中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　生活與應用科學科

第三名

040811

按圖鎖驥

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃昱睿 高二 曾子洋 高二 謝昊芫	蔡其南

關鍵詞：排列組合、機率、密碼鎖

摘　　要

現今手機的普遍使用，讓我們不禁好奇手機密碼鎖的圖形。由於現今大部分的人傾向畫點數少又沒有交點的情形，於是我們研究各種密碼鎖(2×3 長方形、6 個點正三角形、7 個點正六邊形和 3×3 正方形)畫 4~6 個點合理的種類與有交點的數目多寡。

密碼鎖的兩項訴求使得能畫的情形比較多種，比較不容易被破解：

1.有交點的比率低 (沒交點比率高)　2.合理種類數多(總種類數多)

結果發現 2×3 長方形、6 個點正三角形、7 個點正六邊形總種類數皆太少，不適合作為密碼鎖。

而 3×3 的正方形有交點的比率不但相較於其他上述三者不高，合理種類數也多，**難怪現今以 3×3 的正方形作為密碼鎖**。此外，十個點的正星形同時符合此兩種訴求，因此有作為未來新式密碼鎖的潛力。

壹、研究動機

隨著科技的日新月異，幾乎人人手中都有一隻智慧型手機。看到智慧型手機的 3×3 正方形的密碼鎖，我們好奇的想知道，3×3 的密碼鎖，能畫出的種類到底有幾種？雖然網路上已經有人用程式跑出共有 389112 種畫法，但是大部分的人畫密碼時都傾向沒有交點的情形。於是我們對有交點的情況與佔全部的比例多寡很感興趣。如果我們將手機的密碼鎖改良成其他圖形呢？有交點的情況又是如何呢？於是我們便開始著手研究密碼鎖，探討有交點的情形。

貳、研究目的

探討手機密碼鎖中多邊形(3×3 正方形、正三角形、正六邊形……等圖形)，若任意給 4~6 個點，畫出來有交點的情況和比例到底是多少？藉由此種比例關係，計算出什麼樣的圖形，使 4~6 個點中有交點的比例最高(即沒有交點的比例最低)。

一、探討 2×3 的長方形中，畫 4~6 個點有交點的種類和佔全部 4~6 個點的圖形中之比例。
二、探討 6 個點的正三角形中，只畫 4~6 個點有交點的種類和佔全部 4~6 個點的圖形之比例。
三、探討 7 個點的正六邊形中，只畫 4~6 個點有交點的種類和佔全部 4~6 個點的圖形之比例。
四、探討 3×3 的長方形中，只畫 4~6 個點有交點的種類和佔全部 4~6 個點的圖形中之比例。

參、研究設備及器材

一、文房四寶（ 筆、紙、尺、立可白 ）、桌電

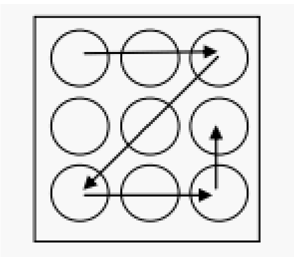
二、電腦軟體：*Word*、*powerpoint*、*Geogebra*、截圖軟體 Printkey、Dev C++

肆、研究方法及過程

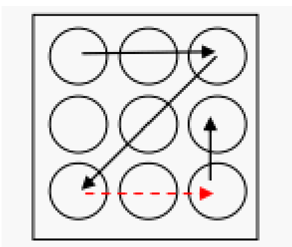
一、定義合理圖形

首先我們先定義怎麼畫，圖形才是合理的，手機密碼鎖有五項特性

(一) 連續性：每個圖形都要**一筆畫出，不可中斷**。否則圖形不成立

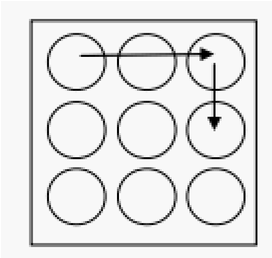


▲圖形成立

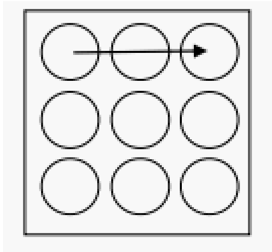


▲圖形不成立(**紅色**虛線為中斷部分)

(二) 可缺性：每種圖形不一定要把九個全部填滿，但**最少需畫 4 格**。

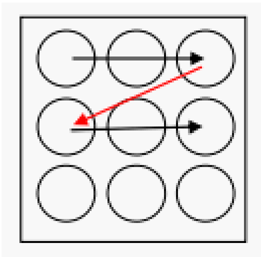


▲圖形成立



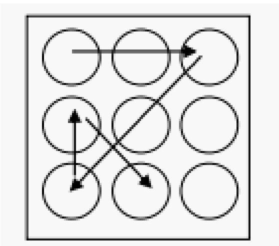
▲圖形不成立(圖形**不滿 4 格**)

(三) 可跨性：線條的行徑路線可往非相鄰的點行走，類似象棋中「馬」的走法。

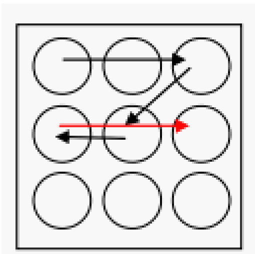


▲圖形成立(注意紅色)

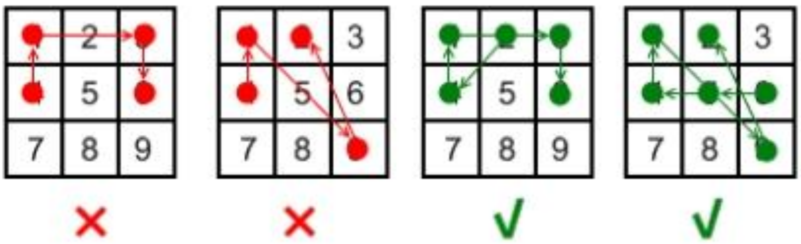
(四) 交叉性：線條的行徑路線可有交叉。



(五) 跳躍性：若該點已走過，則經過該點時可跳過去(視同該點已消失)。



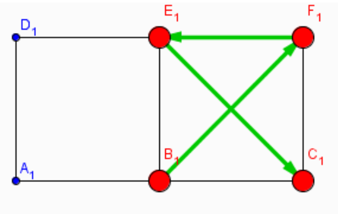
▲圖形成立(注意紅色)



左邊兩張為不合理的圖，理由是因為欲畫四個點，而實際上已經通過五個點

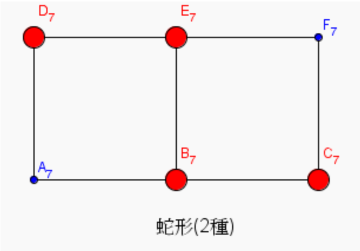
二、2×3 六點長方形(畫四個點)

先從簡化版的 2×3，6 個點的長方形來探討，如果只畫四個點，一般來說每一個圖形四個點能畫出交點的情形有八種，欲使其有交點可以分為五種情形來討論：

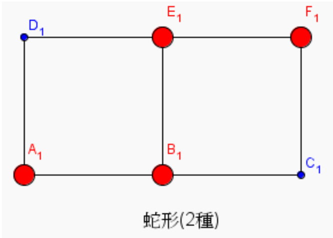


四個點能畫出交點的情形有八種，因為因交出而圍成的三角形可能在上、下、左、右，又因為可以逆著畫回來，如左圖改畫 $C\rightarrow E\rightarrow F\rightarrow B$。故可能情形才為 4×2=8 種

(一) 蛇形(2 種)



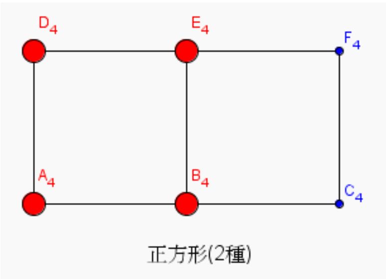
蛇形(2種)



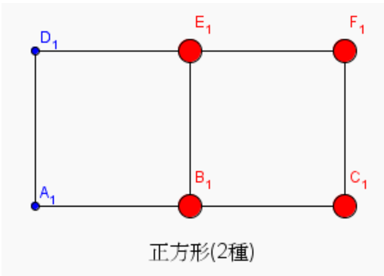
蛇形(2種)

而每一個蛇形有交點的情況有 8 種，故可能有交點的情形種類為 2×8=16 種

(二) 正方形(2 種)



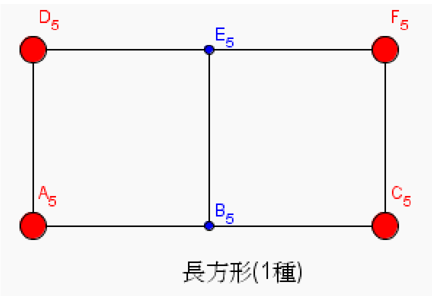
正方形(2種)



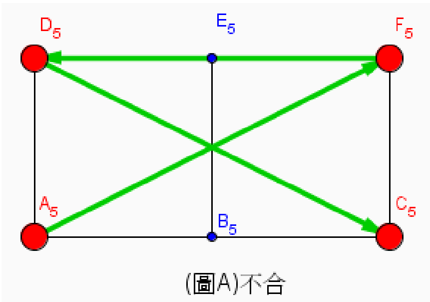
正方形(2種)

而每一個正方形有交點的情況有 8 種，故可能有交點的情形種類為 2×8=16 種

(三) 長方形(1 種)



長方形(1種)

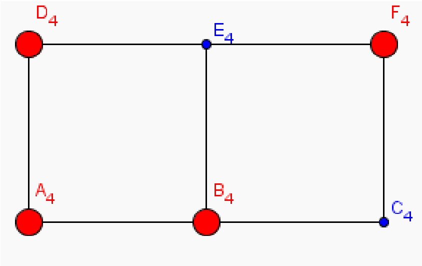


(圖A)不合

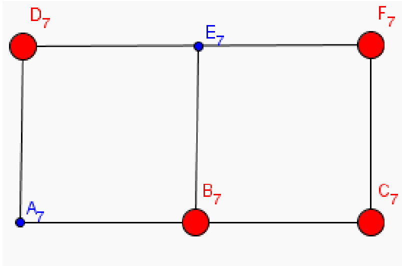
而每一個長方形有交點的情況有 4 種，故可能有交點的情形種類為 1×4＝4 種。

