中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040418

n 組平行線定理

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高一　顏允奕 高一　莊耀鈞 高一　李孟龍	楊玉星

關鍵詞：平行線、面積、行列式

摘要

本文從原始的題目「三組平行線定理及其一個猜想」出發，我們猜想 n 組平行線也會有類似的定理。於是試著將 n 組 $(n \ge 3)$ 平行線：$a_{11} // a_{12}, a_{21} // a_{22}, a_{31} // a_{32}, ..., a_{(n-1)1} // a_{(n-1)2}, a_{n1} // a_{n2}$，

表示成 n×2 階的矩陣：$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix}$

我們令 $A_1 = (a_{11}, a_{22})$，$A_2 = (a_{21}, a_{32})$，$A_3 = (a_{31}, a_{42})$，……，$A_{n-1} = (a_{(n-1)1}, a_{n2})$，$A_n = (a_{n1}, a_{12})$，

再令 $A_1^{'} = (a_{12}, a_{21})$，$A_2^{'} = (a_{22}, a_{31})$，$A_3^{'} = (a_{32}, a_{41})$，……，$A_{n-1}^{'} = (a_{(n-1)2}, a_{n1})$，$A_n^{'} = (a_{n2}, a_{11})$。

設 n 邊形有號面積為 $S_{A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n}$，另一個 n 邊形有號面積為 $S_{A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}......A_{n-1}^{'}A_n^{'}}$，則利用平行線的斜率相等和 n 邊形有號面積的行列式表示法：$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$，可推得

$S_{A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n} = S_{A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}......A_{n-1}^{'}A_n^{'}}$。若 $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}, A_n$ n 點共線，則 $S_{A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}A_4^{'}......A_{n-1}^{'}A_n^{'}} = 0$，但

$A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}, A_4^{'}, ..., A_{n-1}^{'}, A_n^{'}$ n 點不一定共線。

壹、研究動機

有一天在學校圖書館找書的時候，意外發現一本「數學傳播季刊」，其中有一篇由劉步松教授所寫的「三組平行線定理及其一個猜想」特別引起我們的注意，設想如果是更多組平行線，是否也有類似的定理？ 而任意 n 組 $(n \ge 3)$ 平行線時又如何？於是我們便開始著手研究這個問題。

貳、研究目的

探討 n 組平行線定理，並設法證明此定理成立。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、幾何畫板 GSP

肆、研究過程或方法

一、預備引理

設 $A_1\,(x_1\,,y_1)$，$A_2\,(x_2\,,y_2)$，…，$A_n\,(x_n,y_n)$ 為 n 邊形之頂點坐標且為逆時針定向，

則此 n 邊形的面積為 $S=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}$，其中規定 $x_{n+1}=x_1$ 且 $y_{n+1}=y_1$。

【證明】

多邊形太複雜，我們想退回三角形的特例，探尋完成後，再進到多邊形。

(一) 已知三角形三個頂點的坐標為 $A\,(x_1, y_1)$，$B\,(x_2, y_2)$，$C\,(x_3, y_3)$，如何求其面積？

我們進一步退到三個頂點為 $O(0,0), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 之更特殊三角形。

令 OB， OC 與 x 軸的夾角分別為 θ_1 與 θ_2，且 $OB=\rho_1$，$OC=\rho_2$，

則 $x_2=\rho_1\cos\theta_1$，$y_2=\rho_1\sin\theta_1$ 且 $x_3=\rho_2\cos\theta_2$，$y_3=\rho_2\sin\theta_2$

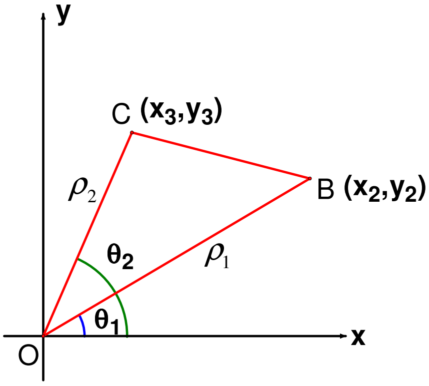


圖 1

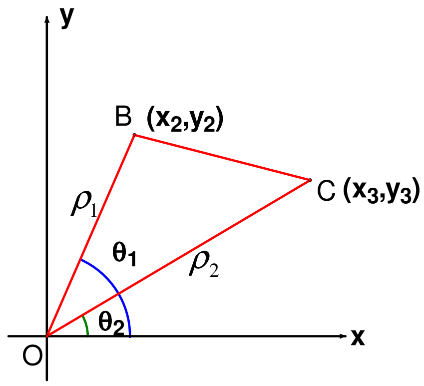


圖 2

如上圖所示，我們分成兩種情形來討論：

1. 當 O，B，C 成為逆時針（或右手系）定向時，如圖 1，

則 ΔOBC 的面積為 $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)$

$$=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}(\rho_1\cos\theta_1\rho_2\sin\theta_2-\rho_1\sin\theta_1\rho_2\cos\theta_2)$$

$$=\frac{1}{2}(x_2y_3-y_2x_3)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

2. 當 O，B，C 成爲順時針（或左手系）定向時，如圖 2，

則 ΔOBC 的面積爲 $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)$

$$=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$=\frac{1}{2}(\rho_2\cos\theta_2\rho_1\sin\theta_1-\rho_2\sin\theta_2\rho_1\cos\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_2-y_3x_2)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & x_2\\ y_3 & y_2\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

因此行列式 $\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}$ 代表由 OB 與 OC 所生成的平行四邊形的有號面積，

當 O，B，C 逆時針定向時爲正，順時針定向時爲負。

不妨假設 ΔABC 爲逆時針走向，如圖 3，

則 ΔABC 的面積爲

$$S=\Delta OAB+\Delta OBC-\Delta OAC$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}$$

其中規定 $x_4=x_1$ 且 $y_4=y_1$

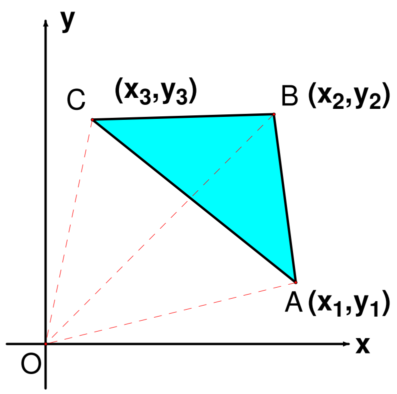


圖 3

（二）已知四邊形四個頂點的坐標爲 $A=(x_1, y_1)$，$B=(x_2, y_2)$，$C=(x_3, y_3)$，$D=(x_4, y_4)$，如何求其面積？

1. 當四邊形 ABCD 爲凸四邊形時，如圖 4，我們將四邊形分割成 ΔOAB，ΔOBC，ΔOCD，ΔODA，則四邊形 ABCD 的面積爲

$$S=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCD-\Delta OAD$$

$$=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCD+\Delta ODA$$

（∵O，D，A 順時針定向時爲負）

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & x_4\\ y_3 & y_4\end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_4\\ y_1 & y_4\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & x_4\\ y_3 & y_4\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_4 & x_1\\ y_4 & y_1\end{vmatrix}$$

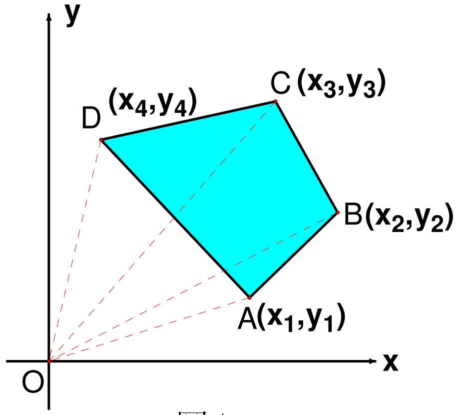


圖 4

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$$ 其中規定 $x_5=x_1$ 且 $y_5=y_1$。

2. 當四邊形 ABCD 爲凹四邊形時，如圖 5，我們將四邊形分割成 ΔOAB ，ΔOBC ，ΔOCD ，ΔODA ，則四邊形 ABCD 的面積爲

$$S=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCD-\Delta OAD$$
$$=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCD+\Delta ODA$$

（∵O，D，A 順時針定向時爲負）

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$$

其中規定 $x_5=x_1$ 且 $y_5=y_1$。

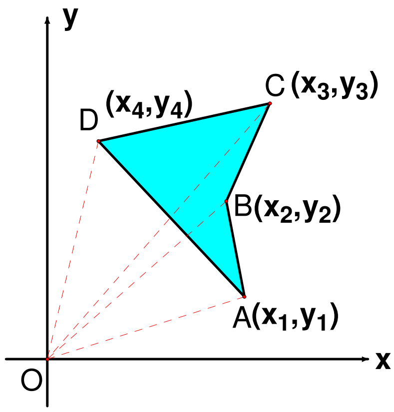


圖 5

3. 當四邊形 ABCD 凹扭成 X 形時，如圖 6，我們將四邊形分割成 ΔOAB ，ΔOBC ，ΔOCD ，ΔODA ，則四邊形 ABCD 的面積爲

$$S=\Delta\text{CDE}+\Delta\text{ABE}$$

（∵A，B，E 順時針定向時爲負）

$$=\Delta\text{CDE}-\Delta\text{AEB}$$
$$=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCD-\Delta OAD$$
$$=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCD+\Delta ODA$$

（∵O，D，A 順時針定向時爲負）

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$$

其中規定 $x_5=x_1$ 且 $y_5=y_1$。

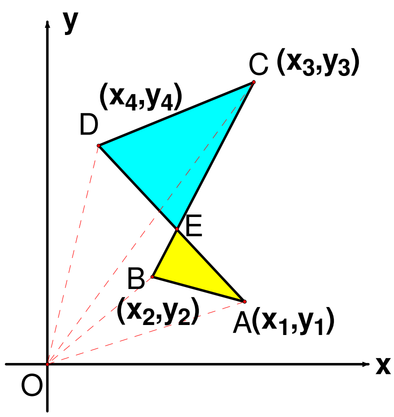


圖 6

（三）已知 n 邊形 n 個頂點的坐標為
$A_1=(x_1,y_1)$，$A_2=(x_2,y_2)$，$A_3=(x_3,y_3)$，$A_4=(x_4,y_4)$，……，$A_{n-1}=(x_{n-1},y_{n-1})$，$A_n=(x_n,y_n)$ 如何求其面積？

如圖 7，我們將 n 邊形分割成
ΔOA_1A_2，ΔOA_2A_3，ΔOA_3A_4，ΔOA_4A_5，……，$\Delta OA_{n-1}A_n$，ΔOA_nA_1

