中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080401

正方形疊羅漢

學校名稱：嘉義縣大林鎮三和國民小學

作者：	指導老師：
小四　簡菊蓁	孫安佑
小四　楊詠捷	賴信宏
小四　簡毓庭	
小四　何羽薇	

關鍵詞：正方形、多邊形、最多邊數

□ 正方形疊羅漢 □

摘要：

這次的研究是要找出，當利用正方形排列成多邊形時，最多邊數的多邊形，其邊數的快數算法。首先我們討論限制堆疊方式的必要性，再透過圖形觀察，找出影響邊數變化的因素。再利用其因素，找出能排出最多邊數的**「十字形排法」**。推排出不同正方形數時的最多邊形邊數，再觀察其邊數間的關係，找出五個規則，之後先證明這五個規則的正確性，再利用其找出快速算出最多邊多邊形邊數的算法步驟，得到我們要找的研究結果。

壹、 研究動機：

有一次數學課，在上四邊形周長問題時，老師和大家玩了一個數學遊戲，就是利用 6 個正方形來排一個多邊形。排列規則是相連正方形的兩個角要對齊好，不可以歪掉，還有也不可以一角連一邊，問這個多邊形最多有幾個邊。大家很快就排出來了，於是老師又問那用 7 個、8 個正方形來排，最多又可以排成幾個邊。最後，老師說能在 3 分鐘內排 9 個正方形的最多邊形邊數，當天就不出數學功課。大家都非常認真的排，不過沒有人排出來，這時我們就想，有沒有方法可以一下子就算出最多邊形的邊數，而不慢慢的用正方形來排呢？

貳、 研究目的：

找出快速算出多個正方形所能排出最多邊形的邊數。

參、 研究器材：

正形圖卡、方格紙。

肆、 研究方法：

1. 提出問題，實際操作並簡單討論。
2. 觀察討論，再提出問題。
3. 再就所提出的問題進行操作討論。
4. 重複多次問題操作討論後，歸納所得結果　。

伍、 研究過程：

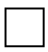
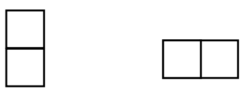
一、 提出問題實際操作並簡單討論：

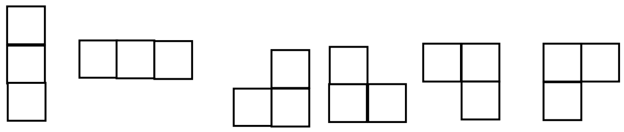
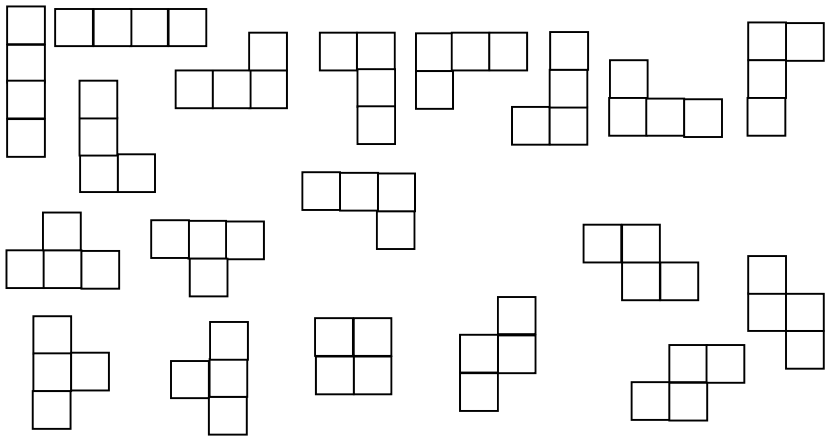
首先我們提出幾個在觀察討論前要先想想的問題來討論：

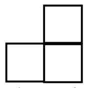
（問題）為什麼老師要規定正方形的堆疊方法必須是相連正方形的兩個邊和角要對齊好，不可以歪掉，還有也不可以一角連一邊呢？

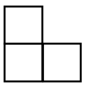
（實際操作）我們將正方形依三種方式堆疊，先簡單堆疊 1 至 4 個正方形，並作簡單討論，其造成的結果如下：

（方法一：邊角對齊的整齊堆疊）

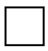
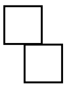
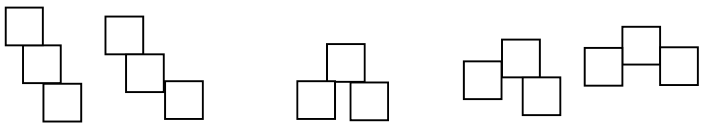
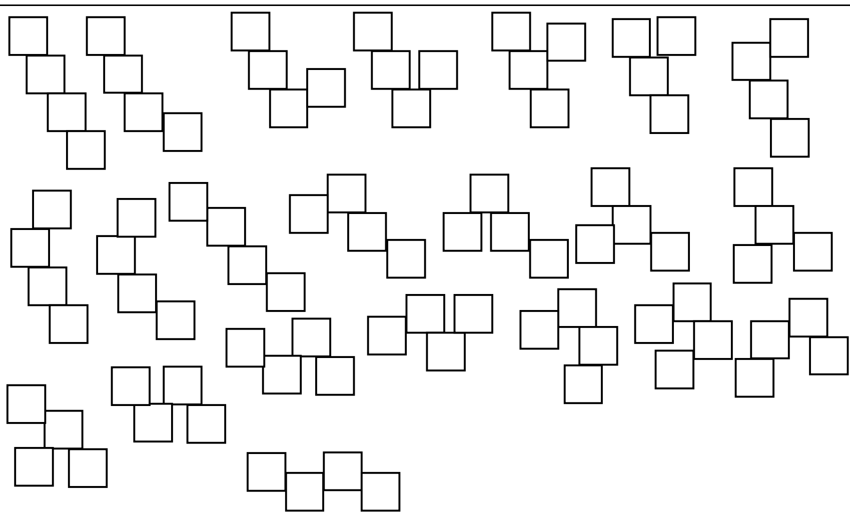
正方形數	堆疊圖形	最多邊形邊數
1 個正方形		4 個邊
2 個正方形		4 個邊

3 個正方形		6 個邊
4 個正方形		8 個邊

（觀察討論）在做「整齊堆疊」時我們發現，可以堆疊出許多「全等的圖形」，例如：

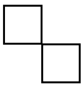
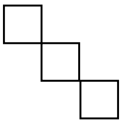
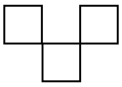
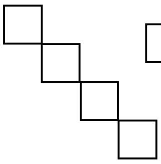
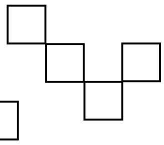
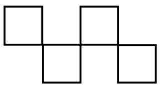
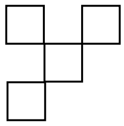
及  ，它們的方向不同，但是它們的邊數卻是一樣的，並不影響觀察結果，所以爲了方便觀察及記錄，我們決定將所有的「全等的圖形」，以其中一個圖形代表紀錄。

