

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

第一名

040416

探討正 n 邊形的內接正三角形

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者： 高二 黃文祈 高二 游唯筠 高二 羅宇呈	指導老師： 賴文雄
---	------------------

關鍵詞：正三角形、正 n 邊形、內接正三角

得獎感言

當司儀念出我們的名字時,大家都愣住了,緊接而來的,是狂喜和吶喊,因為一年以前,根本不會有人知道我們能走到這裡,當然也包括我們自己。

每個禮拜三的專題課程,正是孕育出這份作品的時刻,我們總聚在一起,討論自己的新發現,有時進度突飛猛進,眾人討論得興高采烈;有時則遇上瓶頸,眾人苦思不發一語,這些過程,對我們而言都是很重要的一部分,除了邏輯的推演,更激盪出各式的想法,我們在做科展中學習,更獲得難得可貴的經驗。

我們常一無所獲,寫滿了好幾張紙卻始終得不到想要的結果,也常常氣餒,但我們總會打起精神尋找下一條路,因為我們從失敗中得到:”啊,至少已經知道這條路行不通。”,而成功的道路,必定位於某處,而要發現它,只需要毅力,還有對數學的熱情。失敗了,拿張計算紙重新再來,這就是我們的精神。

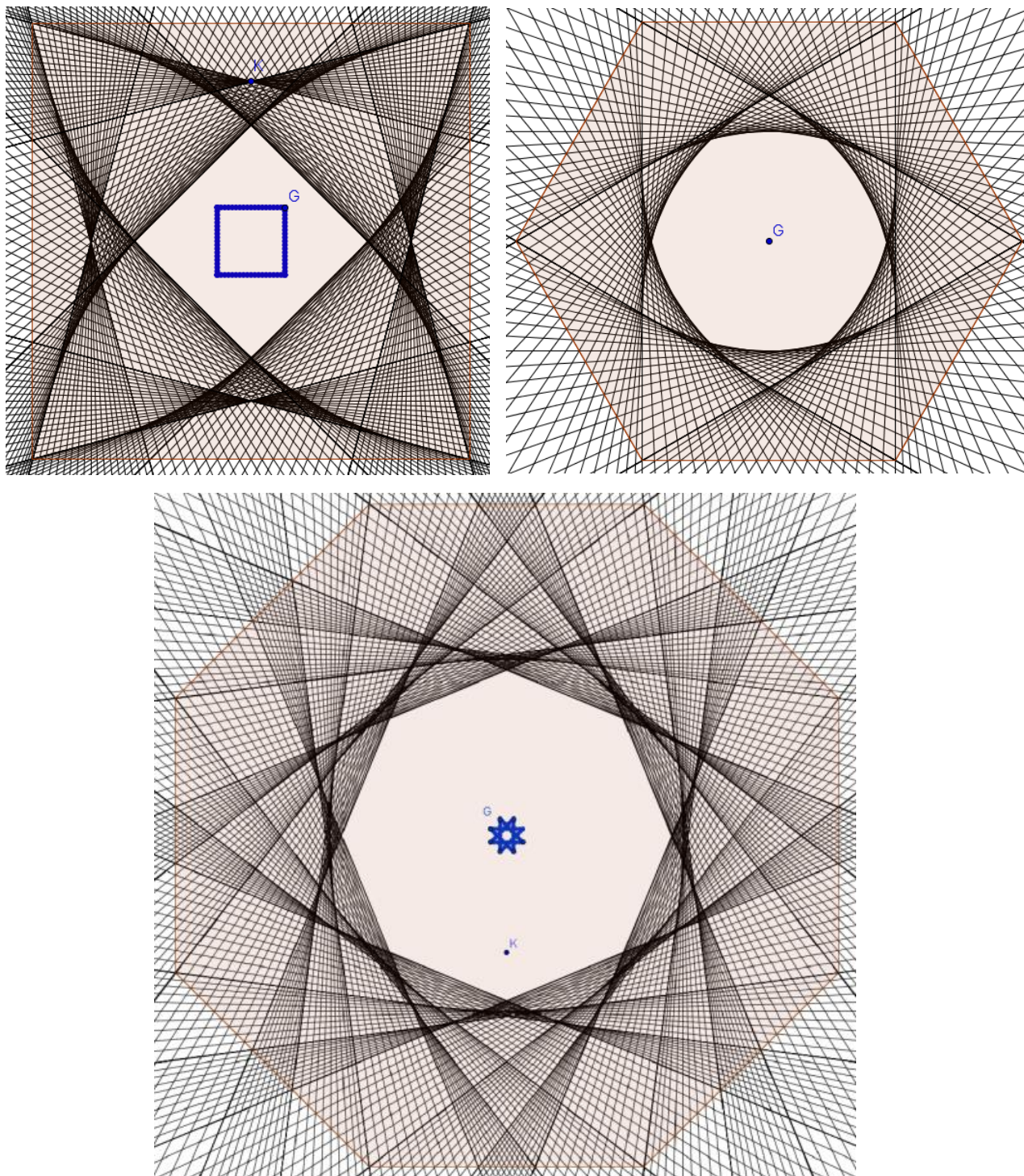
過程中我們曾接受過無數人的幫助,除了為這份作品盡心盡力的數學老師,還有同伴們的互相扶持,每一次的改進、指點,都是這份作品成長的過程。我們的電子檔由 version 1.0 不斷修改,經過漫長的日子,逐漸變得成熟,當 version 10.0 完成時,隨身碟裡無數個版本,都充滿了回憶,此時我們心中,只有滿滿的成就感啊。

如果你熱愛數學,那麼就找個自己喜歡的題目,然後踏上冒險之旅吧!



摘要

對於一個正 n 邊形，若一正三角形三個頂點分別位於正 n 邊形的三個不同邊上，則稱此正三角形為該正 n 邊形的內接正三角形。本次科展的主題，就是探討正 n 邊形的內接正三角形之作圖方法，以及作出的圖形中各種漂亮性質。



壹、研究動機

題目是和同學討論 101 年學測考題時，所得到的靈感，原題目是在正三角形的每一個邊之兩個三等分點中各選一點連成三角形的問題，選項中說明只能連出兩個正三角形。接著，我們定義三個頂點分別在正 n 邊形三個不同邊上的正三角形為此正 n 邊形的內接正三角形，進而好奇的想知道正 n 邊形之內接正三角形是否存在？可否作圖？故事就從這裡開始。

貳、研究目的

- 一、每一個正 n 邊形是否皆有無限多個內接正三角形呢？
- 二、對於在正 n 邊形的邊上的任意一點 P ，是否恰能在其邊上找到唯一一組點 Q 、 R ，使得 $\triangle PQR$ 為該正 n 邊形的內接正三角形呢？
- 三、對於在正 n 邊形的邊上的任意一點，找出它的內接正三角形的作圖方式。
- 四、將正 n 邊形的每一個內接正三角形全都畫出後，研究畫出的圖形之特殊性質。

參、研究器材

紙、筆、電腦、以及繪圖軟體 Geogebra。

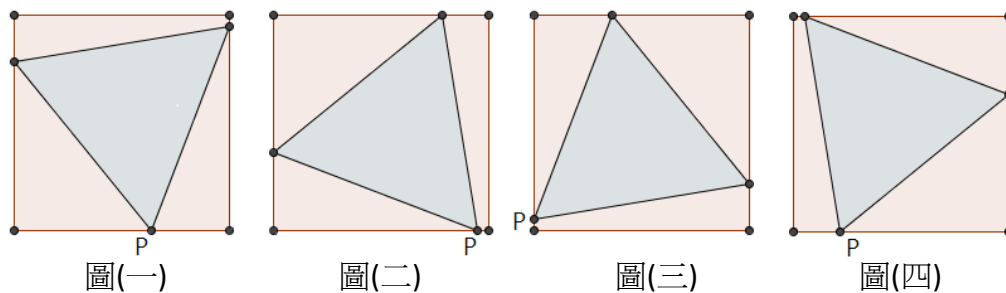
肆、研究過程(上)：標準型與作圖方式

一、唯一性

定理一(唯一性定理)：若固定 P 點，則在任何正 n 邊形中，以 P 為其中一頂點的內接正三角形最多只有一個。證明在「九、定理一(唯一性定理)的證明」。

二、標準型

(一) 標準型的構思：正方形的內接正三角形，有下列 4 種：



但圖(二)、圖(三)、圖(四)的狀況，只要將紙張旋轉就可以回到圖(一)，因此研究圖(一)的情形即可。在此，我們將圖(一)的模式稱為「標準型」。

(二) 標準型的定義：令 $\delta(P, Q)$ 表 P 、 Q 兩點間所夾的完整邊數，依此類推。

若 $\delta(P, Q) = \delta(P, R)$ ，則稱 P 點所在的邊為正 n 邊形的「標準型底邊」(簡稱「底邊」)，並將此模式稱為「以 P 為底的標準型」，而 P 為「標準型底邊上的點」。

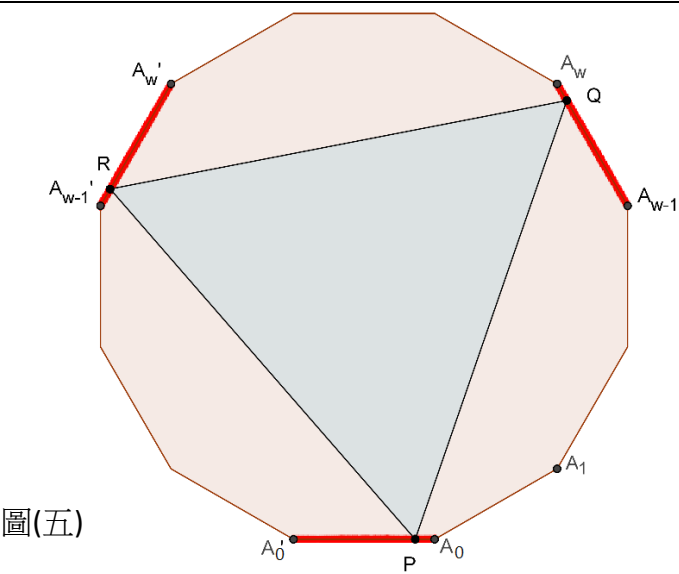
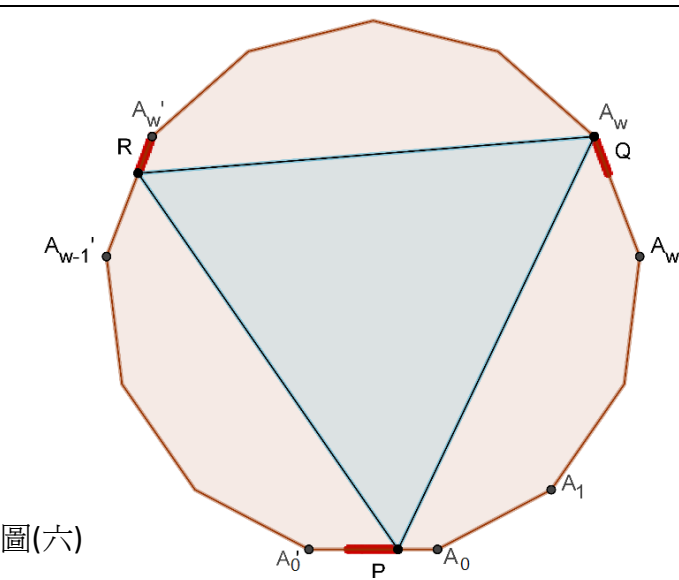
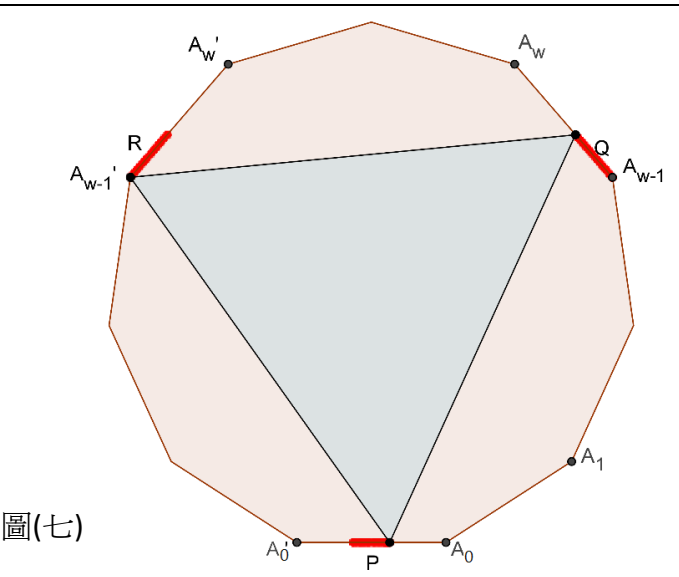
註(1)：為了方便起見，會出現「以 Q 為底的標準型」或「以 R 為底的標準型」，但主要還是以「以 P 為底的標準型」為主，探討 P 在底邊上移動時， Q 、 R 的移動狀況。

註(2)：我們定義正 n 邊形的內接正三角形 $\triangle PQR$ 的頂點是依逆時針方向命名。

(三) 在此我們必須先假設，正 n 邊形的內接正三角形存在連續性。也就是邊上任意找一點 P ，均能在其邊上找到一組點 Q 、 R ，使得 $\triangle PQR$ 是正 n 邊形的內接正三角形。而當 P 點慢慢向右推移時， Q 、 R 位置的變化是連續的。在肆之六，我們將提出具體證明。

(四) 定理二(標準型範圍定理)

設正 n 邊形 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$, $i \in \mathbb{N}$ 且 $i < \frac{n}{2}$, 則在以 P 為底的標準型中, 若 $P \in \overline{A_0'A_0}$, 則 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ 、 $R \in \overline{A_{w-1}'A_w'}$, 其中 $w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 。

$n \equiv 0 \pmod{3}$	P、Q、R 同時抵到正n邊形的頂點。  圖(五)
$n \equiv 1 \pmod{3}$	在以 P 為底的標準型中, Q 或 R 只會抵到 A_w 或 A_w'。  圖(六)
$n \equiv 2 \pmod{3}$	在以 P 為底的標準型中, Q 或 R 只會抵到 A_{w-1} 或 A_{w-1}'。  圖(七)

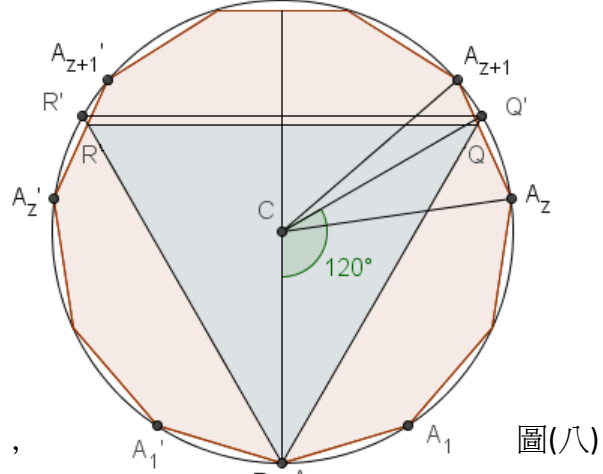
證明

1. Q、R 先頂到上頂點或下頂點

設 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'$ 是一個正 n 邊形，其中 $i \in \mathbb{N}$ 且 $i \leq \frac{n}{2}$ ，

正 n 邊形的中心點為 C ，而 $\triangle PQR$ 是它的內接正三角形。

當 P 與 A_0 重合時，假設 $Q \in \overline{A_zA_{z+1}}$ 但 $Q \neq A_{z+1}$ 、 $R \in \overline{A_z'A_{z+1}'}$ 但 $R \neq A_{z+1}'$ ，連 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{PR}$ 分別交該正 n 邊形的外接圓 C 於 Q' 、 R' ，則 $\triangle PQ'R'$ 是一個以 C 為中心的正三角形，如圖(八)。