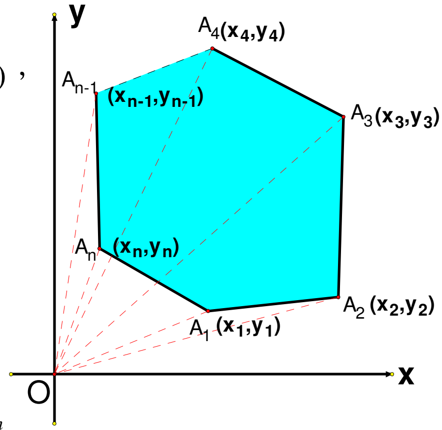


圖 7

則 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4......A_{n-1}A_n$ 的面積為

$$S=-\Delta OA_2A_1+\Delta OA_2A_3+\Delta OA_3A_4+\cdots+(-\Delta OA_nA_{n-1})-\Delta OA_1A_n$$
$$=\Delta OA_1A_2+\Delta OA_2A_3+\Delta OA_3A_4+\cdots+\Delta OA_{n-1}A_n+\Delta OA_nA_1$$

（$\because O$，A_1，A_2；O，A_{n-1}，A_n；O，A_n，A_1 順時針定向時為負）

$$=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_1\\ y_2 & y_1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & x_4\\ y_3 & y_4\end{vmatrix}+......-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_n & x_{n-1}\\ y_n & y_{n-1}\end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_n\\ y_1 & y_n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & x_4\\ y_3 & y_4\end{vmatrix}+......+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_{n-1} & x_n\\ y_{n-1} & y_n\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_n & x_1\\ y_n & y_1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}$$

其中規定 $x_{n+1}=x_1$ 且 $y_{n+1}=y_1$。

二、探索過程

我們討論這個問題時，先將此問題的對象分成三組平行線所構成的三角形和四組平行線所構成的四邊形兩類，先利用數學電腦軟體 GSP 驗證其正確性，再設法進一步證明，並試著證明此問題適用於任意 n 組 $(n\geq 3)$ 平行線所構成的 n 多邊形。

而原始的題目只探討「三組平行線所構成的三角形性質」如下：

(一)三組平行線

如圖 8，平面上給定三組平行線，分別為 $a_1//a_2,b_1//b_2,c_1//c_2$，且在不同組的兩條直線都是相交的。設 a_1 與 b_2 的交點為 A，b_1 與 c_2 的交點為 B，c_1 與 a_2 的交點為 C；a_2 與 b_1 的交點為 D，b_2 與 c_1 的交點為 E，c_2 與 a_1 的交點為 F，則有如下兩個結論：

(1)若 A,B,C 三點不共線，則兩三角形 ΔABC 和 ΔDEF 的面積會相等，即 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta DEF}$。

(2)若 A,B,C 三點共線，則 D,E,F 三點也共線。

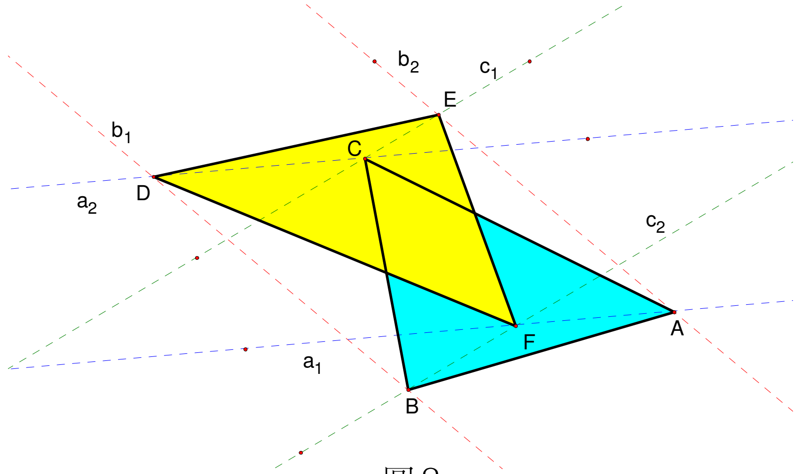


圖 8

【證明】

設 $A(x_1, y_1)$ ，$B(x_2, y_2)$ ，$C(x_3, y_3)$ ，$D(x_1^{'}, y_1^{'})$ ，$E(x_2^{'}, y_2^{'})$ ，$F(x_3^{'}, y_3^{'})$ ，

利用平行線的斜率相等：

$\because AF \mathbin{//} DC$，$\therefore \dfrac{y_3^{'} - y_1}{x_3^{'} - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1^{'}}{x_3 - x_1^{'}}$；$\because$ AE//BD，$\therefore \dfrac{y_2^{'} - y_1}{x_2^{'} - x_1} = \dfrac{y_1^{'} - y_2}{x_1^{'} - x_2}$；$\because$ CE//FB，$\therefore \dfrac{y_2^{'} - y_3}{x_2^{'} - x_3} = \dfrac{y_2 - y_3^{'}}{x_2 - x_3^{'}}$

將上面三個等式分別去分母可得下面三個等式：

$$x_1 y_2 - x_1 y_1^{'} - x_2^{'} y_2 + x_2^{'} y_1^{'} = x_2 y_1 - x_2 y_2^{'} - x_1^{'} y_1 + x_1^{'} y_2^{'}$$

$$x_2 y_3 - x_2 y_2^{'} - x_3^{'} y_3 + x_3^{'} y_2^{'} = x_3 y_2 - x_3 y_3^{'} - x_2^{'} y_2 + x_2^{'} y_3^{'}$$

$$x_3 y_1 - x_3 y_3^{'} - x_1^{'} y_1 + x_1^{'} y_3^{'} = x_1 y_3 - x_1 y_1^{'} - x_3^{'} y_3 + x_3^{'} y_1^{'}$$

將上面三式相加，消項後並移項可得：

$$x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3 = x_1^{'} y_2^{'} + x_2^{'} y_3^{'} + x_3^{'} y_1^{'} - x_2^{'} y_1^{'} - x_3^{'} y_2^{'} - x_1^{'} y_3^{'} \qquad \text{(I)}$$

寫成行列式：$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{'} & x_2^{'} \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2^{'} & x_3^{'} \\ y_2^{'} & y_3^{'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3^{'} & x_1^{'} \\ y_3^{'} & y_1^{'} \end{vmatrix} \qquad \text{(II)}$

又 $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ ，$S_{\Delta DEF} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1^{'} & x_2^{'} \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2^{'} & x_3^{'} \\ y_2^{'} & y_3^{'} \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3^{'} & x_1^{'} \\ y_3^{'} & y_1^{'} \end{vmatrix}$

由於(II)式成立，所以有 $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DEF}$ ，從而結論(１)成立；

若 A ，B ，C 三點共線，則 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$ ，

由(II)式也有 $\begin{vmatrix} x_1^{'} & x_2^{'} \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2^{'} & x_3^{'} \\ y_2^{'} & y_3^{'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3^{'} & x_1^{'} \\ y_3^{'} & y_1^{'} \end{vmatrix} = 0$，從而 $S_{\Delta DEF} = 0$ ，即 D ，E ，F 三點也共線，

故結論(2)也成立。

我們試著將三組平行線：$a_1 // a_2, b_1 // b_2, c_1 // c_2$ 表示成 3×2 階的矩陣：$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$，

不妨令a_1與b_2的交點$A=(a_1,b_2)$，b_1與c_2的交點$B=(b_1,c_2)$，c_1與a_2的交點$C=(c_1,a_2)$，
則會發現：a_2與b_1的交點$D=(a_2,b_1)$，b_2與c_1的交點$E=(b_2,c_1)$，c_2與a_1的交點$F=(c_2,a_1)$。

仿照同樣方式，可以將四組平行線：$a_1 // a_2, b_1 // b_2, c_1 // c_2, d_1 // d_2$ 表示成 4×2 階的矩陣：$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix}$，

令a_1與b_2的交點$A=(a_1,b_2)$，b_1與c_2的交點$B=(b_1,c_2)$，c_1與d_2的交點$C=(c_1,d_2)$，
d_1與a_2的交點$D=(d_1,a_2)$，
則會發現：
a_2與b_1的交點$E=(a_2,b_1)$，b_2與c_1的交點$F=(b_2,c_1)$，c_2與d_1的交點$G=(c_2,d_1)$，
d_2與a_1的交點$H=(d_2,a_1)$。

(二)四組平行線

如圖 9，平面上給定四組平行線，分別爲$a_1 // a_2, b_1 // b_2, c_1 // c_2, d_1 // d_2$，且在不同組的兩條直線都是相交的。設$a_1$與$b_2$的交點爲$A$，$b_1$與$c_2$的交點爲$B$，$c_1$與$d_2$的交點爲$C$，$d_1$與$a_2$的交點爲$D$；$a_2$與$b_1$的交點爲$E$，$b_2$與$c_1$的交點爲$F$，$c_2$與$d_1$的交點爲$G$，$d_2$與$a_1$的交點爲$H$，則有如下兩個結論：

(1)若A,B,C,D四點不共線，則兩四邊形$ABCD$和$EFGH$的有號面積會相等，
即$S_{ABCD}=S_{EFGH}$。

(2)若A,B,C,D四點共線，則$S_{EFGH}=0$，但E,F,G,H四點不一定共線。

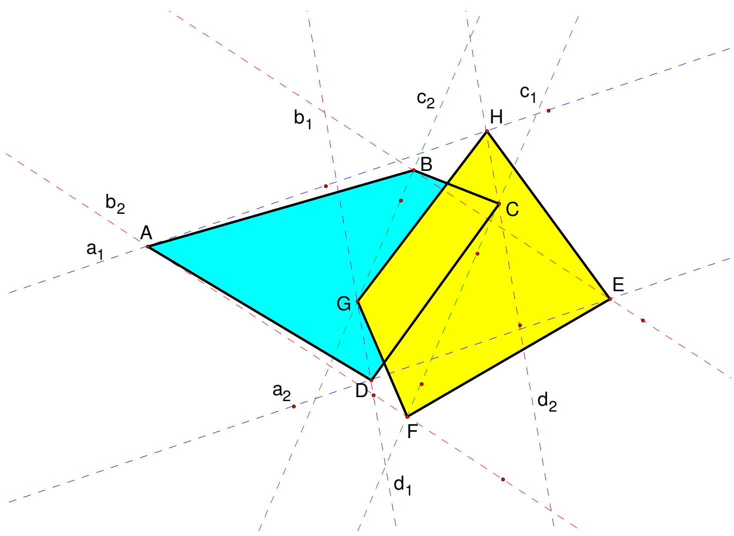


圖 9

【證明】

設 $A(x_1,y_1)$ ，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$ ，$E(x_1',y_1')$，$F(x_2',y_2')$，$G(x_3',y_3')$，$H(x_4',y_4')$，

利用平行線的斜率相等：

$\because DE \,//\, AH$ ，$\therefore \dfrac{y_1'-y_4}{x_1'-x_4}=\dfrac{y_4'-y_1}{x_4'-x_1}$ ；$\because$ AF//BE ，$\therefore \dfrac{y_2'-y_1}{x_2'-x_1}=\dfrac{y_1'-y_2}{x_1'-x_2}$ ；

$\because$ BG//CF ，$\therefore \dfrac{y_3'-y_2}{x_3'-x_2}=\dfrac{y_2'-y_3}{x_2'-x_3}$ ，$\because CH \,//\, DG$ ，$\therefore \dfrac{y_4'-y_3}{x_4'-x_3}=\dfrac{y_3'-y_4}{x_3'-x_4}$ ，

