中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040417

旋機－在會旋轉的平面和立方格子中選取塗色求塗法數

學校名稱：臺北市立中山女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 霍家琦 高二 蔡佳陵 高二 吳俞萱	吳汀菱

關鍵詞：旋轉、塗色

摘要

「在兩個 7×7 方陣中各選 2 格塗色，若其中一個方陣旋轉 90°、180°、270°之後和另一個相同，則稱它們有相同的塗法，問有多少種塗法?」

我們從邊長小的方陣開始，將塗法一個一個畫出來，發現兩個塗色的格子有線對稱和不對稱兩種關係；塗 4 格時，發現多出了點對稱的關係。由此，我們想出旋轉複合(後面將解釋)的方法，並發現它可以運用在長方形塗方格和正六邊形塗三角形格子等平面問題。

接著我們推廣到立方體塗兩立方格，由於立方體的對稱軸太多，與其將之分為許多對稱關係，不如直接選格塗色，雖然長方體和正立方體的計算方法複雜許多，但其中仍有部分可運用從方陣和長方陣得出的公式。

壹、研究動機

我們覺得 1996 AIME 的第 7 題很有趣，可以用遞迴和排列組合等課堂上學過的觀念研究，或許可以延伸，於是進行探討。

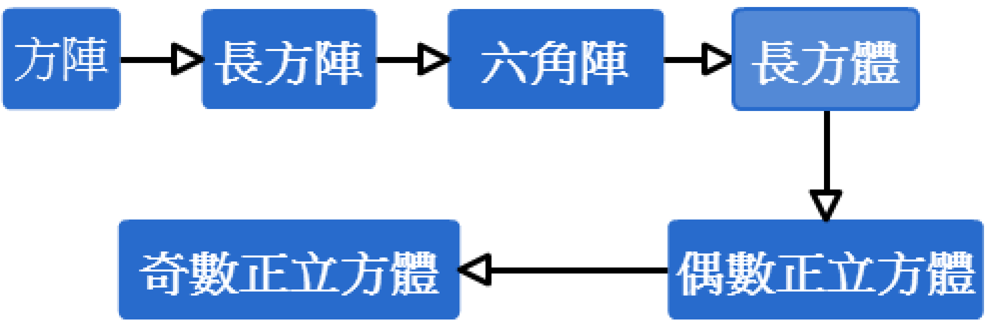
貳、研究目的

1. 在可旋轉的白底 7×7 方陣上，塗 2 格相同顏色的塗法數。
2. 承 1，推廣至任意 n × n 可旋轉的的方陣上塗 x 格(x≥ 2)。
3. 推廣至 m × n 可旋轉的長方形上塗 x 格(x≥ 2)。
4. 推廣至正六邊形上塗 x 格(x≥ 2)。
5. 在可旋轉的立方體，塗兩格立方格。
6. 在立方體中塗立方格上六個表面中的兩格

参、研究設備器材

鉛筆、橡皮擦、紙、自製積木模型、geogebra、cacoo、電腦

肆、研究過程和方法　伍、研究結果



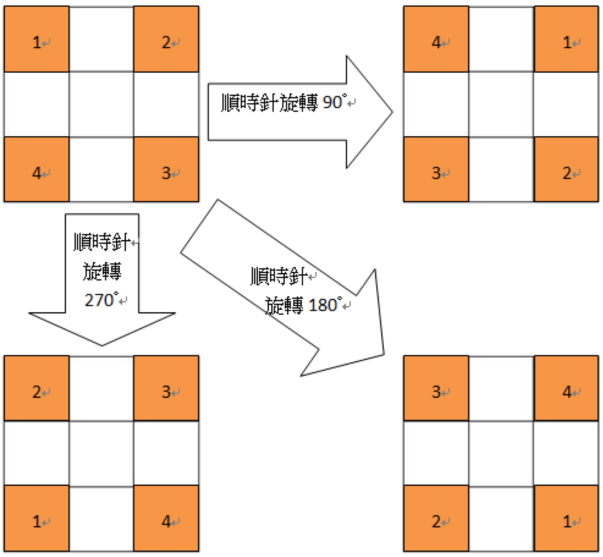
✧ 方陣

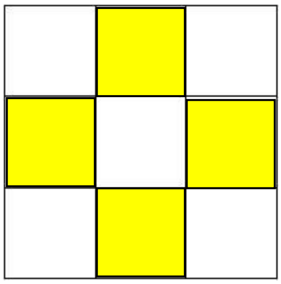
定義：

1. 由n^2個相同大小的正方形排成邊長為 n 的正方形，稱為方陣。邊長為偶數的方陣稱為偶方陣，以 $2k \times 2k$ 表示；邊長為奇數的方陣稱為奇方陣，以$(2k+1) \times (2k+1)$表示。
2. 令塗 x 格的 $n \times n$ 方陣在經 90°,180°,270°旋轉之後，塗色的方格完全重合、對中心為點對稱者以符號 A 表示，其塗法的個數(以下簡稱為塗法數)為$A_{nn}(x)$。

例如：

$\mathbf{A_{33}(4) = 2}$(方陣旋轉0°、90°、180°、270°後塗色格位置皆不變的有兩種，如下)



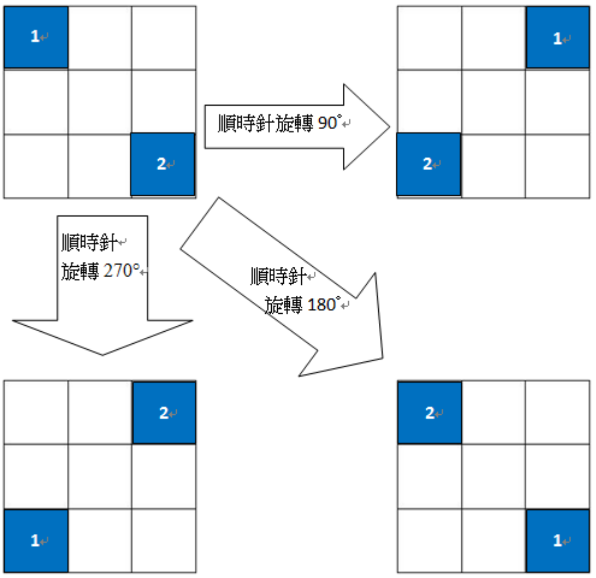


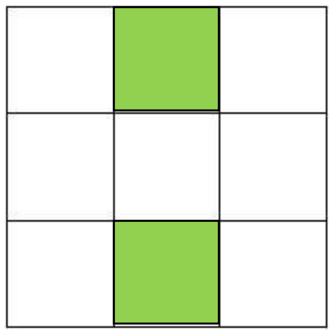
另一塗法

3. 令塗 x 格的 $n \times n$ 方陣在經$0^\circ,90^\circ,180^\circ,270^\circ$旋轉之後，所得的四個圖形兩兩相同，即線對稱者以符號 B 表示，其塗法數為$B_{nn}(x)$。

例如：

$B_{33}(2) = 2$(方陣旋轉 180°後塗色格位置相同，但旋轉 90°和 270°後位置改變的塗法數有兩種，如下)



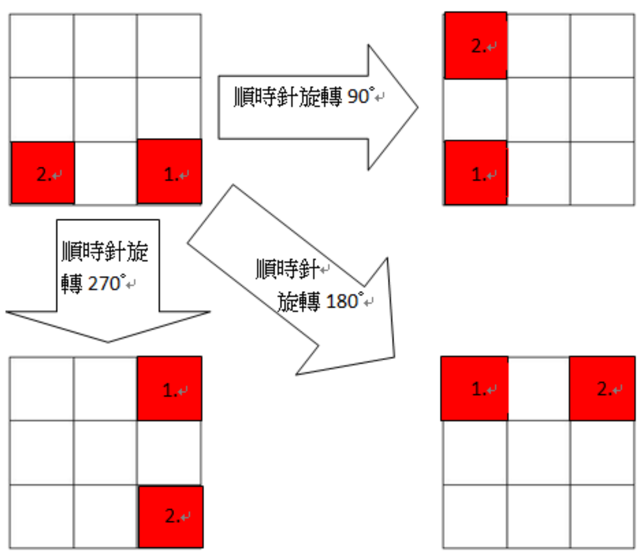


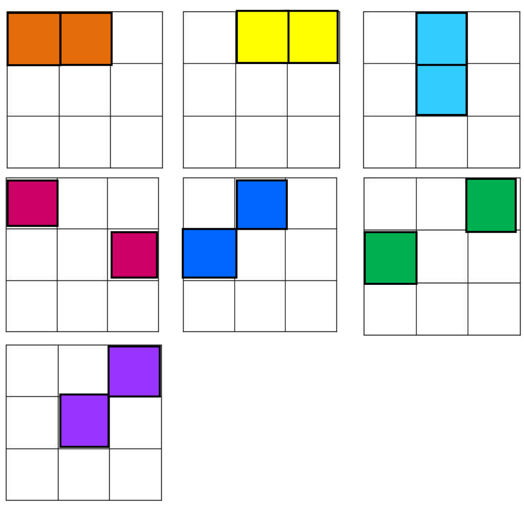
另一塗法

4. 令塗 x 格的 $n \times n$ 方陣在經$0^\circ,90^\circ,180^\circ,270^\circ$旋轉之後，塗色的方格位置完全不同者以符號 C 表示，其塗法數為$C_{nn}(x)$。

例如：

$C_{33}(2) = 8$(方陣旋轉 90°、180°、270°後塗色格位置完全不同的塗法數有八種，如下)



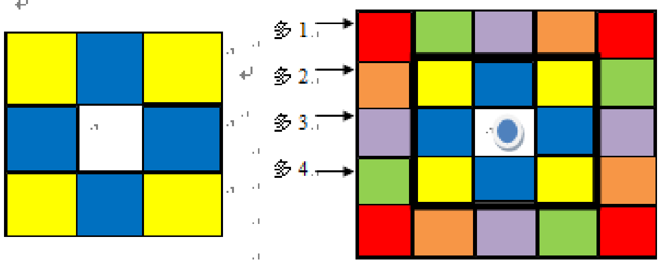


其他塗法

推導$A_{n\,n}(x)$的公式

一開始我們觀察到外圈和內圈塗法數的差異，於是用遞迴關係探討。

$A_{33}(4)=2$　　　　　　$A_{55}(4)=A_{33}(4)+5-1=6$



外層每增加一圈會多出該圈邊長減1個方法數。注：以藍點為旋轉中心

$A_{2k+1\ 2k+1}(4)$有遞迴關係：

$A_{33}(4)=2$

$A_{55}(4)=A_{33}(4)+4$

.