$\because Q \in \overline{A_zA_{z+1}}$ 且 $Q \neq A_{z+1}$ ，

$\therefore Q' \in \widehat{A_zA_{z+1}}$ 且 $Q' \neq A_{z+1}$ ，

故 $\angle PCA_z \leq \angle PCQ' < \angle PCA_{z+1}$ ，

$$\Rightarrow z \cdot \frac{2\pi}{n} \leq \frac{2}{3}\pi < (z+1) \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \frac{n}{3} - 1 < z \leq \frac{n}{3}，即 z = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor。$$

$$也就是 \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ 時：} z = \frac{n}{3} \text{ 且 } Q \text{ 與 } A_z \text{ 重合、} R \text{ 與 } A_z' \text{ 重合} \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ 時：} z = \frac{n-1}{3} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ 時：} z = \frac{n-2}{3} \end{cases}$$

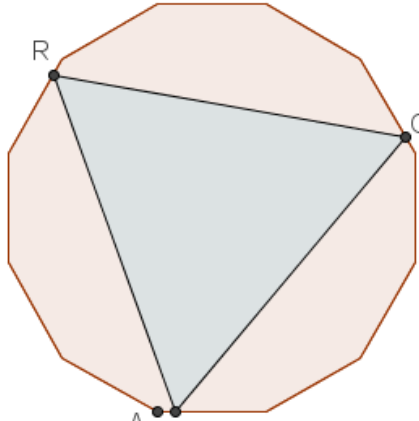
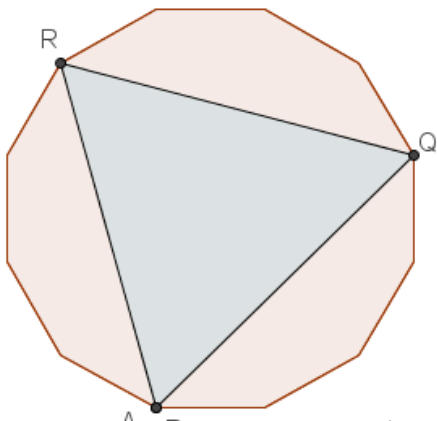
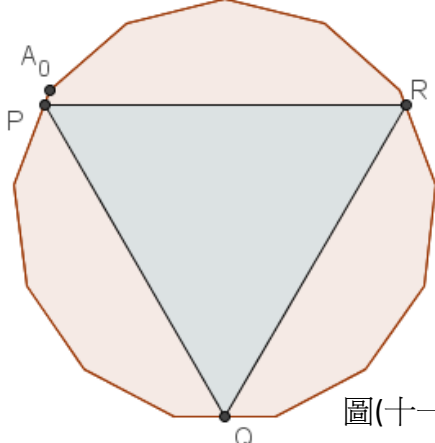
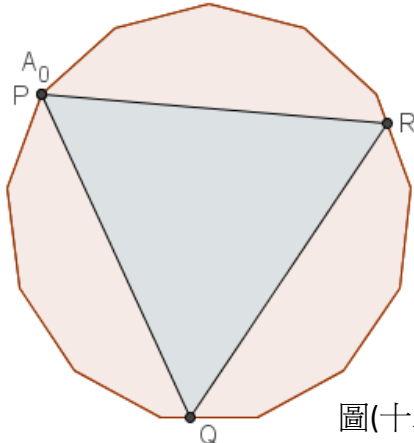
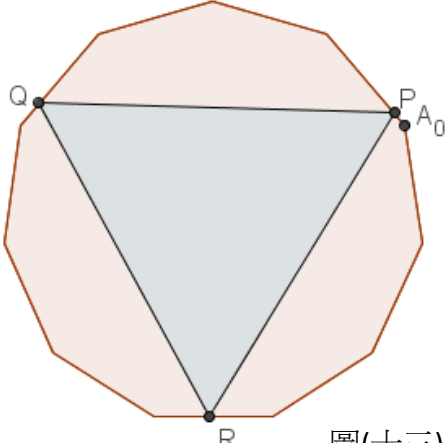
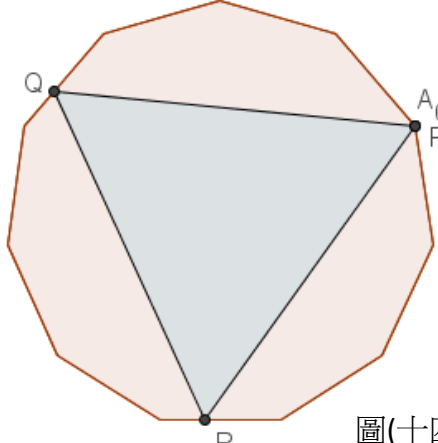
$$故 \delta(A_z, A_z') = n - 2z = \begin{cases} \frac{n}{3}，當 n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{n+2}{3}，當 n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{n+4}{3}，當 n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

將 $\triangle PQR$ 逆時針旋轉一個不大的角度，使得 $P \in \overline{A_0A_1}$ 、 $Q \in \overline{A_zA_{z+1}}$ 、

$R \in \overline{A_z'A_{z+1}'}$ （當 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ ）或 $R \in \overline{A_{z-1}'A_z'}$ （當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ ）

	$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$	底邊上的點
$n \equiv 0 \pmod{3}$	$z - 1 = \frac{n}{3} - 1$	$z - 1 = \frac{n}{3} - 1$	$n - 2z - 1 = \frac{n}{3} - 1$	P、Q、R 皆可
$n \equiv 1 \pmod{3}$	$z - 1 = \frac{n-4}{3}$	$z = \frac{n-1}{3}$	$n - 2z - 2 = \frac{n-4}{3}$	Q
$n \equiv 2 \pmod{3}$	$z - 1 = \frac{n-5}{3}$	$z = \frac{n-2}{3}$	$n - 2z - 2 = \frac{n-2}{3}$	R

若將圖形旋轉使標準型的底邊在最下方，則：

	這是標準型	將正三角形轉回P與 A_0 重合
$n \equiv 0 \pmod{3}$	 圖(九) 以 P 為底	 圖(十) 三頂點同時抵到了正n邊形的頂點
$n \equiv 1 \pmod{3}$	 圖(十一) 以 Q 為底	 圖(十二) P 先抵到正n邊形較上方的頂點
$n \equiv 2 \pmod{3}$	 圖(十三) 以 R 為底	 圖(十四) P 先抵到正n邊形較下方的頂點

由此得知，若將標準型底邊上的點定義回 P 時，也就是

$n \equiv 0 \pmod{3}$	皆不變		
$n \equiv 1 \pmod{3}$	$Q \rightarrow P$	$R \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$
$n \equiv 2 \pmod{3}$	$R \rightarrow P$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$

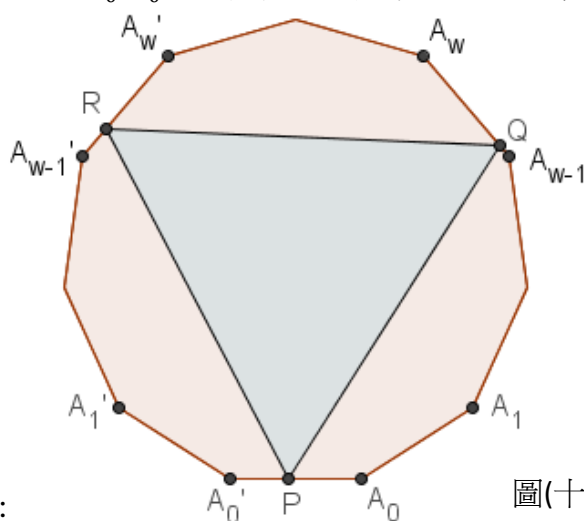
統合以上的結果，可以說明若將 $\triangle PQR$ 慢慢地旋轉，則：

$n \equiv 0 \pmod{3}$	P、Q、R 同時抵到正 n 邊形的頂點。
$n \equiv 1 \pmod{3}$	$\because$ Q 或 R 在抵到正 n 邊形較下方的頂點之前就脫離了以 P 為底的標準型， $\therefore$ 標準型中，Q 或 R 只會抵到正 n 邊形的較上方的頂點。
$n \equiv 2 \pmod{3}$	$\because$ Q 或 R 在抵到正 n 邊形較上方的頂點之前就脫離了以 P 為底的標準型， $\therefore$ 標準型中，Q 或 R 只會抵到正 n 邊形的較下方的頂點。

2. Q、R 兩點分別位於第幾個邊上：

將正 n 邊形重新命名為 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A'_iA'_{i-1} \dots A'_2A_1'A_0'$, $i \in \mathbb{N}$ 且 $i < \frac{n}{2}$ ，

並把標準型底邊 $\overline{A_0'A_0}$ 上的內接正三角形頂點重新命名為 P，其餘兩點為 Q、R。



由 1. 可得：

圖(十五)

	$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$
$n \equiv 0 \pmod{3}$	$\frac{n}{3} - 1$	$\frac{n}{3} - 1$	$\frac{n}{3} - 1$
$n \equiv 1 \pmod{3}$	$\frac{n-4}{3}$	$\frac{n-4}{3}$	$\frac{n-1}{3}$
$n \equiv 2 \pmod{3}$	$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-5}{3}$

我們定義兩個邊的位置差為「兩邊所夾的邊數+1」，

例如： $\overline{A_0'A_0}$ 與 $\overline{A_0A_1}$ 的位置差為1， $\overline{A_0'A_0}$ 與 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 的位置差為 i ，
而兩點的位置差為其分別位於的邊的位置差。

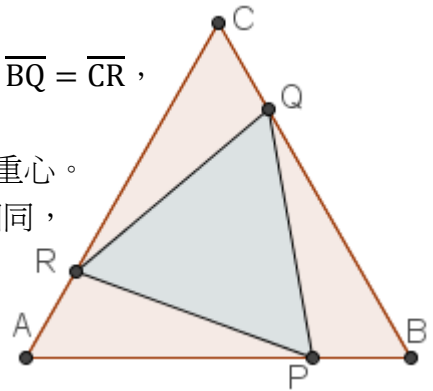
設 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ 、 $R \in \overline{A'_{w-1}A'_w}$ ，即 P、Q 的位置差 = P、R 的位置差 = w 。

$$\text{故 } w = \begin{cases} \frac{n}{3}, & \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{n-1}{3}, & \text{當 } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{n+1}{3}, & \text{當 } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}, \text{ 即 } w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

(五) 定理三：每一個內接正三角形 PQR，皆可歸為以某一頂點為底的標準型。也就是說，不可能會有 $\delta(P, Q)$ 、 $\delta(P, R)$ 、 $\delta(Q, R)$ 兩兩相異的情況發生。

三、正三角形 ABC 內接正三角形的情況

- (一) 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上各取一點 P、Q、R，使得 $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$ ，則 $\triangle PQR$ 就是 $\triangle ABC$ 的內接正三角形。
- (二) 這些內接正三角形的重心是同一點，也就是 $\triangle ABC$ 的重心。
- (三) 當 n 是 3 的倍數時，其內接正三角形模式與 $n = 3$ 時相同，故其作圖方式與 $n = 3$ 時完全一樣。



圖(十六)

四、正方形 ABCD 內接正三角形的情況

- (一) 我們討論以 P 為標準型底邊 $\overline{AB}$ 上之點的情形。

設正方形 ABCD 邊長為 1， $\overline{AP} = \alpha$ ， $\overline{AR} = m\alpha$ ， $\overline{QQ'} \parallel \overline{AB}$ 且 Q' 在 $\overline{AD}$ 上，其中 $2 - \sqrt{3} \leq \alpha \leq \sqrt{3} - 1$ (極值分別發生在 $R = D$ 及 $Q = C$ 的情況)，

$$\text{則 } \overline{QR} = \overline{PR} = \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2}.$$

$$\text{故 } \overline{Q'R} = \sqrt{\overline{QR}^2 - \overline{QQ'}^2} = \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1}$$

$$\therefore \overline{BQ} = \overline{AR} \pm \overline{RQ'} = m\alpha \pm \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1}$$

$$\text{又 } \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2 + [m\alpha \pm \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1}]^2 = [\sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2}]^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + m^2\alpha^2 \pm 2m\alpha\sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1} + (m^2 + 1)\alpha^2 - 1 = (m^2 + 1)\alpha^2$$

$$\Rightarrow (m^2 + 1)^2\alpha^2 - 4(m^2 + 1)\alpha + 4 = 4m^2[(m^2 + 1)\alpha^2 - 1]$$

$$\Rightarrow (m^2 + 1)(1 - 3m^2)\alpha^2 - 4(m^2 + 1)\alpha + 4(m^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 3m^2\alpha^2$$

$$\Rightarrow 2 - \alpha = \sqrt{3}m\alpha \text{ (因為 } \alpha < 1 \text{ 且 } m > 0\text{)}, \text{ 故 } m = \frac{2}{\sqrt{3}\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

由(一)導出的式子，利用繪圖軟體可畫出所有以 P 為底的內接正三角形。

由此，我們發現 $\overline{QR}$ 的中點 M 是個定點。

證明 設 $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $D(0,1)$

$$\therefore \overline{BQ} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{BP}^2}$$

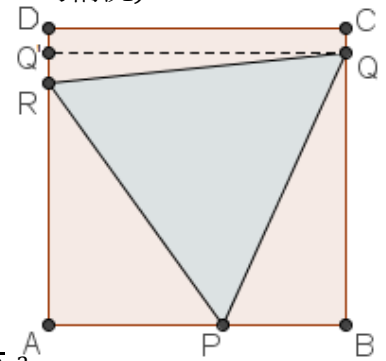
$$= \sqrt{\alpha^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right) \cdot \alpha \right]^2 - (1 - \alpha)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}} = \frac{\alpha + 1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{又 } \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AR} + \overline{AQ}) = \frac{1}{2} \left[\left(0, \frac{2 - \alpha}{\sqrt{3}} \right) + \left(1, \frac{\alpha + 1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

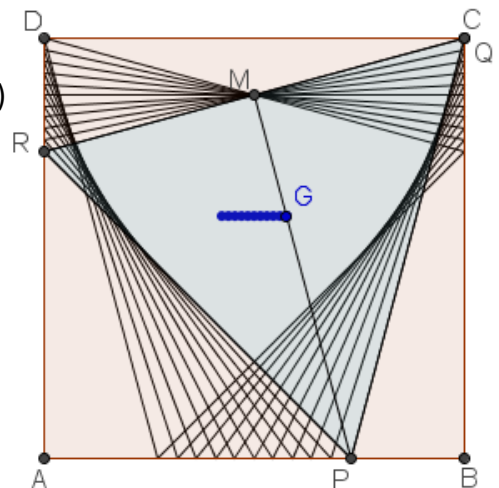
$\therefore M$ 是一個定點。

- (二) 當 P 為標準型底邊 $\overline{AB}$ 上的點時，所有內接正三角形重心的軌跡是一條平行 $\overline{AB}$ 的線段。我們將在肆之五的(二)說明。



圖(十七)

圖(十八)



五、當 $n \geq 5$ 時，探討正 n 邊形內接正三角形的情況

(一) 起初，對於正五邊形的內接正三角形，我們也想採取 $n = 4$ 時的戰術，也就是先計算再作圖，但經過一個星期的奮鬥後，大家的共識還是「找找其他的方法吧」，太恐怖了。所以，我們認為當務之急是先找出作圖方式，圖形性質的計算就會容易得多。