將上面四個等式分別去分母可得下面四個等式：

$$x_1'y_4'-x_1'y_1-x_4y_4'+x_4y_1=x_4'y_1'-x_4'y_4-x_1y_1'+x_1y_4$$

$$x_2'y_1'-x_2'y_2-x_1y_1'+x_1y_2=x_1'y_2'-x_1'y_1-x_2y_2'+x_2y_1$$

$$x_3'y_2'-x_3'y_2-x_2y_2'+x_2y_3=x_2'y_3'-x_2'y_2-x_3y_3'+x_3y_2$$

$$x_4'y_3'-x_4'y_4-x_3y_3'+x_3y_4=x_3'y_4'-x_3'y_3-x_4y_4'+x_4y_3$$

將上面四式相加，消項後並移項可得：

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_4y_3-x_1y_4=x_1'y_2'+x_2'y_3'+x_3'y_4'+x_4'y_1'-x_2'y_1'-x_3'y_2'-x_4'y_3'-x_1'y_4' \tag{I}$$

寫成行列式：$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3 & x_4\\ y_3 & y_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_4 & x_1\\ y_4 & y_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1' & x_2'\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2' & x_3'\\ y_2' & y_3'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3' & x_4'\\ y_3' & y_4'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_4' & x_1'\\ y_4' & y_1'\end{vmatrix}$ (II)

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & x_4\\ y_3 & y_4\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_4 & x_1\\ y_4 & y_1\end{vmatrix}，$$

$$S_{EFGH}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1' & x_2'\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2' & x_3'\\ y_2' & y_3'\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3' & x_4'\\ y_3' & y_4'\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_4' & x_1'\\ y_4' & y_1'\end{vmatrix}$$

由於(II)式成立，所以有 $S_{ABCD}=S_{EFGH}$ ，從而結論(１)成立；

若 A ，B ，C ，D 四點共線，則$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3 & x_4\\ y_3 & y_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_4 & x_1\\ y_4 & y_1\end{vmatrix}=0$，

由(II)式也有$\begin{vmatrix}x_1' & x_2'\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2' & x_3'\\ y_2' & y_3'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3' & x_4'\\ y_3' & y_4'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_4' & x_1'\\ y_4' & y_1'\end{vmatrix}=0$ ，從而 $S_{EFGH}=0$，但 E,F,G,H 四點不一定共線，故結論(2)也成立。

爲了便於討論，我們將 n 組平行線：$a_{11} // a_{12}, a_{21} // a_{22}, a_{31} // a_{32}, \ldots\ldots, a_{(n\text{-}1)1} // a_{(n\text{-}1)2}, a_{n1} // a_{n2}$

表示成 n×2 階的矩陣：$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix}$，

令 a_{11} 與 a_{22} 的交點 $A_1 = (a_{11}, a_{22})$，a_{21} 與 a_{32} 的交點 $A_2 = (a_{21}, a_{32})$，a_{31} 與 a_{42} 的交點 $A_3 = (a_{31}, a_{42})$，……，$a_{(n-1)1}$ 與 a_{n2} 的交點 $A_{n-1} = (a_{(n-1)1}, a_{n2})$，$a_{n1}$ 與 a_{12} 的交點 $A_n = (a_{n1}, a_{12})$，

則會發現：

a_{12} 與 a_{21} 的交點 $A_1' = (a_{12}, a_{21})$，a_{22} 與 a_{31} 的交點 $A_2' = (a_{22}, a_{31})$，a_{32} 與 a_{41} 的交點

$A_3' = (a_{32}, a_{41})$，……，$a_{(n-1)2}$ 與 a_{n1} 的交點 $A_{n-1}' = (a_{(n-1)2}, a_{n1})$，$a_{n2}$ 與 a_{11} 的交點 $A_n' = (a_{n2}, a_{11})$。

我們在幾何畫板 GSP 上已驗證，對於五、六、七組平行線時，如圖 10，圖 11，圖 12，類似的定理也成立。因此我們猜想當有任意 n 組 $(n \geq 3)$ 平行線時，類似定理也會成立。

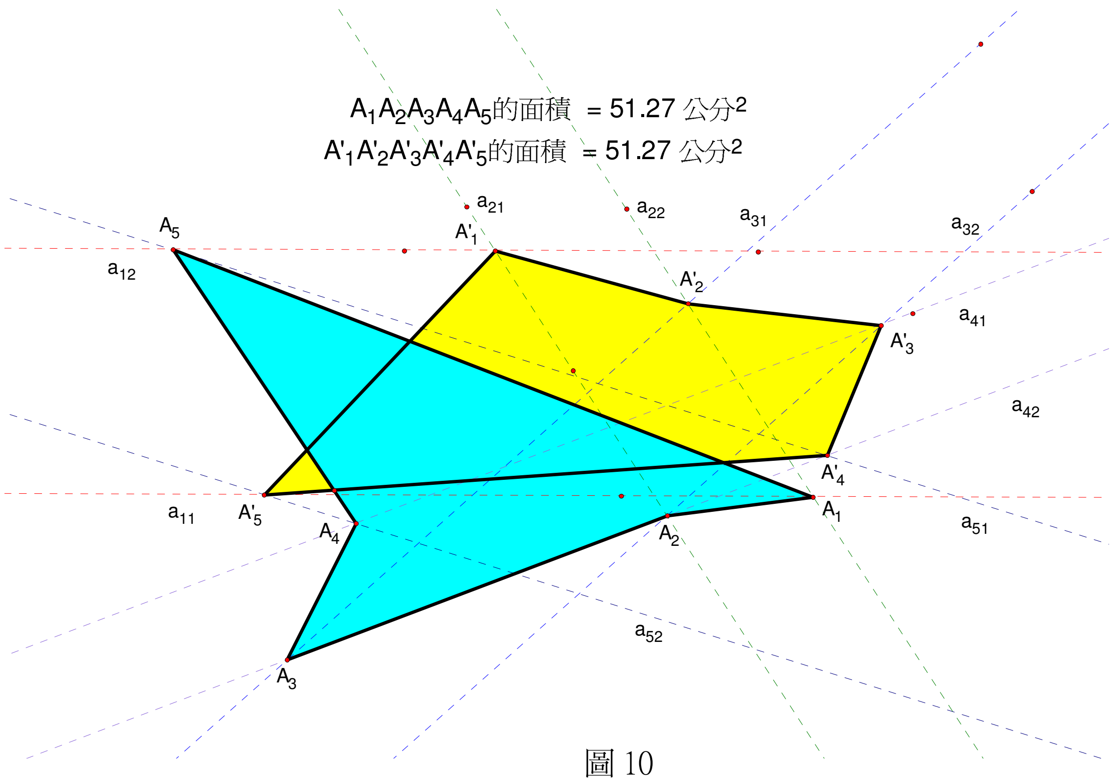


圖 10

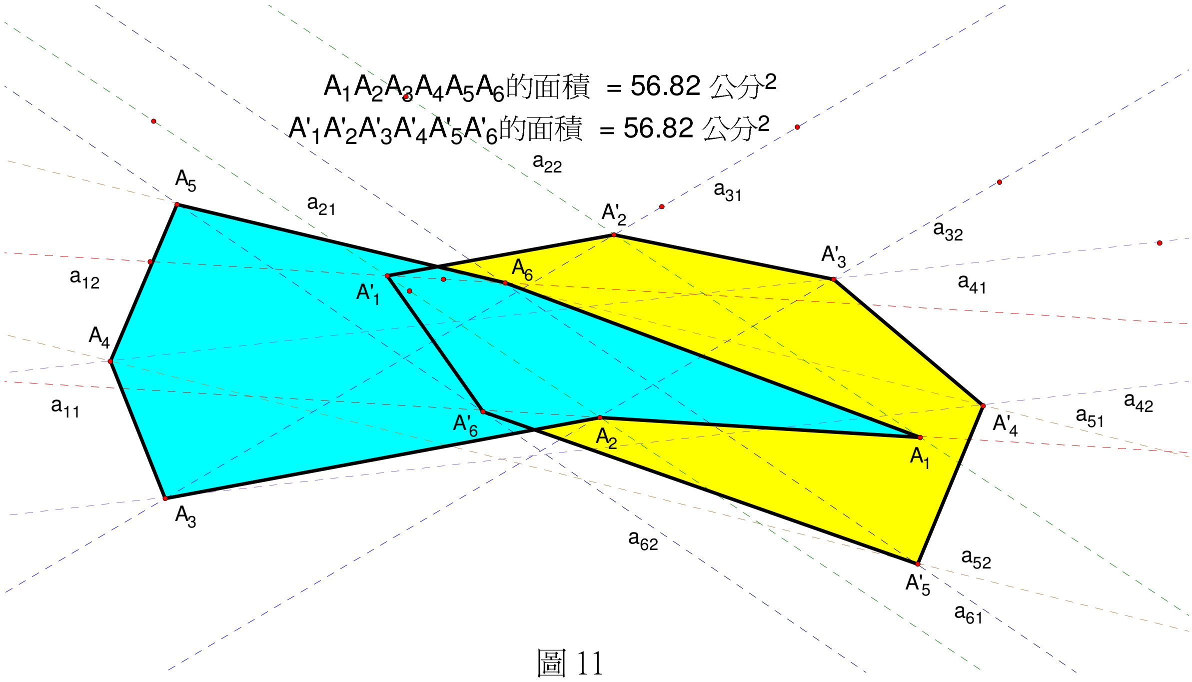


圖 11

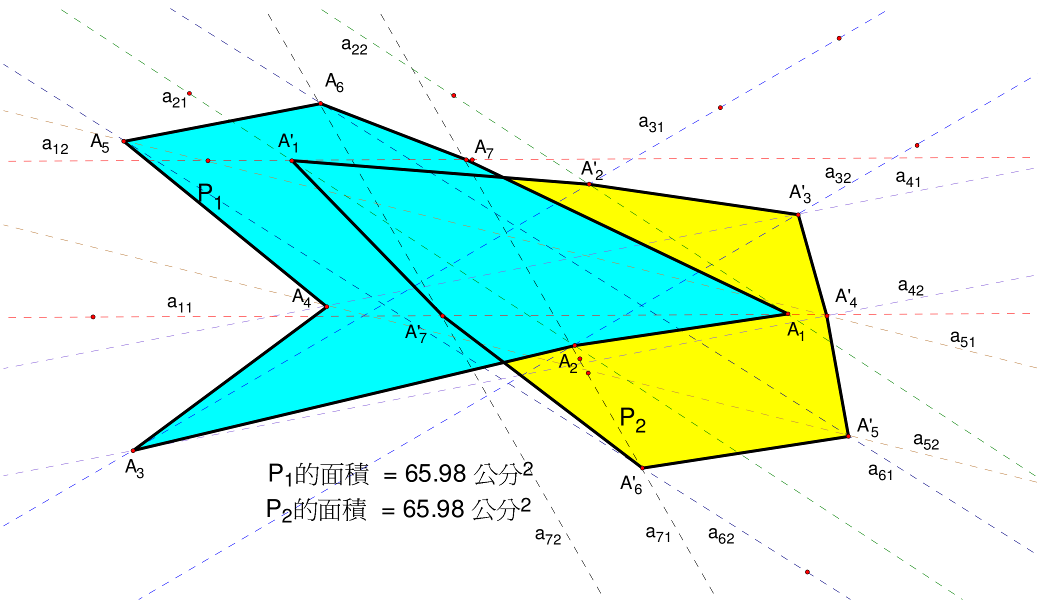


圖 12

(三)n 組平行線

如圖 13，平面上給定 n 組$(n\geq 3)$平行線，分別爲$a_{11}//a_{12},a_{21}//a_{22},a_{31}//a_{32},\ldots\ldots,a_{(n-1)1}//a_{(n-1)2}$，$a_{n1}//a_{n2}$，且在不同組的兩條直線都是相交的。設$a_{11}$與$a_{22}$的交點爲$A_1$，$a_{21}$與$a_{32}$的交點爲$A_2$，$a_{31}$與$a_{42}$的交點爲$A_3$，$a_{41}$與$a_{52}$的交點爲$A_4$，……，$a_{(n-1)1}$與$a_{n2}$的交點爲$A_{n-1}$，$a_{n1}$與$a_{12}$的交點爲$A_n$；$a_{12}$與$a_{21}$的交點爲$A_1'$，$a_{22}$與$a_{31}$的交點爲$A_2'$，$a_{32}$與$a_{41}$的交點爲$A_3'$，$a_{42}$與$a_{51}$的交點爲$A_4'$，……，$a_{(n-1)2}$與$a_{n1}$的交點爲$A_{n-1}'$，$a_{n2}$與$a_{11}$的交點爲$A_n'$則有如下兩個結論：