而右側圖 A 為不合的情況，∵欲畫四個點，但卻通過了五個點，不符合規定的四點

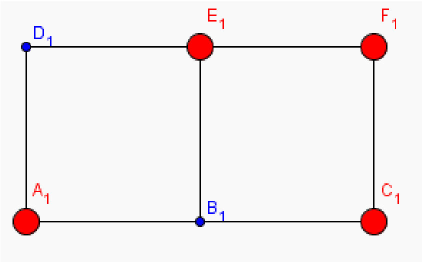
(四) 直角梯形(4 種)



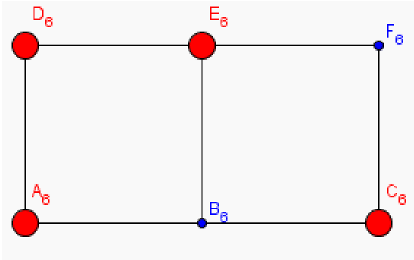
直角梯形(4種)



直角梯形(4種)



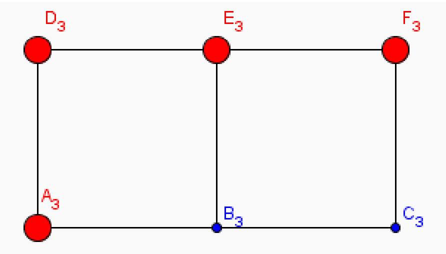
直角梯形(4種)



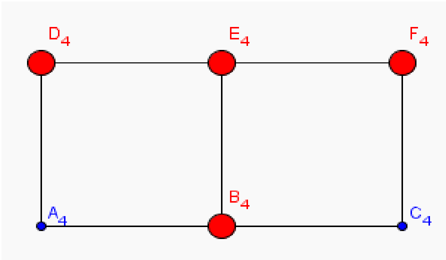
直角梯形(4種)

而每一個直角梯形有交點的情形有 6 種，故可能有交點的情形種類為 4×6=24 種

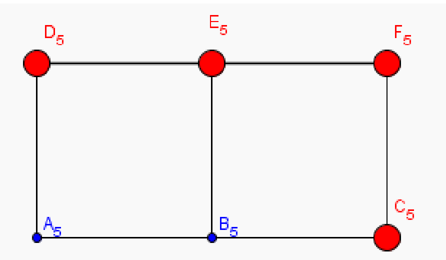
(五) 三點共線(6 種)



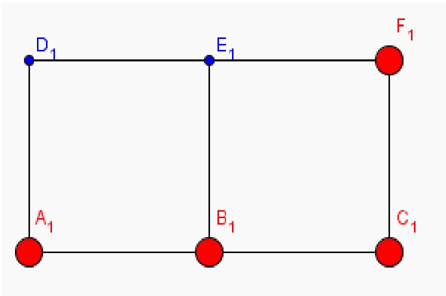
三點共線(6種)



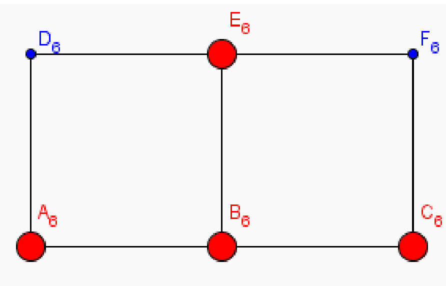
三點共線(6種)



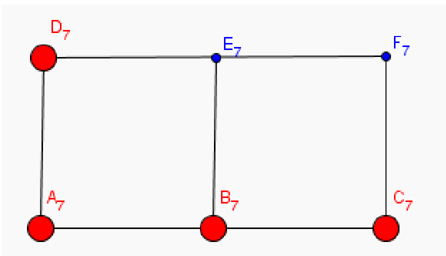
三點共線(6種)



三點共線(6種)



三點共線(6種)



三點共線(6種)

而每一個三點共線有交點的情形有 4 種，故可能有交點的情形種類為 6×4=24 種

◎將以上數據整理成表格：

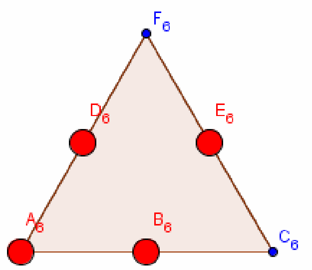
	蛇形	正方形	長方形	直角梯形	三點共線	TOTAL	比率
有交點種類	16	16	4	24	24	84	**0.323**
合理	48	48	8	48	108	260	

三、六點正三角形(畫四個點)

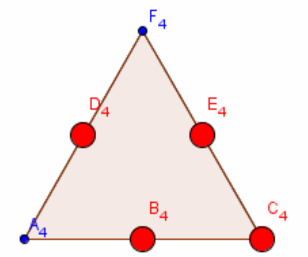
同樣是 6 個點，如果將圖形排成正三角形的「垛」，那麼情況又是如何呢？

同樣的，欲使其有交點的 15 種可以分為四項類別來討論：

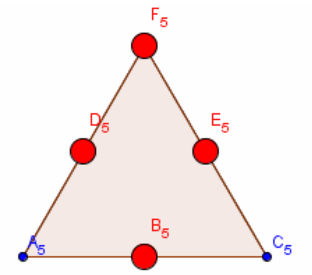
(一) 小菱(3 種)



小菱(3種)



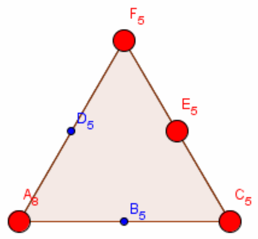
小菱(3種)



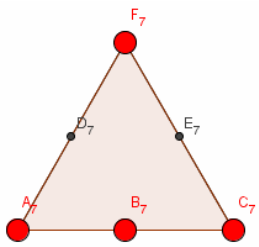
小菱(3種)

而每一種小菱有交點的情形有 8 種，故可能有交點的情形種類為 3×8=24 種

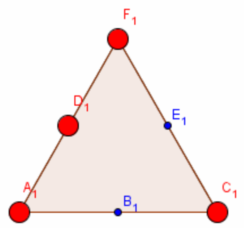
(二) 大正墳墓(3 種)



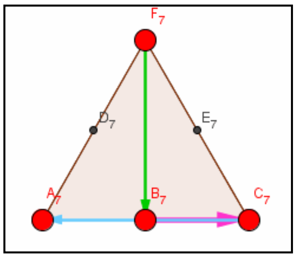
大正墳墓(3種)



大正墳墓(3種)



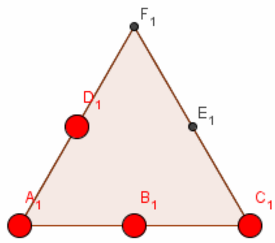
大正墳墓(3種)



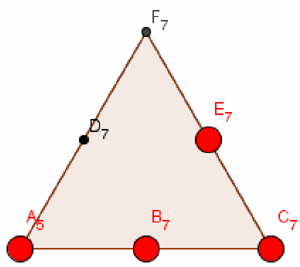
列舉其中一種

而每一種大正墳墓有交點的情形有 2 種，故可能有交點的情形種類為 3×2=6 種

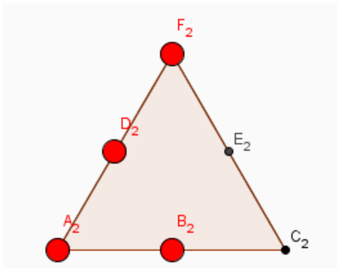
(三) 小歪墳墓(6 種)



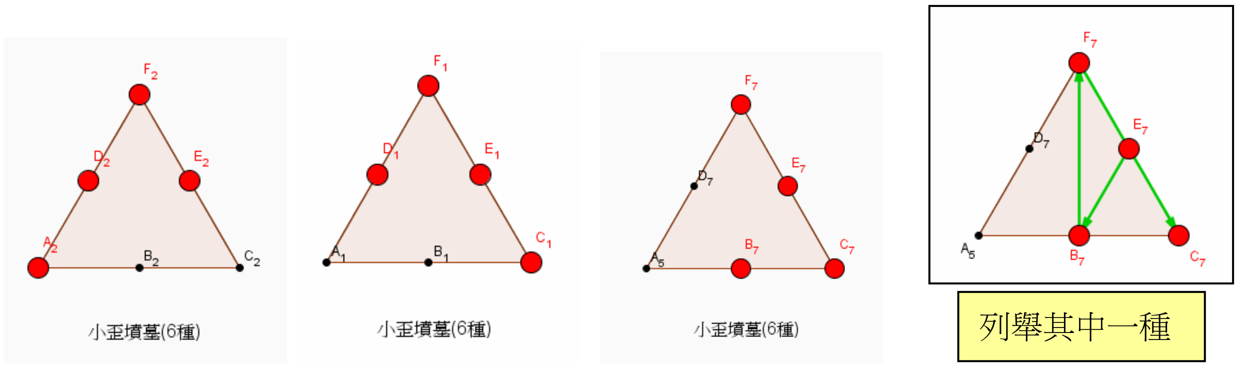
小歪墳墓(6種)



小歪墳墓(6種)

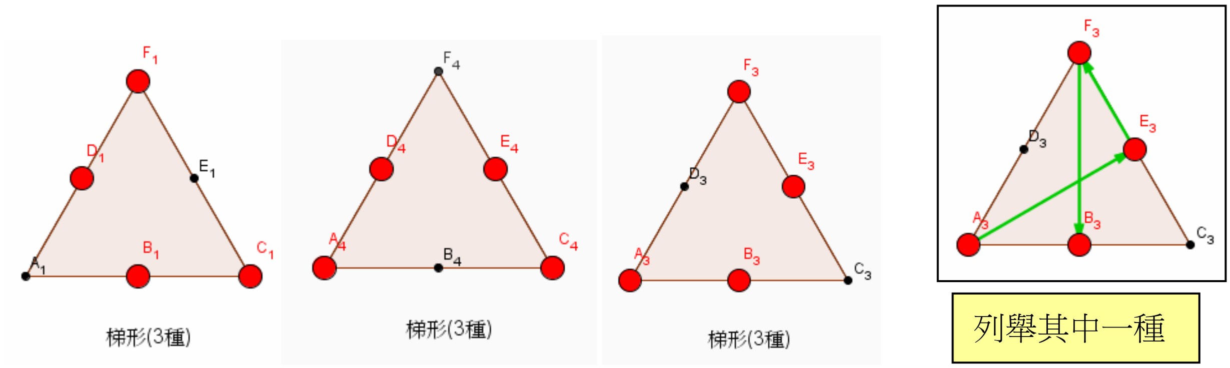


小歪墳墓(6種)