(二) 定點 K 的發現：

在正方形內接正三角形的圖形中(以 P 為底的標準型)， G_0 、 G_1 則表示兩內接正三角形的重心。

$\because \overline{QR}$ 的中點 M 是定點，

$\therefore$ 當 P 從 P_0 移動到 P_1 時， $\triangle MG_0G_1 \sim \triangle MP_0P_1$ 。

$\because P$ 在底邊上移動，

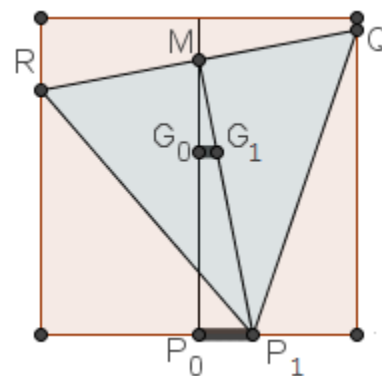
$\therefore$ 重心 G 在平行底邊的一條線段上移動。

因為「重心 G 的軌跡是一條平行 $\overline{AB}$ 的線段」的結論很漂亮，而在正五邊形內接正三角形的圖形中， P 點也在底邊上移動，那內接正三角形的重心 G 軌跡也會是一條平行底邊的線段嗎？

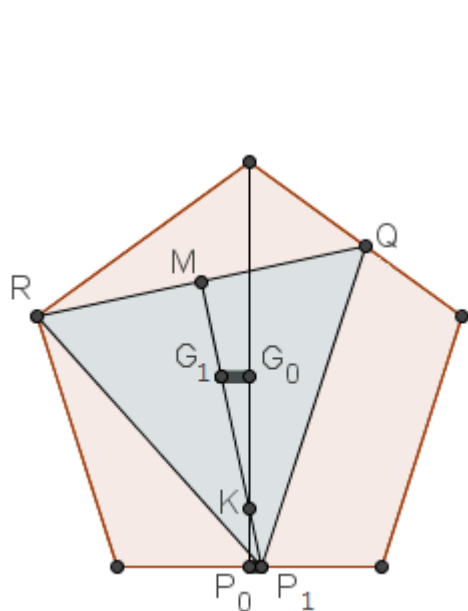
$n = 4$ 時會對，是因為 M 是定點。那如果 $n = 5$ 以上會對，一定是有一個點 K 扮演著 M 的角色。

那麼 K 在哪裡？

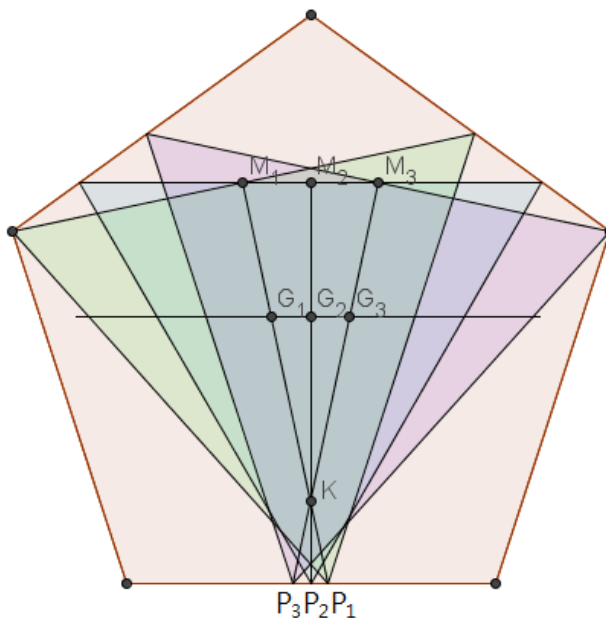
$n = 4$ 時會對，是因為 $\triangle MG_0G_1 \sim \triangle MP_0P_1$ ；那麼若 K 是底邊對稱軸與 $\overline{QR}$ 上的中線 $\overline{P_1M}$ 的交點，要解釋 $\triangle KG_0G_1 \sim \triangle KP_0P_1$ 就不難了。也就是說，如此要解釋「重心 G 的軌跡是一條平行底邊的線段」會很簡單，如圖(二十)。



圖(十九)



圖(二十)



圖(二十一)

接著，我們做了一個小小實驗，看看 K 點是否有可能存在，如圖(二十一)。

這三個特殊的內接正三角形，由繪圖軟體得知，重心都剛好在同一直線上。

而且 $\overline{P_iM_i}$ 與底邊對稱軸的交點皆重合，也就是說， K 點是有可能存在的！

接著我們在 $\overline{P_1P_3}$ 之間任意找一點 P ，並作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 Q 與 R 在正 n 邊形的邊上，則經由操作繪圖軟體，我們發現，畫出的 $\triangle PQR$ 恰好都是正三角形！

六、K 點定理

定理四(K 點定理)：每一個以 P 為底的內接正三角形，其 $\angle P$ 的角平分線與底邊對稱軸的交點恆為定點 K。

證明

(一) 建立平面直角坐標系，如圖(二十二)所示

設 Q、R 分別位於 $y = -ax + b$ 及 $y = ax + b$ ，

由圖可知 $P(k \tan \theta, 0)$ 。

$$R : \begin{cases} \overline{PR} : y = -\tan(60^\circ - \theta)(x - k \tan \theta) \\ y = ax + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax + b = -\tan(60^\circ - \theta)(x - k \tan \theta)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k \tan(60^\circ - \theta) \tan \theta - b}{\tan(60^\circ - \theta) + a}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{PR} &= \left[k \tan \theta - \frac{k \tan(60^\circ - \theta) \tan \theta - b}{\tan(60^\circ - \theta) + a} \right] \sec(60^\circ - \theta) \\ &= \frac{b + ak \tan \theta}{\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)} \end{aligned}$$

$$Q : \begin{cases} \overline{PQ} : y = \tan(60^\circ + \theta)(x - k \tan \theta) \\ y = -ax + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -ax + b = \tan(60^\circ + \theta)(x - k \tan \theta)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k \tan(60^\circ + \theta) \tan \theta + b}{\tan(60^\circ + \theta) + a}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{PQ} &= \left[\frac{k \tan(60^\circ + \theta) \tan \theta + b}{\tan(60^\circ + \theta) + a} - k \tan \theta \right] \sec(60^\circ + \theta) \\ &= \frac{b - ak \tan \theta}{\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)} \end{aligned}$$

$$\text{當 } \overline{PQ} = \overline{PR} \text{ 時， } \frac{b - ak \tan \theta}{\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)} = \frac{b + ak \tan \theta}{\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)}$$

$$\Rightarrow ak \tan \theta [2 \sin 60^\circ \cos \theta + 2a \cos 60^\circ \cos \theta] = -b[2 \cos 60^\circ \sin \theta - 2a \sin 60^\circ \sin \theta]$$

$$\Rightarrow ak \sin \theta (\sqrt{3} + a) = b(\sqrt{3}a - 1) \sin \theta$$

$$\Rightarrow k = \frac{b(\sqrt{3}a - 1)}{a(a + \sqrt{3})}$$

(二) 設 Q、R 分別位於 $x = c$ 及 $x = -c$ ，如圖(二十三)

$$\overline{PQ} = (c - k \tan \theta) \sec(60^\circ + \theta)$$

$$\overline{PR} = (c + k \tan \theta) \sec(60^\circ - \theta)$$

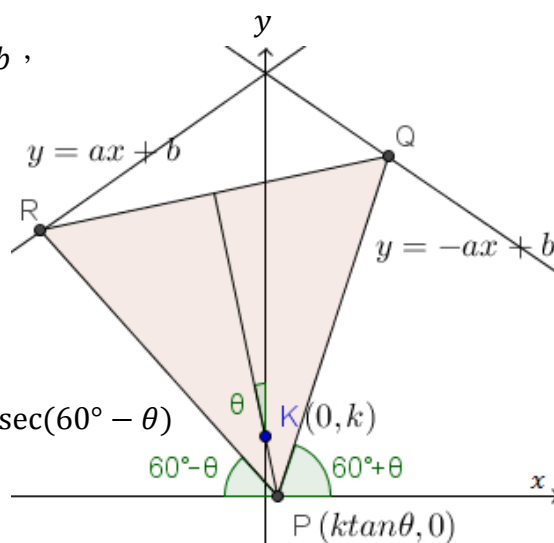
當 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 時：

$$c \cos(60^\circ - \theta) - k \tan \theta \cos(60^\circ - \theta) = c \cos(60^\circ + \theta) + k \tan \theta \cos(60^\circ + \theta)$$

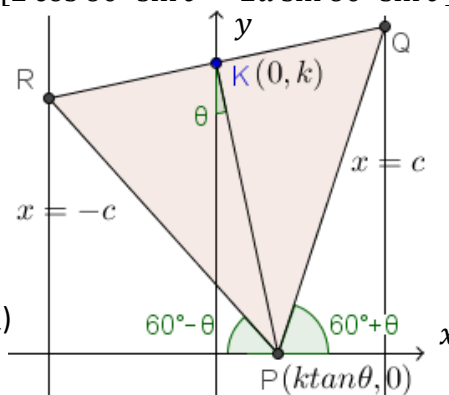
$$\Rightarrow k \tan \theta (2 \cos \theta \cos 60^\circ) = c(2 \sin 60^\circ \sin \theta)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{3}c$$

由(一)、(二)可知， k 值與 θ 無關，也就是與 P 點的位置無關，亦即定點 K 是存在的。



圖(二十二)



圖(二十三)

也就是說，只要任意在 x 軸上找一點 P ，並作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 Q 與 R 在正 n 邊形的邊上，則 $\triangle PQR$ 就是該正 n 邊形的內接正三角形。此外，當 P 點慢慢向右推移時， Q 、 R 位置的變化明顯地是連續的，這證明了肆之二的(三)所假設的連續性。

再回到肆之一的唯一性定理，更可以說明所有的內接正三角形都是由 K 點畫出來的，即利用 K 點作圖，不會漏畫任何一個內接正三角形。

七、 K 點的特殊性質

定理五：若正 n 邊形的內接正三角形 PQR 是以 P 為底的標準型，設 Q 所在邊與底邊延長後相交於 E ，則 K 、 P 、 Q 、 E 四點共圓。

證明

因 $\angle KPQ = 30^\circ$ ，故只須證明 $\angle QEK = 30^\circ$ 即可。也就是以 E 為中心將 $\overrightarrow{QE}$ 旋轉 30° ，其與底邊對稱軸的交點即為 K 點。

(一) 設 Q 、 R 分別位於 $y = -ax + b$ 及 $y = ax + b$ ，如圖(二十四)

因為 E 點是 $y = -ax + b$ 與 x 軸的交點 $\Rightarrow E\left(\frac{b}{a}, 0\right)$

令 $\overrightarrow{KE}$ 之斜率為 m ，則 $\frac{m - (-a)}{1 - (-a)m} = \tan 30^\circ$

所以 $m = \frac{1 - \sqrt{3}a}{a + \sqrt{3}}$

故 $\overrightarrow{KE} : y = \frac{1 - \sqrt{3}a}{a + \sqrt{3}}\left(x - \frac{b}{a}\right)$ ，交 y 軸於 $K\left(0, \frac{b(\sqrt{3}a - 1)}{a(a + \sqrt{3})}\right)$

恰與第六點導出的 k 值相符。

(二) 設 Q 、 R 分別位於 $x = c$ 及 $x = -c$ ，如圖(二十五)

因為 $E(c, 0)$

故 $\overrightarrow{KE} : y = -\sqrt{3}(x - c)$ ，交 y 軸於 $K(0, \sqrt{3}c)$

亦恰與第六點導出的 k 值相符。

由(一)、(二)可得：以 E 為中心將 $\overrightarrow{QE}$ 旋轉 30° ，其與底邊對稱軸的交點即為 K 點，即不論 P 的位置為何，只要 $\triangle PQR$ 是以 P 為底的標準型， K 、 P 、 Q 、 E 四點共圓。

八、作圖方式

已知 P 是正 n 邊形 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$ 的邊 $\overline{A_0'A_0}$ 上任意一點，而直線 L 是 $\overline{A_0'A_0}$ 的中垂線， C 是正 n 邊形的中心。

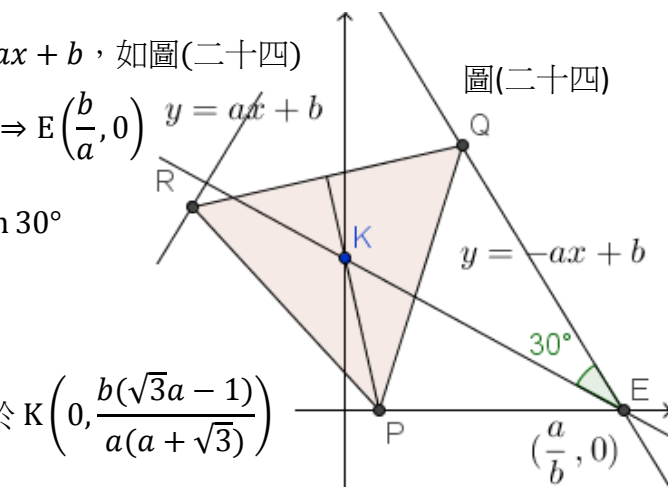
(一) 當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時：

其作圖方式與 $n = 3$ 的情況相同。

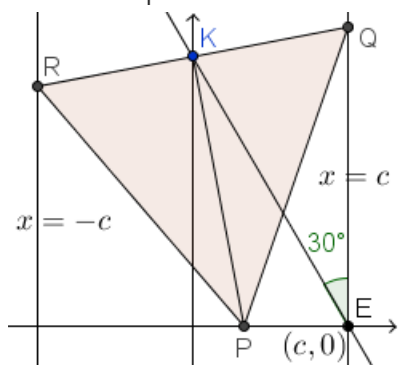
即作 $\overline{A_wQ} = \overline{A_{w-1}'R} = \overline{A_0P}$ ，

其中 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$ 且 $w = \frac{n}{3}$ ，

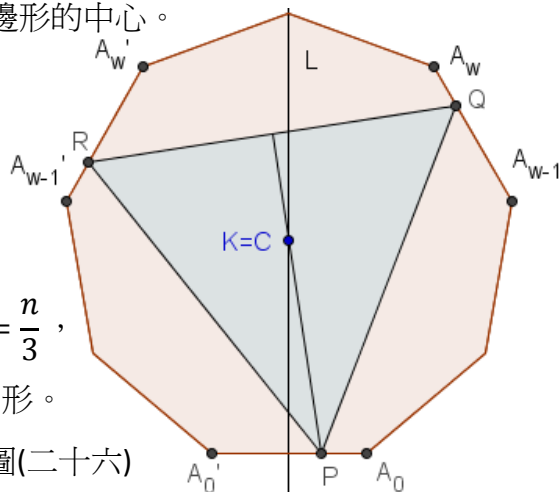
則 $\triangle PQR$ 即為該正 n 邊形的內接正三角形。



圖(二十四)

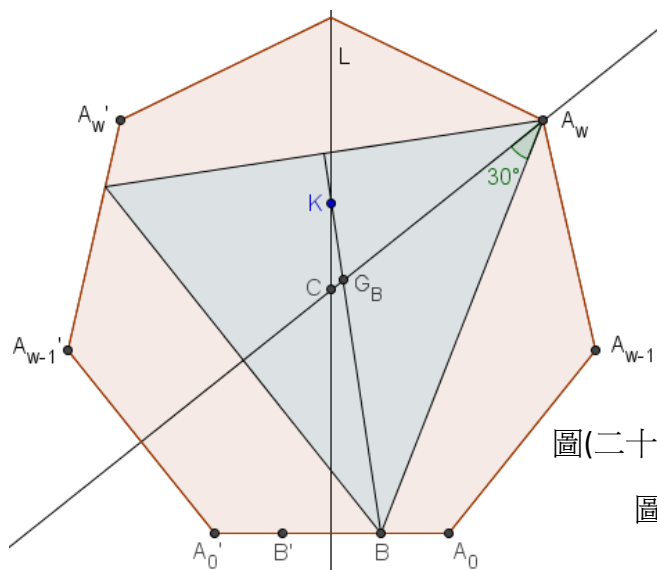


圖(二十五)