（方法二：邊相連但角不相連）

正方形數	堆疊圖形	最多邊形邊數
1 個正方形		4 個邊
2 個正方形		8 個邊
3 個正方形		12 個邊
4 個正方形		16 個邊

（觀察討論）觀察上面的堆疊方式，我們發現**每多一個正方形，最多邊形邊數要加 4**。

（方法三：邊不相連但角相連）

正方形數	堆疊圖形	最多邊形邊數
1 個正方形		4 個邊
2 個正方形		8 個邊
3 個正方形	 	12 個邊
4 個正方形	   	16 個邊

（簡單討論）觀察上面的堆疊方式，我們發現每多一個正方形，最**多邊形邊數與〈方法二〉一樣，也是再加 4。**

二、 觀察討論再提出問題：

根據上面幾個的不同的堆疊方法所得出的結果，我們發現以下幾點：

1. 當堆疊方式是（方法二：邊相連但角不相連）及（方法三：邊不相連但角相連）時，所成最多邊形的邊數，**會依每增加一個正方形，多出 4 個邊的規律改變。**

2. 當堆疊方式是（方法一：邊角對齊的整齊堆疊）時，所成最多邊形的邊數，並不會像其他兩種堆疊方式一樣，每增加 1 個正方形，就多 4 邊，而是當 **1 個**和 **2 個**正方形所形成的最多邊形的邊是 **4 邊**，但在 **2 個以上正方形的堆疊，會依每增加 1 個正方形多 2 個邊的規律改變。**

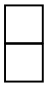
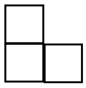
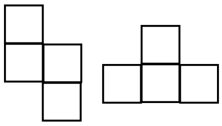
關於以上兩點的差異，我們討論了一下可能的原因如下：

a. 在多邊形增加新正方形時，所增加的邊數**最多是 4 邊，因為 1 個正方形只有 4 個邊。**

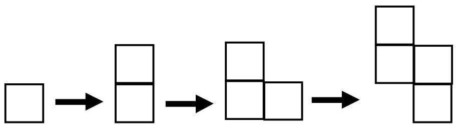
b. 但當以（方法一：邊角對齊的整齊堆疊）時，會因為邊角對齊而使新生成的多邊形圖形的邊數增加數目少 2，**因為那兩個邊完全疊合在一起而消失。**

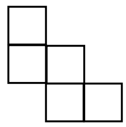
由以上所作操作觀察討論，我們得知如果老師不提出堆疊方式的限制，那我們只要將**堆疊出多邊形的正方形數目×4，就能得出最多的邊數**，**但如果有規定要「邊角對齊的整齊堆疊」，那就不能×4 來算，因為會有相連的邊消失。**

那如果按照老師的限制來堆疊，到底要如何快速算出最多邊形邊數呢？爲了方便觀察討論，我們決定在整理一下剛剛〈方法一〉的結果表格，對於堆疊圖形，我們只呈現最多邊數的多邊形，以方便觀察，新表格如下：

正方形數	堆疊出最多邊的多邊形	最多邊形邊數
1 個正方形		4 個邊
2 個正方形		4 個邊
3 個正方形		6 個邊
4 個正方形		8 個邊

整理到這邊，我們發現正方形的堆疊，在求最多邊數的多邊形堆法時，好像有一個類似「樓梯狀」的堆疊方法，可以得到最多邊，其變化如下：



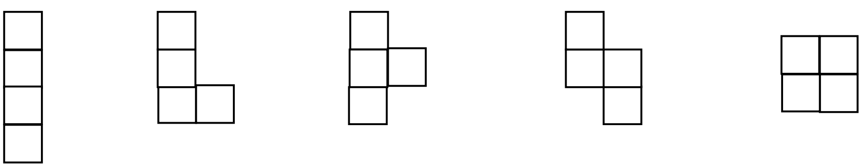
而按照此規則堆疊，我們推測出，當 5 個正方形時，其最多邊的多邊形形狀是  而其邊數是 10 個邊。如此我們發現，其實每增加一個正方形，會多增加 2 個邊。而我們討論會增加兩個邊，是因爲**爲了連接新的正方形，原圖形必須少去 1 個邊，而新增加的正方形也要少一個邊來相連，所以新增加的邊數會是〈4-1-1＝2〉，新增加兩個邊**，所以我們覺得要求出最多邊形邊數的算法是**除了 2 個正方形堆疊圖形外，其他的最多邊形邊數是〈4+新增加的正方形數目×2〉。**但真的是這樣嗎？

所以我們提出**新的問題**是：

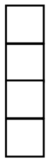
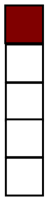
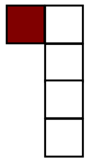
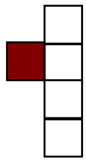
證明**除了 1 個和 2 個正方形堆疊圖形外，其他的最多邊形邊數是〈4+新增加的正方形數目×2〉**這個想法是對的。

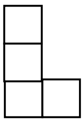
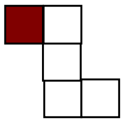
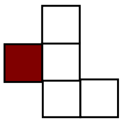
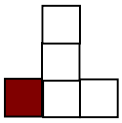
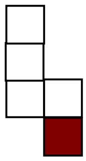
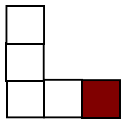
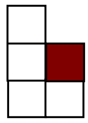
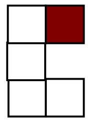
三、 再就所提出的問題進行操作討論：

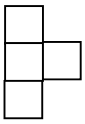
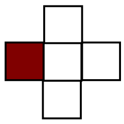
要證明所提出的想法是否正確，我們決定動手去排出 5 個正方形所堆疊出來的所有圖形，並計算其邊數。但要如何來排呢？我們發現其實可以**用 4 個正方形堆疊出的圖形爲基礎**逆時鐘增加 1 個正方形來排，這樣比較不會遺漏圖形，而 4 個正方形堆疊出的圖形如下：

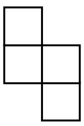
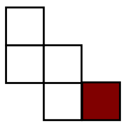