.

.

$A_{2k-1\ 2k-1}(4)=A_{2k-3\ 2k-3}(4)+2k-2$

+）$A_{2k+1\ 2k+1}(4)=A_{2k-1\ 2k-1}(4)+2k$

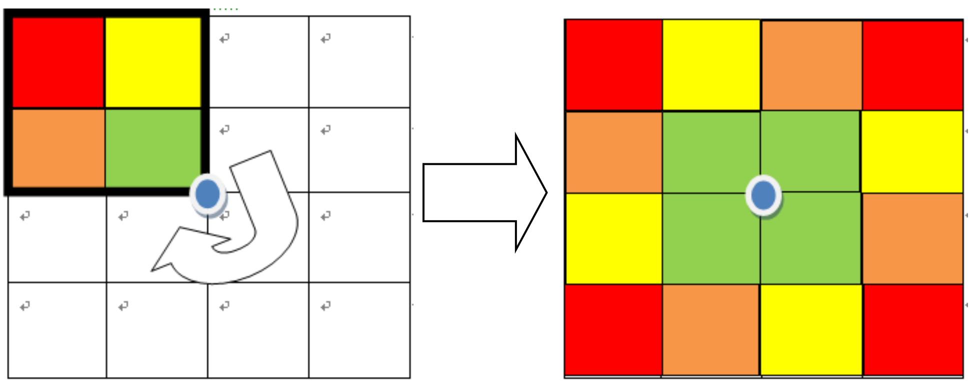
$A_{2k+1\ 2k+1}(4)=2+4+\ldots\ldots+2k$

$=k^2+k \quad = \frac{(2k+1)^2-1}{4}$

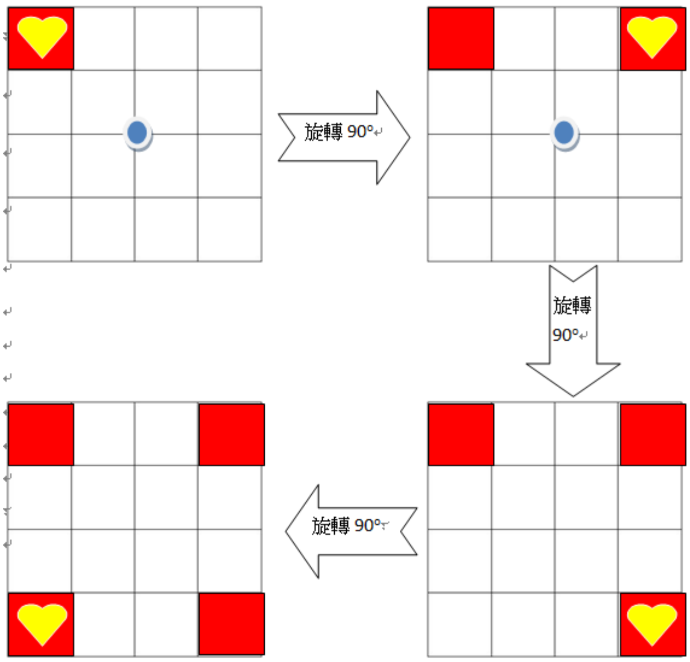
也可看成總格數減 1 再除以 4，代表方陣的$\frac{1}{4}$

由此結果我們想出了在$\frac{1}{4}$方陣中選格塗色後旋轉並復合的這個方法，以

$A_{44}(4)$ = 4 為例 (下圖中每種顏色代表一種塗法)



因為 A 是點對稱圖形，我們在$\frac{1}{4}$方陣中選取一格塗色後，將圖形旋轉三次復合。



可得 $A_{2k\ 2k}(4) = k^2, k\epsilon N$
接下來我們用前面的觀念推出塗 x 格的公式。

Theorem 1 奇方陣

$$A_{nn}(x) = \begin{cases} C_{\frac{x}{4}}^{\frac{n^2-1}{4}} & ,\ x\equiv 0(\text{mod } 4) \\ C_{\frac{x-1}{4}}^{\frac{n^2-1}{4}} & ,\ x\equiv 1(\text{mod } 4) \\ 0 & ,\ x\equiv 2 \text{ or } 3(\text{mod } 4) \end{cases}$$

Theorem 2 偶方陣

$$A_{nn}(x) = \begin{cases} C_{\frac{x}{4}}^{\frac{n^2}{4}} & ,\ x\equiv 0(\text{mod } 4) \\ 0 & ,\ x\equiv 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3(\text{mod } 4) \end{cases}$$

因為 A 是點對稱圖形，所以在$\frac{1}{4}$方陣中選格子塗色後，將之旋轉並複合，因此若希望總共塗 8 格，則在$\frac{1}{4}$方陣中選 2 格塗色，若希望總共塗 x 格，則在$\frac{1}{4}$方陣中選$\frac{x}{4}$格塗色，由此也可知道，總共必須塗 4 的倍數或 4 的倍數加 1 格才能達成 A 情況(加 1 格來自奇方陣的中心格，因此若 x≡1(mod 4)則需於$\frac{1}{4}$方陣中選$\frac{x-1}{4}$格塗色)，若非如此則為 0。

推導$B_{nn}(x)$的公式

這裡也可用前面的觀念推出塗 x 格的公式。

Theorem 3 奇方陣

$$B_{nn}(x)=\begin{cases}\dfrac{C_{\frac{x}{2}}^{\frac{n^2-1}{2}}-A_{nn}(x)}{2}, & x\text{為偶數}\\[2ex] \dfrac{C_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{n^2-1}{2}}-A_{nn}(x)}{2}, & x\text{為奇數}\end{cases}$$

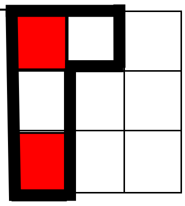
Theorem 4 偶方陣

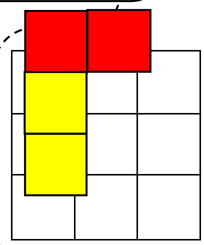
$$B_{nn}(x)=\begin{cases}\dfrac{C_{\frac{x}{2}}^{\frac{n^2}{2}}-A_{nn}(x)}{2}, & x\text{ 為偶數}\\[2ex] 0, & x\text{ 為奇數}\end{cases}$$

$$B_{nn}(x)=\frac{C_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{n^2-1}{2}}-A_{nn}(x)}{2}\quad ,x,\ n\text{為奇數}$$

在$\frac{1}{2}$方陣中（奇方陣要先減一格）取$\frac{x-1}{2}$格

在$\frac{1}{2}$方陣中選取時可能選到 A，例：





會重複，例 :紅色和黃色塗法一樣

推導$C_{nn}(x)$的公式

當圖形可旋轉時，我們將 B 中兩個經旋轉後相同的不同圖形視為同一種，因此，若當圖形不可旋轉時，B 中所有的圖形為可旋轉時的兩倍；當圖形可旋轉時，我們將 C 中四個經旋轉後相同的不同圖形視為同一種，因此，若當圖形不可旋轉時，C 中所有的圖形為可旋轉時的四倍。因此當圖形不可旋轉時的總塗法數為$A_{nn}(x) + 2B_{nn}(x) + 4C_{nn}(x) = C_x^{n^2}$。而在可旋轉時，其總塗法數為$T_{nn}(x) = A_{nn}(x) + B_{nn}(x) + C_{nn}(x)$。自此，我們可以推得 C 的總塗法數為$[C_x^{n^2} - A_{nn}(x) - 2B_{nn}(x)] \div 4$

奇方陣塗兩格的總塗法數

$$T_{2k+1\,2k+1}(2) = A_{2k+1\,2k+1}(2) + B_{2k+1\,\,2k+1}(2) + C_{2k+1\,k+1}(2)$$

$$= 0 + (k^2+k) + [C_2^{(2k+1)^2} - 2(k^2+k)] \div 4$$

$$=2k^4+ 4k^3+ 3k^2+ k$$

$$=(k^2+ k)(2k^2+ 2k+ 1)$$ 與網路上的公式相符

接下來我們推出總塗法數的公式。

Theorem 5 奇方陣

$$T_{nn}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_{\frac{x}{4}}^{\frac{n^2-1}{4}} + \frac{1}{4}C_{\frac{x}{2}}^{\frac{n^2-1}{2}} + \frac{1}{4}C_x^{n^2}, & x\equiv0 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}C_{\frac{x-1}{4}}^{\frac{n^2-1}{4}} + \frac{1}{4}C_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{n^2-1}{2}} + \frac{1}{4}C_x^{n^2}, & x\equiv1 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}C_{\frac{x}{2}}^{\frac{n^2-1}{2}} + \frac{1}{4}C_x^{n^2}, & x\equiv2 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}C_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{n^2-1}{2}} + \frac{1}{4}C_x^{n^2}, & x\equiv3 \pmod 4 \end{cases}$$

Theorem 6 偶方陣

$$T_{nn}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_{\frac{x}{4}}^{\frac{n^2}{4}} + \frac{1}{4}C_{\frac{x}{2}}^{\frac{n^2}{2}} + \frac{1}{4}C_x^{n^2}, & x\equiv0 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}C_x^{n^2}, & x\equiv1 \text{ or } 3 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}C_{\frac{x}{2}}^{\frac{n^2}{2}} + \frac{1}{4}C_x^{n^2}, & x\equiv2 \pmod 4 \end{cases}$$