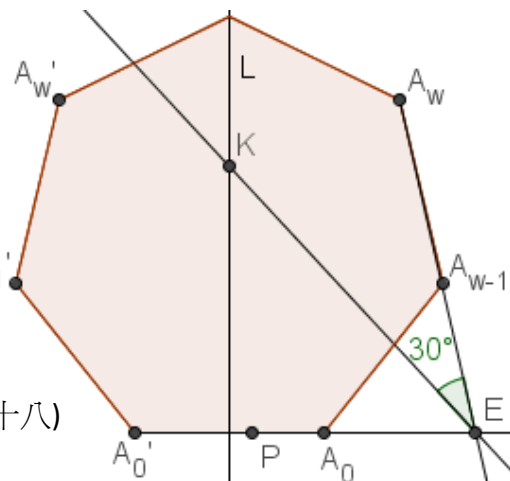
圖(二十六)

(二) 當 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 時：



圖(二十七)

圖(二十八)



$Q = A_w$, $w = \frac{n-1}{3}$ 。故連 $\overrightarrow{A_w C}$ ，並作 $\angle BA_w C = 30^\circ$ ，其中 $B \in \overline{A_0' A_0}$ 。

B 即為以 P 為底的標準型中 P 的右界，接著作 B 點對 L 的對稱點 B' 。

K 點的作圖方式有兩種：

方法一：K 點可由圖(二十七)中的特殊內接正三角形找出來。

作 $\overline{A_w B}$ 的中垂線與 $\overline{A_w C}$ 交於重心 G_B ，則 $\overline{B G_B}$ 與 L 的交點即為 K 點。

方法二：設 Q 所在邊與底邊延長後相交於 E，以 E 為中心將 $\overrightarrow{QE}$ 旋轉 30° ，其與底邊對稱軸的交點即為 K 點，如圖(二十八)所示。

1. 若 $P \in \overline{B' B}$ ，則這是以 P 為底的標準型。

作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 $Q \in \overline{A_{w-1} A_w}$ 、 $R \in \overline{A_{w-1}' A_w'}$ ，則 $\triangle PQR$ 即為該正 n 邊形的內接正三角形。

2. 若 $P \in \overline{A_0 B}$ ，則這是以 R 為底的標準型。

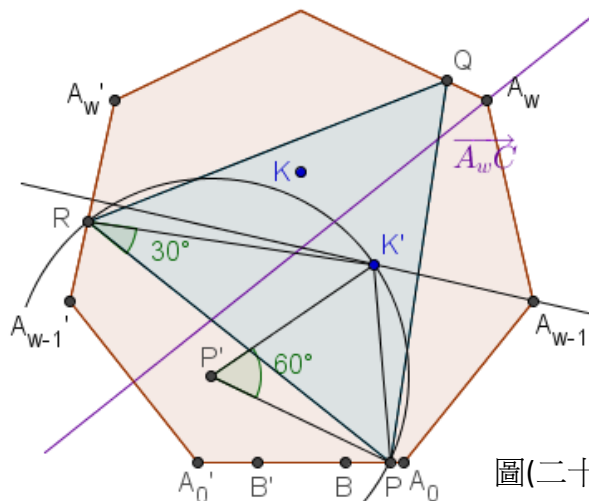
$\because \overline{A_0' A_0}$ 與 $\overline{A_{w-1}' A_w'}$ 對稱於 $\overline{A_w C}$

$\therefore$ 以 R 為底的標準型之 K' 與 K 對稱於 $\overline{A_w C}$

作 K 對 $\overline{A_w C}$ 的對稱點 K' ，並將 P 繞 K' 順時針轉 60° 得 P' 。

以 P' 為圓心， $\overline{P' P}$ 為半徑畫圓，交 $\overline{A_{w-1}' A_w'}$ 於 R 點，

最後作 $\overline{PR}$ 的中垂線交 $\overline{A_w A_{w+1}}$ 於 Q，則 $\triangle PQR$ 即為該正 n 邊形的內接正三角形。

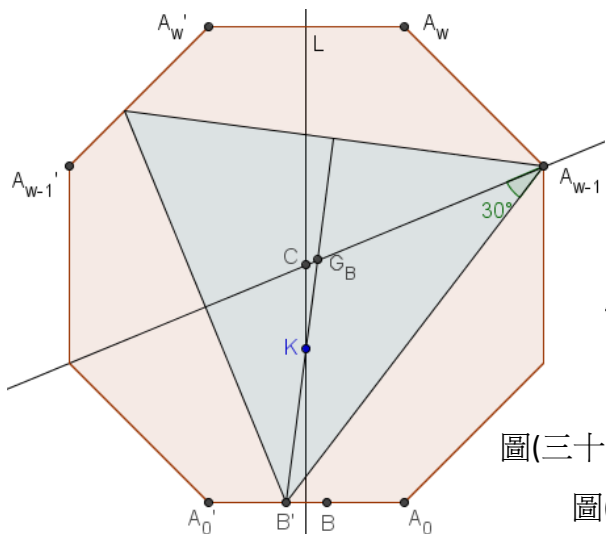


圖(二十九)

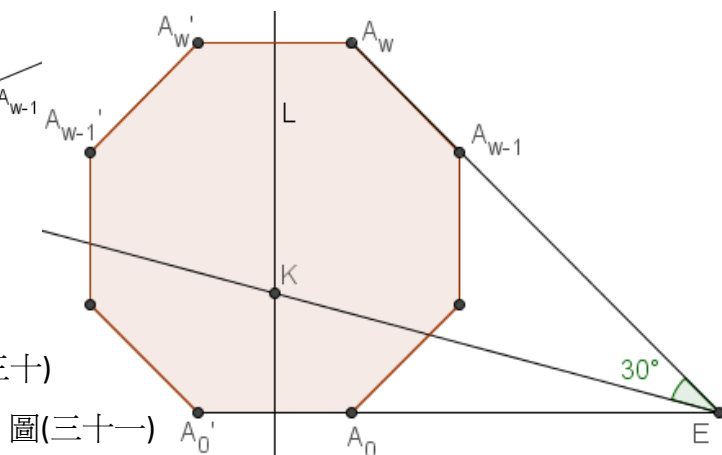
3. 若 $P \in \overrightarrow{A_0 B'}$ ，則這是以 Q 為底的標準型。

將 2. 中所得的內接正三角形對 L 求對稱圖形，即可得此部分的內接正三角形。

(三) 當 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 時：



圖(三十)



圖(三十一)

$Q = A_{w-1}$ ， $w = \frac{n+1}{3}$ 。故連 $\overrightarrow{A_{w-1}C}$ ，並作 $\angle B'A_{w-1}C = 30^\circ$ ，其中 $B' \in \overrightarrow{A_0'A_0}$ 。

B' 即為以 P 為底的標準型中 P 的左界，接著作 B' 點對 L 的對稱點 B 。

K 點的作圖方式有兩種：

方法一： K 點一樣可由圖(三十)中的特殊內接正三角形找出來。

作 $\overrightarrow{A_{w-1}B'}$ 的中垂線與 $\overrightarrow{A_{w-1}C}$ 交於重心 G_B ，則 $\overrightarrow{B'G_B}$ 與 L 的交點即為 K 點，

方法二：設 Q 所在邊與底邊延長後相交於 E ，以 E 為中心將 $\overrightarrow{QE}$ 旋轉 30° ，其與底邊對稱軸的交點即為 K 點，如圖(三十一)所示。

1. 若 $P \in \overrightarrow{B'B}$ ，則這是以 P 為底的標準型。

作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 $Q \in \overrightarrow{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overrightarrow{A_{w-1}'A_w'}$ ，則 $\triangle PQR$ 即為該正 n 邊形的內接正三角形。

2. 若 $P \in \overrightarrow{A_0B}$ ，則這是以 Q 為底的標準型。

$\therefore$ 以 Q 為底的標準型之 K' 與 K 對稱於 $\overrightarrow{A_{w-1}'C}$ ，將 P 繞 K' 逆時針轉 60° ，得 P' 。

以 P' 為圓心， $\overrightarrow{P'P}$ 為半徑畫圓，交 $\overrightarrow{A_{w-1}A_w}$ 於 Q 點，

作 $\overrightarrow{PQ}$ 的中垂線交 $\overrightarrow{A_{w-2}'A_{w-1}'}$ 於 R ，則 $\triangle PQR$ 即為該正 n 邊形的內接正三角形。

3. 若 $P \in \overrightarrow{A_0B'}$ ，則這是以 R 為底的標準型。

將 2. 中所得的內接正三角形對 L 求對稱圖形，即可得此部分的內接正三角形。

(四) 很明顯的，在 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 與 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 的作圖中，先找出 K 點並判斷出標準型是以何者為底之後，剩下的步驟就都一樣了。

(五) 當 n 是 3 的倍數時， K 點就是該正 n 邊形的中心點 C ，一樣可以用 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ 的作圖方法找出內接正三角形 PQR ，不過這就有一點小題大作了。

九、定理一 (唯一性定理) 的證明

定理一 (唯一性定理)：若在正 n 邊形的邊上取一定點 P ，則以此點為其中一頂點的內接正三角形，最多只會有一個。由引理一到七可得證。

(一) 引理一：設 P 是正 n 邊形邊上任意給定點，若 Q, R 皆不位於 P 對面的邊上，且 $\triangle PQR$ 與 $\triangle PQ'R'$ 都是正 n 邊形的內接正三角形，則 $Q' = Q$ 且 $R' = R$ 。

證明

PQ 與正 n 邊形靠近 P 一側的夾角 ξ_Q 與 PR 與正 n 邊形靠近 P 一側的夾角 ξ_R 皆小於 90°

1. 若 Q' 位於 I 區 ($Q' \neq Q$)

$\because P$ 對 Q 所在邊的垂足位於正 n 邊形外(右下方)且 $\xi_{Q'} > \xi_Q$, $\therefore \overline{PQ'} < \overline{PQ}$ 。

考慮到 $\angle R'PQ' = \angle RPQ = 60^\circ$,

$\Rightarrow R'$ 位於 III 區

$\therefore \overline{PR'} > \overline{PR} = \overline{PQ} > \overline{PQ'} \Rightarrow \overline{PQ'} \neq \overline{PR'}$

矛盾。

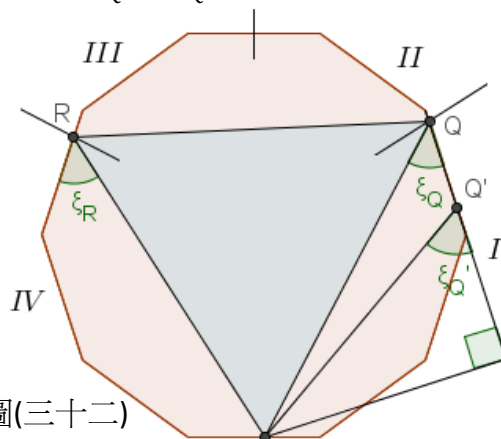
2. 若 Q' 位於 II 區 ($Q' \neq Q$)

$\therefore$ 同 1. 可得：

$\overline{PR'} < \overline{PR} = \overline{PQ} < \overline{PQ'} \Rightarrow \overline{PQ'} \neq \overline{PR'}$

矛盾。

故 $Q' = Q$ 且 $R' = R$ 。即 $\triangle PQ'R' = \triangle PQR$ 。 圖(三十二)



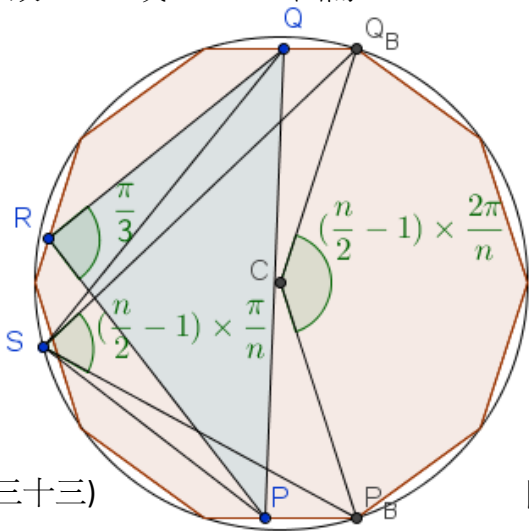
(二) 引理二：若 $\triangle PQR$ 是正 n 邊形的內接正三角形，則只有 $n \leq 9$ 時才有可能出現「 Q 位於 P 所在邊的對邊」的情況。

證明 設 Q 位於 P 所在邊的對邊， R 在正 n 邊形上，而 S 在其外接圓上。

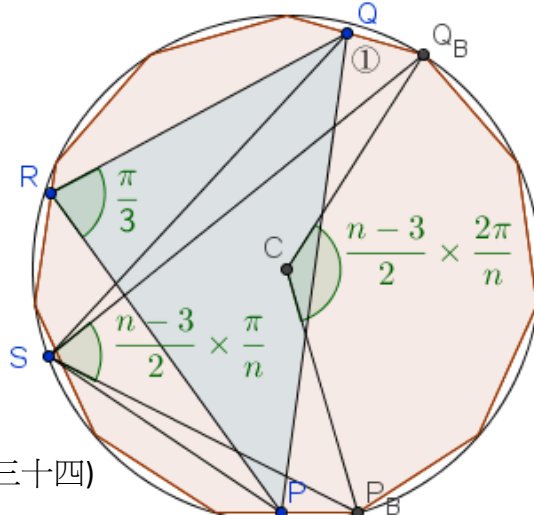
因 $\angle QRP \geq \angle Q_B R P_B \geq \angle Q_B S P_B$

所以 $\frac{\pi}{3} \geq \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{2}$ (n 是偶數) 或 $\frac{\pi}{3} \geq \frac{n-3}{2} \times \frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{2}$ (n 是奇數)

故 $n \leq 6$ 或 $n \leq 9$ ，因而 $n \leq 9$ 。



圖(三十三)



圖(三十四)

(三) 引理三：設 $n > 9$ 時，若固定 P 點，則在正 n 邊形中，以 P 為其中一頂點的內接正三角形最多只有一個。

證明 由引理一、二可得證。

(四) 引理四：若 $\triangle PQR$ 與 $\triangle PQ'R'$ 這兩個正 n 邊形的內接正三角形皆是以 P 為底的標準型，且 Q, Q' 位於同一個邊上， R, R' 位於同個邊上，則 $\triangle PQR = \triangle PQ'R'$ 。

證明 分為 Q, R 所在邊不垂直底邊與垂直底邊的情況。

1. 設 Q, R 分別位於 $y = -ax + b$ 及 $y = ax + b$, $P(p, 0)$

建立平面直角坐標系，如圖(三十五)所示

整理可得 $b(\sqrt{3}a - 1) \tan \theta = ap(\sqrt{3} + a)$

故在 θ 的合理範圍內， θ 若有解，只有一個。

即固定 $P(p,0)$ ，最多只找得到一組 $Q、R$ 。

2. 設 $Q、R$ 分別位於 $x = c$ 及 $x = -c$ ，如圖(三十六)

$$\overline{PQ} = (c - p) \sec(60^\circ + \theta)$$

$$\overline{PR} = (c + p) \sec(60^\circ - \theta)$$

又 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ ，故整理可得 $p \cot \theta = \sqrt{3}c$