而每一種小歪墳墓有交點的情形有 4 種，故可能有交點的情形種類為 6×4=24 種

(四) 梯形(3 種)



而每一種梯形有交點的情形有 6 種，故可能有交點的情形種類為 3×6=18 種

◎將以上數據整理成表格：

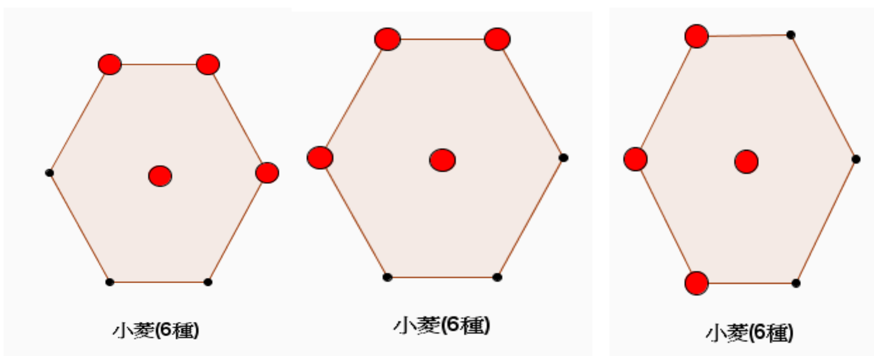
	小菱	大正墳墓	小歪墳墓	梯形	TOTAL	比率
有交點種類	24	6	24	18	72	**0.324**
合理	72	6	108	36	222	

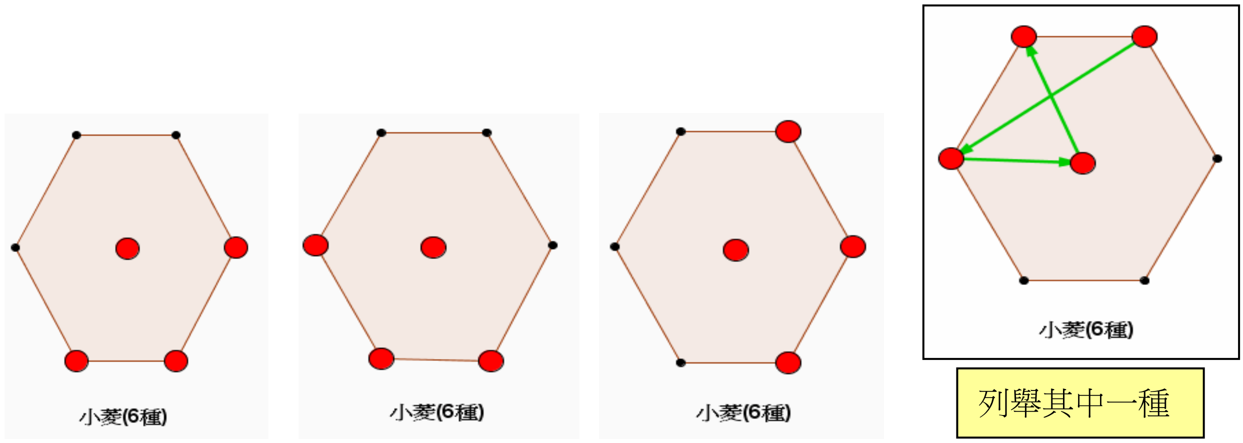
四、七點正六邊形(畫四個點)

接著，我們將六點的正三角形延伸到七點的正六邊形，那麼情況又是如何呢？

同樣的，欲使其有交點的 35 種可以分為四項類別來討論：

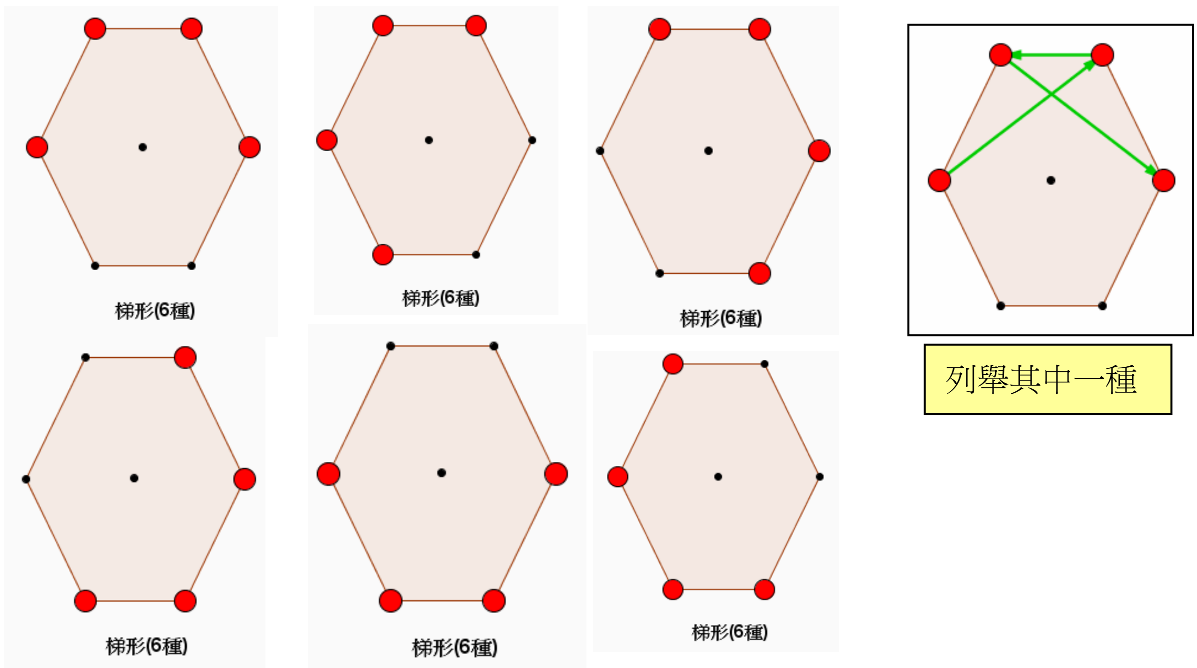
(一) 小菱(6 種)





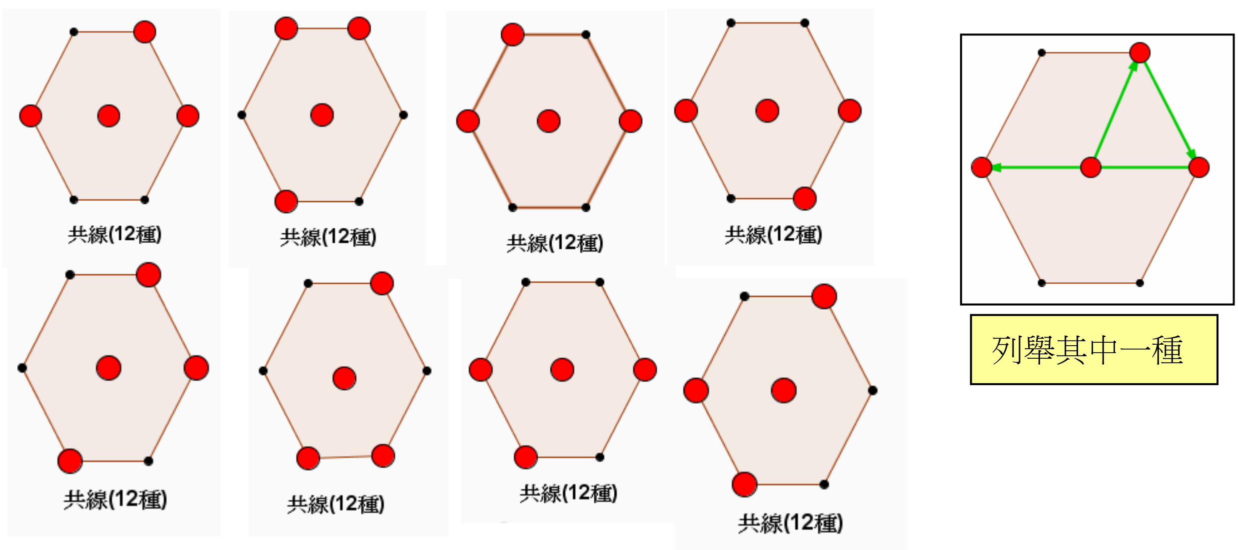
而每一種小菱有交點的情形有 8 種，故可能有交點的情形種類為 6×8=48 種

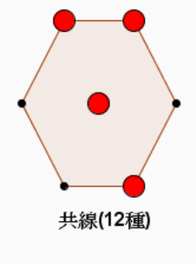
(二) 梯形(6 種)

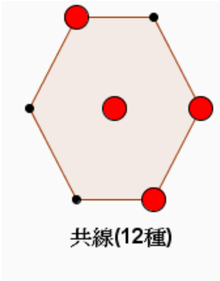


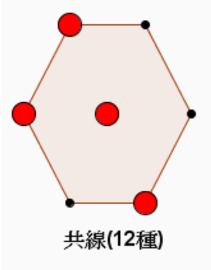
而每一種梯形有交點的情形有 6 種，故可能有交點的情形種類為 6×6=36 種

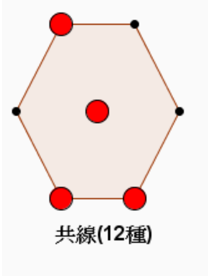
(三) 共線(12 種)





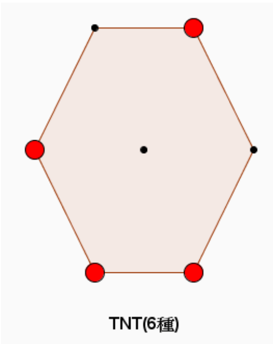


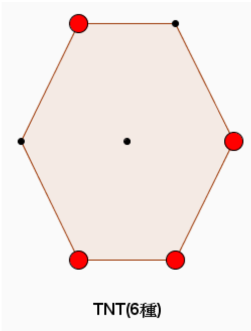


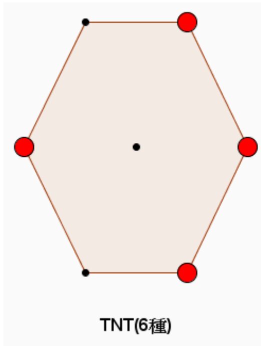


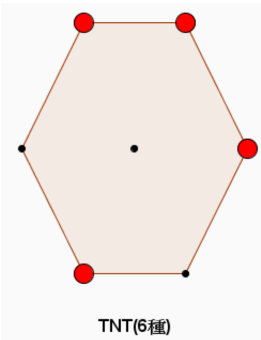
而每一種共線有交點的情形有 4 種，故可能有交點的情形種類為 12×4=48 種