這樣的點、線對稱觀念也可用來思考長方陣和許多小三角形拼成的正六邊形問題。

✧ 長方陣

定義 ：

1. 由一些相同大小的正方形排成兩邊長(即單邊的格數)不相等的圖形，稱為長方陣。
2. 令塗 x 格的 n × m 長方陣在經 180°旋轉(長方陣旋轉 90°、270°之後不可能相同，故只討論旋轉 180°)塗色格完全重合者以符號 A 表示，其塗法數為$A_{nm}(x)$。
   例如：$A_{32}(2) = 3$

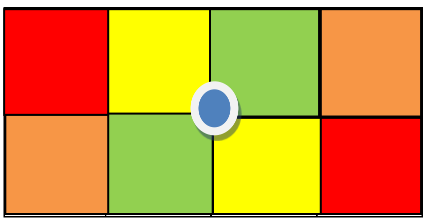
3. 塗色格旋轉前後不同者以符號 B 表示，其塗法數為$B_{nm}(x)$。
   例如：$B_{32}(2) = 6$

<u>推導$A_{nm}(x)$的公式</u>

- **n, m∈ 偶數**

Theorem 6

$$A_{nm}(x) = \begin{cases} C^{\frac{nm}{2}}_{\frac{x}{2}}，x為偶數 \\ 0，x為奇數 \end{cases}$$

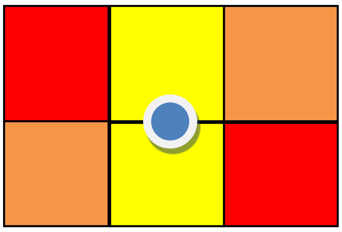


由於長方陣只討論旋轉 180°的情況，因此將長方陣分成兩半，在$\frac{1}{2}$長方陣中選$\frac{x}{2}$格，再旋轉複合(類似方陣)，由此可知必須塗偶數格才會出現 A 的塗法。

- n∈ 偶數, m∈ 奇數

Theorem 7

$$A_{nm}(x)=\begin{cases} C_{\frac{x}{2}}^{\frac{nm}{2}}\text{，x為偶數} \\ 0\text{，x為奇數} \end{cases}$$

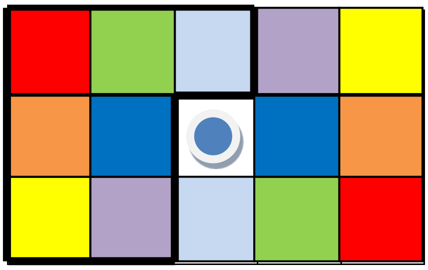


因為總格數是偶數，所以和偶數×偶數長方陣相同。

- n, m∈ 奇數

Theorem 8

$$A_{nm}(x)=\begin{cases} C_{\frac{x}{2}}^{\frac{nm-1}{2}}\text{，x為偶數} \\ C_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{nm-1}{2}}\text{，x為奇數} \end{cases}$$



總格數為奇數，所以將長方陣分成兩半時要先減一(一為中心格)，若要塗的格子數是奇數，則 x 減一(ex : $A_{53}(2)=A_{53}(3)$)

<u>推導$B_{nm}(x)$的公式</u>

由$A_{nm}(x)+2B_{nm}(x)=C_x^{nm}$可知$B_{nm}(x)=[C_x^{nm}-A_{nm}(x)]\div 2$

Theorem 9

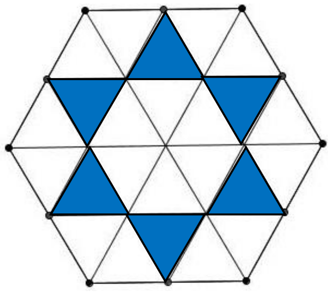
$$T_{nm}(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}C_{\frac{x}{2}}^{\frac{nm}{2}}+\frac{C_x^{nm}}{2}\text{，nm，x為偶數} \\ \frac{C_x^{nm}}{2}\text{，nm為偶數，x為奇數} \\ \frac{1}{2}C_{\frac{x}{2}}^{\frac{nm-1}{2}}+\frac{C_x^{nm}}{2}\text{，nm為奇數，x為偶數} \\ \frac{1}{2}C_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{nm-1}{2}}+\frac{C_x^{nm}}{2}\text{，nm，x為奇數} \end{cases}$$

✧ 正六邊形陣

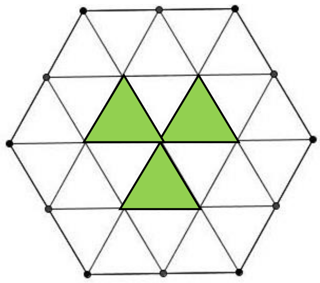
定義：

1. 由一些相同大小的三角形排成的正六邊形，稱為正六邊形陣。

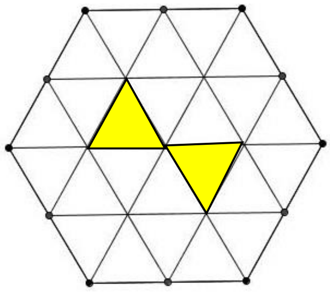
2. 令塗 x 格、邊長 n 的正六邊形陣在經 60°、120°、180°、240°、300°旋轉(就是以六個邊為底)後塗色格完全重合者以符號 A 表示，其塗法數為$A_n(x)$。
   例如：$A_2(6)$



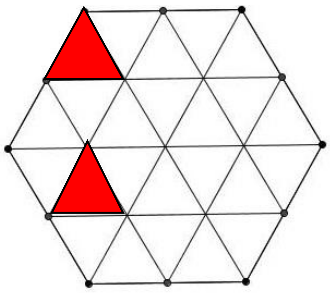
3. 令塗 x 格、邊長 n 的正六邊形陣在經 120°、240°旋轉後塗色格重合，且旋轉 60°、180°、300°後塗色格不同者以符號 B 表示，其塗法數為$B_n(x)$。
   例如：$B_2(3)$



4. 令塗 x 格、邊長 n 的正六邊形陣在經 180°旋轉後塗色格重合，且旋轉 60°、240°和 120°、300°後塗色格分別不同者以符號 C 表示，其塗法數為$C_n(x)$。
   例如：$C_2(2)$



5. 令塗 x 格、邊長 n 的正六邊形陣在經 60°、120°、180°、240°、300°旋轉後塗色格完全不同者以符號 D 表示，其塗法數為$D_n(x)$。
   例如：$D_2(2)$



推導$A_n(x)$的公式

Theorem 10

$$A_n(x)=\begin{cases} C^{n^2}_{\frac{x}{6}}，x\equiv 0 \pmod 6 \\ 0，x\equiv 1,2,3,4,5 \pmod 6 \end{cases}$$

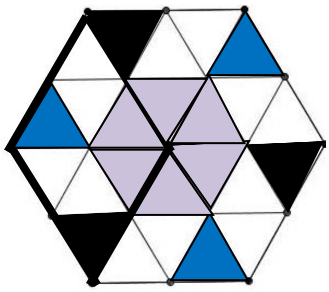
每個正六邊形都可以被分為 6 個正三角形，每個正三角形占旋轉中的 60°，因此可以運用方陣旋轉複合的觀念，在$\frac{1}{6}$正六邊形陣中（一個正三角形），選$\frac{x}{6}$格塗色，旋轉後複合就是A的塗法，由此也可知塗色的格子數必須是 6 的倍數。

推導$B_n(x)$的公式

Theorem 11

$$B_n(x)=\begin{cases} \dfrac{C^{n^2\times 2}_{\frac{x}{3}}-A_n(x)}{2}，x\equiv 0 \pmod 3 \\ 0，x\equiv 1,2 \pmod 3 \end{cases}$$

在$\frac{1}{3}$正六邊形陣中（兩個正三角形），選$\frac{x}{3}$格塗色，旋轉後複合就是 B 的塗法，且因為這種選法會重覆到A的塗法(如右圖)，所以需減去，由此也可知塗色的格子數必須是 3 的倍數，不同於方陣，正六邊形陣沒有中心格的問題。除以二則是因為塗藍色和塗黑色相同(如右圖)。

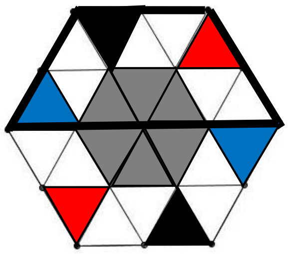


推導$C_n(x)$的公式

Theorem 12

$$C_n(x)=\begin{cases} \dfrac{C^{n^2\times 3}_{\frac{x}{2}}-A_n(x)}{3}，x\equiv 0 \pmod 2 \\ 0，x\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

在$\frac{1}{2}$正六邊形陣中（三個正三角形），選$\frac{x}{2}$格塗色，旋轉後複合就是 C 的塗法，這種選法也會重覆到A的塗法(如右圖)，需注意的是不會重覆 B 的塗法，因為 2 不是 3 的因數，塗色的格子數必須是 3 的倍數。除以三則是因為塗藍色和黑色和紅色相同(如右圖)。



推導$D_n(x)$的公式

由$A_n(x)+2B_n(x)+3C_n(x)+6D_n(x)=C_x^{n^2\times 6}$可得

$D_n(x)=[C_x^{n^2\times 6}-A_n(x)-2B_n(x)-3C_n(x)]\div 6$

Theorem 13

$$T_n(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}C_{\frac{x}{3}}^{n^2\times 2}+\frac{1}{2}C_{\frac{x}{2}}^{n^2\times 3}+\frac{1}{6}C_x^{n^2\times 6}-\frac{1}{3}C_{\frac{x}{6}}^{n^2}\text{，}x\equiv 0 \pmod 6\\ 0\text{，}x\equiv 1,5 \pmod 6\\ \frac{1}{2}C_{\frac{x}{2}}^{n^2\times 3}+\frac{1}{6}C_x^{n^2\times 6}\text{，}x\equiv 2,4 \pmod 6\\ \frac{2}{3}C_{\frac{x}{3}}^{n^2\times 2}+\frac{1}{6}C_x^{n^2\times 6}\text{，}x\equiv 3 \pmod 6\end{cases}$$