即固定 $P(p,0)$ ，最多只找得到一組 $Q、R$ 。

- (五) 引理五：設 $\triangle PQR$ 這個正 n 邊形的內接正三角形是以 P 為底的標準型，在三頂點的分別所在邊上也存在著 $\triangle P'Q'R'$ 這個正 n 邊形的內接正三角形 ($P \rightarrow P', Q \rightarrow Q', R \rightarrow R'$)。若 $P' \neq P$ ，則 $Q \neq Q'$ 且 $R \neq R'$ 。

證明 設 $P' \neq P$ 但 $Q = Q'$ ，又 $\angle KPQ = 30^\circ$

$\therefore$ 可能的 P' 就是 $P、Q、K$ 三點決定出的圓與

底邊的交點。而該 P' 就是定理四中的 E 點，

即 Q 所在邊與 P 所在邊延長後的交點，故

$\triangle P'Q'R'$ 不可能是正三角形。

故若 $P' \neq P, Q \neq Q'$ ；同理 $R \neq R'$ 。

這說明了：設 $\triangle PQR$ 與 $\triangle P'Q'R'$ 這兩個正 n 邊形的

內接正三角形皆是以 Q 或 R 為底的標準型，

且 $Q、Q'$ 位於同一個邊上， $R、R'$ 位於同個邊上，

則 $\triangle PQR = \triangle P'Q'R'$ 。

- (六) 引理六：若 $\triangle PQR$ 與 $\triangle P'Q'R'$ 都可以化為以某一點為

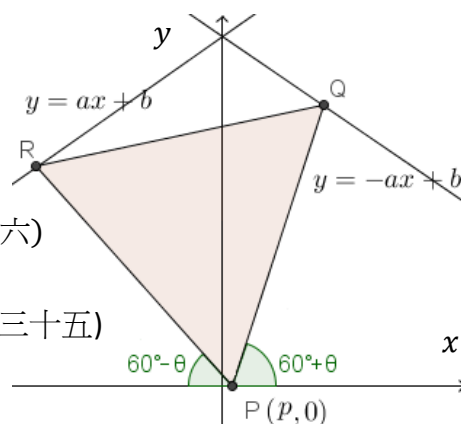
底的內接正三角形，則 Q' 在 Q 所在邊上且 R' 在 R 所在邊上。

證明 設 Q' 不在 Q 所在邊上或 R' 不在 R 所在邊上。因其行為模式也必符合標準型範圍定理，也就是說以 Q 或 R 為底的標準型中與以 P 為底的標準型中， P 的存在範圍是錯開的。又 $\triangle PQR$ 與 $\triangle P'Q'R'$ 必定是以不同兩點為底的標準型，故固定位置的 P 不能一次扮演「標準型上的 P 」及「非標準型上的 P 」。也就是說， $\triangle PQR$ 與 $\triangle P'Q'R'$ 是不可能同時存在的。

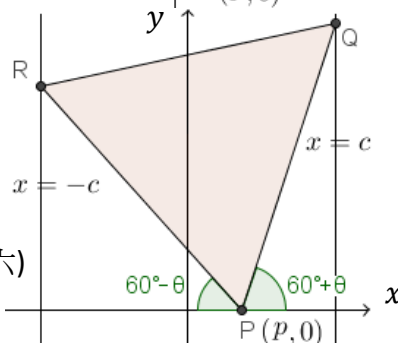
- (七) 引理七：設 $n \leq 9$ ，若固定 P 點，則在正 n 邊形中，以 P 為其中一頂點的內接正三角形最多只有一個。

證明

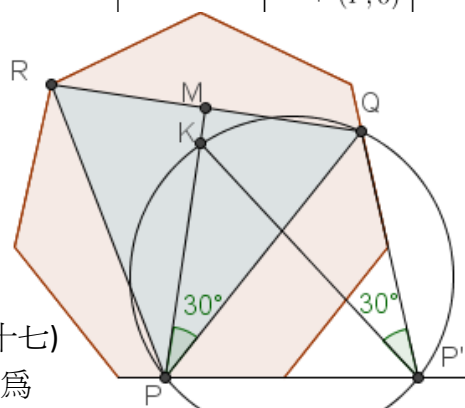
1. $n = 3$ ：圖形必定是以 P 為底的標準型，由引理四可得出唯一性。
2. $n = 4$ ： $\delta(P, Q), \delta(P, R), \delta(Q, R)$ 只有 $(0,0,1)$ 此組合，由引理四~六可得唯一性。
3. $n = 5$ ： $\delta(P, Q), \delta(P, R), \delta(Q, R)$ 只有 $(0,1,1)$ 此組合，由引理四~六可得唯一性。
4. $n = 6$ 或 9 ：若考慮到對稱性，只有唯一一個特殊的內接正三角形的 Q 位於 P 所在邊之對邊，故由引理一可得出唯一性。
5. $n = 7$ ： $\delta(P, Q), \delta(P, R), \delta(Q, R)$ 只有 $(1,1,2)$ 此組合，由引理四~六可得唯一性。
6. $n = 8$ ：不可能出現 Q 位於 P 所在邊之對邊的情況，故由引理一可得唯一性。



圖(三十五)



圖(三十六)



圖(三十七)

伍、研究過程(下)：圖形性質的探討

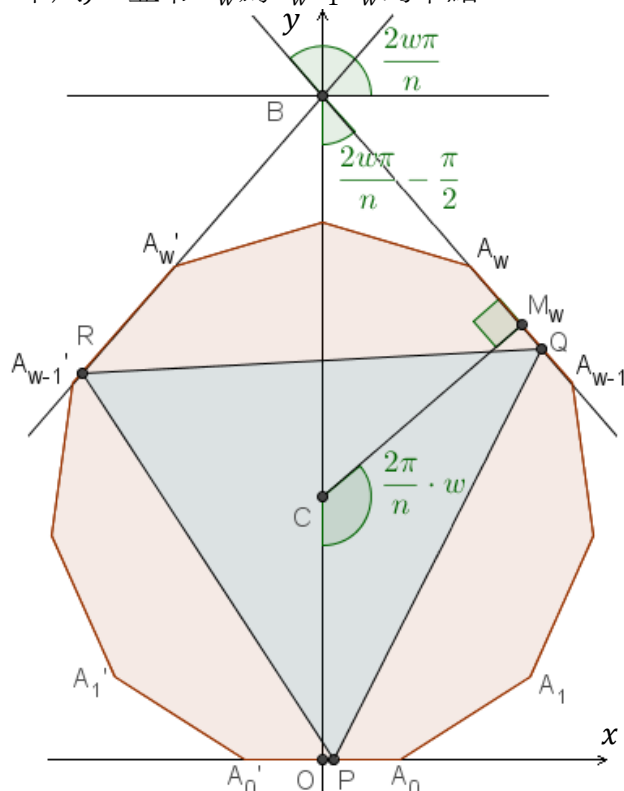
設正 n 邊形 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$ 的中心為 C ，其外接圓半徑長為 1 ，

L 是標準型底邊的中垂線，且 $w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 。

一、 Q 、 R 所在邊的直線方程式

(一) 當 Q 、 R 的所在邊不垂直底邊

坐標化如圖(三十八)，並令 M_w 為 $\overline{A_{w-1}A_w}$ 的中點。



圖(三十八)

$$\text{因 } \angle OCM_w = w \cdot \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \angle BCM_w = \pi - \frac{w \cdot 2\pi}{n}, \text{ 故 } \angle CBM_w = \frac{w \cdot 2\pi}{n} - \frac{\pi}{2}$$

可知 $\overrightarrow{A_{w-1}A_w}$ 與 x 軸逆時針夾 $w \cdot \frac{2\pi}{n}$

$$\text{又 } \angle A_w CM_w = \frac{1}{2} \angle A_w CA_{w-1} = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \overline{CM_w} = \cos \frac{\pi}{n}$$

$$\text{所以 } \overline{BC} = \overline{CM_w} \csc \left(w \cdot \frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{n} \left(-\sec \frac{2w\pi}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = \cos \frac{\pi}{n} \left(1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right)$$

$$\text{故 } \overleftrightarrow{A_{w-1}A_w} : y = \tan \frac{2w\pi}{n} x + \cos \frac{\pi}{n} \left(1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right), \text{ 也就是肆之六的 } y = -ax + b$$

$$\text{得 } \begin{cases} a = -\tan \frac{2w\pi}{n} \\ b = \cos \frac{\pi}{n} \left(1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right) \end{cases}$$

(二) 當 Q、R 的所在邊垂直底邊

$\therefore \overrightarrow{A_{w-1}A_w}$ 垂直底邊

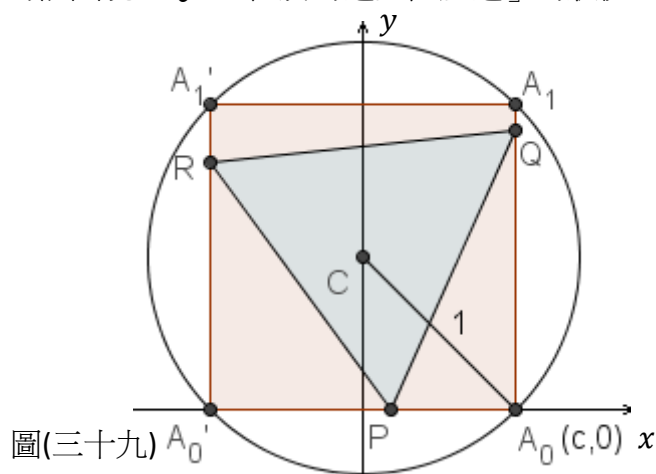
$\Rightarrow$ 其與 x 軸逆時針夾角 $w \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\frac{w}{n} = \frac{1}{4}$

令 $w = \frac{n+\zeta}{3}$ ，其中 $\begin{cases} \zeta = 0, & \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \zeta = -1, & \text{當 } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \zeta = 1, & \text{當 } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ ，故 $\frac{w}{n} = \frac{1}{3} + \frac{\zeta}{3n}$

因此 $\frac{1}{3} + \frac{\zeta}{3n} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\zeta}{n} = -\frac{1}{4}$

又 $\zeta \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow n = 4$

故 $n = 4$ 時才有可能出現「Q、R 位於的邊垂直底邊」的狀況



由圖(三十九)可知，肆之六所假設的 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

二、數值推導(I)

建立平面直角坐標，如圖(四十)所示。

設 $K(0, k)$ ，今作一條過 K 的直線，令其與 y 軸正向的有向角為 θ 且與 x 軸交於 P ，

其中 $-\varphi \leq \theta \leq \varphi$ ， φ 為夾角的最大值。

若 $\overrightarrow{PK}$ 為正 $\triangle PQR$ 的內角角平分線，則：

Q 與 R 各位於兩條對稱於 y 軸之直線上的充要條件為

正 $\triangle PQR$ 重心 G 的軌跡為一條平行 x 軸的線段。

設 $\overline{PQ} = t$ ，

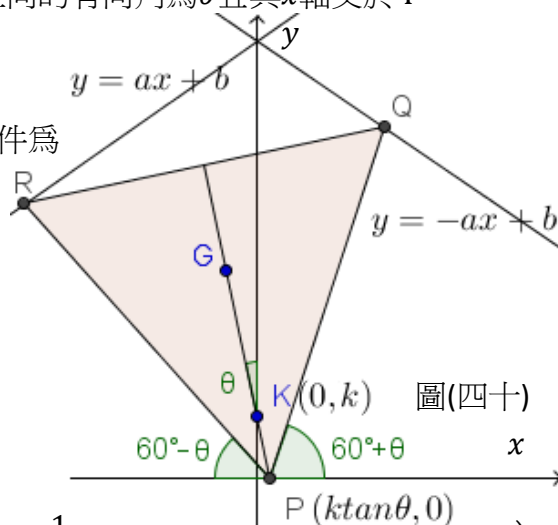
由圖(四十)可得 $P(k \tan \theta, 0)$ ， $\angle RPO = 60^\circ - \theta$

$\therefore \overrightarrow{PR} = (-t \cos(60^\circ - \theta), t \sin(60^\circ - \theta))$

$\Rightarrow R(k \tan \theta - t \cos(60^\circ - \theta), t \sin(60^\circ - \theta))$

同理 $Q(k \tan \theta + t \cos(60^\circ + \theta), t \sin(60^\circ + \theta))$

故 $G\left(\frac{1}{3}[3k \tan \theta + t \cos(60^\circ - \theta) - t \cos(60^\circ + \theta)], \frac{1}{3}[t \sin(60^\circ + \theta) + t \sin(60^\circ - \theta)]\right)$



$$\Rightarrow G \left(k \tan \theta + \frac{t}{3} (-2 \sin 60^\circ \sin \theta), \frac{t}{3} (2 \sin 60^\circ \cos \theta) \right),$$

$$\text{即 } G \left(k \tan \theta + \frac{t}{\sqrt{3}} \sin \theta, \frac{t}{\sqrt{3}} \cos \theta \right)$$

(一) 證明必要條件：

1. 設 Q、R 兩點分別在直線 $y = -ax + b$ 、 $y = ax + b$ 上

$$\text{則 } \begin{cases} t \sin(60^\circ + \theta) = -a[k \tan \theta + t \cos(60^\circ + \theta)] + b \dots\dots ① \\ t \sin(60^\circ - \theta) = a[k \tan \theta - t \cos(60^\circ - \theta)] + b \dots\dots ② \end{cases}$$

① + ②：

$$t[\sin(60^\circ + \theta) + \sin(60^\circ - \theta)] = -at[\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)] + 2b$$

$$\Rightarrow t(2 \sin 60^\circ \cos \theta + a \cdot 2 \cos 60^\circ \cos \theta) = 2b$$

$$\Rightarrow t = \frac{2b}{(a + \sqrt{3}) \cos \theta}$$

$$\text{因此 } G \left(k \tan \theta - \frac{\frac{2b}{(a + \sqrt{3}) \cos \theta}}{\sqrt{3}} \sin \theta, \frac{\frac{2b}{(a + \sqrt{3}) \cos \theta}}{\sqrt{3}} \cos \theta \right)$$

$$\text{即 } G \left(\left(k - \frac{2b}{\sqrt{3}a + 3} \right) \tan \theta, \frac{2b}{\sqrt{3}a + 3} \right)$$

故重心 G 在平行 x 軸的直線 $y = \frac{2b}{\sqrt{3}a + 3}$ 上。

2. 設 Q、R 兩點分別在直線 $x = c$ 、 $x = -c$ 上

$$\text{則 } \begin{cases} k \tan \theta + t \cos(60^\circ + \theta) = c \dots\dots ③ \\ k \tan \theta - t \cos(60^\circ - \theta) = -c \dots\dots ④ \end{cases}$$

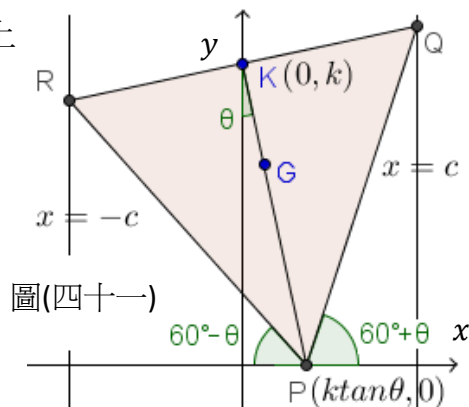
③ - ④：

$$t[\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)] = 2c$$

$$\Rightarrow t = \frac{2c}{2 \cos 60^\circ \cos \theta}, \text{ 即 } t = \frac{2c}{\cos \theta}$$

$$\text{因此 } G \left(k \tan \theta - \frac{\frac{2c}{\cos \theta}}{\sqrt{3}} \sin \theta, \frac{\frac{2c}{\cos \theta}}{\sqrt{3}} \cos \theta \right), \text{ 即 } G \left(\left(k - \frac{2c}{\sqrt{3}} \right) \tan \theta, \frac{2c}{\sqrt{3}} \right)$$