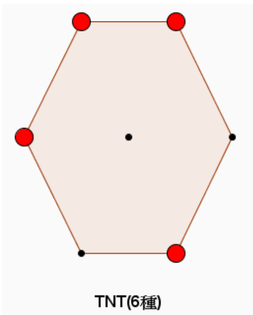
(四) TNT(6 種)

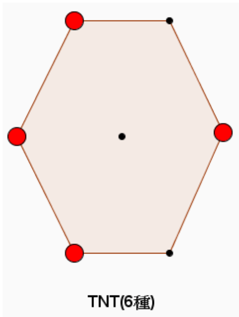






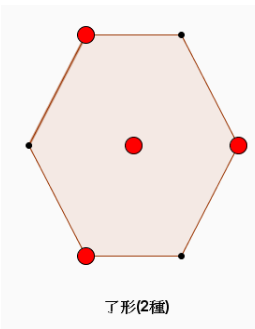


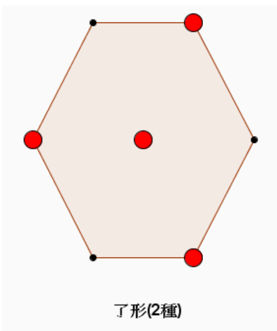




每一種共線有交點的情形有 0 種，所以不可能有交點

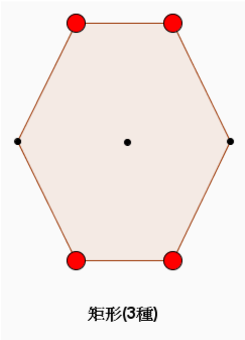
(五) 了形(2 種)

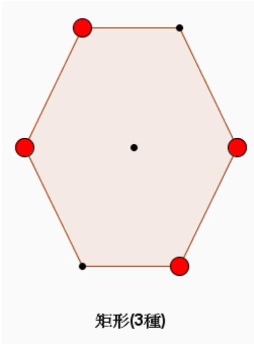


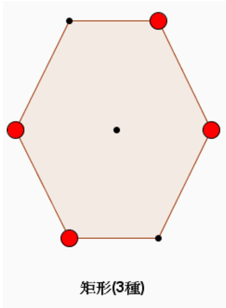


而每一種共線有交點的情形有 0 種，所以不可能有交點

(六) 矩形(3 種)







而每一種共線有交點的情形有 0 種，所以不可能有交點

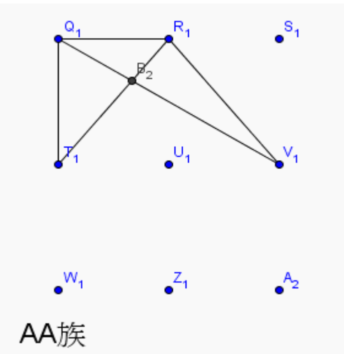
◎將以上數據整理成表格：

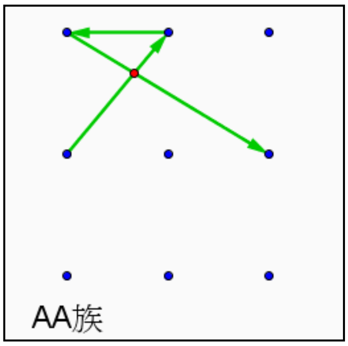
	小菱	梯形	共線	TNT	了形	矩形	TOTAL	比率
有交點	48	36	48	0	0	0	132	**0.229**
合理	144	72	216	72	24	24	576	

五、3×3 正方形(畫四個點)

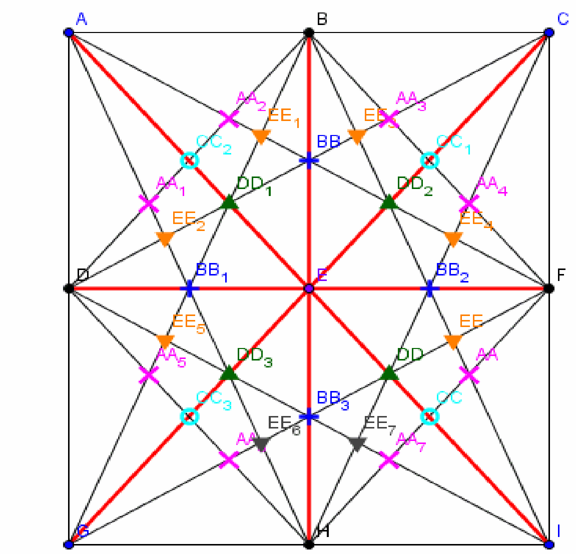
最後，我們回到最廣泛被使用的 3×3 的正方形來探討其交點情形同樣的，我們可將所有情形分成七種情況來討論：

(一) AA 族(8 種)→意即交於 AA 點



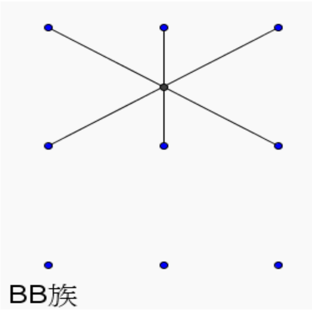


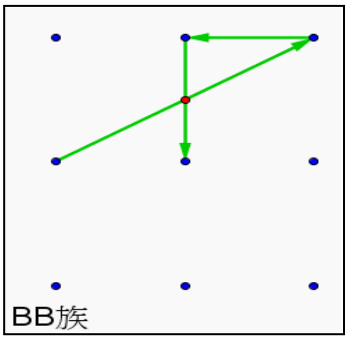
列舉其中一種



而每一點中有交點的情形共有 6 種，故可能有交點的情形種類為 8×6=48 種

(二) BB 族(4 種)

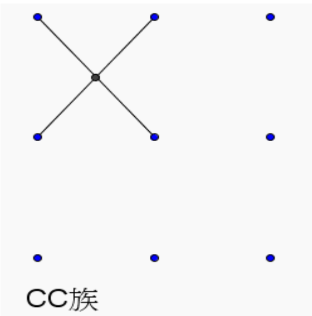


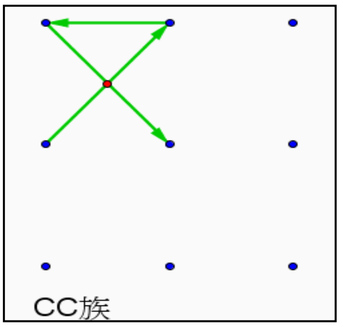


列舉其中一種

而每一點中有交點的情形共有 20 種，故可能有交點的情形種類為 4×20=80 種

(三) CC 族(4 種)

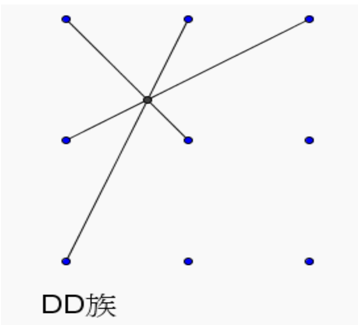


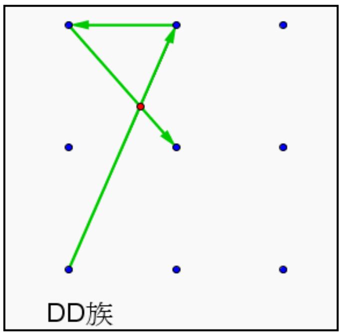


列舉其中一種

而每一點中有交點的情形共有 8 種，故可能有交點的情形種類為 4×8=32 種

(四) DD 族(4 種)

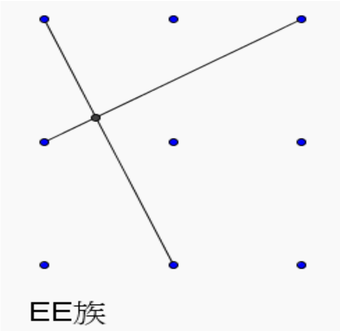


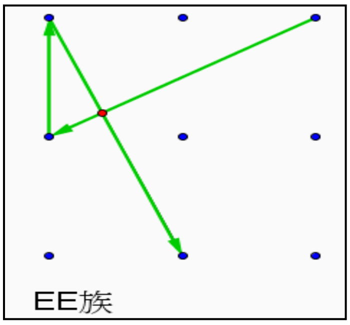


列舉其中一種

而每一點中有交點的情形共有 18 種，故可能有交點的情形種類為 4×18=72 種

(五) EE 族(8 種)

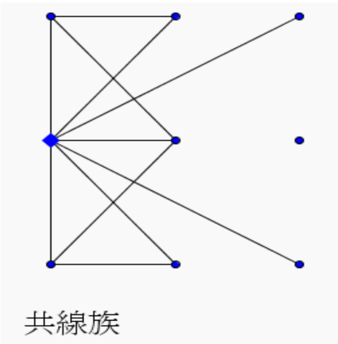


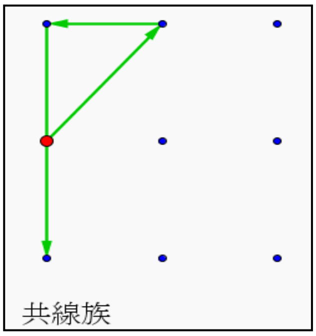


列舉其中一種

而每一點中有交點的情形共有 6 種，故可能有交點的情形種類為 $8\times6=48$ 種

(六) 共線族(4 種)

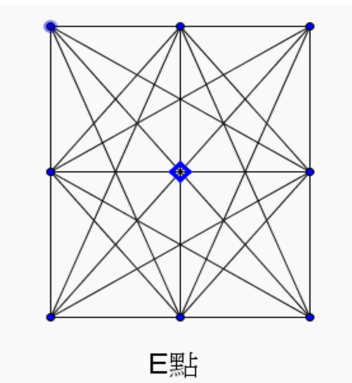


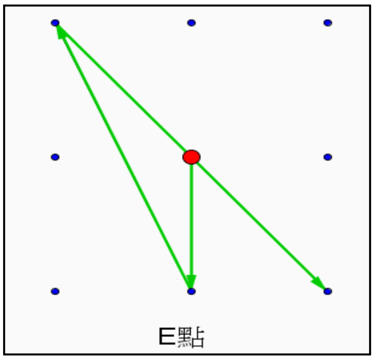


列舉其中一種

而每一點中有交點的情形共有 16 種，故可能有交點的情形種類為 $4\times16=64$ 種

(七) E 點(1 種)