(1)若$A_1,A_2,A_3,A_4,\ldots\ldots,A_{n-1},A_n$ n 點不共線，則兩 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots\ldots A_{n-1}A_n$和$A_1'A_2'A_3'\ldots\ldots A_{n-1}'A_n'$的有號面積會相等，即$S_{A_1A_2A_3A_4\ldots\ldots A_{n-1}A_n}=S_{A_1'A_2'A_3'A_4'\ldots\ldots A_{n-1}'A_n'}$。

(2)若$A_1,A_2,A_3,A_4,\ldots\ldots,A_{n-1},A_n$ n 點共線，則$S_{A_1'A_2'A_3'A_4'\ldots\ldots A_{n-1}'A_n'}=0$，但$A_1',A_2',A_3',A_4',\ldots\ldots,A_{n-1}',A_n'$ n 點不一定共線。

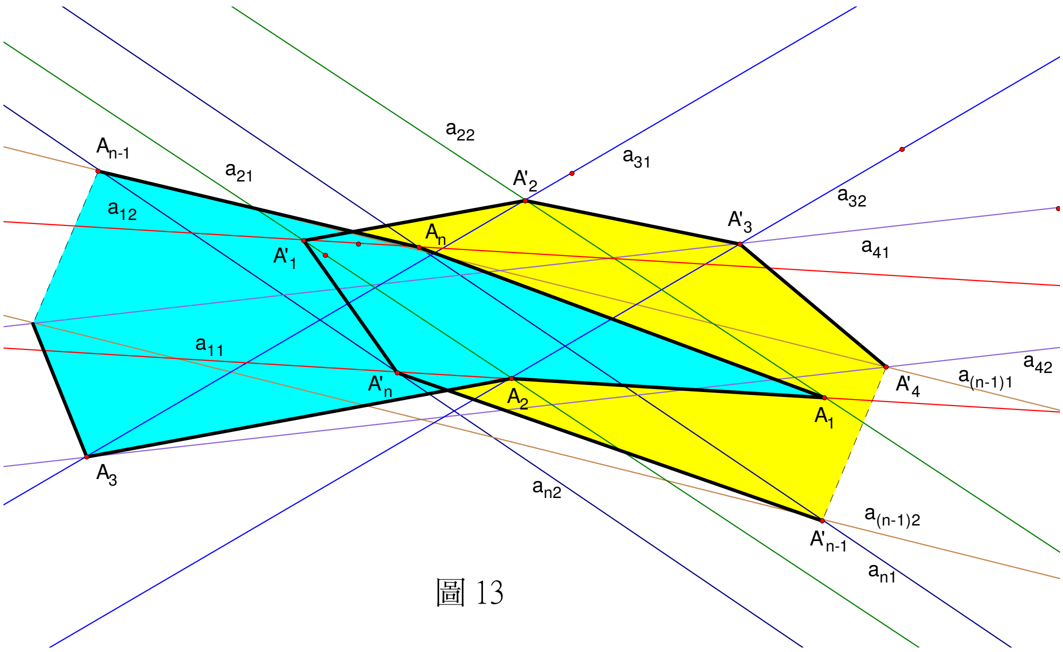


圖 13

【證明】

設 $A_1(x_1, y_1)$ ，$A_2(x_2, y_2)$ ，$A_3(x_3, y_3)$ ，$A_4(x_4, y_4)$ ，$\cdots\cdots$ ，$A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ ，$A_n(x_n, y_n)$ ，

$A_1'(x_1', y_1')$ ，$A_2'(x_2', y_2')$ ，$A_3'(x_3', y_3')$ ，$A_4'(x_4', y_4')$ ，$\cdots\cdots$ ，$A_{n-1}'(x_{n-1}', y_{n-1}')$ ，$A_n'(x_n', y_n')$

利用平行線的斜率相等：

$\because A_nA_1' \,//\, A_1A_n'$ ，$\therefore \dfrac{y_1'-y_n}{x_1'-x_n} = \dfrac{y_n'-y_1}{x_n'-x_1}$ ；$\because A_1A_2' \,//\, A_2A_1'$ ，$\therefore \dfrac{y_2'-y_1}{x_2'-x_1} = \dfrac{y_1'-y_2}{x_1'-x_2}$ ，

$\because A_2A_3' \,//\, A_3A_2'$ ，$\therefore \dfrac{y_3'-y_2}{x_3'-x_2} = \dfrac{y_2'-y_3}{x_2'-x_3}$ ，$\because A_3A_4' \,//\, A_4A_3'$ ，$\therefore \dfrac{y_4'-y_3}{x_4'-x_3} = \dfrac{y_3'-y_4}{x_3'-x_4}$ ，$\cdots\cdots$ ，

$\because A_{n-1}A_n' \,//\, A_nA_{n-1}'$ ，$\therefore \dfrac{y_n'-y_{n-1}}{x_n'-x_{n-1}} = \dfrac{y_{n-1}'-y_n}{x_{n-1}'-x_n}$ ，

將上面 n 個等式分別去分母可得下面 n 個等式：

$$x_1'y_n' - x_1'y_1 - x_ny_n' + x_ny_1 = x_n'y_1' - x_n'y_n - x_1y_1' + x_1y_n$$

$$x_2'y_1' - x_2'y_2 - x_1y_1' + x_1y_2 = x_1'y_2' - x_1'y_1 - x_2y_2' + x_2y_1$$

$$x_3'y_2' - x_3'y_2 - x_2y_2' + x_2y_3 = x_2'y_3' - x_2'y_2 - x_3y_3' + x_3y_2$$

$$x_4'y_3' - x_4'y_4 - x_3y_3' + x_3y_4 = x_3'y_4' - x_3'y_3 - x_4y_4' + x_4y_3$$

$$\cdots$$

$$x_n'y_{n-1}' - x_n'y_n - x_{n-1}y_{n-1}' + x_{n-1}y_n = x_{n-1}'y_n' - x_{n-1}'y_{n-1} - x_ny_n' + x_ny_{n-1}$$

將上面 n 式相加，消項後並移項可得：

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_5+......+x_{n-1}y_n+x_ny_1-x_2y_1-x_3y_2-x_4y_3-x_5y_4-......-x_ny_{n-1}-x_1y_n$$

$$=x_1'y_2'+x_2'y_3'+x_3'y_4'+x_4'y_5'+......+x_{n-1}'y_n'+x_n'y_1'-x_2'y_1'-x_3'y_2'-x_4'y_3'-x_5'y_4'-......-x_n'y_{n-1}'-x_1'y_n' \quad \text{(I)}$$

寫成行列式：$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ y_4 & y_5 \end{vmatrix}+......+\begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2' & x_3' \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3' & x_4' \\ y_3' & y_4' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4' & x_5' \\ y_4' & y_5' \end{vmatrix}+......+\begin{vmatrix} x_{n-1}' & x_n' \\ y_{n-1}' & y_n' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_n' & x_1' \\ y_n' & y_1' \end{vmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$S_{A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+......+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

$$S_{A_1'A_2'A_3'......A_{n-1}'A_n'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2' & x_3' \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3' & x_4' \\ y_3' & y_4' \end{vmatrix}+......+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{n-1}' & x_n' \\ y_{n-1}' & y_n' \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_n' & x_1' \\ y_n' & y_1' \end{vmatrix}$$

由於(II)式成立，所以有 $S_{A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n}=S_{A_1'A_2'A_3'......A_{n-1}'A_n'}$ ，從而結論(１)成立；

若 A_1 ， A_2 ， A_3 ， A_4 ，……， A_{n-1} ， A_n n 點共線，則

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ y_4 & y_5 \end{vmatrix}+......+\begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & x_1 \end{vmatrix}=0，$$

由(II)式也有 $\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2' & x_3' \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3' & x_4' \\ y_3' & y_4' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4' & x_5' \\ y_4' & y_5' \end{vmatrix}+......+\begin{vmatrix} x_{n-1}' & x_n' \\ y_{n-1}' & y_n' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_n' & x_1' \\ y_n' & y_1' \end{vmatrix}=0$ ，

從而 $S_{A_1'A_2'A_3'......A_{n-1}'A_n'}=0$ ，但 A_1' ， A_2' ， A_3' ， A_4' ，……， A_{n-1}' ， A_n' n 點不一定共線，故結論(2)也成立。

三、延伸思考

由上述結果我們可以反推論出：已知有一 ΔABC ，我們可用三組平行線作出另一 ΔDEF 與之面積相等，過程如下：

(一)作另一面積相等的三角形

如圖 14，平面上給定一 ΔABC ，我們在平面上經過 A 點作任意一直線 $a_1(AB_1)$ ，再經過 C 點作一直線 a_2 與之平行；經過 B 點作任意一直線 $b_1(BB_2)$ ，再經過 A 點作一直線 b_2 與之平行；經過 C 點作任意一直線 $c_1(CB_3)$ ，再經過 B 點作一直線 c_2 與之平行。令 a_2 與 b_1 的交點爲 D ， b_2 與 c_1 的交點爲 E ， c_2 與 a_1 的交點爲 F ，連接三點可得一 ΔDEF 與 ΔABC 面積相等。