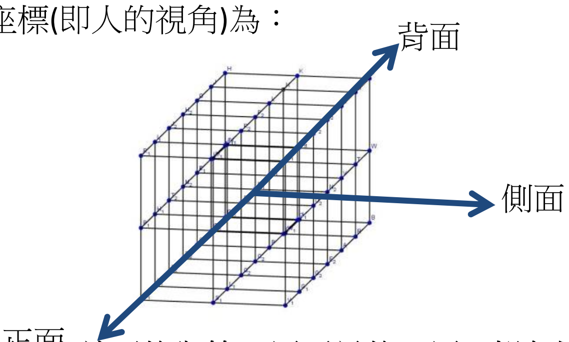
✧ 立方體

定義：

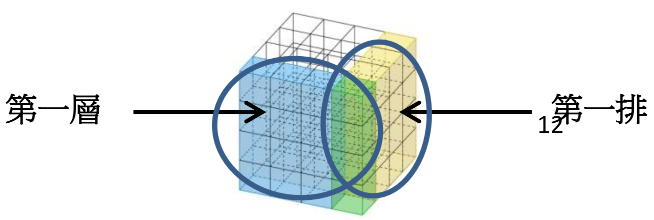
1. 立方體由長 × 寬 × 高組成。

m × m × n 僅兩面為正方形	L × m × n六面皆非正方形	n × n × n 六面皆正方形

2. 一個被塗色的立方體經任何形式旋轉後，若與另一個塗色立方體相同，則稱這兩者有相同的方法。
3. 長 × 寬 × 高 (x) 代表塗 x 格的方法數。
4. “A 與 B 複合”指的是塗 A 再塗 B。
5. 不隨旋轉改變的座標(即人的視角)為：



6. 朝向正面的稱為層，由前而後為第一層至最後一層。朝向側面的稱為排，由右而左為第一排至最後一排。



7. 旋轉共有三個轉軸，分別會造成(度數)°旋轉、翻轉、倒轉。第一層維持在正面的旋轉稱為(度數)°旋轉(≠旋轉)；第一層轉到側面的稱為翻轉；第一層轉到背面的稱為倒轉。旋轉為上述的總稱。

(度數)°旋轉	翻轉	倒轉

- 接著我們從平面推廣到立體時，首先探討較為簡單的長方體。因為其沒有正立方體的特性，因此許多在正立方體會產生的重複情形並不會發生。在長方體中，因為其為平面到立體延伸，所以我們依照前述的順序先行從有正方形的$m \times m \times n$著手，再以推論的結果延伸至$L \times m \times n$。

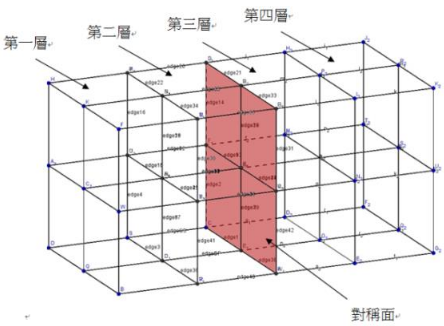
➢ 長方體

<u>m × m × n</u>

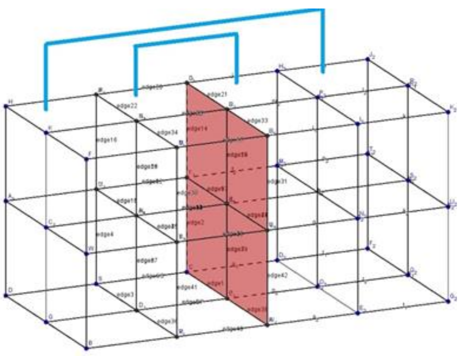
Lemma 1：m = 2k , n = 2k′ (k ,k′∈N 且 n≠ m)

$$\mathbf{m \times m \times n(2) = 【 \frac{1}{4}C_1^{2k^2} + \frac{1}{4}C_2^{4k^2} 】 \times \frac{n}{2} + \left(\frac{m^4}{4} - m^2 + 4\right) \times \frac{n}{2} + \sum_{a=0}^{\frac{n-2}{2}} (2a+2) \times m^2}$$

例如 : 2 × 2 × 4



首先以對稱面分組，共有$\frac{n}{2}$組(兩層一組，在此範例中 n=4，如下圖)。以下會將算式分成兩種情形，一為兩格塗在同一層，一為兩格塗在不同層。



A. 當兩格塗在同一層時，經旋轉後不相同的有$\frac{n}{2}$層。塗同一層即在正方形平面m^2上塗兩格，因此可以直接代入 $T_{mm}(2)$, m = 2k 的公式：$\frac{1}{4}C^{2k^2}_{1}+\frac{1}{4}C^{4k^2}_{2}$，則塗在同一層的方法數為$\frac{n}{2}[\frac{1}{4}C^{2k^2}_{1}+\frac{1}{4}C^{4k^2}_{2}]$。

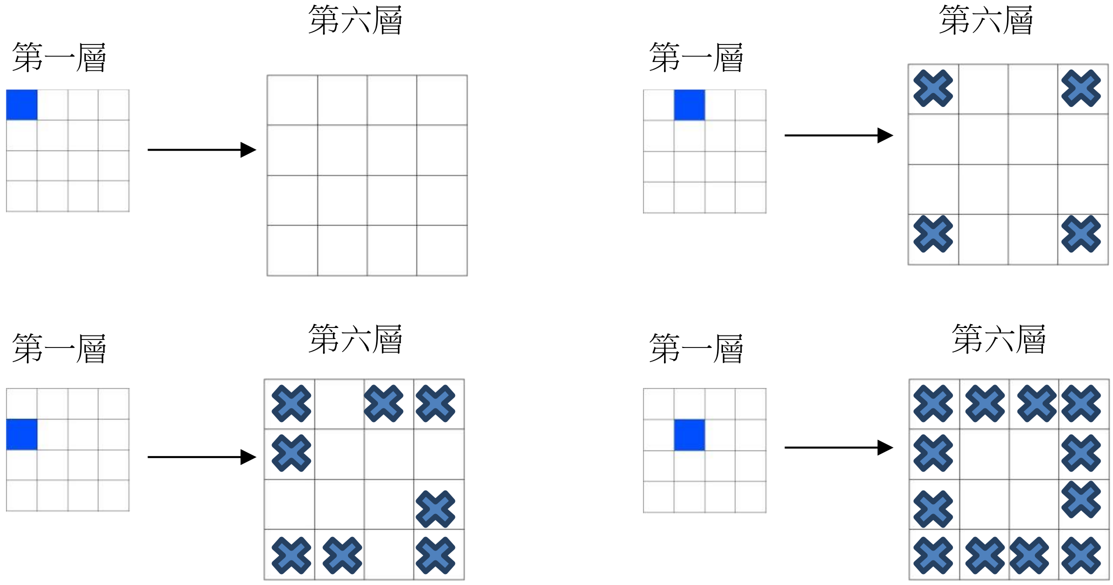
B. 兩格塗在不同層時，將情形分成兩個步驟，分別為兩格各塗在同一組的兩層中及兩格塗在不同組的兩層中。

i. 在第一個步驟中，一格塗在第一層中$\frac{1}{4}$的格子時，我們發現在第一層重複的狀況與方陣 A 公式旋轉遞迴的狀況相同(即在$\frac{1}{4}$方陣中任選兩格)，有$\frac{\mathbf{m^2}}{\mathbf{4}}$種。而另外一格塗在同組中的另一層(令為 Q)時，例如，從第一層(不失一般性地)選取左上格時，可以塗 Q 中所有的格子。而再塗第一層中的第一列第二格，只可塗 Q 中m^2-4格，即減去第一層左上角格子經倒轉後再 90°、180°、270°旋轉的四個角，以此類推，我們可以得到 4 x 4 x 6 的等差關係式為 $4m^2-4\times(0+1+2+3)$，而推廣至 m 時的等差級數為$\frac{m^2}{4}\times m^2-4\times\sum_{y=0}^{\frac{m^2}{4}-1}y$。因此此步驟簡化後的公式為$(\frac{\mathbf{m^4}}{\mathbf{4}}-\mathbf{m^2}+\mathbf{4})\times\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$。

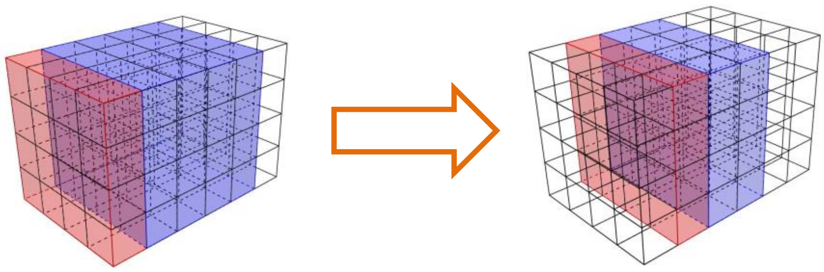
ii. 在第二個步驟中，先塗第一層中的任一格，再塗後四層的任一格(有$m^2\times 4$ 種塗法)，而塗第二層中的任一格後，再塗後兩層(第三、四層，只塗這兩層因為若塗了二、六層，會跟先前塗的一、五層重覆)的任一格(有$m^2\times 2$ 種塗法)，因此 4 × 4 × 6 的長方體兩格塗在不同層時有$m^2\times 6$ 種塗法。同理，若 m = 6, n = 8，則選第一層中的任一格與後六層(每層m^2格)配對，再選第二層中的任一格與第三、四、五、六層(每層m^2格)配對，最後選第三層中的任一格與第四、五層(m^2格)配對，則 6 × 6 × 8 的長方體兩格塗在不同層時有$m^2\times 12$ 種塗法。推廣到 n 的總方法數時m^2要乘以(2+4+6+……+n-2)，即$\sum_{a=0}^{\frac{n-2}{2}}(2a+2)\ \times m^2$

以 4 x 4 x 6 為例：

i.



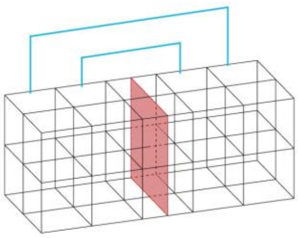
ii.