列舉其中一種

而每一點中有交點的情形共有 88 種，故可能有交點的情形種類為 $1\times88=88$ 種

◎將以上數據整理成表格：

	AA 族	BB 族	CC 族	DD 族	EE 族	共線族	E 點	TOTAL
數目	8	4	4	4	8	4	1	
圖形數	6	20	8	18	6	16	88	
TOTAL	48	80	32	72	48	64	88	432

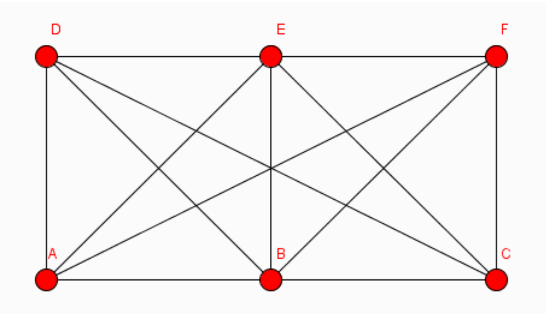
而根據網路上的數據，知道連 4～9 個點的總方法數如下

點數	4	5	6	7	8	9
方法數	1624	7152	26016	72912	140704	140704

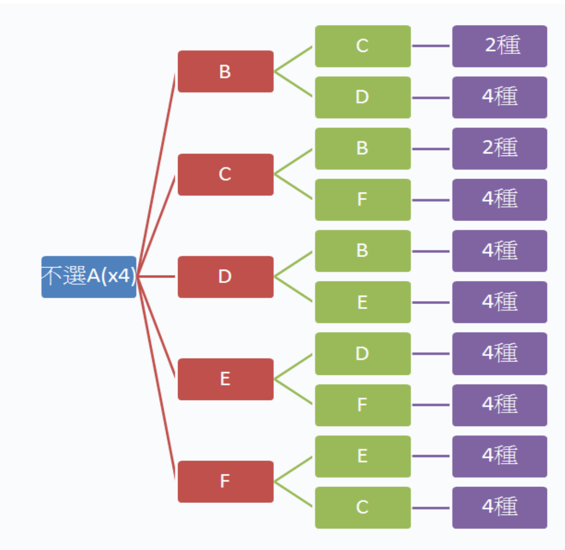
★故 3×3 正方形有交點的機率為 $\frac{432}{1624} \fallingdotseq \boxed{0.266}$

六、2×3 六點長方形(畫五個點)

四個點的情形已經討論完畢，接著我們繼續從畫五個點的情況著手，首先我們先研究 2×3 長方形五個點的情況。由於五個點有交點的情況較複雜，種類數較多，於是只好從反面解(全部扣掉沒有交點的情況下手)

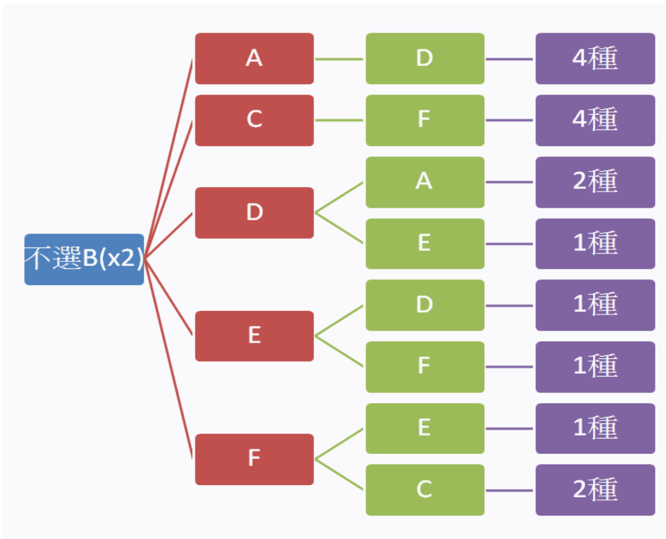


(一)無 A 點族(4 種→無 A、C、D、F)



因此將上述數字相加後×4，共 36×4=144 種

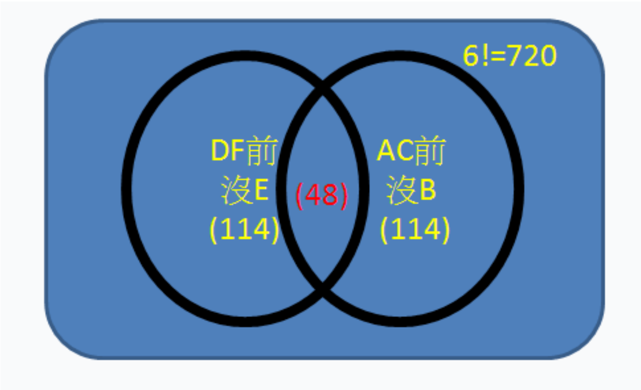
(二) 無 B 點族(2 種→無 B、E)



因此將上述數字相加後×2，共 16×2＝32 種

上述兩種情況相加 144＋32＝176 種

◎至於五個點合理的種類數如何算呢？我們發現 $\boxed{AC}$ 之前沒有 B，或是 $\boxed{DF}$ 之前沒有 E 為不合理的情形，用全部的種類扣掉不合理的情況，即為五個點合理的情形。

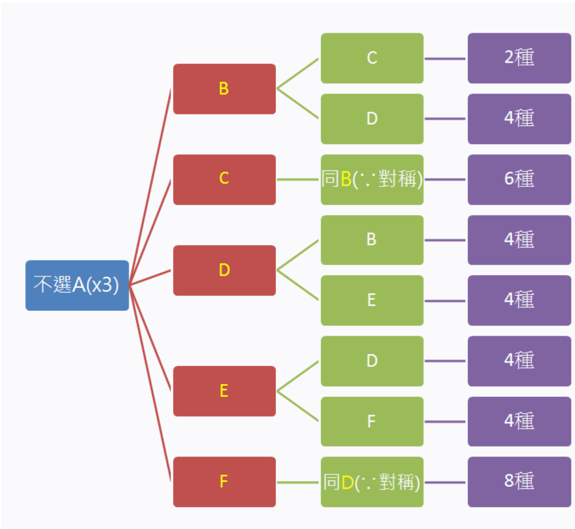


意即 720－114－114＋48＝540　★故 2×3 的長方形有交點的機率為 $1-\frac{176}{540}\fallingdotseq\boxed{0.674}$

七、六點正三角形(畫五個點)

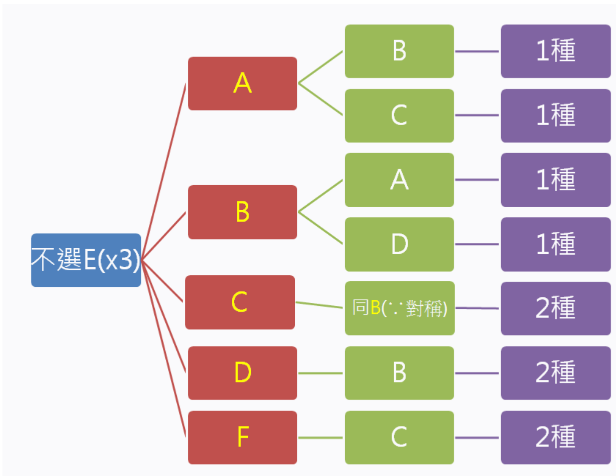
接著討論六點正六邊形畫五個點的情況：一樣我們將總情況分為兩類

(一) 無 A 點族(3 種→A、D、F)



因此將上述數字相加後×3，共 36×3=108 種

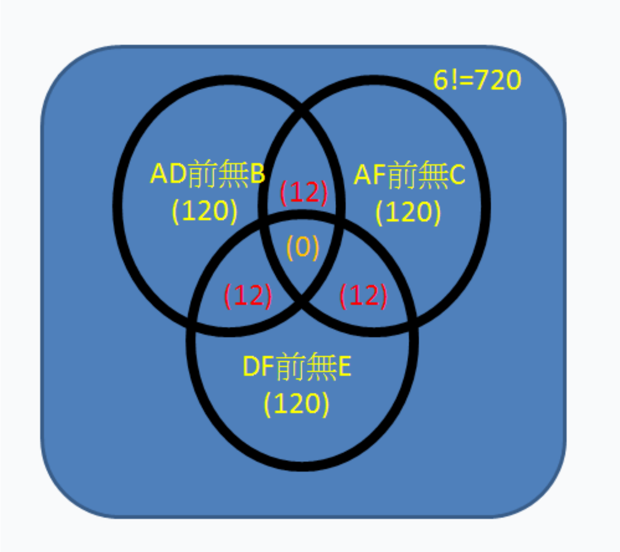
(二) 無 E 點族(3 種→B、C、E)



因此將上述數字相加後×3，共 10×3=30 種

上述兩種情況相加 108+30=138 種

◎至於五個點合理的種類數如何算呢？ 我們發現 AD 之前沒有 B，DF 之前沒有 E，或是 AF 之前無 C 均為不合理的情形，用全部的種類扣掉不合理的情況，即為五個點合理的情形。



意即 720－360＋36＝396　　　★故六個點的正三角形有交點的機率為 $1-\dfrac{138}{396}\fallingdotseq\boxed{0.652}$

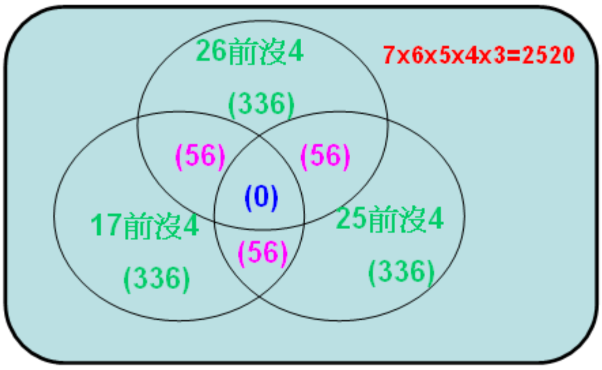
八、七點正六邊形(畫五個點)