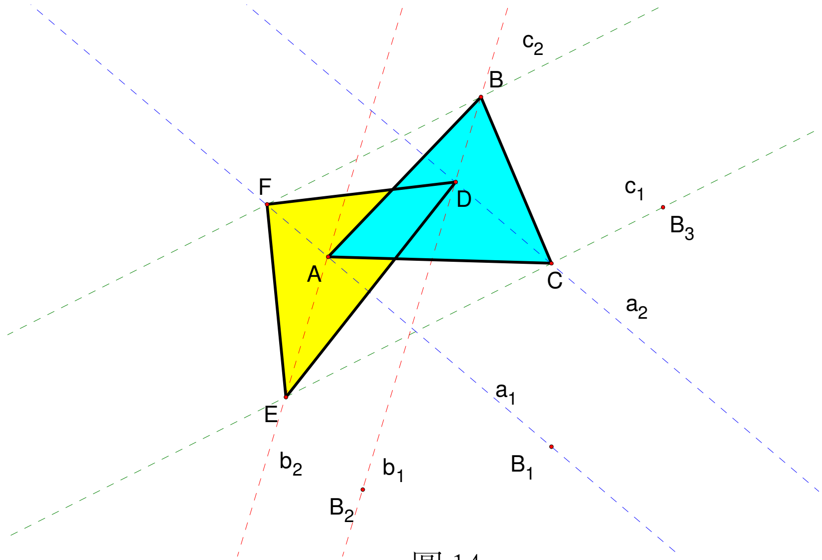


圖 14

（二）作另一面積相等的四邊形

如圖 15，平面上給定一四邊形 $ABCD$，我們在平面上經過 A 點作任意一直線 $a_1(AB_1)$，再經過 D 點作一直線 a_2 與之平行；經過 B 點作任意一直線 $b_1(BB_2)$，再經過 A 點作一直線 b_2 與之平行；經過 C 點作任意一直線 $c_1(CB_3)$，再經過 B 點作一直線 c_2 與之平行；經過 D 點作任意一直線 $d_1(DB_4)$，再經過 C 點作一直線 d_2 與之平行。令 a_2 與 b_1 的交點爲 E，b_2 與 c_1 的交點爲 F，c_2 與 d_1 的交點爲 G，d_2 與 a_1 的交點爲 H，連接四點可得一四邊形 $EFGH$ 與四邊形 $ABCD$ 面積相等。

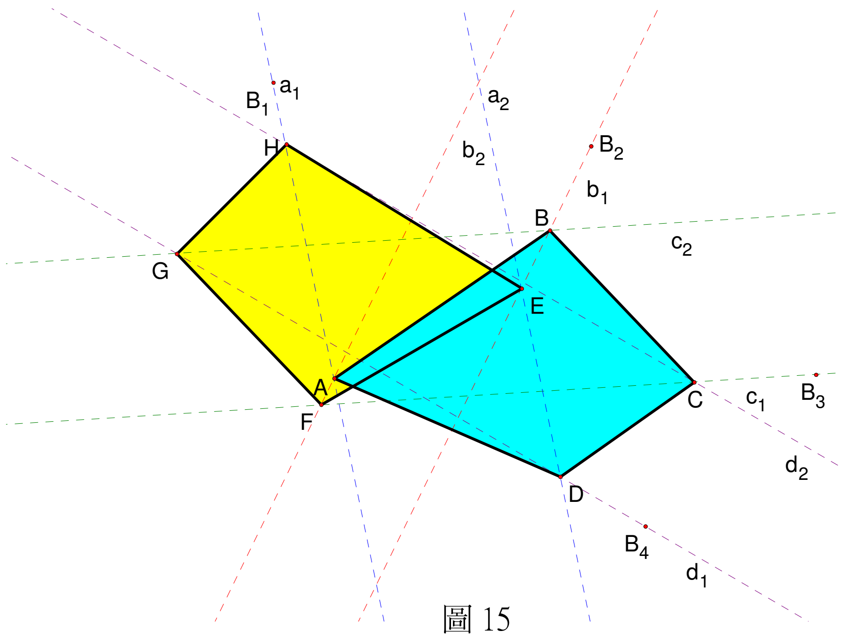
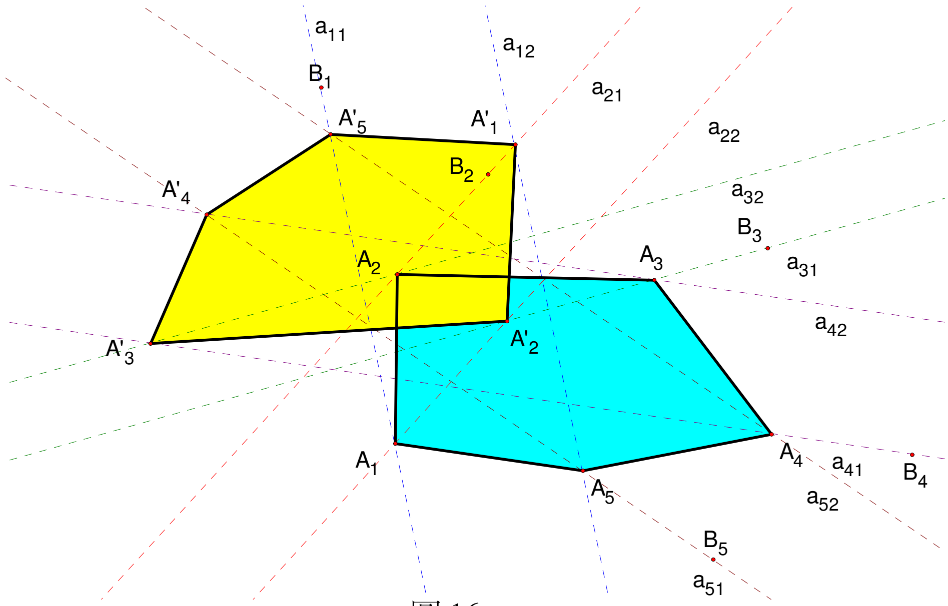


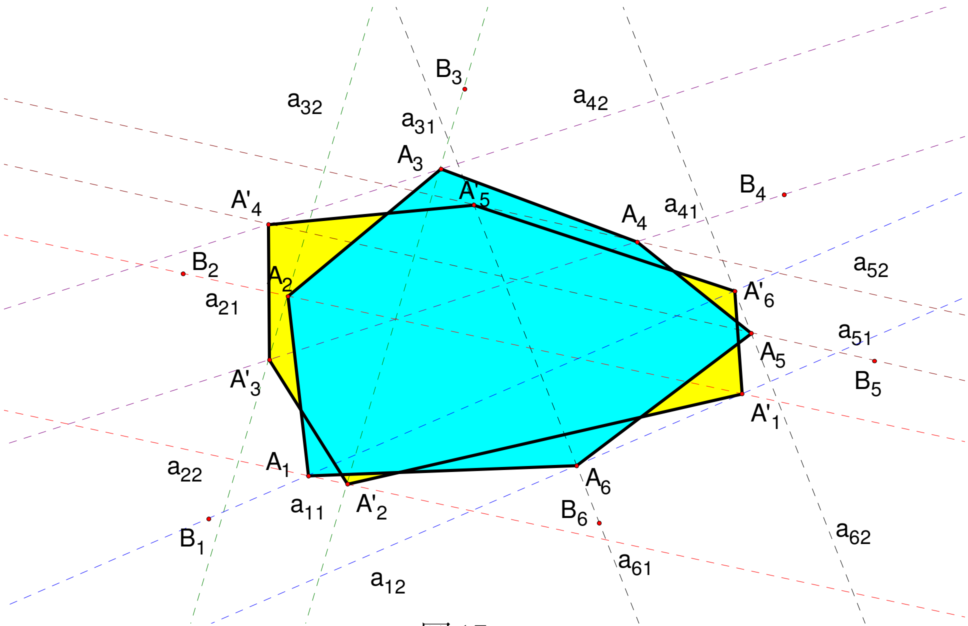
圖 15

我們在幾何畫板上已驗證，對於五、六、七邊形時，如圖 16，圖 17，圖 18，也能有類似的情形。因此我們猜想當任意 n 邊形時，也會有類似的情形。



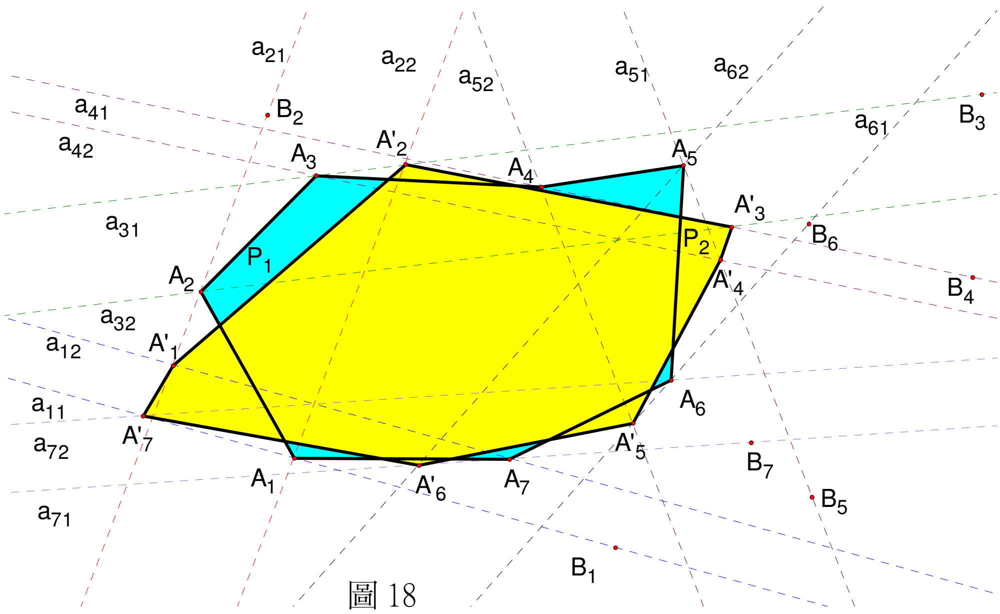
a_{11}
a_{12}
a_{21}
a_{22}
a_{32}
a_{31}
a_{42}
a_{41}
a_{52}
a_{51}
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
A'_5
A'_1
A'_4
A'_3
A'_2
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5

圖 16



a_{32}
a_{31}
a_{42}
a_{41}
a_{52}
a_{51}
a_{21}
a_{22}
a_{11}
a_{12}
a_{61}
a_{62}
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
B_6
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A'_1
A'_2
A'_3
A'_4
A'_5
A'_6

圖 17



a_{21}
a_{22}
a_{52}
a_{51}
a_{62}
a_{61}
a_{41}
a_{42}
a_{31}
a_{32}
a_{12}
a_{11}
a_{72}
a_{71}
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
B_6
B_7
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A'_1
A'_2
A'_3
A'_4
A'_5
A'_6
A'_7
P_1
P_2

圖 18

（三）作另一面積相等的 n 邊形

如圖 19，平面上給定一 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n$，我們在平面上經過 A_1 點作任意一直線 $a_{11}(A_1B_1)$，再經過 A_n 點作一直線 a_{12} 與之平行；經過 A_2 點作任意一直線 $a_{21}(A_2B_2)$，再經過 A_1 點作一直線 a_{22} 與之平行；經過 A_3 點作任意一直線 $a_{31}(A_3B_3)$，再經過 A_2 點作一直線 a_{32} 與之平行；經過 A_4 點作任意一直線 $a_{41}(A_4B_4)$，再經過 A_3 點作一直線 a_{42} 與之平行；……；經過 A_n 點作任意一直線 $a_{n1}(A_nB_n)$，再經過 A_{n-1} 作一直線 a_{n2} 與之平行。