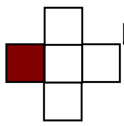
我們將堆疊的結果整理如下〈同樣不紀錄其他全等圖形〉：

4 個正方形堆疊的圖形	5 個正方形堆疊的圖形		
			
邊數	4 個邊	6 個邊	8 個邊

4 個正方形堆疊的圖形	5 個正方形堆疊的圖形						
							
邊數	8 個邊	10 個邊	8 個邊	8 個邊	6 個邊	6 個邊	8 個邊

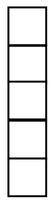
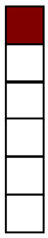
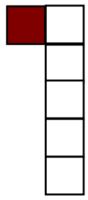
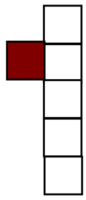
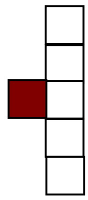
4 個正方形堆疊的圖形	5 個正方形堆疊的圖形
	
邊數	**＊ <u>12 個邊</u>**

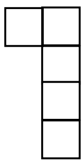
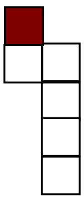
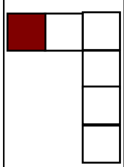
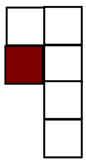
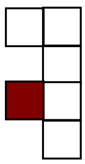
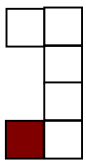
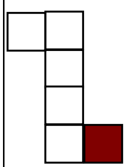
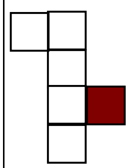
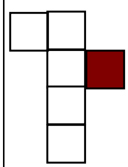
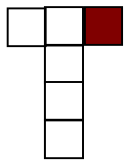
4 個正方形堆疊的圖形	5 個正方形堆疊的圖形
	
邊數	10 個邊

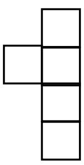
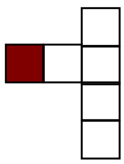
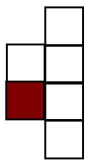
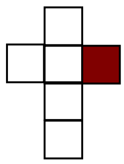
觀察上面的結果，我們發現我們的假設「除了 2 個正方形堆疊圖形外，其他的最多邊形邊數是〈4+新增加的正方形數目×2〉」。**<u>是錯誤的！</u>**因爲圖形  的出現，最多邊數是 12 個，而不是 10 個。

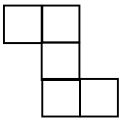
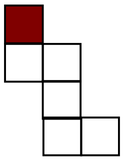
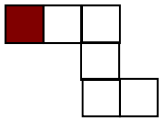
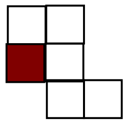
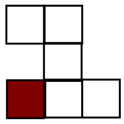
四、重新操作觀察討論：

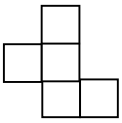
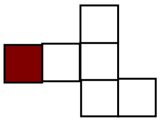
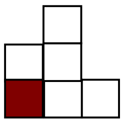
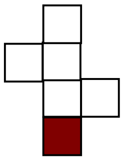
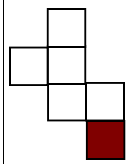
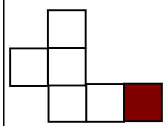
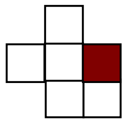
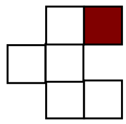
得到上面的結果讓我們有一點灰心，我們覺得會不會根本就找不出規則來快速算出最多邊形的邊數，這時老師建議我們，不如再繼續將 6 個正方形堆疊的圖形排出後再做觀察討論，於是我們決定依照 5 個正方形堆疊圖形排列的方式，分工合作排出 6 個正方形堆疊的圖形，其結果如下〈全等圖形不紀錄〉：

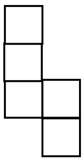
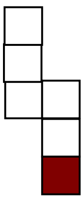
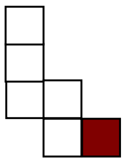
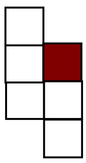
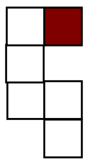
5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形			
				
邊數	4 個邊	6 個邊	8 個邊	8 個邊

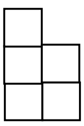
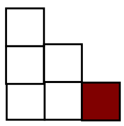
5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形								
									
邊數	8 個邊	6 個邊	6 個邊	10 個邊	8 個邊	8 個邊	10 個邊	10 個邊	8 個邊

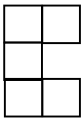
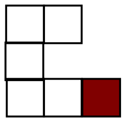
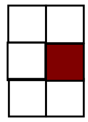
5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形		
			
邊數	8 個邊	8 個邊	12 個邊

5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形			
				
邊數	10 個邊	8 個邊	8 個邊	10 個邊

5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形						
							
邊數	10 個邊	8 個邊	12 個邊	12 個邊	10 個邊	10 個邊	12 個邊

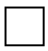
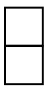
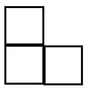
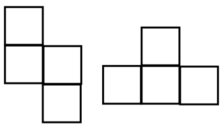
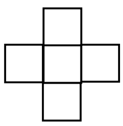
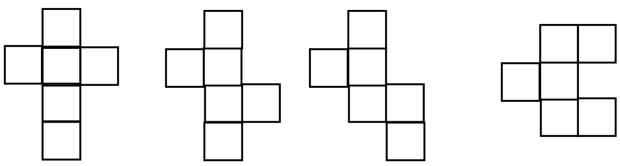
5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形			
				
邊數	8 個邊	10 個邊	8 個邊	10 個邊

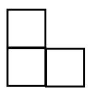
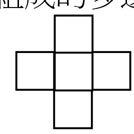
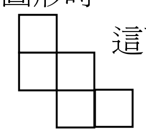
5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形
	
邊數	8 個邊

5 個正方形堆疊的圖形	6 個正方形堆疊的圖形	
		
邊數	8 個邊	4 個邊

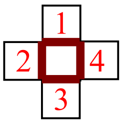
由上面 6 個正方形堆疊圖形所得的結果，我們發現最多邊數是 12 邊。

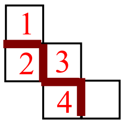
為了方便觀察，我們決定將 1 到 6 個正方形所堆疊出最多邊數的圖形及其邊數的整理成以下表格：

正方形數	堆疊出最多邊的多邊形	最多邊形邊數
1 個正方形		4 個邊
2 個正方形		4 個邊
3 個正方形		6 個邊
4 個正方形		8 個邊
5 個正方形		12 個邊
6 個正方形		12 個邊

在這裡我們觀察到一個可能與最多邊數有關的圖形  ，因為在其他「3 個以上正方形」所堆疊出的最多邊形中都有它的出現，而我們一開始假設能排出最多邊形的「樓梯型」排列規律也可以以它為基準去排，只不過當排到「5 個正方形」所組成的多邊形圖形時，「樓梯型」就不能排出最多邊數。為什麼會這樣呢？我們決定好好觀察  和  這兩個圖形。