故重心 G 在平行 x 軸的直線 $y = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ 上。



圖(四十一)

(二) 證明充分條件：

設重心 G 在平行 x 軸的直線 $y = h$ 上，則 $h = \frac{t}{\sqrt{3}} \cos \theta$ ，即 $t = \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta}$

$$\text{故} \begin{cases} Q \left(k \tan \theta + \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ + \theta), \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ - \theta) \right) \\ R \left(k \tan \theta - \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ - \theta), \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ - \theta) \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \left(\left(k - \frac{3}{2}h \right) \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}h, \frac{\sqrt{3}}{2}h \tan \theta + \frac{3}{2}h \right) \\ R \left(\left(k - \frac{3}{2}h \right) \tan \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}h, -\frac{\sqrt{3}}{2}h \tan \theta + \frac{3}{2}h \right) \end{cases}$$

1. 若 $2k - 3h \neq 0$

Q 在 $y = \frac{-\sqrt{3}h}{3h-2k}x + \frac{3h(2h-k)}{3h-2k}$ 上， R 在 $y = \frac{\sqrt{3}h}{3h-2k}x + \frac{3h(2h-k)}{3h-2k}$ 上。

2. 若 $2k - 3h = 0$

Q 在 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}h$ 上，而 R 在 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}h$ 上。

由此可看出，不論是 1. 或 2.， Q 、 R 兩點各位於兩條對稱於 y 軸的直線上。

三、數值推導(II)

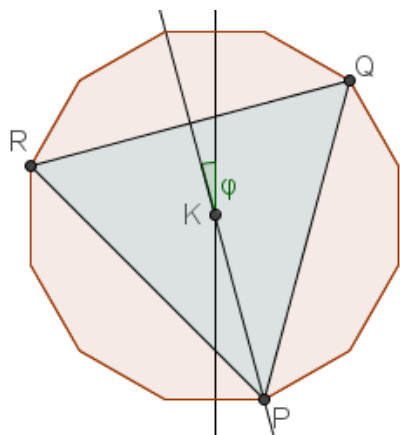
(一) Q 、 R 分別位於 $y = -ax + b$ 及 $y = ax + b$ 上的狀況

1. K 點與標準型底邊的距離 k

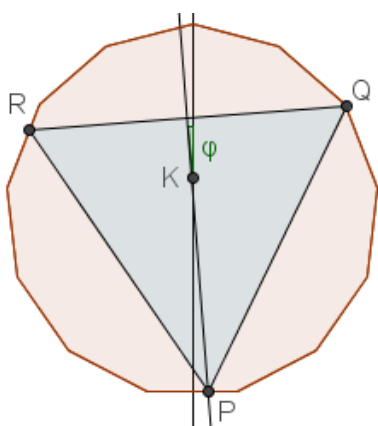
$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{3}a - 1}{a(a + \sqrt{3})} b = \frac{-\sqrt{3} \tan \frac{2w\pi}{n} - 1}{-\tan \frac{2w\pi}{n} (\sqrt{3} - \tan \frac{2w\pi}{n})} \cos \frac{\pi}{n} \left(1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{-\sqrt{3} \sin \frac{2w\pi}{n} - \cos \frac{2w\pi}{n} + \sqrt{3} \tan \frac{2w\pi}{n} + 1}{-\sin \frac{2w\pi}{n} (\sqrt{3} - \tan \frac{2w\pi}{n})} \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{-2 \cos \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{2w\pi}{n} + \sqrt{3} \sin \frac{2w\pi}{n} + \cos \frac{2w\pi}{n}}{-\sin \frac{2w\pi}{n} (\sqrt{3} \cos \frac{2w\pi}{n} - \sin \frac{2w\pi}{n})} \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{-2 \cos \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{2w\pi}{n} + 2 \cos \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \frac{2w\pi}{n} \cdot 2 \sin \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{2 \sin \frac{w\pi}{n} \cos \frac{w\pi}{n} \tan \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n}}{\tan \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)} \end{aligned}$$

2. 最大幅角 φ

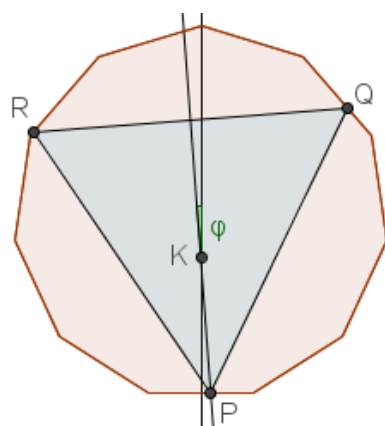
由圖可知， θ 的最大值 φ 發生在 Q 或 R 與正 n 邊形的頂點重合的時候。



圖(四十二)

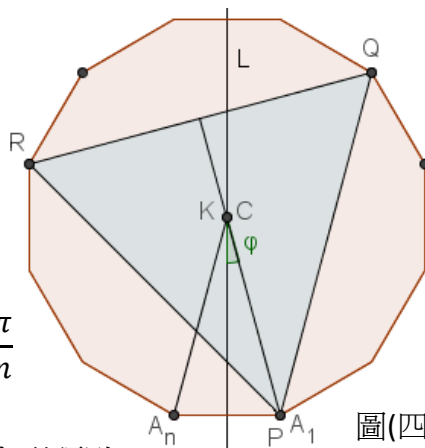


圖(四十三)



圖(四十四)

(1) 當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時：P、Q、R 同時頂到正 n 邊形的頂點，如圖(四十五)。



圖(四十五)

$$\text{故}\theta\text{的最大值}\varphi = \frac{1}{2}\angle A_n K A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$$

(2) 當 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ 時：

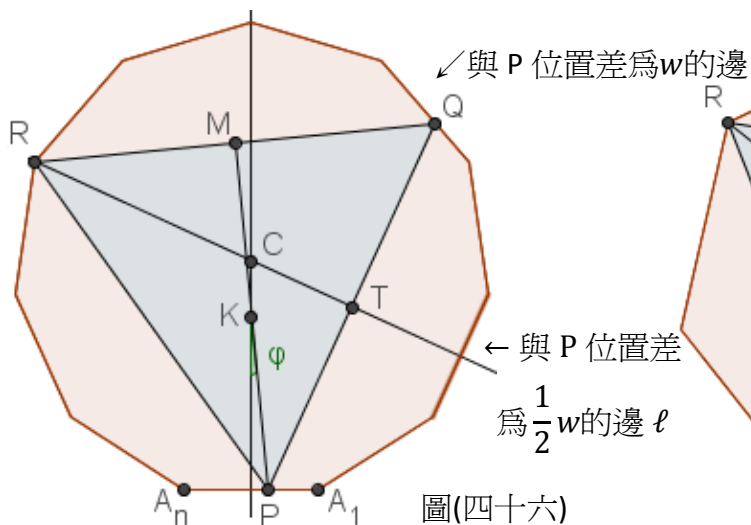
令 R 為與正 n 邊形頂點重合的內接正三角形頂點。

① 若 n 是奇數：

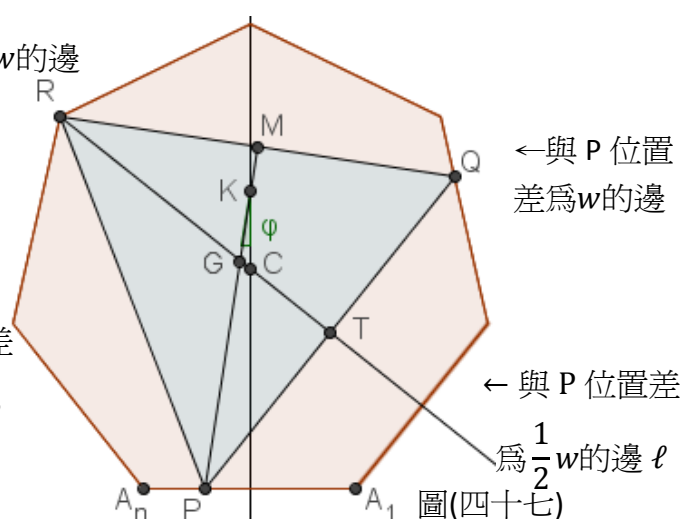
連 $\overline{RC}$ 交 $\overline{PQ}$ 於 T

$\because$ Q 與 R 的位置差=P 與 R 的位置差，

$\therefore$ R 於正 n 邊形的對邊 ℓ ，其到 P、Q 的位置差相等。



圖(四十六)



圖(四十七)

$$\text{又 Q 與 P 的位置差} = w \Rightarrow \ell \text{ 與 P 的位置差} = \frac{1}{2}w$$

(i) 圖(四十六)中，(當 $n \equiv 2 \pmod{3}$)的狀況)

$$\angle KCT = \frac{1}{2}w \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{w\pi}{n}$$

$$\text{在四邊形 PKCT 中, } \angle PKC = 2\pi - \frac{w\pi}{n} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} - \frac{w\pi}{n}$$

$$\text{故 } \varphi = \pi - \angle PKC = \frac{w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} = \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)\pi}{n} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3n}$$

(ii) 圖(四十七)中，(當 $n \equiv 1 \pmod{3}$)的狀況)

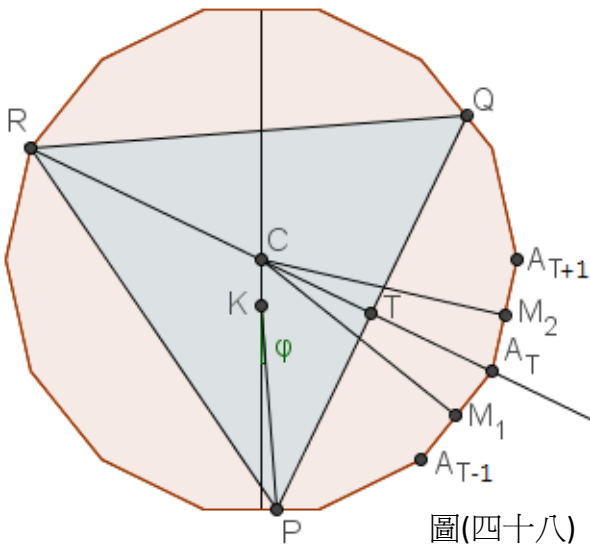
$$\angle KCT = \pi - \frac{w\pi}{n}$$

$$\therefore \varphi + \angle KGC = \angle KCT$$

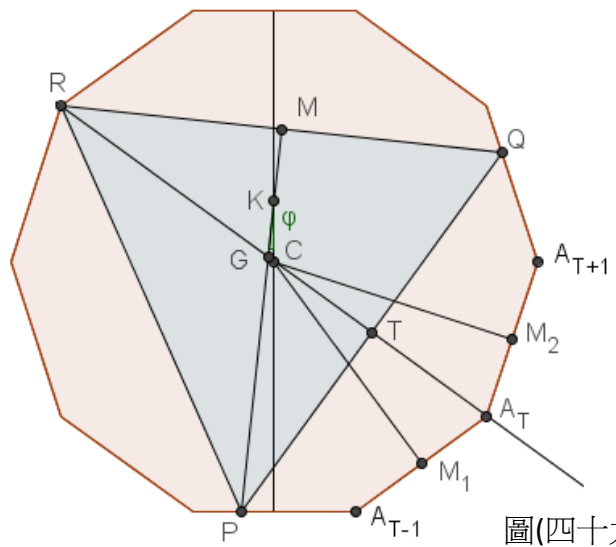
$$\text{故 } \varphi = \left(\pi - \frac{w\pi}{n}\right) - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{n-1}{3}\right)\pi}{n} = \frac{\pi}{3n}$$

② 若 n 是偶數：

令 R 在正 n 邊形中對面的頂點為 A_T 。



圖(四十八)



圖(四十九)

$\therefore A_T$ 與 Q 和 A_T 與 P 的位置差相等，且 Q 與 P 的位置差 $=w$ ，

故 $\overline{A_TA_{T-1}}$ 與 P 、 $\overline{A_TA_{T+1}}$ 與 P 的位置差分別為 $\frac{w-1}{2}$ 、 $\frac{w+1}{2}$ 。

令 M_1 、 M_2 分別為 $\overline{A_TA_{T-1}}$ 、 $\overline{A_TA_{T+1}}$ 的中點， T 為 $\overline{RA_T}$ 與 $\overline{PQ}$ 的交點，

(i) 圖(四十八)中，(當 $n \equiv 2 \pmod{3}$)的狀況)

$$\begin{aligned} \angle KCT &= \frac{1}{2}(\angle KCM_1 + \angle KCM_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} + \frac{w+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{w\pi}{n} \end{aligned}$$

仿①，可得 $\varphi = \frac{\pi}{3n}$ 。

(ii) 圖(四十九)中，(當 $n \equiv 1 \pmod{3}$)的狀況)

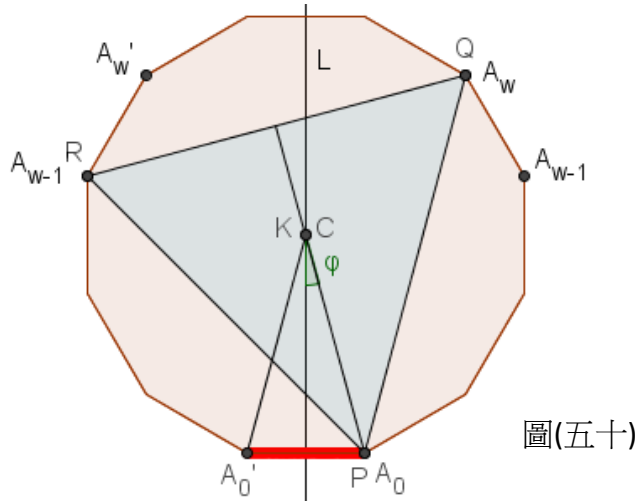
$$\angle KCT = \pi - \frac{w\pi}{n}$$

仿①，也可得 $\varphi = \frac{\pi}{3n}$ 。

所以，
$$\begin{cases} \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3}, \varphi = \frac{\pi}{n} \\ \text{當 } n \equiv 1, 2 \pmod{3}, \varphi = \frac{\pi}{3n} \end{cases}$$

3. 以 P 為底的標準型中，三頂點 P、Q、R 的存在範圍 u_P 、 u_Q 、 u_R

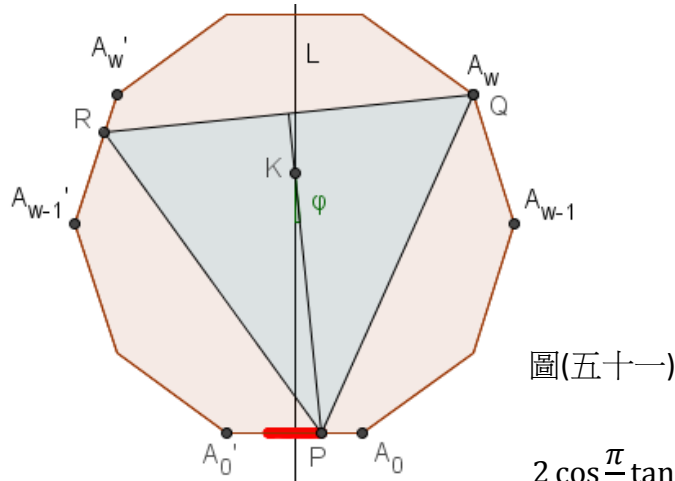
(1) 若 $n \equiv 0 \pmod{3}$



圖(五十)