同樣地，我們接著討論七個點的正六邊形如果只畫五個點可能有交點的情況

1 2 3 4 5 → $\boxed{36}$	1 2 3 4 6 → $\boxed{36}$	1 2 3 4 7 → $\boxed{56}$	1 2 3 5 6 → $\boxed{24}$	1 2 3 5 7 → $\boxed{24}$
1 2 3 6 7 → $\boxed{24}$	1 2 4 5 6 → $\boxed{56}$	1 2 4 5 7 → $\boxed{36}$	1 2 4 6 7 → $\boxed{48}$	1 2 5 6 7 → $\boxed{24}$
1 3 4 5 6 → $\boxed{56}$	1 3 4 5 7 → $\boxed{48}$	1 3 4 6 7 → $\boxed{36}$	1 3 5 6 7 → $\boxed{24}$	1 4 5 6 7 → $\boxed{56}$
2 3 4 5 6 → $\boxed{48}$	2 3 4 5 7 → $\boxed{56}$	2 3 4 6 7 → $\boxed{56}$	2 3 5 6 7 → $\boxed{24}$	2 4 5 6 7 → $\boxed{36}$
3 4 5 6 7 → $\boxed{36}$				

以上方框內的數字和為 $\boxed{840}$

◎至於五個點合理的種類數如何算呢？ 我們發現 17 之前沒有 4，26 之前沒有 4，或是 35 之前無 4 均為不合理的情形，用全部的種類扣掉不合理的情況，即為五個點合理的情形。



意即 2520－336×3＋56×3＝1680

★故七個點的正六邊形有交點的機率為 $\dfrac{840}{1680}=\boxed{0.5}$

九、3×3 正方形(畫五個點)

最後，我們還是回到 3×3 正方形只畫五個點可能有交點的情況，同樣的以反面解的方式，輔以樹狀圖完成結論。但由於 3×3 正方形共有 9 個點，於是我們用 Dev C++將 126 種可能情形列出。

1 2 3 4 5 → $\boxed{36}$	1 2 3 4 6 → $\boxed{16}$	1 2 3 4 7 → $\boxed{10}$	1 2 3 4 8 → $\boxed{28}$	1 2 3 4 9 → $\boxed{8}$
1 2 3 5 6 → $\boxed{36}$	1 2 3 5 7 → $\boxed{10}$	1 2 3 5 8 → $\boxed{52}$	1 2 3 5 9 → $\boxed{10}$	1 2 3 6 7 → $\boxed{8}$
1 2 3 6 8 → $\boxed{28}$	1 2 3 6 9 → $\boxed{10}$	1 2 3 7 8 → $\boxed{8}$	1 2 3 7 9 → $\boxed{0}$	1 2 3 8 9 → $\boxed{8}$
1 2 4 5 6 → $\boxed{36}$	1 2 4 5 7 → $\boxed{36}$	1 2 4 5 8 → $\boxed{36}$	1 2 4 5 9 → $\boxed{54}$	1 2 4 6 7 → $\boxed{28}$
1 2 4 6 8 → $\boxed{24}$	1 2 4 6 9 → $\boxed{24}$	1 2 4 7 8 → $\boxed{16}$	1 2 4 7 9 → $\boxed{8}$	1 2 4 8 9 → $\boxed{24}$
1 2 5 6 7 → $\boxed{30}$	1 2 5 6 8 → $\boxed{56}$	1 2 5 6 9 → $\boxed{36}$	1 2 5 7 8 → $\boxed{16}$	1 2 5 7 9 → $\boxed{6}$
1 2 5 8 9 → $\boxed{48}$	1 2 6 7 8 → $\boxed{16}$	1 2 6 7 9 → $\boxed{2}$	1 2 6 8 9 → $\boxed{24}$	1 2 7 8 9 → $\boxed{8}$
1 3 4 5 6 → $\boxed{16}$	1 3 4 5 7 → $\boxed{10}$	1 3 4 5 8 → $\boxed{30}$	1 3 4 5 9 → $\boxed{6}$	1 3 4 6 7 → $\boxed{8}$
1 3 4 6 8 → $\boxed{16}$	1 3 4 6 9 → $\boxed{8}$	1 3 4 7 8 → $\boxed{8}$	1 3 4 7 9 → $\boxed{0}$	1 3 4 8 9 → $\boxed{2}$
1 3 5 6 7 → $\boxed{6}$	1 3 5 6 8 → $\boxed{30}$	1 3 5 6 9 → $\boxed{10}$	1 3 5 7 8 → $\boxed{6}$	1 3 5 7 9 → $\boxed{0}$
1 3 5 8 9 → $\boxed{6}$	1 3 6 7 8 → $\boxed{2}$	1 3 6 7 9 → $\boxed{0}$	1 3 6 8 9 → $\boxed{8}$	1 3 7 8 9 → $\boxed{0}$
1 4 5 6 7 → $\boxed{52}$	1 4 5 6 8 → $\boxed{56}$	1 4 5 6 9 → $\boxed{48}$	1 4 5 7 8 → $\boxed{36}$	1 4 5 7 9 → $\boxed{10}$
1 4 5 8 9 → $\boxed{36}$	1 4 6 7 8 → $\boxed{28}$	1 4 6 7 9 → $\boxed{8}$	1 4 6 8 9 → $\boxed{24}$	1 4 7 8 9 → $\boxed{10}$
1 5 6 7 8 → $\boxed{30}$	1 5 6 7 9 → $\boxed{6}$	1 5 6 8 9 → $\boxed{54}$	1 5 7 8 9 → $\boxed{10}$	1 6 7 8 9 → $\boxed{8}$
2 3 4 5 6 → $\boxed{36}$	2 3 4 5 7 → $\boxed{36}$	2 3 4 5 8 → $\boxed{56}$	2 3 4 5 9 → $\boxed{30}$	2 3 4 6 7 → $\boxed{24}$
2 3 4 6 8 → $\boxed{24}$	2 3 4 6 9 → $\boxed{28}$	2 3 4 7 8 → $\boxed{24}$	2 3 4 7 9 → $\boxed{2}$	2 3 4 8 9 → $\boxed{16}$
2 3 5 6 7 → $\boxed{54}$	2 3 5 6 8 → $\boxed{36}$	2 3 5 6 9 → $\boxed{36}$	2 3 5 7 8 → $\boxed{48}$	2 3 5 7 9 → $\boxed{6}$
2 3 5 8 9 → $\boxed{16}$	2 3 6 7 8 → $\boxed{24}$	2 3 6 7 9 → $\boxed{8}$	2 3 6 8 9 → $\boxed{16}$	2 3 7 8 9 → $\boxed{8}$
2 4 5 6 7 → $\boxed{56}$	2 4 5 6 8 → $\boxed{48}$	2 4 5 6 9 → $\boxed{56}$	2 4 5 7 8 → $\boxed{36}$	2 4 5 7 9 → $\boxed{30}$
2 4 5 8 9 → $\boxed{56}$	2 4 6 7 8 → $\boxed{24}$	2 4 6 7 9 → $\boxed{16}$	2 4 6 8 9 → $\boxed{24}$	2 4 7 8 9 → $\boxed{28}$
2 5 6 7 8 → $\boxed{56}$	2 5 6 7 9 → $\boxed{30}$	2 5 6 8 9 → $\boxed{36}$	2 5 7 8 9 → $\boxed{52}$	2 6 7 8 9 → $\boxed{28}$
3 4 5 6 7 → $\boxed{48}$	3 4 5 6 8 → $\boxed{56}$	3 4 5 6 9 → $\boxed{52}$	3 4 5 7 8 → $\boxed{54}$	3 4 5 7 9 → $\boxed{6}$
3 4 5 8 9 → $\boxed{30}$	3 4 6 7 8 → $\boxed{24}$	3 4 6 7 9 → $\boxed{8}$	3 4 6 8 9 → $\boxed{28}$	3 4 7 8 9 → $\boxed{8}$
3 5 6 7 8 → $\boxed{36}$	3 5 6 7 9 → $\boxed{10}$	3 5 6 8 9 → $\boxed{36}$	3 5 7 8 9 → $\boxed{10}$	3 6 7 8 9 → $\boxed{10}$
4 5 6 7 8 → $\boxed{36}$	4 5 6 7 9 → $\boxed{16}$	4 5 6 8 9 → $\boxed{36}$	4 5 7 8 9 → $\boxed{36}$	4 6 7 8 9 → $\boxed{16}$
5 6 7 8 9 → $\boxed{36}$				

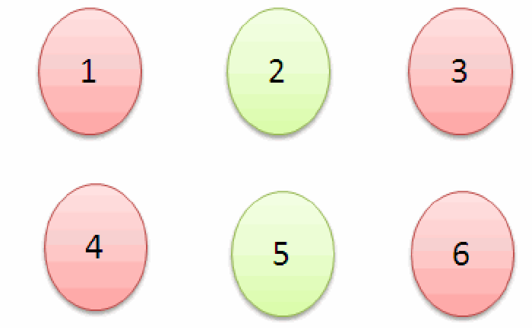
以上方框內的數字和為 $\boxed{3080}$

又 3×3 正方形 5 個點的總方法數為 7152 種(見 p19)

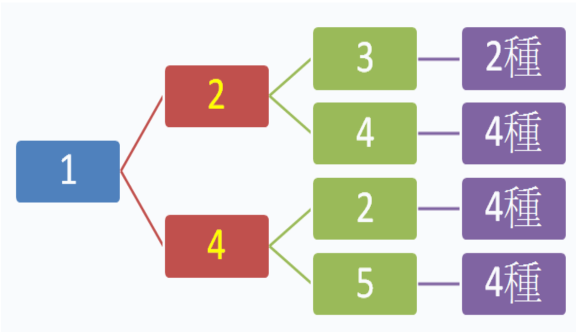
故有交點的機率為 $1-\dfrac{3080}{7152}\fallingdotseq\boxed{0.569}$

十、2×3 長方形(畫六個點)