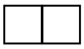
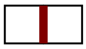
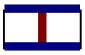
首先我們觀察它們兩個圖形中每個正方形的連接情形，我們發現它們都有 4 個連接處，情形如下：

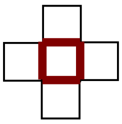
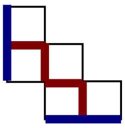
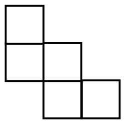
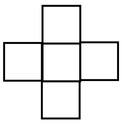


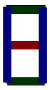
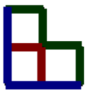
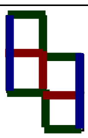
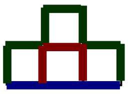
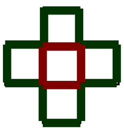


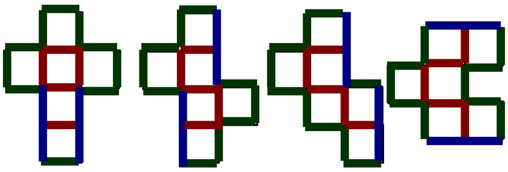
五、觀察後找出問題再討論：

這時我們突然想到，我們在一開始討論時，曾經想要證明我們的假設「**<u>除了 2 個正方形堆疊圖形外，其他的最多邊形邊數是〈4+新增加的正方形數目×2〉。</u>**」，而這式子中的「**<u>+新增加的正方形數目×2〉</u>**」這部份，是因爲每增加一個正方形，會因爲**<u>邊邊相連接</u>**，而只能使增加的邊數是 2。但我們好像忘了討論爲什麼這個假設之前，要先設成「**<u>除了 2 個正方形堆疊圖形外」，我們好像忘了討論 2 個正方形堆疊時，邊數增減的情況。</u>**

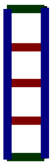
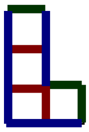
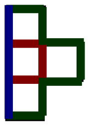
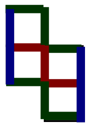
所以我們決定回過頭去觀察  這個圖形，我們發現我們一開始假設的公式不能用在這個圖形，是因爲當兩個正方形相連接時，減少的邊，並不只有因爲  紅色部分相連而消失，其實圖形  **藍色部分的連接方法**，也會使邊數減少，所以本來兩個正方形相連，如果用我們假設的想法，應該是原來 4 個邊再加 2，但因爲有**藍色的連接方式**，所以還要**再減少 2 個邊**，所以 2 個正方形相連接時，所得的邊數才會和 1 個正方形一樣。

想到這裡，我們再觀察一下  和  的連接情形，就會發現圖形  會比圖形  少 2 個邊，是因爲有兩個**藍色的連接方式**。觀察到這邊，我們很想看看其他最多邊形的連接方式，所以我們再整理出下面的**<u>「最多邊的多邊形連接情形表格」</u>**：

正方形數	堆疊出最多邊的多邊形	最多邊形邊數
1 個正方形		4 個邊
2 個正方形		4 個邊
3 個正方形		6 個邊
4 個正方形	 	8 個邊
5 個正方形		12 個邊

6 個正方形		12 個邊

接著我們再回過頭去觀察各數量正方形所堆疊出最多邊的多邊形圖形堆疊方式，以 4 個正方形的多邊形堆疊方式爲例，整理圖表如下：

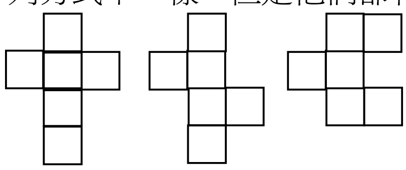
邊數	4 個邊	6 個邊	8 個邊	8 個邊	4 個邊
正方形堆疊方式 連接方式					
數量	2	2	7	6	0
數量	3	3	3	3	4
數量	2	3	1	2	4

六、討論後再提出問題：

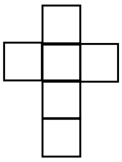
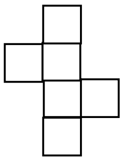
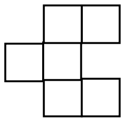
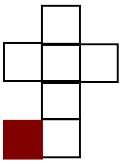
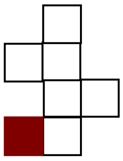
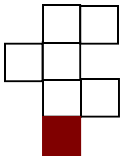
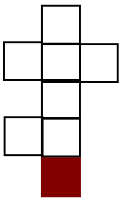
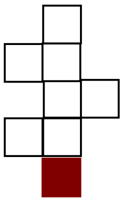
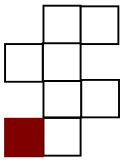
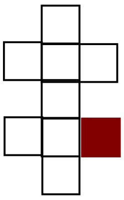
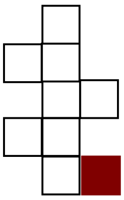
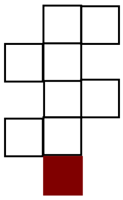
由上表我們可以發現堆疊出的多邊形邊數，與其正方形堆疊方式有關，當其堆疊圖形的綠色邊數越多，其邊數就會越多。在此我們將紅色的連接方法稱爲「結合連接」，藍色的連接邊稱爲「延長邊」，綠色的邊稱爲正常邊，我們得到的結論如下：

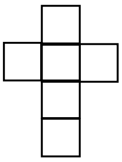
正方形堆疊要排出最多邊數的多邊形，必須減少「結合連接」及「延長邊」的出現，並讓正常邊出現量最大化。

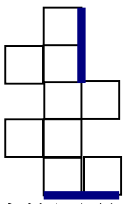
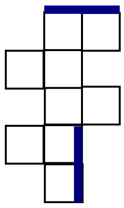
得到上面的結論後，我們再回頭觀察剛剛的「最多邊的多邊形連接情形表格」，我們發現在「6 個正方形」堆疊所形成的圖形中的 4 個圖，雖然圖形排列方式不一樣，但是他們都有 5 個結合連接」，2 個「延長邊」和 10 個正常邊。而且其中的 3 個圖，好像有其排列的規律性。

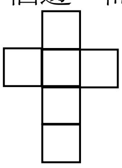
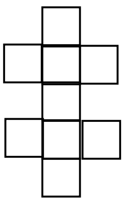
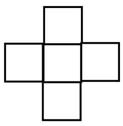


我們決定提出新的問題：試著模仿這三個圖形，依前面一開始排列圖形時，用的「逆時鐘方向增加正方形」的方法，去排出 7 個正方形以上之堆疊的圖形，並從排列中找出其規律，排列結果整理成以下表格：