Lemma 2：m = 2k , n = 2k'+1 (k ,k'∈N 且 n≠ m)

$$\mathbf{m \times m \times n(2)} = 【\tfrac{1}{4}C_1^{2k^2+2k} + \tfrac{1}{4}C_2^{4k^2+4k+1}】 \times \frac{n+1}{2} + \left(\frac{m^4}{4} - m^2 + 4\right) \times \frac{n}{2} + \sum_{a=0}^{\frac{n-3}{2}}(2a+1) \times m^2$$

首先以對稱面分組，共有$\frac{n-1}{2}$組



A. 兩格塗在同一層時，和前述相同，可代入 $T_{mm}(2) = \frac{1}{4}C_1^{2k^2} + \frac{1}{4}C_2^{4k^2}$，並乘以 $\frac{n-1}{2}+1$(加了中間層)，方法數為$\frac{n+1}{2}[\frac{1}{4}C_1^{2k^2} + \frac{1}{4}C_2^{4k^2}]$。

B. 兩格塗在不同層時，一樣將情形分成兩個步驟，分別為兩格各塗在同一組的兩層中及兩格塗在不同組的兩層中。

i. 第一個步驟，一格塗在第一層中$\frac{1}{4}$的格子時，同理，有$\frac{\mathbf{m^2}}{\mathbf{4}}$種。而另外一格塗在 Q 時，同理，我們可以得到等差關係式為

$\frac{m^2-1}{4}\times m^2-4\times\sum_{y=0}^{\frac{m^2-1}{4}-1}y$。此步驟簡化後的公式為$(\frac{\mathbf{m^4}}{\mathbf{4}}-\mathbf{m^2}+\mathbf{4})\times\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$。

ii. 第二個步驟與 m = 2k , n = 2k'的情形雷同，推廣到 n 的總方法數即

$\sum_{a=0}^{\frac{n-3}{2}}(2a+1)\ \times m^2$

Lemma 3：m = 2k+1 , n = 2k' (k ,k'∈N 且 n≠ m)

$\mathbf{m\times m\times n(2)}$ = 【$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{C_1^{2k^2+2k}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{C_2^{4k^2+4k+1}}$】 $\times\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}$ + $(\frac{\mathbf{m^4-5m^2}}{\mathbf{4}}+\mathbf{5})\times\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$ +

$\sum_{\mathbf{a=0}}^{\frac{\mathbf{n-2}}{\mathbf{2}}}(\mathbf{2a+2})\ \times\mathbf{m^2}$ + $\sum_{\mathbf{a=0}}^{\frac{\mathbf{n-2}}{\mathbf{2}}}(\mathbf{2a+2})\times(\frac{\mathbf{m^2-1}}{\mathbf{4}}+1)$

A. 兩格塗在同一層時代入 $T_{mm}(2)\ =\ \frac{1}{4}C_1^{2k^2+2k}+\frac{1}{4}C_2^{4k^2+4k+1},\ m=2k+1$，再乘以$\frac{n}{2}$層。

B. 兩格塗不同層時，選取任一層的中心格和另一層的格子會重覆到塗法，所以暫時排除中心格的情形。只塗一層中的 1 格(排除中心格)，再塗格子未被選中的另外一層(每層 m^2-1 格，排除中心格)的一格。此時分為三個步驟，前兩個與前述相同，第三步驟為中心格的探討。

i. 在第一個步驟中，一格塗在第一層中$\frac{1}{4}$的格子時，同理，有$\frac{\mathbf{m^2-1}}{\mathbf{4}}$種。而另外一格塗在同組中的另一層(令為 Q)時，同理，第一層可以塗 Q 中所有的格子。而再塗第一層中的另一格，只可塗 Q 中m^2-4格，以此類推，我們可以得到 5 x 5 x 6 的等差關係式為 $4m^2-4\times(0+1+2+3+4)$，而推廣至 m 時的等差級數為$\frac{m^2-1}{4}\times m^2-4\times\sum_{y=0}^{\frac{m^2-1}{4}-1}y$。因此此步驟簡化後的公式為$(\frac{\mathbf{m^4-5m^2}}{\mathbf{4}}+\mathbf{5})\times\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$。

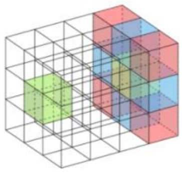
ii. 第二個步驟與 m = 2k , n = 2k'的情形雷同，推廣到 n 的總方法數即

$\sum_{a=0}^{\frac{n-2}{2}}(2a+2)\ \times\ (m^2-1)$

iii. 兩格塗不同層但有塗到中心格時，原理和第二步驟雷同，就是選第一層的中心格塗色後再與後面幾層配對、選第二層的中心格塗色後再與第三層到第 n-1 層的格子配對……，而每一層選的正是方陣$A_{mm}(4)$(即 $\frac{m^2-1}{4}$

格)和中心格。且因為一開始選的那格塗在中心，因此有 $\sum_{a=0}^{\frac{n-2}{2}}(2a+2)\times$ $(\frac{m^2-1}{4}+1)$種塗法。

以 3 x 3 x 4 為例：



Lemma 4：m = 2k+1 , n = 2k'+1 (k ,k'∈N 且 n≠ m)

$$\mathbf{m\times m\times n(2)}\ =【\frac{1}{4}C_1^{2k^2+2k}+\frac{1}{4}C_2^{4k^2+4k+1}】\times\frac{n+1}{2}+(\frac{m^4-5m^2}{4}+5)\times\frac{n-1}{2}+\sum_{a=0}^{\frac{n-3}{2}}(2a+1)\times(m^2-1)+\sum_{a=0}^{\frac{n-3}{2}}(2a+1)\times(\frac{m^2-1}{4}+1)$$

A. 兩格塗在同一層時代入 $T_{mm}(2)=\frac{1}{4}C_1^{2k^2+2k}+\frac{1}{4}C_2^{4k^2+4k+1}$，$m=2k+1$，再乘以$\frac{n+1}{2}$層。

B. 兩格塗不同層時，同樣暫時排除中心格的情形並分為三個步驟，前兩個與前述相同，第三步驟為中心格的探討。

i. 在第一個步驟中，一格塗在第一層中$\frac{1}{4}$的格子時，同理，有 $\frac{m^2-1}{4}$ 種。而另外一格塗在 Q 時，同理，推廣至 m 的等差級數為$\frac{m^2-1}{4}\times m^2-4\times\sum_{y=0}^{\frac{m^2-1}{4}-1}y$。此步驟簡化後的公式為$(\frac{m^4-5m^2}{4}+5)\times\frac{n-1}{2}$。

ii. 第二個步驟，同理，推廣到 n 的總方法數即 $\sum_{a=0}^{\frac{n-3}{2}}(2a+1)\times(m^2-1)$

iii. 兩格塗不同層但有塗到中心格時，原理和第二步驟雷同，而每一層選的是$A_{mm}(4)$(即 $\frac{m^2-1}{4}$ 格)和中心格，因為一開始選的那格塗在中心，因此有 $\sum_{a=0}^{\frac{n-3}{2}}(2a+1)\times(\frac{m^2-1}{4}+1)$種塗法。

<u>L × m × n</u>

- 用 m × m × n 的方法我們可以推導出 L × m × n 的公式，唯一的差別在於 m × m × n 中，每一層都是正方形，代入的是方陣公式，而 L × m × n 中每一層都是長方形，需要代入長方陣的公式；且當 L × m 為奇數（有中心格），每層要選$\frac{nm-1}{2}$格及中心格。以下省略計算過程。

Lemma 5：Lm 為偶數，n 為偶數(n≠ m ≠ L)

$$\mathbf{L\times m\times n(2)}\ =【\frac{1}{2}C_1^{\frac{Lm}{2}}+\frac{C_2^{Lm}}{2}】\times\frac{n}{2}+[\frac{Lm}{2}\times Lm-\frac{(Lm-1)}{2}\times\frac{Lm}{2}]\times\frac{n}{2}$$

Lemma 6：Lm 為偶數，n 為奇數(n≠ m ≠ L)

$$\mathbf{L\times m\times n(2)}\ =【\frac{1}{2}C_1^{\frac{Lm}{2}}+\frac{C_2^{Lm}}{2}】\times\frac{n+1}{2}+[\frac{Lm}{2}\times Lm-\frac{(Lm-1)}{2}\times\frac{Lm}{2}]\times\frac{n-1}{2}$$

Lemma 7：Lm 為奇數，n 為偶數(n≠ m ≠ L)

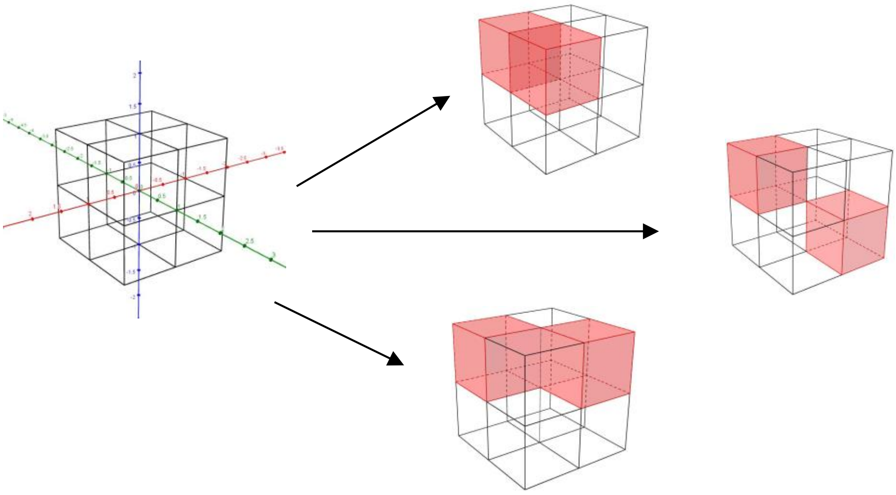
$$\mathbf{L \times m \times n(2)} = 【\frac{1}{2}C_1^{\frac{Lm}{2}} + \frac{C_2^{\frac{Lm}{2}}}{2}】 \times \frac{n}{2} + [\frac{Lm}{2} \times Lm - \frac{(Lm-1)}{2} \times \frac{Lm}{2}] \times \frac{n}{2} + \sum_{a=0}^{\frac{n-2}{2}}(2a+2) \times (\frac{Lm-1}{4}+1)$$