令 a_{12} 與 a_{21} 的交點爲 A_1'，a_{22} 與 a_{31} 的交點爲 A_2'，a_{32} 與 a_{41} 的交點爲 A_3'，……，$a_{(n-1)2}$ 與 a_{n1} 的交點爲 A_{n-1}'，a_{n2} 與 a_{11} 的交點爲 A_n'，連接 n 點可得一 n 邊形 $A_1'A_2'A_3'......A_{n-1}'A_n'$ 與 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n$ 面積相等。

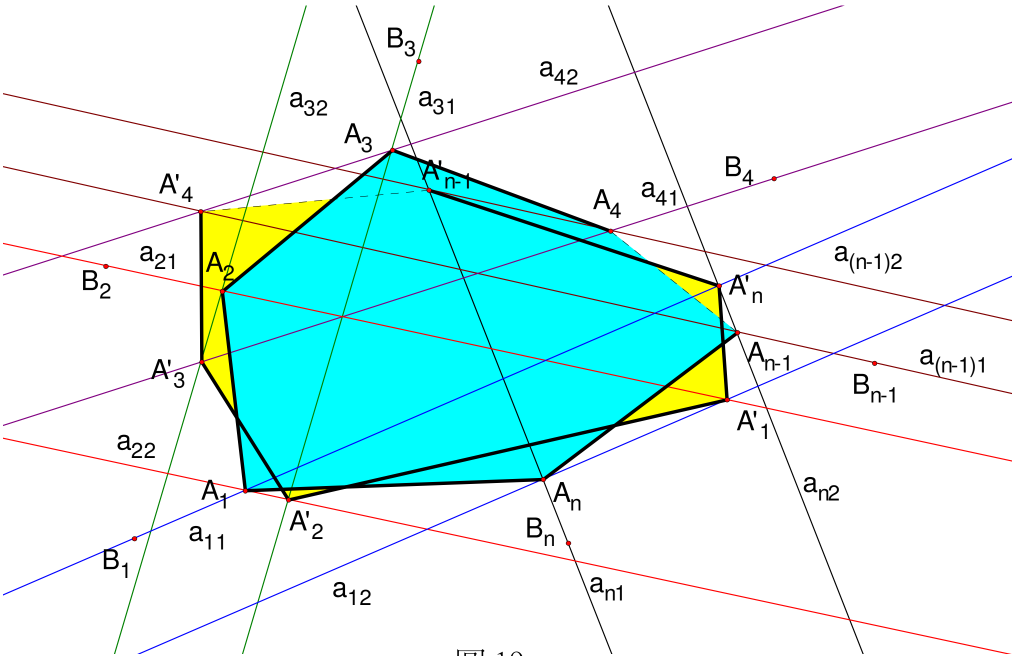


圖 19

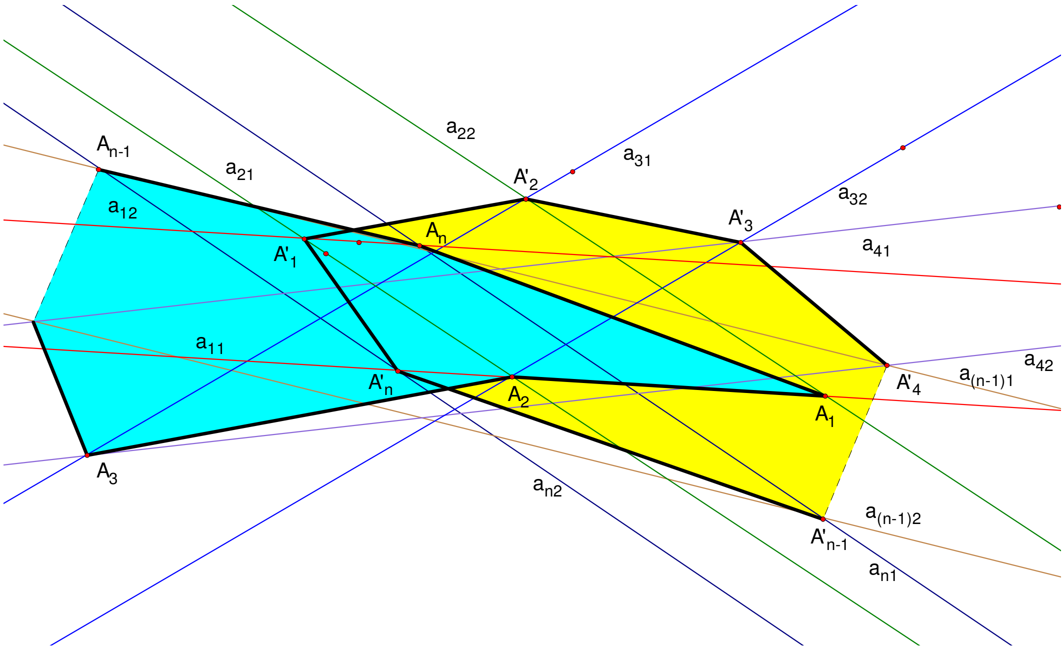
伍、研究結果

一、如圖，平面上給定 n 組平行線，分別爲 $a_{11}//a_{12}, a_{21}//a_{22}, a_{31}//a_{32}, a_{41}//a_{42}, ..., a_{(n-1)1}//a_{(n-1)2}$，$a_{n1}//a_{n2}$，且在不同組的兩條直線都是相交的。設 a_{11} 與 a_{22} 的交點爲 A_1，a_{21} 與 a_{32} 的交點爲 A_2，a_{31} 與 a_{42} 的交點爲 A_3，a_{41} 與 a_{52} 的交點爲 A_4，……，$a_{(n-1)1}$ 與 a_{n2} 的交點爲 A_{n-1}，a_{n1} 與 a_{12} 的交點爲 A_n；a_{12} 與 a_{21} 的交點爲 A_1'，a_{22} 與 a_{31} 的交點爲 A_2'，a_{32} 與 a_{41} 的交點爲 A_3'，a_{42} 與 a_{51} 的交點爲 A_4'，……，$a_{(n-1)2}$ 與 a_{n1} 的交點爲 A_{n-1}'，a_{n2} 與 a_{11} 的交點爲 A_n'，

則有如下兩個結論：

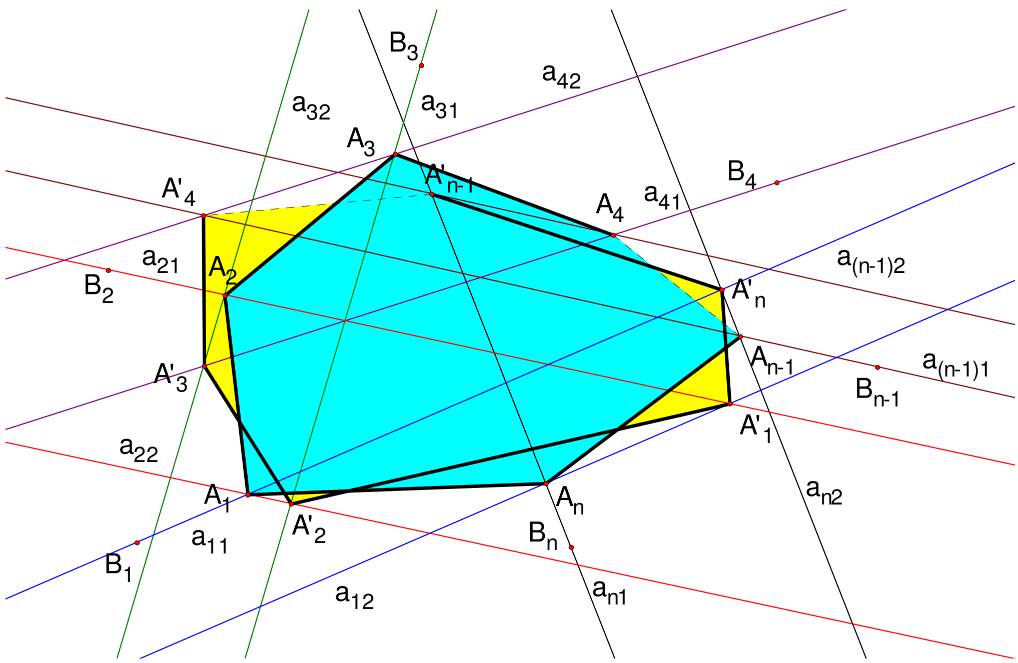
（1）若 $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}, A_n$ n 點不共線，則兩 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n$ 和 $A_1'A_2'A_3'......A_{n-1}'A_n'$ 的有號面積會相等，即 $S_{A_1A_2A_3A_4......A_{n-1}A_n} = S_{A_1'A_2'A_3'A_4'......A_{n-1}'A_n'}$。

（2）若 $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}, A_n$ n 點共線，則 $S_{A_1'A_2'A_3'A_4'......A_{n-1}'A_n'} = 0$，但 $A_1', A_2', A_3', A_4', ..., A_{n-1}', A_n'$ n 點不一定共線。



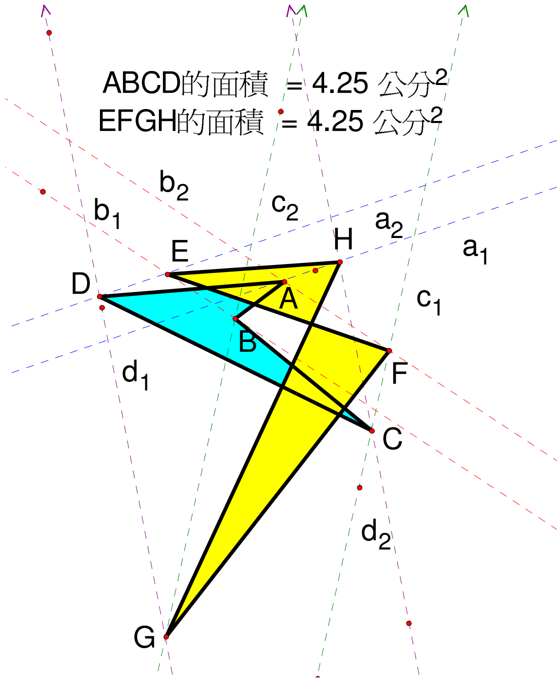
二、如圖，平面上給定一 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n$，我們在平面上經過 A_1 點作任意一直線 $a_{11}(A_1B_1)$，再經過 A_n 點作一直線 a_{12} 與之平行；經過 A_2 點作任意一直線 $a_{21}(A_2B_2)$，再經過 A_1 點作一直線 a_{22} 與之平行；經過 A_3 點作任意一直線 $a_{31}(A_3B_3)$，再經過 A_2 點作一直線 a_{32} 與之平行；經過 A_4 點作任意一直線 $a_{41}(A_4B_4)$，再經過 A_3 點作一直線 a_{42} 與之平行；……；經過 A_n 點作任意一直線 $a_{n1}(A_nB_n)$，再經過點 A_{n-1} 作一直線 a_{n2} 與之平行。

