌的原則，因此剪開後的展開圖互相拼貼後也一定可以形成鑲嵌圖形！
3. 將透明膠片放在展開圖的拼貼圖形上方後，可以清楚觀察到展開圖之間相互組合在一起的部位及鑲嵌在一起的方式，而所有展開圖在正三角形和平行四邊形透明片下所呈現的鑲嵌的方式都一樣，具有共同的規律性。

**(五) 問題與討論：**

1. 根據上面的發現，我們認為如果立體圖的展開圖是一種正多邊形，使用剪刀隨意剪開後的展開圖，也一定能夠鑲嵌在一起，形成一個完整的平面填充圖形。
2. 因為正六面體和正八面體本身的展開圖，就不是凸四邊形，也不是正多邊形，不符合鑲嵌的基本原則，因此剪開後的圖形，拼貼後就不會是完整的鑲嵌圖形。

## 伍、結論

- 一、將正四、六、八面體的每種展開圖複製後，進行平面圖形的拼貼，至少都能拼貼出 1 到 2 種的不同形式的平面填充圖形；且正四面體、正六面體和正八面的展開圖分別可以拼貼出 2 種、17 種和 13 種不同形式的平面填充圖形，它們都是由單一種正多邊形（正三角形、正方形）所構成的，屬於正則鑲嵌圖形。
- 二、要完成一個完整平面圖形的拼貼，圖形間能夠相互組合的部位，必須要剛好能構成一個 360 度的圓周角，這樣才能夠形成一個緊密、沒有空隙的平面填充圖形。
- 三、剪刀剪開後所形成的兩條邊，一定會是互補的關係，所以正四、正六面體隨意剪開後的展開圖，相同顏色的部位必定能互相組合在一起，圖形間可以互相找到拼貼在一起的部位。
- 四、正四面體相鄰的兩個面展開時，會形成一個完整的 180 度平角，能提供一個完整的面來剪；將剪開後的展開圖進行平移、旋轉，就能將不規則的展開圖復原成正三角形和平行四邊形（凸四邊形），兩種符合鑲嵌原則的圖形，因此剪開後的展開圖必定能緊密無空隙的拼貼在一起，形成一個平面的鑲嵌圖形，且展開圖間組合在一起的部位及鑲嵌的方式都一樣，具有共同的規律性。
- 五、如果是正六面體的話，形成的展開圖和拼貼後的圖形也會有不同的情形產生：
  - （一）採用較規則的剪法處理後產生的展開圖形，圖形周圍所形成的角度會是 45 度、90 度和 135 度，拼貼後，展開圖間能緊密無空隙的拼貼成平面填充圖形，或者形成一個由 2 到 3 個全等多邊形重複排列，具有規律的平面圖形。
  - （二）採用較不規則的剪法處理，會形成一個不規則且複雜的圖形。拼貼時，無法緊密無空隙的組合在一起，會形成一個由 2 到 4 個全等的圖形重複排列，具有規律的平面圖形。
- 六、因為正六面體本身的展開圖就不是凸四邊形，也不是正多邊形，不符合鑲嵌的基本原則，而展開圖的相鄰兩個面展開後，會產生位移的情形，且圖形周圍和裡面所形成的角度為 90、180 和 270 度，導致剪開後圖形就會產生比較多的變化，剪開後的圖形拼貼時就不會是完整的鑲嵌圖形。拼貼後可能會出現三角形、四邊形或更複雜的空隙，而無法完全緊密的鑲嵌在一起。
- 七、如果立體圖形的展開圖是一種正多邊形或凸四邊形，使用剪刀隨意剪開後的展開圖，互相拼貼時必定能夠緊密、無空隙的鑲嵌在一起，形成一個完整的平面填充圖形。

## 陸、建議

- 一、根據研究的結果，可以試著推論正八、十二、二十面體剪開後的展開圖，有沒有辦法緊密無空隙的拼貼成一個平面的鑲嵌圖形；同時也可以進一步的深入探討和研究其它正多面體剪開後拼貼時所形成的圖案可能會出現的變化，或透過平移、鏡射和旋轉是否可以找到圖形的規律，以及產生這些變化的主要原因是什麼。
- 二、針對我們研究的內容，可以進一步的研究和思考這樣的鑲嵌圖形概念能不能應用在日常生活中，例如環境的布置，藝術的創作，和建築物的設計上，使這個研究主題和我們的生活能更緊密的互相結合。

## 柒、參考資料

- 一、秋山仁（2013）。愈玩愈聰明 IQ 遊戲大百科。天下雜誌。
- 二、劉欣懋：生活中的數學—生生不息鑲嵌圖形。
- 三、洪雪芬、陳幸永：鑲嵌圖形探索—數學繪本之教學運用。
- 四、中華民國 46 屆中小學科學展覽會國小組數學作品。柏拉圖的天空—正多面體展開圖之研究。
- 五、中華民國 47 屆中小學科學展覽會國中組數學科作品。柏拉圖的送禮。
- 六、中華民國 50 屆中小學科學展覽會國中組數學科作品。正六面體與六連正方形。

## 【評語】 080402

1. 本件作品進行平面覆蓋的實驗，作者們首先討論正四、六、八面體的展開圖是否能順利完成平面覆蓋。作者透過實驗方式得到的結論：可以！！其主因是上述展開圖的拼貼皆能順利完成一個完整的 360 度平面。
2. 其次，作者考慮將正四邊體、正六面體之立體圖形隨意以剪刀剪開。經由實驗發現：正四面體可以順利完成平面覆蓋且覆蓋後的平面圖形有些是很美的(可以視為一種藝術創作)。但正六面體剪開後的平面圖形較多樣(或者較美)其主因是無法完成平面覆蓋(即平面圖形中有空隙)。
3. 最後作者探討「正四面體隨意剪開後，為什麼可以完成平面覆蓋？」由實驗發現：隨意剪開後的展開圖可以透過移位翻轉還原成正四面體的兩種基本展開圖形：正三角形與平行四邊形。
4. 正四體、正六面體隨意剪開後攤平後所呈現的圖形有些是很美的，例如第三頁所呈現的。期許作者們繼續努力往藝術創作邁進。
5. 本作品僅考慮正四面體與正六面體，作者也期許未來能討論正八、十二、二十面體。期待作者們有好的成果呈現。