Lemma 8：Lm 為奇數，n 為奇數(n≠ m ≠ L)

$$\mathbf{L \times m \times n(2)} = 【\frac{1}{2}C_1^{\frac{Lm}{2}} + \frac{C_2^{\frac{Lm}{2}}}{2}】 \times \frac{n+1}{2} + [\frac{Lm}{2} \times Lm - \frac{(Lm-1)}{2} \times \frac{Lm}{2}] \times \frac{n-1}{2} \sum_{a=0}^{\frac{n-2}{2}}(2a+1) \times (\frac{Lm-1}{4}+1)$$

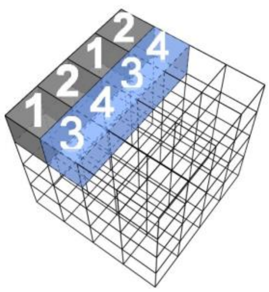
➢ 正立方體

我們原先採用將立方體分為八個卦限的方法，而若任一複合兩個卦限，會產生下面三種情形。:

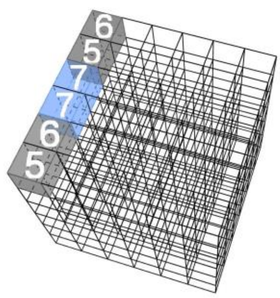


可惜的是，我們發現旋轉後會有諸多的重複情形且會隨著 n 值的不同而有不一樣的規律。以 4x4x4 為例，若在圖一中選取編號 1 的兩個方格，會和選取編號 2 時重複，但是若選取編號 3 時卻不會與編號 4 重複。

接著再以 6x6x6 為例，同樣在圖二中編號 5 和編號 6 的會重複，但是編號 7 不會重複且 6x6x6 卦限中的圖形為 3x3x3，是以正中央的一格會有與編號 7 相同的問題。而上述在 6x6x6 中會發生的問題在 8x8x8 中並不會出現，因此我們改採用接下來遞迴的公式。



圖一

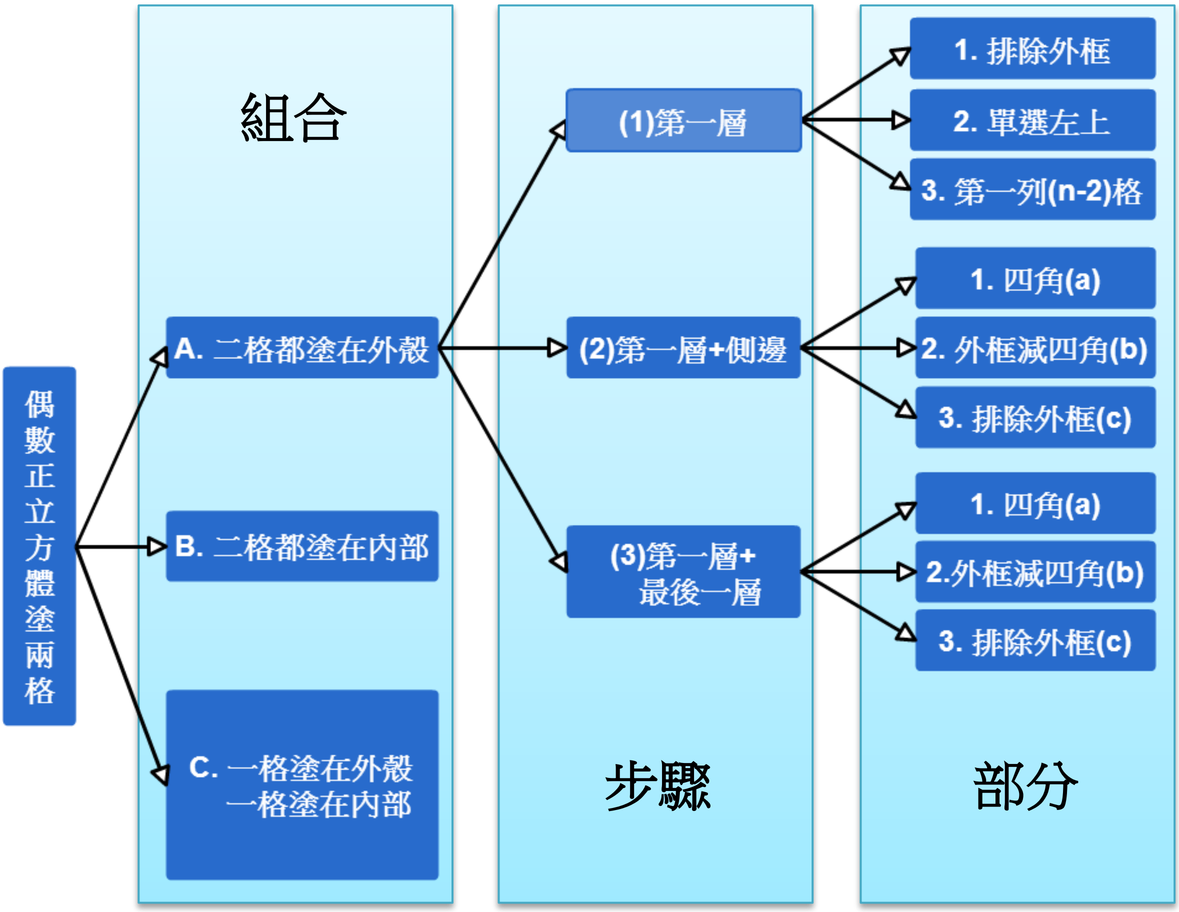


圖二

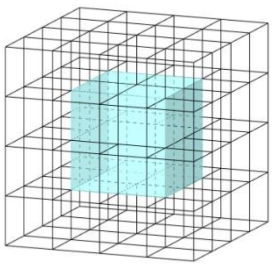
以下，我們將一個正立方體視為一個小正立方體外面再加上一個外殼。因此，我們只需計算兩格都塗在外殼、一格塗在外殼一格塗在小正立方體、以及兩格都塗在小正立方體等三種情形。之後我們將小正立方體簡稱為內部。

<u>**n × n× n**</u>

> **Lemma 9：n 為偶數**
>
> $\mathbf{n \times n \times n(2)} = \sum_{k=4}^{n} \frac{2k^5-11k^4+48k^3-104k^2-84k-16}{8} + 3$



首先，我們將$\mathrm{n \times n \times n}$分解成$\mathrm{(n-2) \times (n-2) \times (n-2)}$的正立方體(令為 B)與$\mathrm{n \times n \times n}$除去 B 的外殼(令為 C)。因此以下將分為兩個部分。

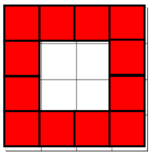


(以$4 \times 4 \times 4$的為例)

接著，我們將做法分為三個組合。

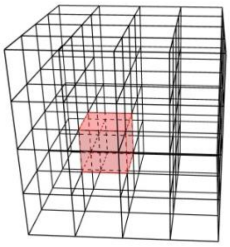
第一個組合為兩格都塗在外殼，其中我們分成三個步驟。第一步驟為兩格都塗在第一層，並將其畫分為三個部分。

第一部分：先將最外面的一圈(簡稱外框)排除，也就是使剩下的格子為只塗到一面的，因此若將剩餘的$(n-2)\times(n-2)$方陣中任意選取兩格塗色，即為方陣的$T_{2k2k}(2) = \frac{n^4}{8}$。

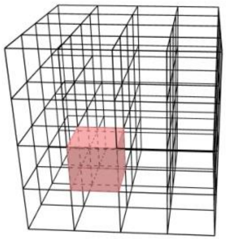


(以$4\times4\times4$的第一層畫作平面為例)

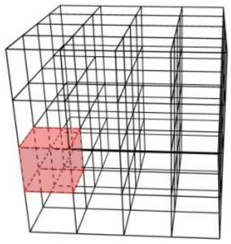
因為正立方體旋轉之後的圖形都是正方形，但是可能會有零到三個面在我們塗的格子的位置相交，零個面是在立方體內部；一個面是在表面但不在邊上；兩個面在邊上不包含稜角；三個面則在稜角上，因此原本方陣不會重複的情形會在這裡重複。



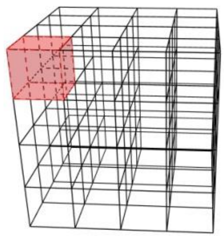
0 個面



1 個面

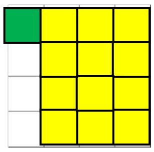


2 個面



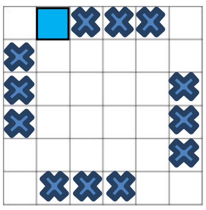
3 個面

第二部分：只選定外框中左上角的格子(即解決四角的所有可能)，再塗其他的格子，會有n(n-1)種不重複的方法數。



(以$4\times4\times4$的第一層畫作平面為例)

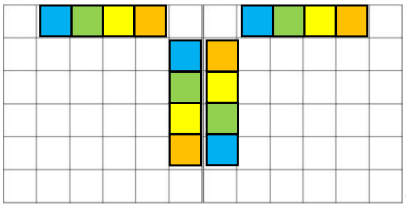
第三部分：是第一列(n-2)中任一格。首先，任選定第一列(n-2)格中的一格(令為 A)，並排除同一列的其他格及它們經 90°、180°、270°旋轉後所在的格子(因為若不排除，其造成的重複情形會在 n 越大時越複雜) 。



(以$6\times6\times6$的第一層畫作平面為例)

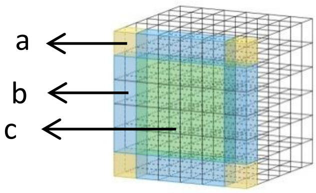
因為已經考慮過所有包含塗角的方法數，所以在之後$n\times n$ 方陣中皆會排除四個角的格子。