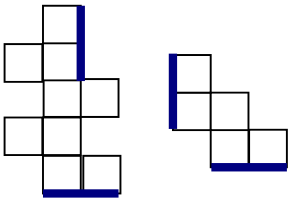
基本圖形 正方形數				最多邊數
7 個				14 個邊
邊數	14 個邊	14 個邊	14 個邊	
8 個				16 個邊
邊數	16 個邊	16 個邊	16 個邊	
9 個				20 個邊
邊數	**★20 個邊**	18 個邊	18 個邊	

在新問題的排列操作過程中，一開始排列時，三個圖形所生成的邊，都一樣多，但是當排到「9 個」正方形時，以圖形  爲基本圖形的排列方式，卻能排出比其他 2 種圖形還要多 2 個邊。這是爲什麼呢？

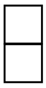
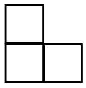
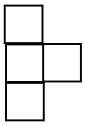
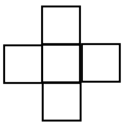
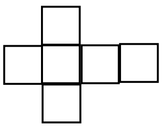
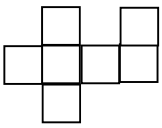
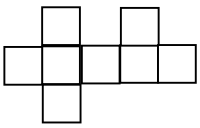
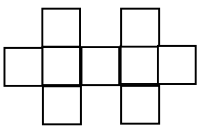
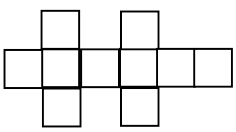
我們決定再觀察一下「9 個」正方形時所形成的圖形，我們發現   這 2 個圖形出現 2 個**「延長邊」**，所以才會少 2 個邊，而且其實它們是全等的圖形。

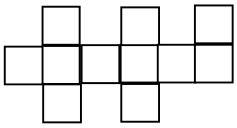
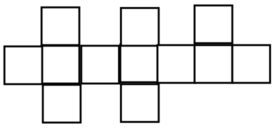
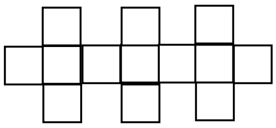
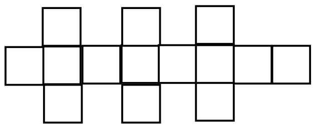
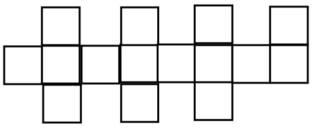
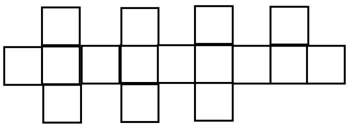
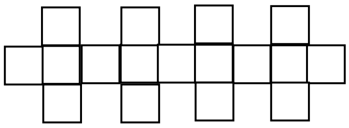
觀察討論到這邊，我們發現利用圖形  的排列規律，我們可以排出多個正方形堆疊後，最多邊的多邊形，因爲這種圖形的排列規律，能排出最少**「結合連接」**、**「延長邊」**最多**正常邊**的圖形。還有我們再觀察一下圖形  和  。我們發現在它們兩種圖形排

成時，其他原本可以排出最多邊的的排法都會出現 2 個**「延長邊」**的狀況，而比它們少 2 個邊。其**「延長邊」**如下：



討論到這裡，我們算是找到排出最多邊的方法，我們稱這種排法爲「十字形排法」。但這是「排出來」，並不是我們一開始所想要的「算出來」。那要怎麼「算出來」呢？老師又建議我們利用「十字形排法」去排排看，並觀察邊數的變化，以下是我們排列出的結果（爲了方便記錄，我們將原本直立的圖形，改成平躺的，正方形增加的順序改爲順時鐘方向）：

正方形數	堆疊出最多邊的多邊形	最多邊形邊數
1 個正方形		4 個邊
2 個正方形		4 個邊
3 個正方形		6 個邊
4 個正方形		8 個邊
5 個正方形		12 個邊
6 個正方形		12 個邊
7 個正方形		14 個邊
8 個正方形		16 個邊
9 個正方形		20 個邊
10 個正方形		20 個邊

11 個正方形		22 個邊
12 個正方形		24 個邊
13 個正方形		28 個邊
14 個正方形		28 個邊
15 個正方形		30 個邊
16 個正方形		32 個邊
17 個正方形		36 個邊

我們將圖形排到「17 個正方形」，然後觀察，我們發現「最多邊形邊數」好像有一個增加規律。我們將上表去掉圖形，只做「正方形數」及「最多邊形邊數」的記錄：其表如下：

正方形數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
最多邊形邊數	4	4	6	8	12	12	14	16	20	20	22	24	28	28	30	32	36

觀察上面表格，我們發現「最多邊形邊數」的增加，有以下規則：

1. 「最多邊形邊數」的增加量，可以用 4 個 1 組的分組方式呈現。
2. 每組第 1 位和第 2 位的邊數一樣。
3. 每組第 3、4 位，的邊數增加規則是前 1 位的邊數加 2。
4. 新組別的第 1 位邊數，是前 1 組最後 1 位的邊數加 4。
5. 每 1 組的最後 1 位邊數，都是 8 的倍數，而且是從「8」開始增加。

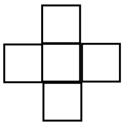
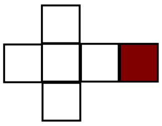
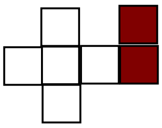
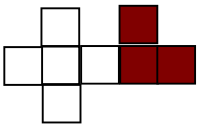
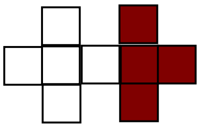
得到以上規則，我們覺得可能可以找出最快算出最多邊形邊數的方法了。不過老師卻要我們去想想，爲什麼會有這些規則呢？**要先證明這些規則是對的，才能拿來用。**

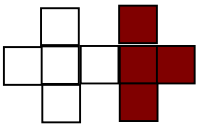
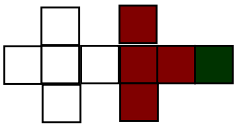
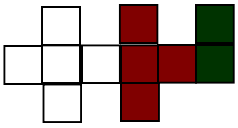
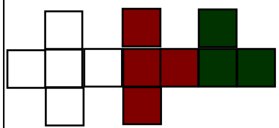
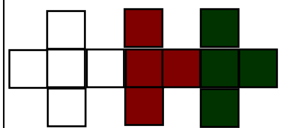
七、再提出問題討論：

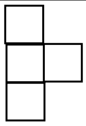
關於上面找到的規則，我們分成 5 個小問題來討論，每個問題藉由觀察圖形變化找出原因。