由圖(五十)可知， $u_P = u_Q = u_R = \text{正}n\text{邊形的邊長} = 2 \sin \frac{\pi}{n}$

(2) 若 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$



圖(五十一)

由圖(五十一)可知， $u_P = 2 \cdot k \tan \varphi = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n} \tan \frac{\pi}{3n}}{\tan \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$

又 $u_P + u_Q + u_R = \text{正}n\text{邊形的邊長}$ 且 $u_Q = u_R$

$$\text{故 } u_Q = u_R = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{n} - u_P \right) = \sin \frac{\pi}{n} - \frac{\cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n} \tan \frac{\pi}{3n}}{\tan \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$$

4. 重心與底邊的距離 h

在數值推導(I)得 $G\left(\left(k - \frac{2b}{\sqrt{3}a+3}\right)\tan\theta, \frac{2b}{\sqrt{3}a+3}\right)$ 在平行 x 軸的直線 $y = h$ 上

$$\text{因爲 } \frac{b}{a+\sqrt{3}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}\left(1 - \sec\frac{2w\pi}{n}\right)}{\sqrt{3} - \tan\frac{2w\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{2w\pi}{n} - 1\right)}{\sqrt{3}\cos\frac{2w\pi}{n} - \sin\frac{2w\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\text{故 } h = \frac{2b}{\sqrt{3}a+3} = \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)}$$

5. 內接正三角形的邊長 t

$$t = \frac{\sqrt{3}h}{\cos\theta} = \frac{2b}{(a+\sqrt{3})\cos\theta} = \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\theta}$$

6. 重心軌跡的長度 s

因 G 的 x 坐標 $\left(k - \frac{2b}{\sqrt{3}a+3}\right)\tan\theta = (k-h)\tan\theta$ 且 $-\varphi \leq \theta \leq \varphi$

$$\text{故 } s = |(k-h)\tan\varphi - (k-h)\tan(-\varphi)| = 2|k-h|\tan\varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s &= 2 \left| \frac{\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\tan\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} - \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sqrt{3}\cos\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\frac{w\pi}{n}\cos\frac{w\pi}{n} \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2w\pi}{n} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2w\pi}{n}\right) - \sin\frac{2w\pi}{n} \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sin\left(\frac{2w\pi}{n} + \frac{\pi}{3}\right) \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sin\left(\left(\frac{2}{3} + \frac{2\zeta}{3n}\right)\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sin\left(\frac{2\zeta}{3n}\pi\right) \right| \tan\varphi \end{aligned}$$

(1) 當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時, $\zeta = 0 \Rightarrow s = 0$

(2) 當 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ 時, $\zeta = \mp 1$

$$\Rightarrow s = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{3n} \tan \frac{w\pi}{n} \tan \frac{\pi}{3n}}{\sqrt{3} \sin \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$$

$$= \frac{4 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{3n} \tan \frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3} \sin \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$$

(二) Q、R 分別位於 $x = c$ 及 $x = -c$ 上 (即 $n = 4$ 的情形)

1. K 點與底邊的距離 k

$$k = \sqrt{3}c = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 恰符合(一)之 1. 的結果。}$$

2. 最大幅角 φ

$$\varphi = 15^\circ = \frac{\pi}{3 \cdot 4}, \text{ 恰符合(一)之 3. 的結果。}$$

3. 以 P 為底的標準型中，三頂點的存在範圍 u_P 、 u_Q 、 u_R

$$u_P = 2k \tan \varphi = \sqrt{6} \tan \frac{\pi}{12} = 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}, u_Q = u_R = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

都符合(一)之 2. 的結果。

4. 重心與底邊的距離 h

$$h = \frac{2c}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 不意外地符合(一)之 4. 的結果。}$$

5. 內接正三角形的邊長 t

$$t = \frac{2c}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}, \text{ 還是符合(一)之 5. 的結果。}$$

6. 重心軌跡的長度 s

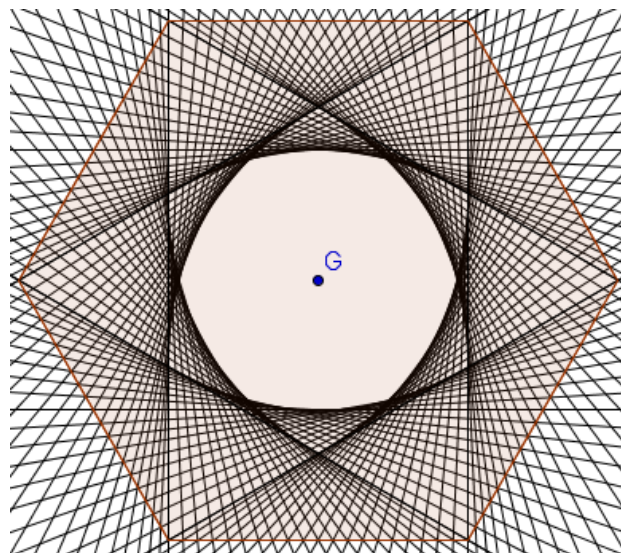
$$s = \frac{1}{3}u_P = \frac{2}{3}\sqrt{6} - \sqrt{2}, \text{ 依然適用(一)之 6. 的結果。}$$

故不論兩直線是否為鉛直線，即不論 n 值為何，(一)所推導出的結果都是適用的。

四、將所有內接正三角形畫出後，中央空白區域的圖形

(一) 當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時，中央空白區域是由 n 條拋物線包圍出的圖形。

其證明參見「五、包絡圖形」。

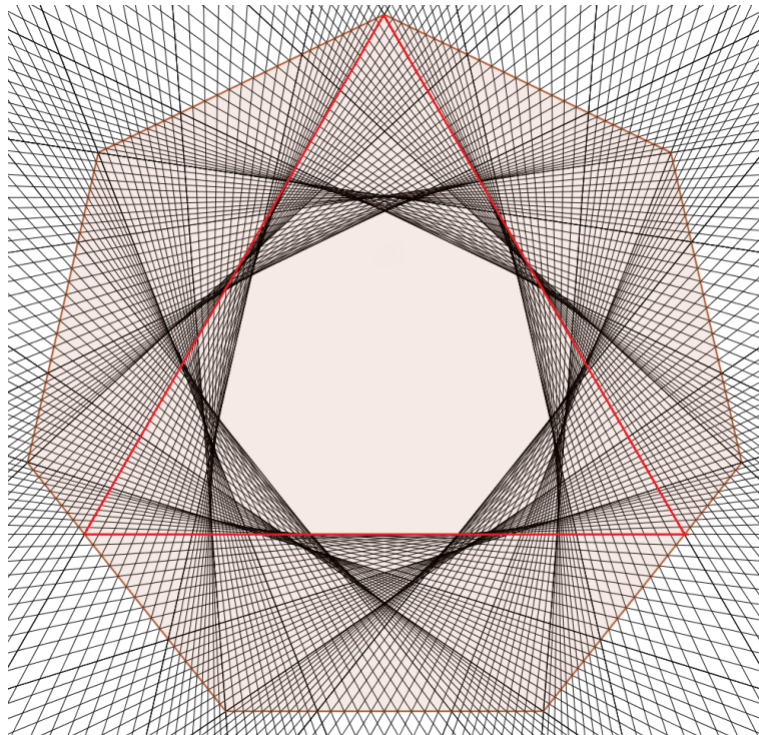


圖(五十二)

(二) 當 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ 時，中央空白區域是一個正 n 邊形。

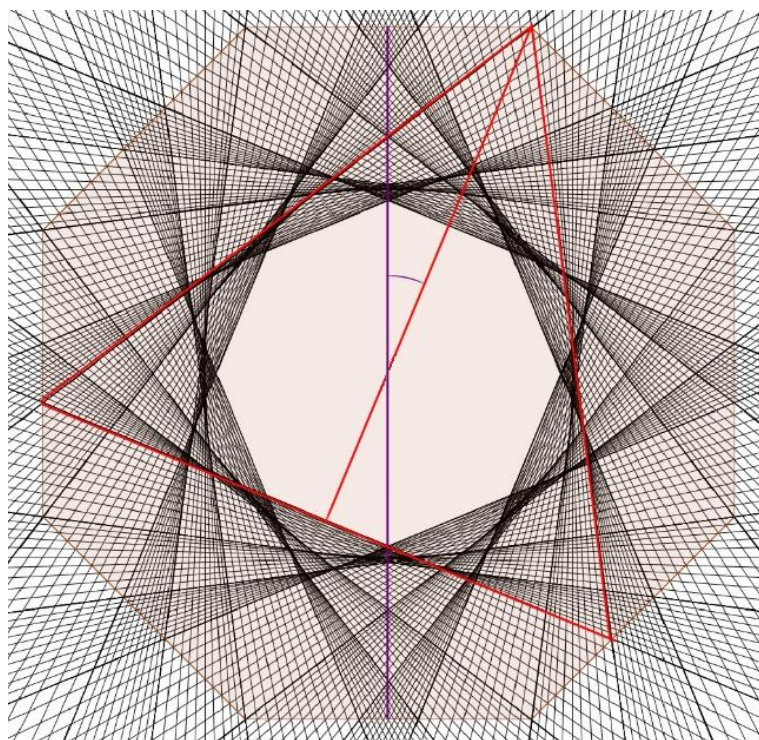
它的每一個邊，是所有其中一頂點與正 n 邊形頂點重合的特殊內接正三角形中，與正 n 邊形頂點重合之頂點的對邊所圍出來的。

1. 若 n 是奇數，因為相對於底邊的最高點只有一個，所以相對於原正 n 邊形，它不旋轉。



圖(五十三)

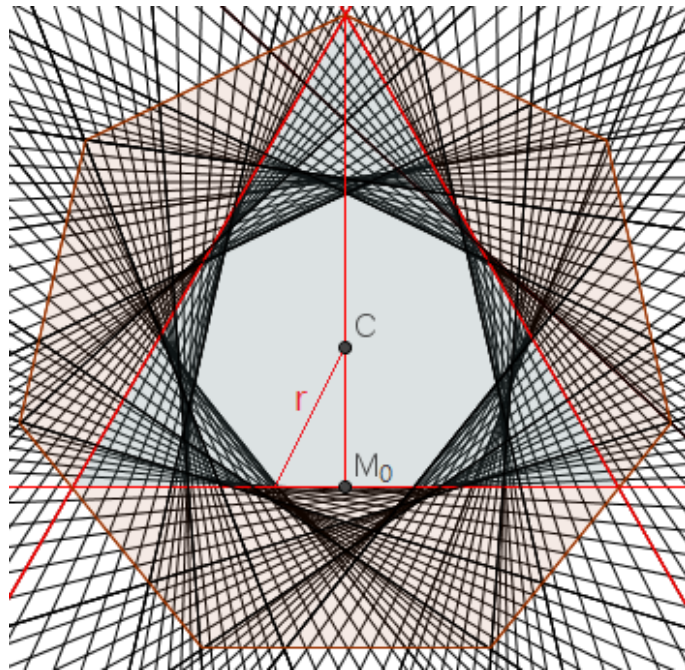
2. 若 n 是偶數，因為相對於底邊的最高點左右各有一個，所以相對於原正 n 邊形，它旋轉了 $\frac{\pi}{n}$ 弧度。



圖(五十四)

而不論 n 是奇數或偶數，它的外接圓半徑長爲 $\frac{\sqrt{3} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3n}} - \sec \frac{\pi}{n}$

證明



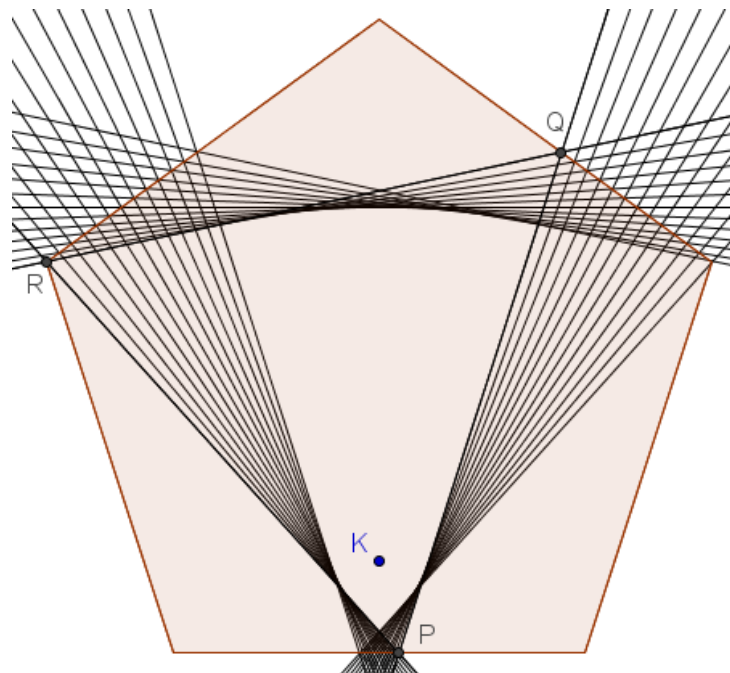
圖(五十五)

因爲 $\overline{CM_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{內接正三角形的最大邊長} - \text{正}n\text{邊形的外接圓半徑}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \varphi} - 1 = \frac{\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3n}} - 1$$

所以新的外接圓半徑 $r = \overline{CM_0} \sec\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\sqrt{3} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3n}} - \sec \frac{\pi}{n}$

五、包絡圖形(以 P 爲底的標準型)



圖(五十六)

(一) $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 包絡出的圖形

不論 Q、R 分別位於 $y = -ax + b$ 、 $y = ax + b$ ，還是 $x = c$ 、 $x = -c$ 上

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} : y = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)(x - k \tan \theta) &\xrightarrow{\text{令 } \tan \theta = \alpha} y = \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha}(x - k\alpha) \\ &\xrightarrow{\text{令 } \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha} = f(\alpha)} y = f(\alpha)(x - k\alpha)\end{aligned}$$

將 $|\alpha|$ 稍微增大，得 $\overrightarrow{P'Q'} : y = f(\alpha + \varepsilon)[x - k(\alpha + \varepsilon)]$

$$\text{解} \begin{cases} y = f(\alpha)(x - k\alpha) \\ y = f(\alpha + \varepsilon)[x - k(\alpha + \varepsilon)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\alpha)(x - k\alpha) = f(\alpha + \varepsilon)[x - k(\alpha + \varepsilon)]$$

$$\Rightarrow [f(\alpha + \varepsilon) - f(\alpha)]x = k[(\alpha + \varepsilon)f(\alpha + \varepsilon) - \alpha \cdot f(\alpha)]$$

$$\Rightarrow \frac{f(\alpha + \varepsilon) - f(\alpha)}{\varepsilon} x = k \frac{(\alpha + \varepsilon)f(\alpha + \varepsilon) - \alpha \cdot f(\alpha)}{\varepsilon}$$

$$\text{令 } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ 則 } f'(\alpha)x = k(\alpha \cdot f(\alpha))' = k \cdot f(\alpha) + k\alpha f'(\alpha)$$

$$\Rightarrow x = k\alpha + k \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = k\alpha + \frac{k \cdot \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha}}{\frac{1 - \sqrt{3}\alpha - (-\sqrt{3})(\sqrt{3} + \alpha)}{(1 - \sqrt{3}\alpha)^2}} = k\alpha + \frac{k}{4}(\sqrt{3} + \alpha)(1 - \sqrt{3}\alpha)$$

$$\text{故 } y = \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha}(x - k\alpha) = \frac{k}{4}(\sqrt{3} + \alpha)$$

$$\text{而 } x = \frac{k}{4}(-\sqrt{3}\alpha^2 - 2\alpha + \sqrt{3} + 4\alpha) = \frac{k}{4}[-\sqrt{3}(\sqrt{3} + \alpha)^2 + 8\alpha + 4\sqrt{3}]$$

$$\Rightarrow x + \frac{\sqrt{3}k}{4}(\sqrt{3} + \alpha)^2 + \frac{k}{4} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{k}{4}(8\alpha + 8\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow [x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}k]^2 = [2k(\alpha + \sqrt{3})]^2 = 16k \cdot y$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}kx - 10ky + 3k^2 = 0 \dots \dots (*)$$