之後 A 再復合剩下的全部格子，會有(n^2-4n-4(n-3)-1=n^2-4n+7)格。此時我們發現塗 A 與塗 A 經 90°的格子經旋轉後，會與塗 A 與塗 A 經 270°的格子相同，


(以 $6\times6\times6$ 的第一層畫作平面為例)

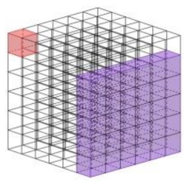
因此他們有相同的塗法，並發現在 A 皆有此特性，所以須扣除(n-2)種方法數。另外，我們仍須加上塗 A 與被排除的格子(不包含四角)，此時有 4(n-3)種方法數。總結而言，在第一個步驟中，共有$n^3-4n^2+12n-18$種方法數。

接著是<u>**第二個步驟**</u>，一格塗在第一層，一格塗在側邊。一樣分為三個部分，分別為 a、b、c。(以$6\times6\times6$的為例)

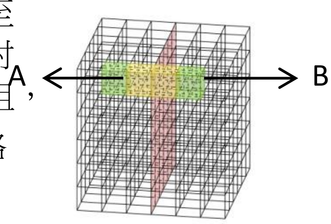


此時，不再使用分層的計算方式。因為正立方體的特性，若使用分層的計算方式，會造成過於複雜的計算重複情形的公式。

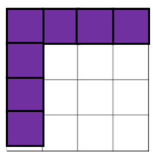
<u>**第一部分**</u>：先塗左上角的格子，此時 a 中右側兩角會與側邊塗在同一面，而塗左下角一格會與塗左上角的情形相同且重複。左上角的格子與側邊共有$(\mathrm{n}-1)^2$格(即排除會與左上角的格子共面的格子)複合後經旋轉不重複。



<u>**第二部分**</u>：我們塗 b 中的一格，此時我們只塗 b 中第一列的格子。因為右行的會與側邊共面，而下方那列會與塗上列的情形相同且重複，至於左側那行則會包含在第三部分中。首先，我們排除已經討論過的四個角及 b 中右側的格子，再以對稱面將第一列分組，任一組有$\frac{n-2}{2}$格。接著，以 6×6×6 為例，令任一組中的格子為 A 與 B。(以$6\times6\times6$的為例)



首先在側邊塗色範圍為排除四角與會共面的格子，即$(\mathrm{n}-1)^2-1$格，(以$4\times4\times4$的側面畫作平面為例)



(n-2)格與側邊排除外框的剩餘格子複合皆不會有重複。其次，與側邊外框中尚未塗色的格子複合，我們發現有兩種重複的情形：

１．A 與 90°旋轉的 A 複合會和 B 與 90°旋轉的 B 複合相同，

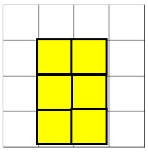
２．A 與 180 旋轉後翻轉的 B 複合會和 B 與 180 旋轉後翻轉的 A 複合相同，

並且發現在各組中都有相同的現象。因此第二項目中共有

（n－4）×[$(\mathrm{n}-1)^2-1$]－2× $\frac{n-2}{2}$種方法數。

第三部分為選取第一層中排除外框的格子再複合側邊排除外框的格子，有$(\mathrm{n}-2)^2$種方法數。

第三步驟為在第二步驟完成之後，唯一在正立方體經任何形式旋轉之後不會重複的。即塗第一層中任一格，及最後一層中的任一格。在這一步驟中也分了三個部分，a, b, c 的定義與上述相同。下圖所示的區域為最後一層可能可復合的格子。


(以$4\times4\times4$的最後一層畫作平面為例)

第一部分為在 a 中任選一格(其他格子與上述雷同，會有重複的情形)可與最後一層排除外框的格子複合。此時並不討論外框中未被排除的格子，因為其經倒轉後即是第二部分，有$(\mathrm{n}-2)^2$種方法數。

第二部分中，雖然第一層右行有部分格子與最後一層不共面，但是旋轉後仍會與上列的方法重複。此第二部分的算法與前述第二步驟中的第二部分相異的部分為選取範圍是$[(\mathrm{n}-1)^2-1]+(n-2)$，一樣分成兩組。

接下來同樣的，任一組的格子令為 A、B。

我們發現有三種重複的情形：

１．A 與 90°旋轉後倒轉的 B 複合會和 B 與 90°旋轉後倒轉的 A 複合相同。

２．A 與 180°旋轉後倒轉的 B 複合會和 B 與 180°旋轉後倒轉的 A 複合相同。

２．A 與 270°旋轉後倒轉的 B 複合會和 B 與 270°旋轉後倒轉的 A 複合相同，並且發現在各組中都有相同的現象。在第二項目中共有$(\mathrm{n}-4)\times\{[(\mathrm{n}-1)^2-1]+(n-2)\}-3\times\frac{n-2}{2}$種方法數。

第三項目中因為外框皆已討論完，且只需選 c 中任一格(同樣地，c 中其他的格子經旋轉後會有相同的情形)與最後一層排除外框的格子即可。

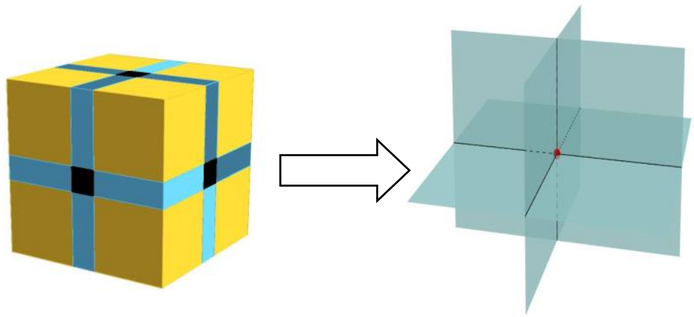
接下來，第二個組合為塗 C 上的一格與 B 中的一格。此時在不重複的情況下，C 上共有$(\frac{n}{2})^2$格可與 B 中$(\mathrm{n}-2)^3$格複合。

最後，第三個組合為只塗 B 中任兩格。很直觀地，共有$(\mathrm{n}-2)\times(\mathrm{n}-2)\times(\mathrm{n}-2)(2)$種方法數。

最後三個組合經過整理，可以得到遞迴關係式：$\mathbf{n \times n \times n(2)}$ = $\frac{2k^5-11k^4+48k^3-104k^2-84k-16}{8}$ + $(\mathbf{n}-2)\times(\mathbf{n}-2)\times(\mathbf{n}-2)(2)$，即

$\mathbf{n \times n \times n(2)}$ = $\sum_{k=4}^{n} \frac{2k^5-11k^4+48k^3-104k^2-84k-16}{8}$ **+ 3(n, k 皆為偶數)**。

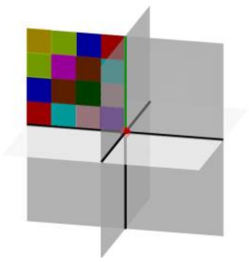
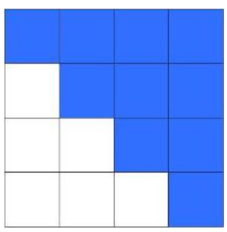
➢ 奇數正立方體



(比偶數正立方體多出的部分因為厚度是 1，所以可以右上圖表示)
定義：
甲(紅色)：中心格
乙(黑色)：對稱軸(或空間中的三軸，不含甲)
丙(藍色)：由對稱軸張出的三面(不含甲、乙)
丁(黃色)：甲、乙、丙以外的部分(8 個小正立方體組成)
n 為偶數，n = 2k
(n+1) × (n+1) × (n+1) (2)
= n×n×n (2) + 2 格在甲+乙+丙 + 1 個在甲+乙+丙 1 格在丁

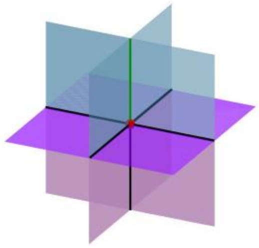
2 格在甲+乙+丙

- 1 個在甲 1 格在乙：甲為中心格，旋轉後位置不變；乙由 6 個線段組成，每一個線段皆可轉到任何線段原本的位置
  塗法數：1 × k = k
- 1 個在甲 1 格在丙：丙由 12 個 k × k 的面組成，每一個面皆可轉到任何面原本的位置，又中心格分別與相同顏色的格子複合時塗法會相同，如左下圖(以 n=9 為例)，即總共只有右下圖(2)這麼多的塗法。

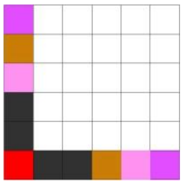
塗法數：1 $\times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$

- 1 個在乙 1 格在丙：上述兩點皆各有一格塗在中心，因此沒有兩格相對位置的問題，但當一格在線段一格在面(線和面皆會因旋轉而改變位置)時，需考慮相對的位置，所以我們先固定乙的其中一個線段(令綠色的線段為乙′)，觀察 12 個面中哪些與乙’　複合會不同，如下圖，發現當乙′與藍色的其中一個面複合時將其旋轉(旋轉時乙′固定的)，所有藍色的面皆在旋轉可到達的範圍內，同理，畫出另外兩種顏色的面，則 3 種顏色的面各自與乙′複合時不會重覆到塗法。
  塗法數：k $\times$ [(k×k) × 3] = $3k^3$



- 2 格在乙
  - 2 格在乙的同一個小線段上：C_2^k
  - 2 格在乙不同的小線段上
    - 2 個小線段垂直：塗粉紅色與塗褐色相同，但塗紫色時不會重覆