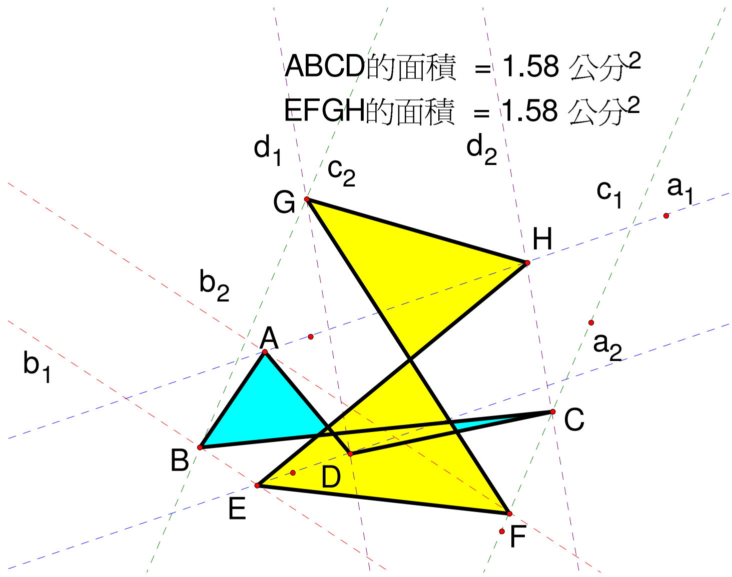
令 a_{12} 與 a_{21} 的交點爲 A_1'，a_{22} 與 a_{31} 的交點爲 A_2'，a_{32} 與 a_{41} 的交點爲 A_3'，……，$a_{(n-1)2}$ 與 a_{n1} 的交點爲 A_{n-1}'，a_{n2} 與 a_{11} 的交點爲 A_n'，連接 n 點可得另一個 n 邊形 $A_1'A_2'A_3'......A_{n-1}'A_n'$ 與 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n$ 面積相等，且有 n 個控點 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_{n-1}, B_n$ 可以控制 n 邊形 $A_1'A_2'A_3'......A_{n-1}'A_n'$ 的形狀。



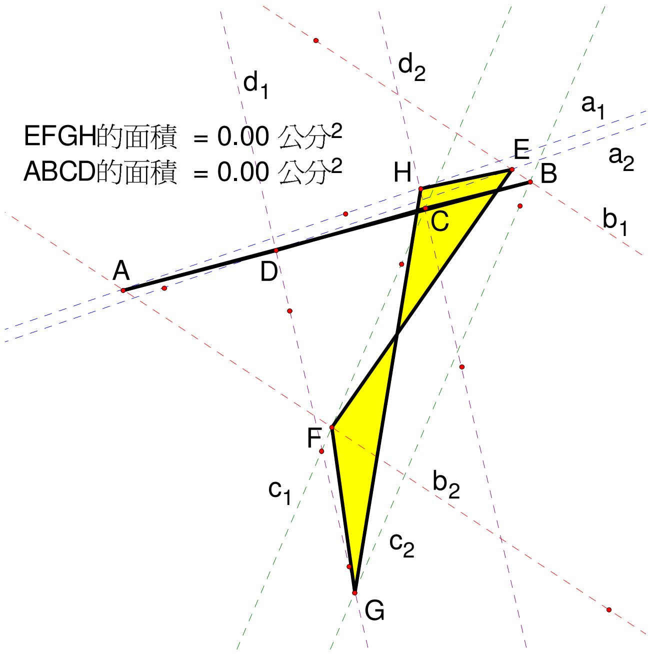
陸、討論

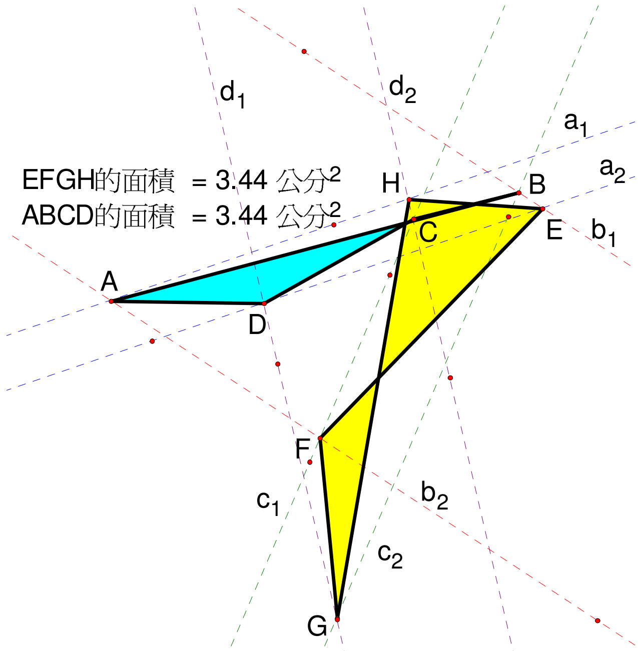
一、雖然 n 組平行線所構成的兩 n 邊形，其有號面積必相等，但當其中一 n 邊形的頂點為順時針排列，另一 n 邊形的頂點之排序未必如此；逆時針亦然。如圖，其中一 n 邊形不論為凸的、凹的或出現凹扭情形時，另一 n 邊形的形狀並不能確定。





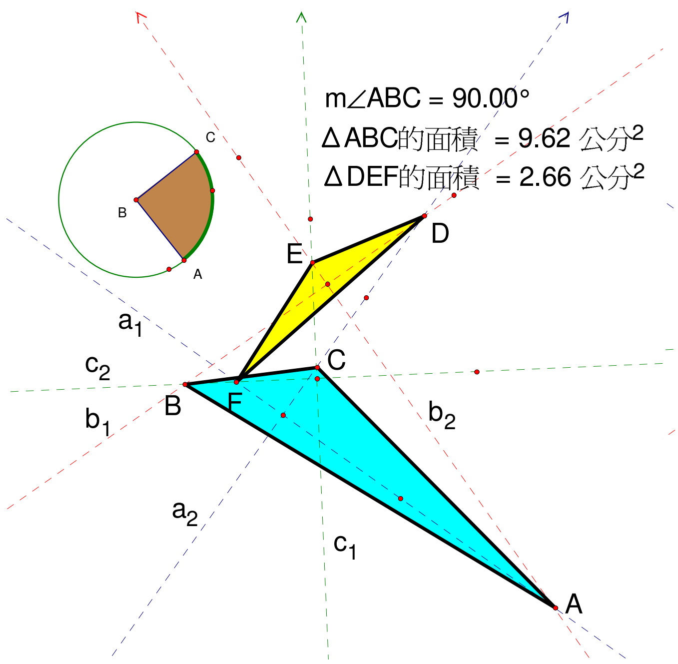
二、如圖，n 組平行線所構成的兩 n 邊形，其中一 n 邊形的頂點共線，但另一 n 邊形的頂點不一定共線，此外，如果其中一 n 邊形的部份頂點共線，但另一 n 邊形的部份頂點也不一定共線。

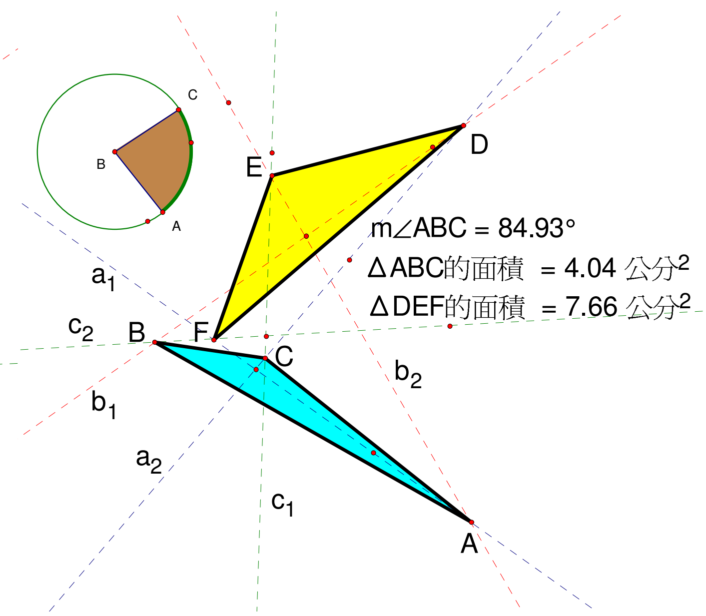




三、如果我們改用 n 組垂直線或夾角爲 $\theta(\theta\neq 90^\circ)$ 的直線，如圖，利用幾何畫板 GSP 驗證，發現所構成的兩 n 邊形，其有號面積不一定相等。

(一) $\theta = 90^\circ$　　　　　　　　　　　　(二) $\theta \neq 90^\circ$

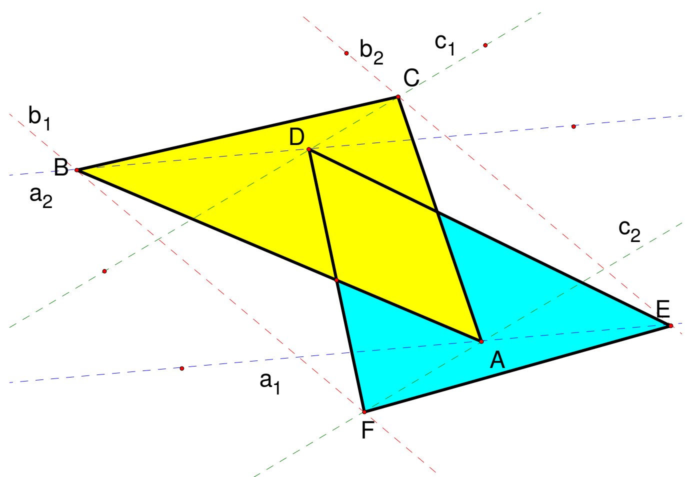




四、如果我們改用不同的頂點找法，是否也會有類似的定理？

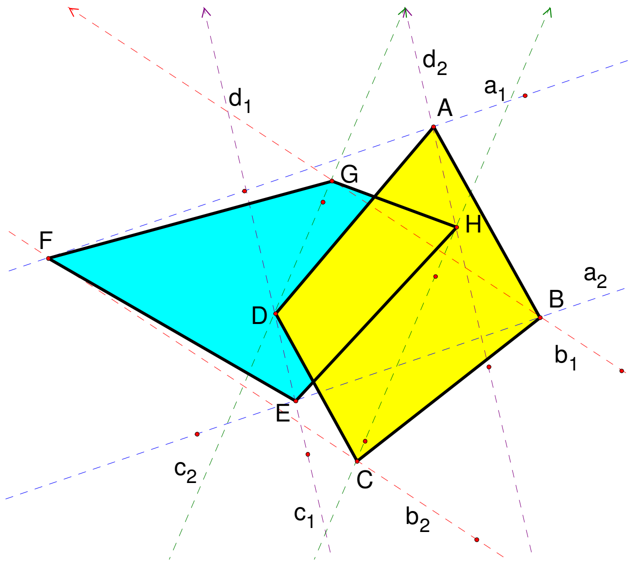
(一)我們一樣將三組平行線：$a_1 // a_2, b_1 // b_2, c_1 // c_2$ 表示成 3x2 階的矩陣：$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$，如果