我們一樣先從沒交點的情形來探討，最後用反面解求出有交點情形占其全部比例。

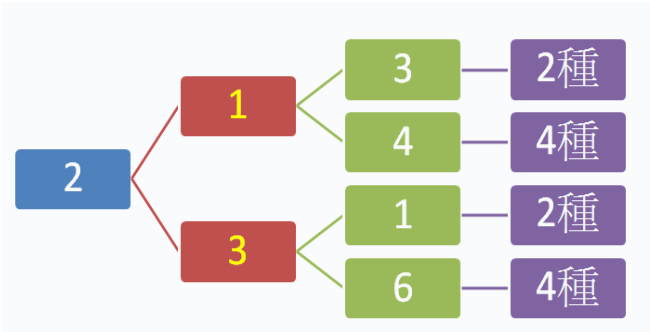


(一) 1、3、4、6 系列



因此將上述數字相加後×4，共 14×4=56 種

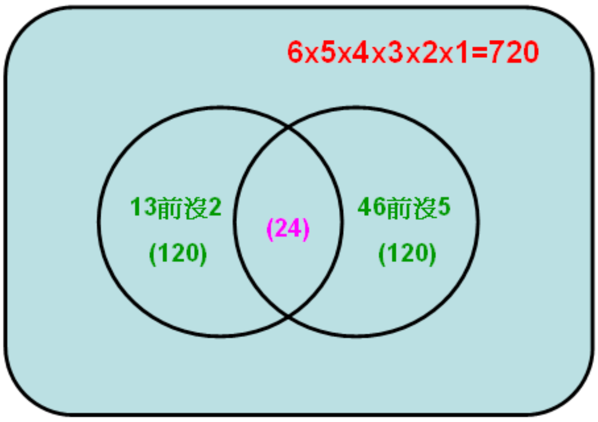
(二) 2、5 系列



因此將上述數字相加後×2，共 12×2=24 種

上述兩種情況相加為 56+24=80 種

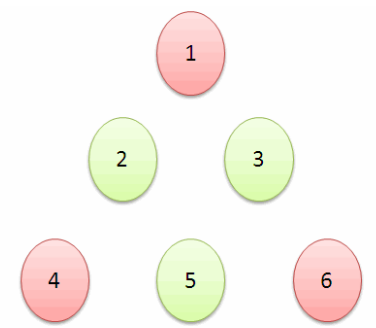
◎至於六個點合理的種類數如何算呢？ 我們發現 13 之前沒有 2，46 之前沒有 5 均為不合理的情形，用全部的種類扣掉不合理的情況，即為六個點合理的情形。



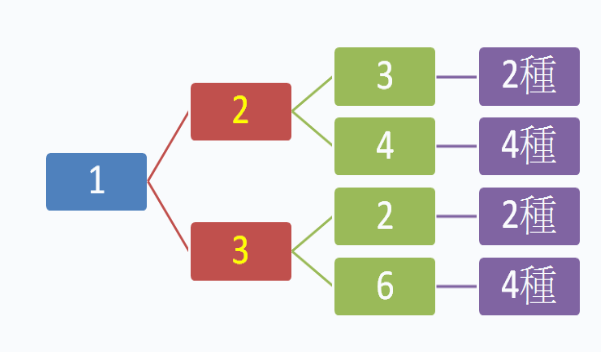
意即 720－120×2＋24＝504

★故 2x3 長方形有交點的機率為 $1-\frac{80}{504}=\boxed{0.841}$

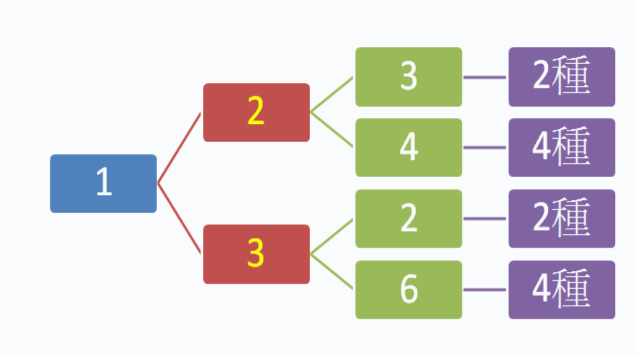
十一、六點正三角形(畫六個點)



(一) 1、4、6 系列



(二) 2、3、5 系列

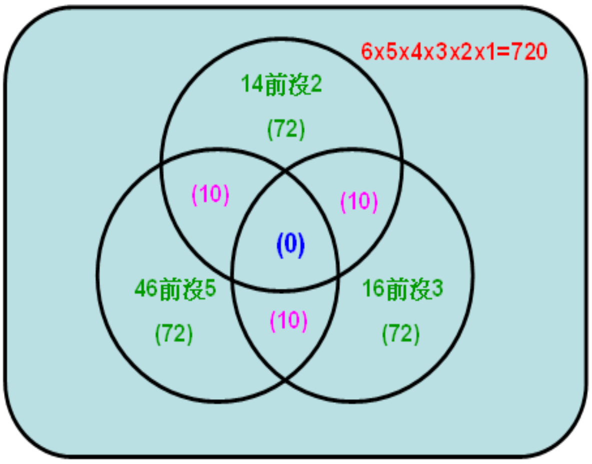


因此將上述數字相加後×3，共 12×3=36 種

因此將上述數字相加後×3，共 12×3=36 種

上述兩種情況相加為 36+36=72 種→六點正三角形沒交點情形

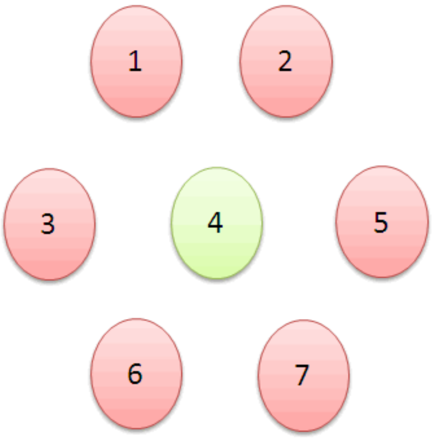
◎至於六個點合理的種類數如何算呢？我們發現 14 之前沒有 2，16 之前沒有 3，和 46 前沒有 5，均為不合理的情形，用全部的種類扣掉不合理的情況，即為六個點合理的情形。



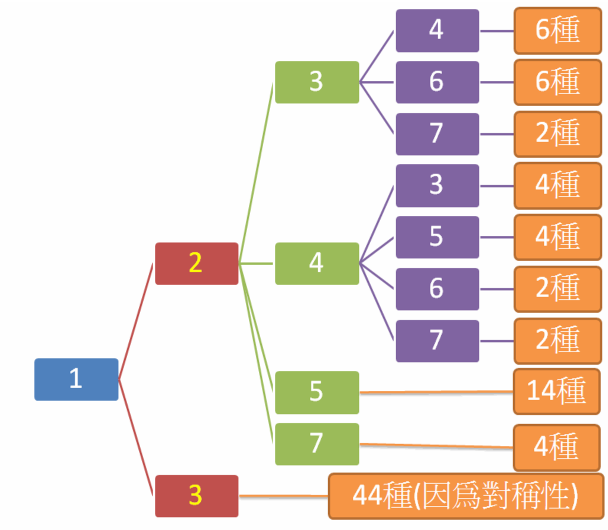
意即 $720-72\times3+10\times3=534$

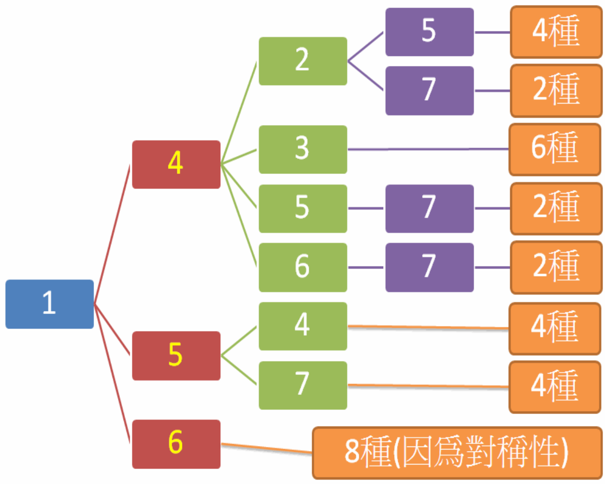
★故六點正三角形有交點的機率為 $1-\dfrac{72}{534}=\boxed{0.865}$

十二、七點正六邊形(畫六個點)



(一) 1、2、3、5、6、7 系列



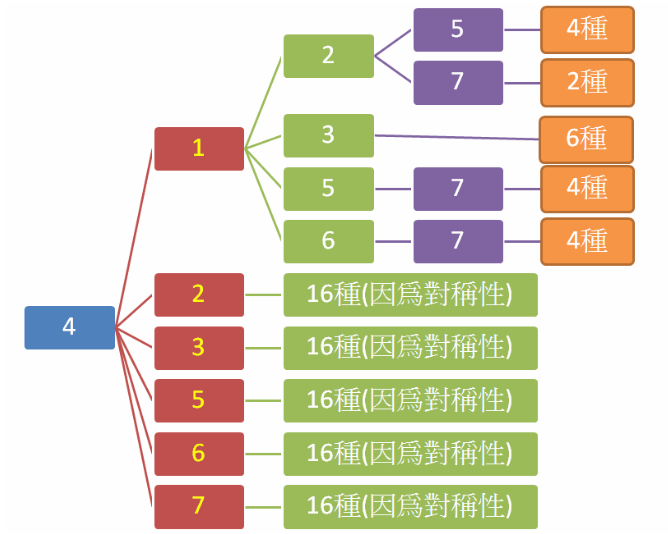


因此將上述數字相加後為 88 種

因此將上述數字相加後為 32 種

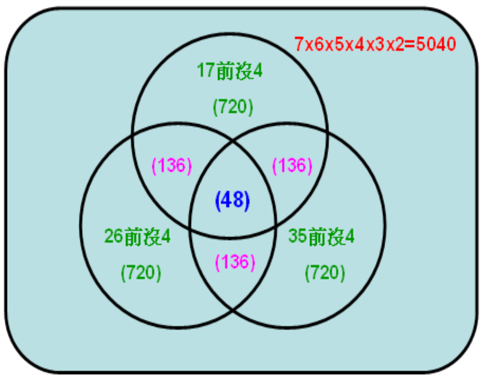
上述兩種情況相加後×6=120×6=720 種

(二) 4 系列



共 16×6=96 種，兩個系列數字相加共為 720+96=**816 種**

◎至於六個點合理的種類數如何算呢？我們發現 17 之前沒有 4，26 之前沒有 4，和 35 前沒有 4，均為不合理的情形，用全部的種類扣掉不合理的情況，即為六個點合理的情形。



意即 5040－720×3＋136×3-48＝3240

★故六點正三角形有交點的機率為 $1-\frac{816}{3240}=\boxed{0.748}$

十三、3×3 正方形(畫六個點)

最後，我們還是回到 3×3 正方形只畫六個點可能有交點的情況，同樣的以反面解的方式，輔以樹狀圖完成結論。但由於 3×3 正方形共有 9 個點，於是我們用 Dev C++將 84 種可能情形列出。