問題一：爲什麼「最多邊形邊數」的增加量，可以用 4 個 1 組的分組方式呈現呢？

關於這個問題，其實可以從我們對每個新的多邊形圖形增加正方形的方式看出原因，以下舉例其中一段變化說明：

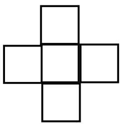
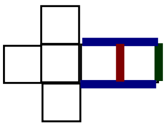
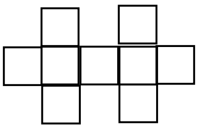
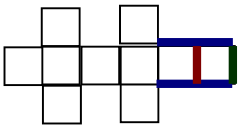
多邊形圖形					

多邊形圖形					

由上表所舉例，我們可以看出，多邊形的變化是每增加 4 個正方形，會出現一個 ，以這個規律一直延伸出去，所以可以說「最多邊形邊數」的增加量，可以用 4 個 1 組的分組方式呈現。

問題二：爲什麼每組第 1 位和第 2 位的邊數一樣呢？

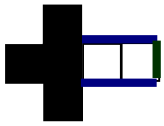
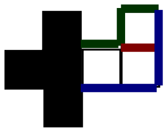
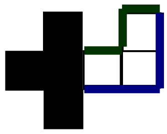
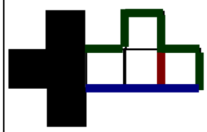
關於這個問題，我們以兩組圖形變化爲例子說明。

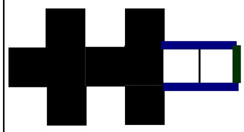
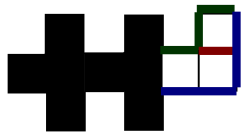
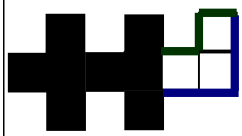
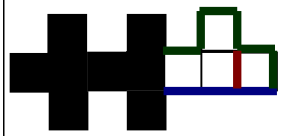
第一組多邊形圖形變化			第二組多邊形圖形變化		

之前在前面的觀察中，我們發現，每增加 1 個正方形，最多可以多出 2 個邊。但由上兩組圖形變化可以看出，當由第 1 位變到第 2 位時，雖然增加了一個正方形，可是出現了 2 組<u>**「延長邊」**</u>，所以本來可以增加的 2 個邊數，就消失了，而使得邊數沒有變化。

問題三：為什麼每組第 3、4 位，的邊數增加規則是前 1 位的邊數加 2 呢？

關於這個問題，我們也以兩組圖形變化為例子說明。

第一組多邊形圖形變化	第2位變第3位		
	位次	第 2 位	第 3 位
	第3位變第4位		
	位次	第 3 位	第 4 位

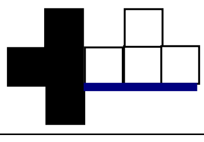
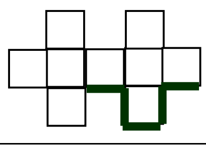
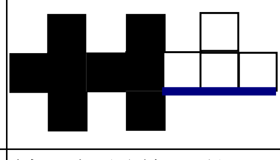
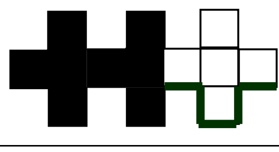
第二組多邊形圖形變化	第2位變第3位		
	位次	第 2 位	第 3 位
	第3位變第4位		
	位次	第 3 位	第 4 位

觀察上面所舉圖形，要討論邊數的變化關係，黑色部份可以不用看，因為在變化的圖形中他們所呈現的邊數都一樣，會影響到的是白色的部份。而觀察兩組圖形的變化，我們可以看到，它們在「第 2 位變第 3 位」和「第 3 位變第 4 位」的變化中，都有可依循的變化規律，換句話說，之後的圖形增加後邊數的變化關係，也和所舉圖形例子一樣。另外，再觀察兩組的「第 2 位變第 3 位」情形可以發現，在「第 2 位」時，可以看到 2 個**「延長邊」**和 1 個正常邊，共 3 邊，到了「第 3 位」時，可以看到 2 個**「延長邊」**和 3 個正常邊，共 5 邊，**邊數增加了 2 個**。而在兩組的「第 3 位變第 4 位」中，在「第 3 位」時，可以看到 2 個**「延長邊」**和 3 個正常邊，共 5 邊，到了「第 4 位」時，可以看到 1 個**「延長邊」**和 6 個正常邊，共 7 邊，**邊數也增加了 2 個**。

由上可知「每組第 3、4 位，的邊數增加規則是前 1 位的邊數加 2」。

問題四：為什麼新組別的第 1 位邊數，是前 1 組最後 1 位的邊數加 4 呢？

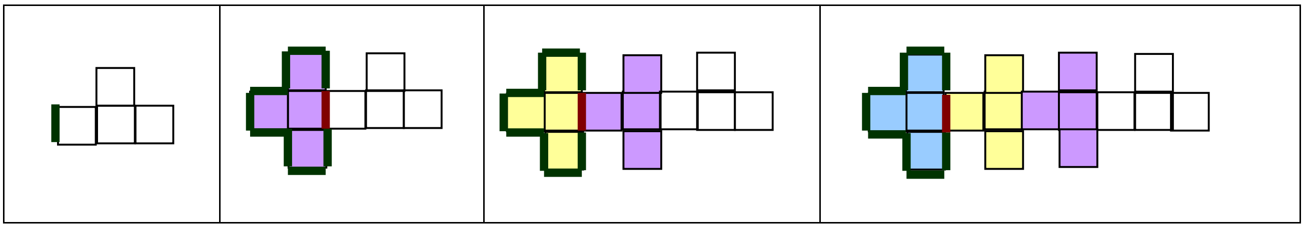
這個問題，我們也舉出兩組圖例說明。

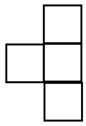
第一組多邊形圖形變化			第二組多邊形圖形變化		
位次	前 1 組最後 1 位	新組別的第 1 位	位次	前 1 組最後 1 位	新組別的第 1 位

觀察上圖，我們發現，會影響邊數變化的是「前 1 組最後 1 位」的藍色**「延長邊」**，當新增一個正方形後，此處在「新組別的第 1 位」中變成 5 個正常邊，如此就增加了 **4 個邊**，而後增加的圖形變化也是如此，因為其他組的圖形只是增加「黑色」部分正方形數，其邊數前後 2 圖形都一樣，如此規律變化，所以「新組別的第 1 位邊數，是前 1 組最後 1 位的邊數加 4」。