設 a_1 與 c_2 的交點爲 A，b_1 與 a_2 的交點爲 B，c_1 與 b_2 的交點爲 C；仿造之前的對稱性找法，設 a_2 與 c_1 的交點爲 D，b_2 與 a_1 的交點爲 E，c_2 與 b_1 的交點爲 F，如圖，我們發現這兩組三角形和之前的一樣，只是頂點名稱不同而已。

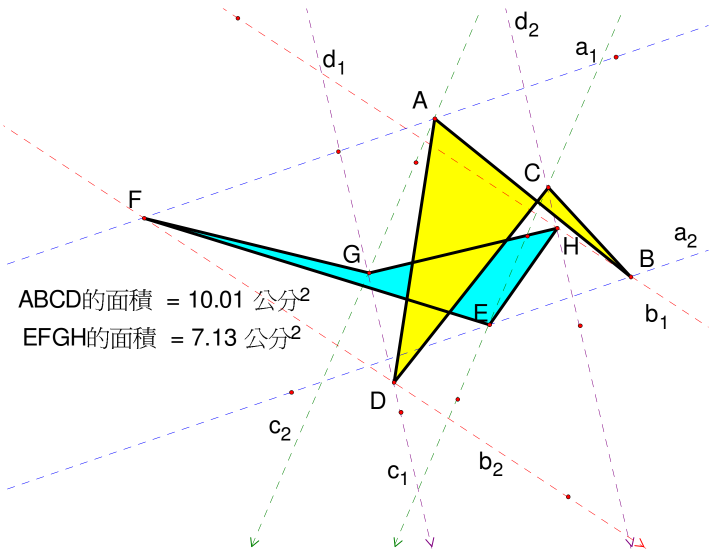


(二)接著一樣將四組平行線：$a_1 // a_2, b_1 // b_2, c_1 // c_2, d_1 // d_2$ 表示成 4×2 階的矩陣：$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix}$，

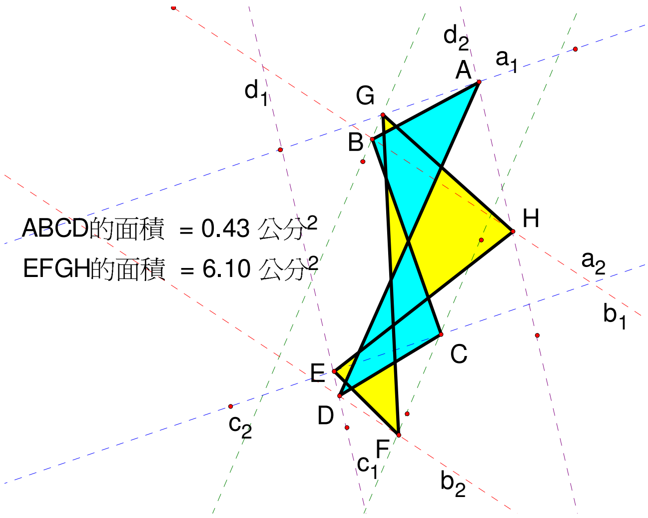
1. 如果設 a_1 與 d_2 的交點為 A，b_1 與 a_2 的交點為 B，c_1 與 b_2 的交點為 C，d_1 與 c_2 的交點為 D；仿造之前的對稱性找法，設 a_2 與 d_1 的交點為 E，b_2 與 a_1 的交點為 F，c_2 與 b_1 的交點為 G，d_2 與 c_1 的交點為 H，我們發現這兩組四邊形和之前的一樣，只是頂點名稱不同而已。



2. 如果設 a_1 與 c_2 的交點為 A，b_1 與 a_2 的交點為 B，c_1 與 d_2 的交點為 C，d_1 與 b_2 的交點為 D；仿造之前的對稱性找法，設 a_2 與 c_1 的交點為 E，b_2 與 a_1 的交點為 F，c_2 與 d_1 的交點為 G，d_2 與 b_1 的交點為 H，利用幾何畫板 GSP 驗證其有號面積不一定相等。



3. 如果設a_1與d_2的交點爲A，b_1與c_2的交點爲B，c_1與a_2的交點爲C，d_1與b_2的交點爲D；仿造之前的對稱性找法，設a_2與d_1的交點爲E，b_2與c_1的交點爲F，c_2與a_1的交點爲G，d_2與b_1的交點爲H，利用幾何畫板 GSP 驗證其有號面積不一定相等。



綜合以上所言，我們發現當平行線越多組時，就會有越多種找頂點的方法，其中只有兩種方法所繪製的圖形，它們的有號面積會相等，然而這兩種方法所畫出的兩組 n 邊形其實是相同的，只是頂點名稱不同罷了。

柒、結論

原題目「三組平行線定理」得到兩組三角形面積相等及頂點共線的一致性，但原題目的一個猜想，若推廣至「n 組平行線定理」，則必須將面積相等改成有號面積相等，而頂點共線的一致性則不復存在，也就是說，平面上給定 n 組平行線，分別爲$a_{11} // a_{12}, a_{21} // a_{22}, a_{31} // a_{32}$, $a_{41} // a_{42}, \ldots\ldots, a_{(n-1)1} // a_{(n-1)2}, a_{n1} // a_{n2}$ ，且在不同組的兩條直線都是相交的，我們令

$A_1 = (a_{11}, a_{22})$，$A_2 = (a_{21}, a_{32})$，$A_3 = (a_{31}, a_{42})$，……，$A_{n-1} = (a_{(n-1)1}, a_{n2})$，$A_n = (a_{n1}, a_{12})$，

再令$A_1^{'} = (a_{12}, a_{21})$，$A_2^{'} = (a_{22}, a_{31})$，$A_3^{'} = (a_{32}, a_{41})$，……，$A_{n-1}^{'} = (a_{(n-1)2}, a_{n1})$，$A_n^{'} = (a_{n2}, a_{11})$。

設 n 邊形有號面積爲$S_{A_1A_2A_3\ldots\ldots A_{n-1}A_n}$，另一個 n 邊形有號面積爲$S_{A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}\ldots\ldots A_{n-1}^{'}A_n^{'}}$，可推得
$S_{A_1A_2A_3\ldots\ldots A_{n-1}A_n} = S_{A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}\ldots\ldots A_{n-1}^{'}A_n^{'}}$。

若$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots, A_{n-1}, A_n$ n 點共線，則$S_{A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}A_4^{'}\ldots\ldots A_{n-1}^{'}A_n^{'}} = 0$，但$A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}, A_4^{'}, \ldots\ldots, A_{n-1}^{'}, A_n^{'}$ n 點不一定共線。

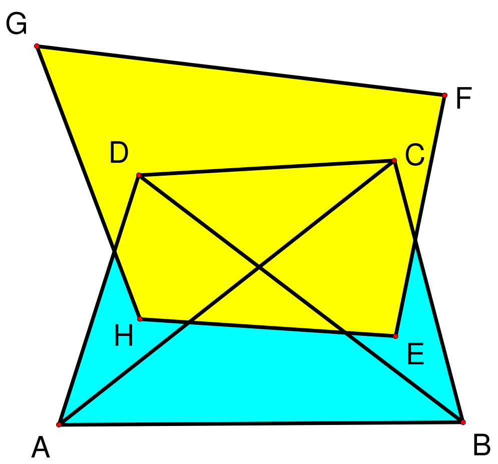
由上述結果我們可以反推論出：已知一 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_{n-1}A_n$，可用 n 組平行線作出另一個 n 邊形 $A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}......A_{n-1}^{'}A_n^{'}$ 與之有號面積相等，且有 n 個控點可以控制 n 邊形 $A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}......A_{n-1}^{'}A_n^{'}$ 的形狀。

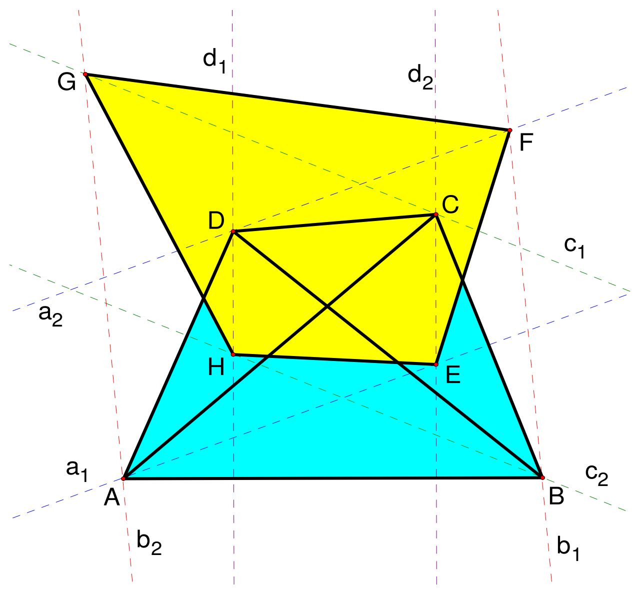
捌、實際應用

如圖，對任意四邊形 ABCD，若 ΔABC、ΔBCD、ΔCDA、ΔDAB 的垂心依次為 E、F、G、H，則有四邊形 EFGH 的面積等於四邊形 ABCD 的面積。

【證明】

對任意四邊形 ABCD 和四邊形 EFGH 使用四組平行線定理。記直線 AE 為 a_1，直線 DF 為 a_2，直線 BF 為 b_1，直線 AG 為 b_2，直線 CG 為 c_1，直線 BH 為 c_2，直線 DH 為 d_1，直線 CE 為 d_2，∵E 為 ΔABC 的垂心，∴ $AE \perp BC$，∵F 為 ΔBCD 的垂心，∴ $DF \perp BC$，從而 $AE // DF$，即 $a_1 // a_2$，同理可證: $b_1 // b_2$，$c_1 // c_2$，$d_1 // d_2$，由四組平行線定理有 $S_{ABCD} = S_{EFGH}$，即四邊形 EFGH 的面積等於四邊形 ABCD 的面積。





玖、參考資料及其他

1. 林福來主編(102 年)。高中數學課本第三冊(初版)。台南市：南一書局企業股份有限公司，P49~51、P82~85、P203~210。
2. 林福來主編(102 年)。高中數學課本第四冊(初版)。台南市：南一書局企業股份有限公司，P50~53、P145~146。
3. 劉步松(102 年 6 月)。三組平行線定理及其一個猜想。數學傳播 37 卷 2 期，中央研究院數學研究所，P93~95。
4. 蔡聰明 從醉月湖的面積談起 一個求面積的問題。數學知識 http://episte.math.ntu.edu.tw/

【評語】040418

作者對 n 組兩條平行線依序取出兩組 n 個交點觀察，以行列式表示出此兩組交點所形成的 n 邊形面積，發現這兩個 n 邊形面積會相等，作者如果可以對交點取法的所有可能組合去作探討，看看面積會相等的組數及其數學特徵，必可讓作品內容更深入！另外建議要寫出參考文獻中和自己結果的比較，才能看出創新之處。