1 2 3 4 5 6 $\rightarrow\boxed{80}$	1 2 3 4 5 7 $\rightarrow\boxed{72}$	1 2 3 4 5 8 $\rightarrow\boxed{132}$	1 2 3 4 5 9 $\rightarrow\boxed{56}$	1 2 3 4 6 7 $\rightarrow\boxed{52}$
1 2 3 4 6 8 $\rightarrow\boxed{60}$	1 2 3 4 6 9 $\rightarrow\boxed{52}$	1 2 3 4 7 8 $\rightarrow\boxed{52}$	1 2 3 4 7 9 $\rightarrow\boxed{0}$	1 2 3 4 8 9 $\rightarrow\boxed{24}$
1 2 3 5 6 7 $\rightarrow\boxed{56}$	1 2 3 5 6 8 $\rightarrow\boxed{132}$	1 2 3 5 6 9 $\rightarrow\boxed{72}$	1 2 3 5 7 8 $\rightarrow\boxed{50}$	1 2 3 5 7 9 $\rightarrow\boxed{0}$
1 2 3 5 8 9 $\rightarrow\boxed{50}$	1 2 3 6 7 8 $\rightarrow\boxed{24}$	1 2 3 6 7 9 $\rightarrow\boxed{0}$	1 2 3 6 8 9 $\rightarrow\boxed{52}$	1 2 3 7 8 9 $\rightarrow\boxed{0}$
1 2 4 5 6 7 $\rightarrow\boxed{132}$	1 2 4 5 6 8 $\rightarrow\boxed{128}$	1 2 4 5 6 9 $\rightarrow\boxed{128}$	1 2 4 5 7 8 $\rightarrow\boxed{80}$	1 2 4 5 7 9 $\rightarrow\boxed{56}$
1 2 4 5 8 9 $\rightarrow\boxed{128}$	1 2 4 6 7 8 $\rightarrow\boxed{60}$	1 2 4 5 7 9 $\rightarrow\boxed{24}$	1 2 4 6 8 9 $\rightarrow\boxed{48}$	1 2 4 7 8 9 $\rightarrow\boxed{52}$
1 2 5 6 7 8 $\rightarrow\boxed{72}$	1 2 5 6 7 9 $\rightarrow\boxed{16}$	1 2 5 6 8 9 $\rightarrow\boxed{128}$	1 2 5 7 8 9 $\rightarrow\boxed{50}$	1 2 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{24}$
1 3 4 5 6 7 $\rightarrow\boxed{50}$	1 3 4 5 6 8 $\rightarrow\boxed{72}$	1 3 4 5 6 9 $\rightarrow\boxed{50}$	1 3 4 5 7 8 $\rightarrow\boxed{56}$	1 3 4 5 7 9 $\rightarrow\boxed{0}$
1 3 4 5 8 9 $\rightarrow\boxed{16}$	1 3 4 6 7 8 $\rightarrow\boxed{24}$	1 3 4 6 7 9 $\rightarrow\boxed{0}$	1 3 4 6 8 9 $\rightarrow\boxed{24}$	1 3 4 7 8 9 $\rightarrow\boxed{0}$
1 3 5 6 7 8 $\rightarrow\boxed{16}$	1 3 5 6 7 9 $\rightarrow\boxed{0}$	1 3 5 6 8 9 $\rightarrow\boxed{56}$	1 3 5 7 8 9 $\rightarrow\boxed{0}$	1 3 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{0}$
1 4 5 6 7 8 $\rightarrow\boxed{132}$	1 4 5 6 7 9 $\rightarrow\boxed{50}$	1 4 5 6 8 9 $\rightarrow\boxed{128}$	1 4 5 7 8 9 $\rightarrow\boxed{72}$	1 4 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{52}$
1 5 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{56}$	2 3 4 5 6 7 $\rightarrow\boxed{128}$	2 3 4 5 6 8 $\rightarrow\boxed{128}$	2 3 4 5 6 9 $\rightarrow\boxed{132}$	2 3 4 5 7 8 $\rightarrow\boxed{128}$
2 3 4 5 7 9 $\rightarrow\boxed{16}$	2 3 4 5 8 9 $\rightarrow\boxed{72}$	2 3 4 6 7 8 $\rightarrow\boxed{48}$	2 3 4 6 7 9 $\rightarrow\boxed{24}$	2 3 4 6 8 9 $\rightarrow\boxed{60}$
2 3 4 7 8 9 $\rightarrow\boxed{24}$	2 3 5 6 7 8 $\rightarrow\boxed{128}$	2 3 5 6 7 9 $\rightarrow\boxed{56}$	2 3 5 6 8 9 $\rightarrow\boxed{80}$	2 3 5 7 8 9 $\rightarrow\boxed{50}$
2 3 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{52}$	2 4 5 6 7 8 $\rightarrow\boxed{128}$	2 4 5 6 7 9 $\rightarrow\boxed{72}$	2 4 5 6 8 9 $\rightarrow\boxed{128}$	2 4 5 7 8 9 $\rightarrow\boxed{132}$
2 4 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{60}$	2 5 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{132}$	3 4 5 6 7 8 $\rightarrow\boxed{128}$	3 4 5 6 7 9 $\rightarrow\boxed{50}$	3 4 5 6 8 9 $\rightarrow\boxed{132}$
3 4 5 7 8 9 $\rightarrow\boxed{56}$	3 4 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{52}$	3 5 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{72}$	4 5 6 7 8 9 $\rightarrow\boxed{80}$	

以上方框內的數字和為 $\boxed{5344}$

又 3×3 正方形 5 個點的總方法數為 26016 種(見 p19)

故有交點的機率為 $1-\dfrac{5344}{26016} \fallingdotseq \boxed{0.795}$

伍、研究結果與討論

一、密碼鎖的訴求有二

(一)合理的種類數多 (因為總種類數多，能畫的情形也比較多種，比較不容易被破解)

(二)有交點的比率低 (因為大部分的人都畫沒交點的，沒交點比例高較安全)

二、若只畫四個點 如表一所示，六個點的正三角形和 2×3 的長方形有交點的比率最高，合理種類數少，不適合作為手機密碼鎖，而雖然七個點的六邊形有交點的比率低，但其合理種類為 3×3 正方形的 1/3 左右，故也不太適合作為密碼鎖

三、若只畫五個點 如表二所示，六個點的正三角形和 2×3 的長方形也因為有交點的比率最高，合理種類數少，不適合作為手機密碼鎖。而雖然七個點的六邊形有交點的比率低，但其合理種類為 3×3 正方形的 1/4，所以相較之下也不太適合作為密碼鎖。

四、若只畫六個點 如表三所示，六個點的正三角形和 2×3 的長方形有交點的比率最高，合理種類數少，不適合作為手機密碼鎖而，雖然七個點的六邊形有交點的比率低，但其合理種類為 3×3 正方形的 1/8 左右，故也不太適合作為密碼鎖

五、我們發現所有四個點圖形有交點的比率皆在 $\boxed{\frac{1}{5} \sim \frac{1}{3}}$ 之間

4 個點	2x3 長方形	6 個點 正三角形	7 個點 正六邊形	3x3 正方形
有交點種類	84	72	132	432
合理種類	260	222	576	1624
有交點比率	0.323	0.324	0.229	0.266

▲表一

5 個點	2x3 長方形	6 個點 正三角形	7 個點 正六邊形	3x3 正方形
有交點種類	364	258	840	4072
合理種類	540	396	1680	7152
有交點比率	0.674	0.652	0.500	0.569

▲表二

6 個點	2x3 長方形	6 個點 正三角形	7 個點 正六邊形	3x3 正方形
有交點種類	424	462	2424	20672
合理種類	504	534	3240	26016
有交點比率	0.841	0.865	0.748	0.795

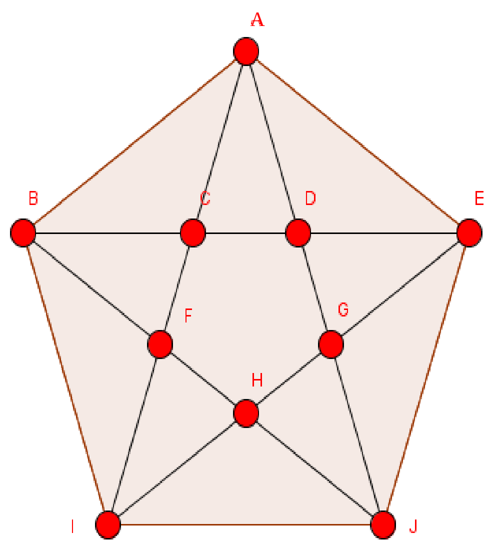
▲表三

陸、結論與應用

一、就綜合以上結論，由於其他種類圖形要不是合理種類數太少，就是有交點比率太低，難怪現在以 3×3 的正方形為密碼鎖

二、十個點的正星形目前我們算出，或許有作為未來新式密碼鎖的潛力

10 點正星形	畫 4 個點	畫 5 個點	畫 6 個點
有交點種類	380	4060	23010
合理種類	1710	7930	31980
有交點比率	0.222	0.512	0.720



◎此種圖形優點：合理種類數多，有交點數比率比 3×3 正方形低

4 個點	10 點正星形	7 個點 正六邊形	3x3 正方形
有交點種類	380	132	432
合理種類	1710	576	1624
有交點比率	0.222	0.229	0.266

5 個點	10 點正星形	7 個點 正六邊形	3x3 正方形
有交點種類	4060	840	4072
合理種類	7930	1680	7152
有交點比率	0.512	0.500	0.569

6 個點	10 點正星形	7 個點 正六邊形	3x3 正方形
有交點種類	23010	2424	20672
合理種類	31980	3240	26016
有交點比率	0.720	0.748	0.795

柒、參考文獻

智慧型手機的密碼共有多少種。百度文庫

http://wenku.baidu.com/view/43c8231c6bd97f192279e9cc.html

智慧型手機圖形密碼種類

http://wenku.baidu.com/view/d08a2613650e52ea551898dd.html

Android 手機圖形鎖的安全分析與強化

http://www.shs.edu.tw/works/essay/2012/11/2012111422504931.pdf

高中數學康熙版 第二冊第二章 排列組合

高中數學康熙版 第二冊第三章 機率

【評語】040811

1. 分析和推導手機密碼鎖的圖形，有後續發展潛力。

2. 已具體建議未來具潛力之新式密碼鎖。

3. 如產出原型並做優缺驗證，當更具說服力。