問題五：爲什麼每 1 組的最後 1 位邊數，都是 8 的倍數，而且是從「8」開始增加呢？

關於這個問題，我們分別列出幾個組別的最後一位圖形來觀察。



首先我們觀察到，每一組的最後一位，其實是前一組最後一位的圖形再加上圖形  ，所以又有其增加的規律性。

再來我們再觀察，發現每次增加圖形後，連接處的邊數，由原來的 1 個**正常邊**，變成增加圖形的 9 個**正常邊**，如此一來就增加了 **8 個邊**，之後的圖形變化也是依此規律。而因爲「第一組的最後一位」圖形是 8 個邊，所以「每 1 組的最後 1 位邊數，都是 8 的倍數，而且是從「8」開始增加」。

八、根據所得結果找出最快算法：

經過上面的問題討論，我們證明我們的五點發現是正確的。如此我們就可以利用這五點，來找出最快邊數的算法。我們的想法如下：

1. 根據第一點所說，邊數變化可以用 4 個 1 組的分組方式呈現，我們推測最快邊數的算法與「**÷4**」有關，因爲「**除法與分組有關**」，又因爲「**4 個 1 組**」，所以要除以「**4**」。
2. .根據第五點，「每 1 組的最後 1 位邊數，都是 8 的倍數」，我們推測最快邊數的算法與「**×8**」有關，因爲「都是 8 的倍數」。
3. 接著我們將每個多邊形組成的正方形數除以 4，我們發現餘數與此圖形在其組別的第幾位有關，我們將其關係整理如下表方便觀察：

組別	第一組				第二組				第三組				第四組			
正方形數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
餘數	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**
位置	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四

我們發現當餘數是 1，此圖形就是該組的第一位；當餘數是 2，此圖形就是該組的第二位；當餘數是 3，此圖形就是該組的第三位；當餘數是 0，此圖形就是該組的第四位。

4. 找到如何找出每個圖形在其組別中位置的方法後，我們再根據五點中的第二、三點，想出只要我們找出每組最後一位的邊數，再依其在每組中的位置來減少邊數，就能算出它們的邊數，例如第三位是第四位的邊數減 2，第二位是第四位的邊數減 4，第一位和第二位一樣是第四位的邊數減 4。

5. 由上面的想法我們發現，其實我們只要找出每組最後一位圖形的邊數，我們就能算出，組中其他圖形的邊數。那我們要如何算出每組最後一位圖形的邊數呢？我們決定再將圖形的組別、位置、邊數、除 4 後的商及餘數，整理成下表來觀察：

組別	第一組				第二組				第三組				第四組			
正方形數	1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	**12**	13	14	15	**16**
餘數	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
商	0	0	0	**1**	1	1	1	**2**	2	2	2	**3**	3	3	3	**4**
位置	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四
邊數	4	4	6	**8**	12	12	14	**16**	20	20	22	**24**	28	28	30	**32**

從表中我們發現幾個有趣的地方，首先每組的最後一位圖形，其正方形數，**除以 4 後，所得的商，就是此圖形的組別**，例如商是 1，就是第一組；商是 2，就是第二組；商是 3，就是第 3 組。依此類推。再來就是如果**將商乘以 8，就是此圖形的邊數**，這點不就和之前五點中最後一點，與「8 的倍數」有關。

6. 由上討論，我們就可以推算出每組最後一位圖形的邊數，甚至於能找出它的組別。但是那些都是針對「每組最後一位」的討論，那對於其他位置的圖形呢？我們決定再觀察一下剛剛的表格。

組別	第一組				第二組				第三組				第四組			
正方形數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
餘數	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
商	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4
位置	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四	第一	第二	第三	第四
邊數	4	4	6	8	12	12	14	16	20	20	22	24	28	28	30	32

根據表中的觀察，我們發現，其他圖形在其正方形數除以 4 後，所得的商，和它們的組數差 1，不過它們在除以 4 後，都有餘數，所以我們如果要找它們所在的組別，其實可以將它們的商再加 1，就是它們所位於的組別。

換句話說要知道一個圖形位於哪一組，先將它的正方形數除以 4 後，如果**有餘數，那商再加 1，就是它所位於的組別數，如果餘數是 0，就不用加 1，直接是它的組別數**。

討論到這我們發現我們已經找到快速找出多個正方形所能排出最多邊形邊數的方法。
結果如後

根據前面的討論，我們發現，只要依照下面的順序計算，就能算出多個正方形所能排出最多邊形的邊數。

一、**先找出組別數：**將圖形所組成的正方形數除以 4，如果有餘數，商再加 1，沒有餘數，商不用加，這個答案就是圖形的組別。

二、**利用組別數，乘以 8 算出最後位的邊數：**根據之前的討論結果，再將組別數乘以 8，就是最後一位的邊數。

三、**再依餘數找出組中位置：**根據之前的討論結果，當圖形所組成的正方形數除以 4 後，所得的餘數，就是它在組中的位置數，餘數是 1，就是該組的第一位；當餘數是 2，就是該組的第二位；當餘數是 3，就是該組的第三位；當餘數是 0，就是該組的第四位。

四、**最後依組中位置，去減少邊數就是答案：**第三位是最後位的邊數減 2，第二位是最後位的邊數減 4，第一位和第二位邊數一樣是最後位的邊數減 4。

以下利用「14 個正方形所疊出的圖形」加以計算說明：

$14 \div 4 = 3 \cdots 2$

一、**先找出組別數：**先算 $14 \div 4 = 3 \cdots 2$，商是 3，餘數是 2，**因爲有餘數，所以要求其組別要再加 1**，$3+1=4$，所以「14 個正方形所疊出的圖形」位於第四組。

$3+1=4$

二、**利用組別數，乘以 8 算出最後位的邊數：**再算第四組中最後一位的邊數，$4 \times 8 = 32$。

$4 \times 8 = 32$

三、**再依餘數找出組中位置：**因爲餘數是 2，所以位於第二位。

四、**最後依組中位置，去減少邊數就是答案：**第二位要再減 4，得出的答案是「14 個正方形所疊出的最多邊多邊形的邊數」。

$32-4=28$

答：14 個正方形所疊出的最多邊多邊形的邊數是 28 個邊。

算完答案後，我們在對照一下之前所整理「正方形數」與「最多邊形邊數」的關係表，如下：

正方形數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
最多邊形邊數	4	4	6	8	12	12	14	16	20	20	22	24	28	28	30	32	36

從表中我們發現，我們所算的答案是對的，此可知我們推論的結果是正確的。

九、再討論再觀察：

在得到這樣的結果後，我們很高興，因爲我們已經找到快速的算法了，不過這時老師卻要我們不要高興得太早，因爲我們找到的方法要「四個步驟」才能算出答案，其實還有更快的方法，只要「兩個步驟」就能得到答案。