      塗法數：k+(k-1)+(k-2)+........+1 = $\frac{1}{2}k(k+1)$



    - 2 個小線段平行：與前一小點相似，只是線段平行，$\frac{1}{2}k(k+1)$

- 2 格在丙
  - 2 格在丙的同一個小平面(k × k)上

    塗法數：$\frac{k^4}{8}$

  - 2 格所在的小平面相鄰垂直

    塗法數：$C_2^{2k^2} - \frac{k^4}{8} \times 2 = \frac{7}{4}k^4 - k^2$

  - 2 格所在的小平面相鄰平行

    塗法數：$\frac{C_2^{2k^2} - \frac{k^4}{8}\times 2 - k^2}{2} + k^2 = \frac{7}{8}k^4$

■ 2 格所在的小平面不相鄰但垂直

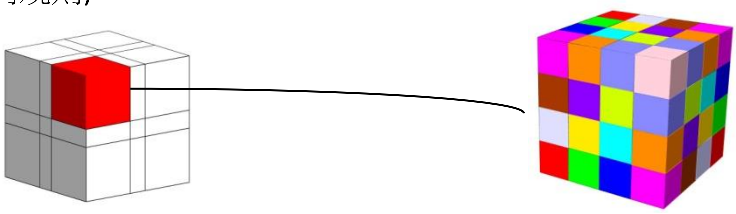
塗法數：$\frac{C_2^{2k^2}-\frac{k^4}{8}\times 2-k^2}{2}+k^2=\frac{7}{8}k^4$

■ 2 格所在的小平面不相鄰但平行

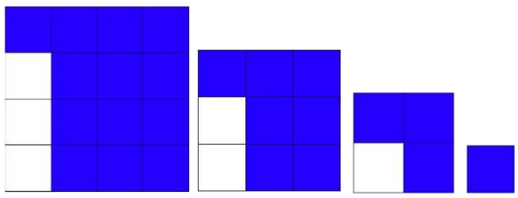
塗法數：$\frac{C_2^{2k^2}-\frac{k^4}{8}\times 2-k^2}{2}+k^2=\frac{7}{8}k^4$

<u>1 個在甲+乙+丙 1 格在丁</u>

- 1 個在甲 1 格在丁：丁由 8 個 k × k ×k 的正立方體組成，每一個正立方體皆可轉到任何正立方體原本的位置，而提出一個小正立方體後，如下圖 9×9 立方體，相同顏色格子與中心格配對塗法會相同(僅以最外圈表示，內部依相同規則)



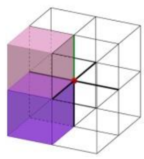
因此由最外層到最內層的塗法數分別如下表示



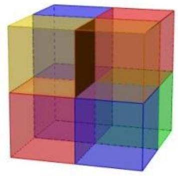
塗法數：$\sum_{p=1}^{k} p^2-(p-1)$

- 1 個在乙 1 格在丁：考慮乙和丁的相對位置，固定乙的其中一個線段(乙′)，發現紫色和粉紅色的小立方體各自與乙′複合後不會重覆

塗法數：k× [(k×k×k)×2] = $2k^4$



- 1 個在丙 1 格在丁：考慮丙和丁的相對位置，固定丙的其中一個小平面，發現同色小立方體與之複合後不會重覆



塗法數：(k× k) × [(k×k×k)× 4]= $4k^5$

總塗法數：

$$k+\frac{k(k+1)}{2}+3k^3+C_2^k+\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{k^4}{8}+\frac{7}{4}k^4-k^2+\frac{7}{8}k^4+\frac{7}{8}k^4+\frac{7}{8}k^4+\sum_{p=1}^{k} p^2-(p-1)+2k^4+4k^5+\sum_{t=4}^{n-1}\frac{2t^5-11t^4+48t^3-104t^2-84t-16}{8}+3$$

$= \sum_{p=1}^{k} p^2 - (p-1) + \sum_{t=4}^{n-1} \frac{2t^5-11t^4+48t^3-104t^2-84t-16}{8} + 3 + 2k + k^2 + 3k^3 + \frac{13}{2}k^4 + 4k^5$

Lemma 10：n 為奇數，n = 2k+1

n × n × n(2)

$= \sum_{p=1}^{k} \mathbf{p^2 - (p-1)} + \sum_{t=4}^{n-1} \frac{2t^5-11t^4+48t^3-104t^2-84t-16}{8} + \mathbf{3 + 2k + k^2 + 3k^3 + \frac{13}{2}k^4 + 4k^5}$

陸、討論

之前我們曾經使用遞迴關係討論方陣問題，雖然可以解出相同的答案，但是不如旋轉的方式有效率，而且旋轉可以應用在長方形和正六邊形等等，是我們覺得比較好的方法。至於我們的公式的正確性，已經由程式證明了，請參見附錄。

柒、結論

目前我們已經達成了研究目的，未來希望發展在 n×n 方陣中用 n 種顏色，每個顏色塗 n 格，以及在立方體中塗其六個表面上的方格問題

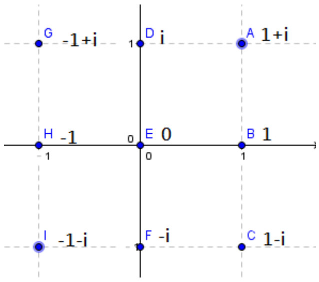
捌、參考資料及其他

1. Paul Zeitz <The Art and Craft of Problem Solving>人民郵電出版社
2. Youtube 影片 : Harvard : Abstract Algebra/Group Theory
3. Art of Problem Solving 網站
   (1) https://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/1996_AIME_Problems_7
   (2) http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=99946&sid=09cb68a8e4032ada930d684e56ac024b#p99946
4. 點算的奧秘
   (1) http://chowkafat.net/Enumeration20.html
   (2) http://chowkafat.net/Enumeration23.html

<附錄一>

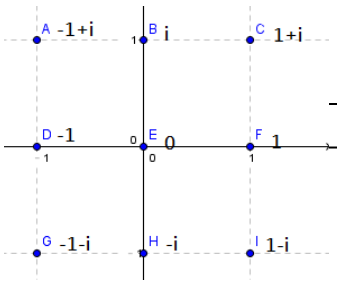
✧ 方陣旋轉的表達方式

- 將方陣的每一格賦予高斯平面的座標



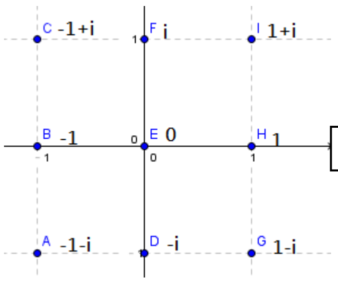
G -1+i	D i	A 1+i
H -1	E 0	B 1
I -1-i	F -i	C 1-i

- 每一格乘以 i，則圖形逆時針旋轉90°



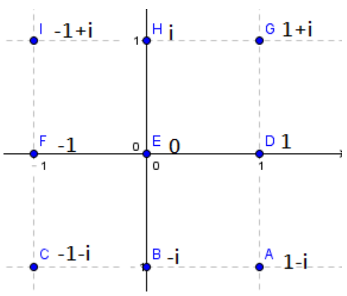
A	B	C
D	E	F
G	H	I

- 將每一格乘以 i^2，則圖形旋轉180°



C	F	I
B	E	H
A	D	G

- 將每一格乘以 i^3，則圖形逆時針旋轉270°(即順時針旋轉90°)



I	H	G
F	E	D
C	B	A

✧ **證明任一塗法所形成的圖形僅存在 A、B、C 三種。**

除了已經提及的 A、B、C 外，我們將證明以下兩種其他的情況不存在。

1. 證明「 某一種塗法經旋轉後所形成的四個圖形中有三個不同(即有兩個相同，而另外兩個各不相同) 」不存在。
2. 證明「 某一種塗法經旋轉後所形成的四個圖形中有三個相同而另外一不同 」不存在。

首先，定義任意兩點 P(a_1+ b_1i)、Q(a_2+ b_2i)。P、Q 復合後可得$(a_1 + a_2)$ + $(b_1 + b_2)$ i，經 90°、180°、270°旋轉之後的點分別為$-(b_1 + b_2)$ + $(a_1 + a_2)$ i 、$-(a_1 + a_2)$ $-(b_1 + b_2)$ i、$(b_1 + b_2)$$-(a_1 + a_2)$ i。可以發現任兩點經復合後的點座標到原點的距離皆為$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$。所謂「經復合後的點座標」即為任意不重複的格子的複合圖形，以下我們簡稱其為 G。因此，A 情況可解讀為四個 G 為同一個點，即為 G 必為原點。B 情況可解讀為四個 G 中有兩個相同的點，或 G 為原點；C 情況可解讀為四個 G 皆不相等或 G 為原點。

而若將任意兩點推廣至任意 x 點且 G 不為原點時，則 G 到原點的距離皆為$\sqrt{(\sum_{k=1}^{x} a_k)^2 + (\sum_{k=1}^{x} b_k)^2}$。換而言之，任意 x 點的 G 到原點的距離相等，因此任兩點 G 須對原點的對稱。

在 B 情況發生時，G 為對原點對稱的兩點，若兩點相連可以得到一中點為原點的線段。因此在極限情形發生時此線段為一點，此時 B 情況下的 G 為原點。

在 C 情況發生時存在四個不同的 G，即有四個點。此時任意 x 點的 G 到原點的距離相等且因為 G 的旋轉為直角，因此若將經旋轉的四個 G 相連，可以得到對角線平分且相等並互相垂直的四邊形，即為正方形。在極限情形發生時此四邊形為一點，此時 C 情況下的 G 為原點。

接下來，針對第一種情況，經旋轉後所形成的四個圖形中有三個不同可視為四個 G 中有三個不同的點。此三個 G 相連所形成的三角形其重心可能不為原點，因此無法推定極限情形時此情況下的 G 必為原點。而若 G 不為原點，則三個點必無法兩兩對原點對稱。因此此情況必不存在。

接著，針對第二種情形，經旋轉後所形成的四個圖形中有三個相同而另外一不同可視為四個 G 中有兩個不相同的點。兩點相連可以得到一中點不為原點的線段。因此在極限情形發生時此線段為一點，而此點必不為原點。因此此情況必不存在

【評語】040417

本件作品計算長方形和立方體塗色方法數使得旋轉後顏色一致。因為題目設定的關係，由對稱的觀念著手是一件很自然的事。立方體的著色數計比較複雜，作者做了許多立體模型來輔助觀察，並自己寫程式驗證，動手的精神值得嘉許，只可惜受限於題目複雜度，只能完成一些特例的情形分析，如果在使用數學工具上可以多加講究，例如利用 Polya 計數定理，作品會更為出色。