老師提示我們，我們在討論「正方形數」與「最多邊形邊數」的關係時，我們觀察的重點主要是「最多邊形邊數」間的關係，所以我們才會發現「邊數間的變化」是以 4 個一組的方式呈現，我們可以說是以「左右橫向」的方式在做觀察。老師建議我們除了「左右橫向」觀察外，也可以試著觀察「上下直向」間的關係。

所以我們這次改以觀察「上下直向間的關係」，我們以下表呈現觀察方式。

正方形數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
		↓×2	↓×2	↓×2		↓×2	↓×2	↓×2		↓×2	↓×2	↓×2		↓×2	↓×2	↓×2	
最多邊形邊數	4	4	6	8	12	12	14	16	20	20	22	24	28	28	30	32	36

觀察「上下直向間的關係」我們發現，大部分「正方形數」與「最多邊形邊數」的關係是「最多邊形邊數＝正方形數×2」，只有正方形數是「1、5、9、13、17…」等，不能用「正方形數×2」得到「最多邊形邊數」。不過我們發現「正方形數是 1、5、9、13、17…」的這些組別，其實就是我們一開始做「左右橫向」觀察時，「4 個一組」中組中位置的第一位，**而第一位的特性是「正方形數除以 4，餘數會是 1」，還有「第一位的邊數和第二位一樣」**。所以我們發現更快的算法應該可以是下面的步驟：

一、先將「正方形數」除以 4，如果餘數不是餘 1，再將「正方形數」×2 就是「最多邊數」。

二、如果餘數是餘 1，正方形數先加 1 後，再×2 就是「最多邊數」。

陸、研究結果：

根據上面的討論結果，我們發現當我們觀察的方式不同時，可以推出不同的算法，不過「左右橫向」觀察時，我們的算法會比「上下直向」觀察時的算法還要多出 2 倍的算式過程，所以真正最快能算出「多邊形邊數」的方法是「上下直向」觀察所推出的算法，其步驟爲下：

一、先將「正方形數」除以 4，如果餘數不是餘 1，再將「正方形數」×2 就是「最多邊數」。

二、如果餘數是餘 1，正方形數先加 1 後，再×2 就是「最多邊數」。

柒、結論：

一、在討論正方形堆疊所能形成最多邊的多邊形邊數前，老師限制正方形的堆疊方式必須整齊的排列，依相連兩個邊和兩個角對齊好，不可以歪掉，如果不如此規定，而隨意堆疊，那新形成的最多邊多邊形邊數只要之前的邊數再加 4 就好，而最多邊的邊數，只要正方形數乘以 4，就能算出答案。但如果有限制，那變化就不是那麼簡單了。

二、要找出老師規定堆疊法的最多邊多邊形邊數的快速算法，可以透過圖形及數字的觀察討論，找出其變化規則，再依規則，推出算法。

三、在討論中，我們發現，會影響正方形堆疊所能形成最多邊多邊形邊數的原因，在於正方形堆疊時所形成的**「結合連接」**、**「延長邊」**及**正常邊**三種狀況，只要增加**正常邊**邊數的出現，減少**「結合連接」**及**「延長邊」**的出現，就能排出最多邊。

四、在討論的過程中，我們發現，我們可以用**「十字形排法」**，有規律的排出不同正方形數堆疊時的最多邊多邊形。

五、要推算出「正方形數」與「最多邊形邊數」間的關係，可以有「**左右橫向**」及「**上下直向**」的觀察方式來觀察，不同的觀察方式可以推出不同的計算方法，這些方法都能算出「最多邊形邊數」。

六、在「**左右橫向**」方式觀察討論時，我們發現不同正方形數堆疊出最多邊多邊形邊數，有以下五種規則：

1.「最多邊形邊數」的增加量，可以用 4 個 1 組的分組方式呈現。
2.每組第 1 位和第 2 位的邊數一樣。
3.每組第 3、4 位，的邊數增加規則是前 1 位的邊數加 2。
4.新組別的第 1 位邊數，是前 1 組最後 1 位的邊數加 4。
5.每 1 組的最後 1 位邊數，都是 8 的倍數，而且是從「8」開始增加。

七、在證明我們找出的五種規則是正確的之後，我們利用其推測出快速算出最多邊多邊形邊數的算法，步驟如下：

1.先找出組別數：將圖形所組成的正方形數除以 4，如果有餘數，商再加 1，沒有餘數，商不用加，這個答案就是圖形的組別。

2.利用組別數，乘以 8 算出最後位的邊數：將組別數乘以 8，就是最後一位的邊數。

3.再依餘數找出組中位置：當圖形所組成的正方形數除以 4 後，所得的餘數，就是它在組中的位置數，餘數是 1，就是該組的第一位；當餘數是 2，就是該組的第二位；當餘數是 3，就是該組的第三位；當餘數是 0，就是該組的第四位。

4.最後依組中位置，去減少邊數就是答案：第三位是最後位的邊數減 2，第二位是最後位的邊數減 4，第一位和第二位邊數一樣是最後位的邊數減 4。

八、在「**上下直向**」方式觀察討論時，我們發現大部分的「最多邊形邊數」＝「正方形數」乘以 2，只有當「正方形數」除以 4 後，餘數爲 1 的例外，不過它的邊數會和將它的「正方形數」加 1 後乘以 2 一樣。所以可以推出其計算步驟如下

1. **先判斷餘數：**先將「正方形數」除以 4，觀察餘數是否爲 1。
2. **計算邊數：**如果餘數是 1，那「正方形數」加 1 後乘以 2，就是「最多邊形邊數」，如果餘數不是 1，那直接「正方形數」乘以 2，就是「最多邊形邊數」。

九、比較「**左右橫向**」及「**上下直向**」方式觀察所得的計算步驟，要以「**上下直向**」方式的計算方法較快。

捌、參考資料：

【數學課本】

康軒（民 102）。**國小數學課本 第八冊（4 下）**。新北市：康軒文教事業股份有限公司。

【評語】080401

1. 本件作品主要討論在「邊角對齊」的條件下，如何以正方形排列成具有最多邊數的凸多邊形。本組學生進行大量的觀察與歸納找出能排出最多邊數的基本法則為「十字形排法」。另外，為了計算所排出具有最多邊的邊形，本組學生亦經由觀察與歸納得到兩種計算方式。

2. 上述之觀察與歸納乃探究科學的基本功夫，由學生所得兩種計算方式，顯示：學生之基本功夫是扎實的，但離數學證明還差臨門一角，期許作者能繼續努力。

3. 建議本組學生可討論在「邊角對齊下，如何以正三角形排列具有最多邊數的多邊形」。