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 0 \text{ 且 } \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3}k \\ \sqrt{3} & \sqrt{3}k & -5k \\ \sqrt{3}k & -5k & 3k^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore$ 所有 $\overrightarrow{PQ}$ 包絡出的圖形為拋物線。

而所有 $\overrightarrow{PR}$ 包絡出的圖形為 $(*)$ 對 y 軸鏡射的結果，

$$\text{即 } x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}kx - 10ky + 3k^2 = 0。$$

(二) $\overrightarrow{QR}$ 包絡出的圖形

$$\text{因 } \overrightarrow{PM} = \frac{\sqrt{3}t}{2}(\cos(90^\circ + \theta), \sin(90^\circ + \theta)), \text{ 其中 } t = \frac{2b}{(a + \sqrt{3})\cos \theta}$$

$$\text{故 } \overrightarrow{PM} = \left(\frac{\sqrt{3}b \cdot (-\sin \theta)}{(a + \sqrt{3})\cos \theta}, \frac{\sqrt{3}b \cdot \cos \theta}{(a + \sqrt{3})\cos \theta} \right) = \left(\frac{-\sqrt{3}b \tan \theta}{a + \sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} \right)$$

$$\text{又 } P(k \tan \theta, 0), \text{ 故 } M \left(k \tan \theta - \frac{\sqrt{3}b \tan \theta}{a + \sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} \right)$$

作圖如右(圖(五十七))

則 $\triangle RMS \sim \triangle KS'S$ (AA), 因此 $\angle QRS = \angle SKS' = \theta$

$$\text{故}\overrightarrow{QR}: y = \tan \theta \left[x - \tan \theta \left(k - \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}}$$

$$\text{令}\tan \theta = \alpha, \text{又}\frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} = \frac{3}{2}h$$

$$\therefore \overrightarrow{QR}: y = \alpha \left[x - \alpha \left(k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h$$

$$\text{將}\alpha \text{稍微增大, 得}\overrightarrow{Q'R'}: y = (\alpha + \varepsilon) \left[x - (\alpha + \varepsilon) \left(k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h$$

$$\text{解} \begin{cases} y = \alpha \left[x - \alpha \left(k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h \\ y = (\alpha + \varepsilon) \left[x - (\alpha + \varepsilon) \left(k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h \end{cases}$$

$$\Rightarrow [(\alpha + \varepsilon) - \alpha]x = (\alpha + \varepsilon)^2 \left(k - \frac{3}{2}h \right) - \alpha^2 \left(k - \frac{3}{2}h \right)$$

$$\Rightarrow x = \left(k - \frac{3}{2}h \right) \frac{(\alpha + \varepsilon)^2 - \alpha^2}{\varepsilon} = \left(k - \frac{3}{2}h \right) (2\alpha + \varepsilon)$$

$$\text{令}\varepsilon \rightarrow 0, \text{則}x = \left(k - \frac{3}{2}h \right) \cdot 2\alpha$$

$$\text{故}y = \alpha \left[x - \alpha \left(k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h = \left(k - \frac{3}{2}h \right) \alpha^2 + \frac{3}{2}h$$

1. 若 $2k - 3h \neq 0$, 即 Q 、 R 分別位於 $y = -ax + b$ 及 $y = ax + b$ 上的情況

$$\text{此時}k - \frac{3}{2}h = \frac{\sqrt{3}a - 1}{a(a + \sqrt{3})}b - \frac{\sqrt{3}}{a + \sqrt{3}}b = \frac{-b}{a(a + \sqrt{3})} < 0$$

$$\text{故}y = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{k - \frac{3}{2}h} + \frac{3}{2}h = \frac{x^2}{4k - 6h} + \frac{3}{2}h$$

因此 $\overrightarrow{QR}$ 包絡出的圖形是一個開口向下的拋物線。

2. 若 $2k - 3h = 0$, 即 $n = 4$ 的情形

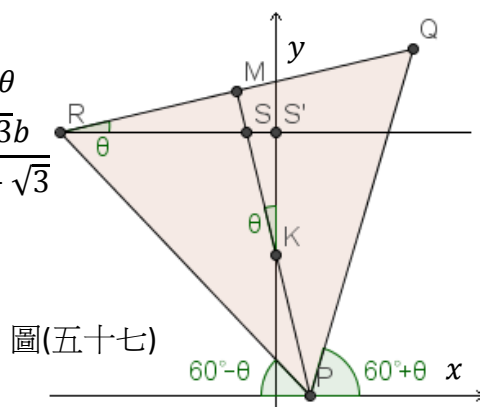
$$\text{此時} \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2}h \end{cases}, \text{亦即所有}\overrightarrow{QR} \text{的中點}\left(0, \frac{3}{2}h\right)$$

故此時 $\overrightarrow{QR}$ 無包絡圖形, 如圖(五十八)。

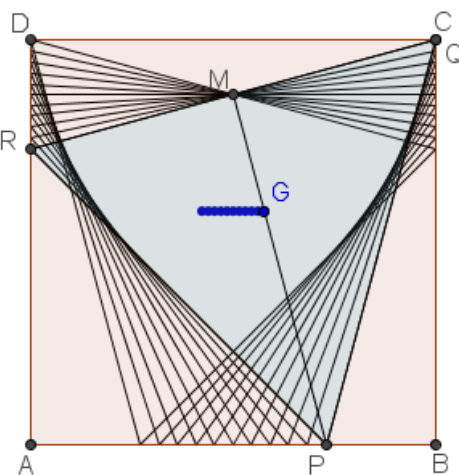
圖(五十八)

註(1): 由於 θ 有一定的範圍, $\overrightarrow{PQ}$ 、 $\overrightarrow{PR}$ 、 $\overrightarrow{QR}$ 所包絡出的圖形只是(一)、(二)所導出之拋物線的一小段。

註(2): (一)、(二)導出的是選定一個邊作為標準型底邊所得的包絡拋物線, 而以其它邊作為底邊所得的包絡拋物線方程式可由旋轉對稱得出。



圖(五十七)



陸、結論

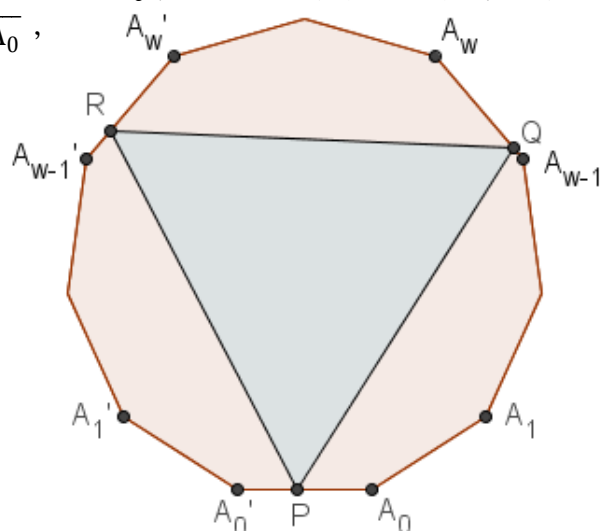
設正 n 邊形 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$ 的外接圓半徑長為 1，而 $w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 。

一、在正 n 邊形的邊上任意找一點 P ，則必可在其邊上找到唯一組點 Q 、 R ，使得 $\triangle PQR$ 為其內接正三角形。

二、每一個正 n 邊形的內接正三角形 PQR 皆可化為以 P 、 Q 或 R 為底的內角正三角形。若它是以 P 為底的標準型，且 P 所在的邊為 $\overline{A_0'A_0}$ ，那麼， $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ 且 $R \in \overline{A_{w-1}'A_w'}$ 。

此外，在以 P 為底的標準型中：

- (一) 若 $n \equiv 0 \pmod{3}$
則 Q 或 R 的存在範圍是整個邊長。
- (二) 若 $n \equiv 1 \pmod{3}$
則 Q 或 R 只會抵到 A_w 或 A_w' 。
- (三) 若 $n \equiv 2 \pmod{3}$
則 Q 或 R 只會抵到 A_{w-1} 或 A_{w-1}' 。



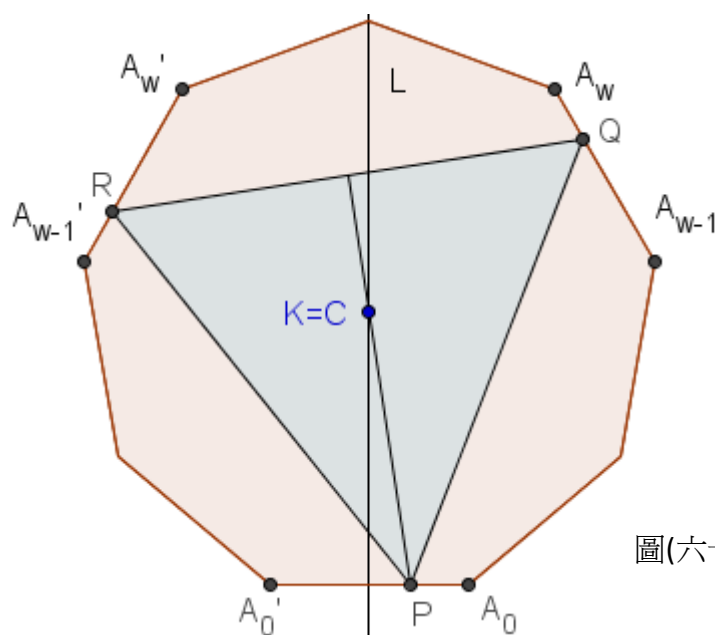
三、每一個以 P 為底的內接正三角形，其 $\angle P$ 的角平分線與底邊對稱軸的交點恆為定點 K 。

四、繪圖方式：

從任意點 P 出發，並令其所在的邊為 $\overline{A_0'A_0}$ 。

- (一) 若 $n \equiv 0 \pmod{3}$

只要 $\overline{A_wQ} = \overline{A_{w-1}'R} = \overline{A_0P}$ ，其中 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overline{A_{w-1}'A_w'}$
則 $\triangle PQR$ 即為該正 n 邊形的內接正三角形。

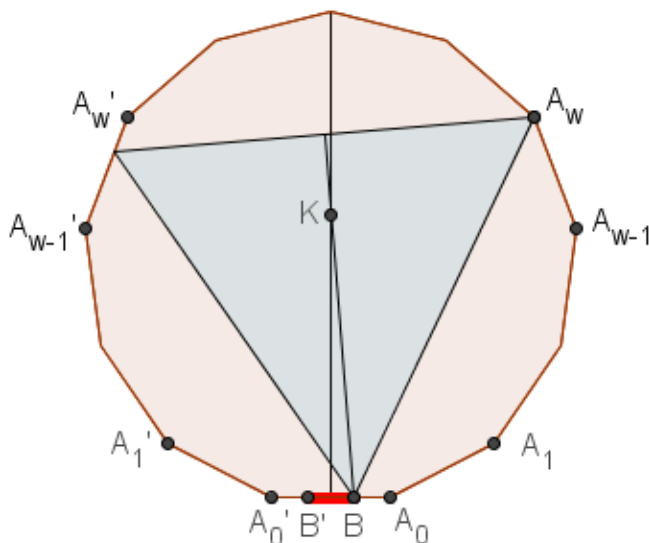


圖(六十)

(二) 若 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$

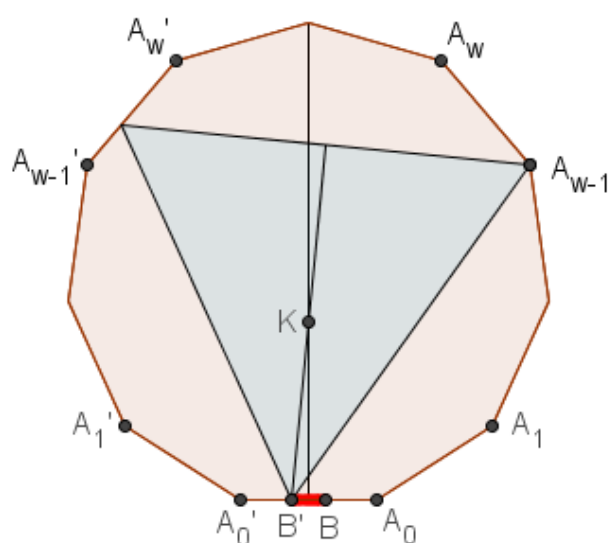
1. K 點可由下圖特殊的內接正三角形找到。

(1) 當 $n \equiv 1 \pmod{3}$



圖(六十一)

(2) 當 $n \equiv 2 \pmod{3}$



圖(六十二)

2. 要迅速找到 K 點，也可使用下列方法：設 Q 所在邊與底邊延長後相交於 E，以 E 為中心將 $\overrightarrow{QE}$ 旋轉 30° ，其與底邊對稱軸的交點即為 K 點。

3. 若 $P \in \overline{B'B} \Rightarrow$ 這是以 P 為底的標準型。

作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overline{A_{w-1}'A_w'}$ ，則 $\triangle PQR$ 即為該正 n 邊形的內接正三角形。

4. 若 $P \notin \overline{B'B}$

	若 $P \in \overline{A_0B}$	若 $P \in \overline{A_0'B'}$
若 $n \equiv 1 \pmod{3}$	這是以 R 為底的標準型	這是以 Q 為底的標準型
若 $n \equiv 2 \pmod{3}$	這是以 Q 為底的標準型	這是以 R 為底的標準型

五、圖形性質

(一) K 點與標準型底邊的距離 $k = \frac{\cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n}}{\tan \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$

(二) $\triangle PQR$ 的邊長 $t = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \theta}$

(三) 在以 P 為底的標準型中，

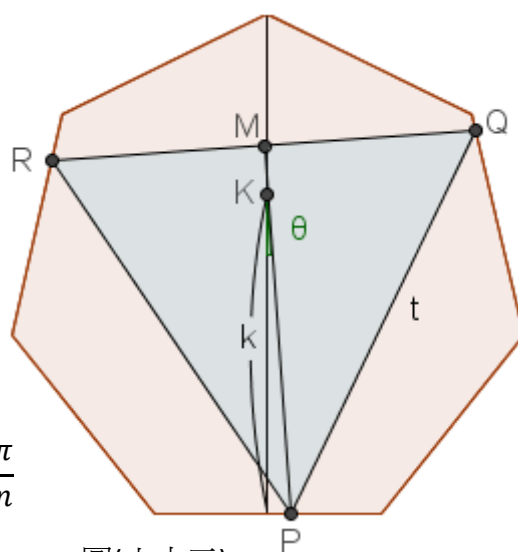
三頂點的存在範圍 u_P 、 u_Q 、 u_R ：

1. 若 $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$u_P = u_Q = u_R = \text{正 } n \text{ 邊形的邊長} = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

2. 若 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$

$$u_P = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n} \tan \frac{\pi}{3n}}{\tan \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}, \text{ 而 } u_P + u_Q + u_R = \text{正 } n \text{ 邊形的邊長且 } u_Q = u_R$$



圖(六十三)

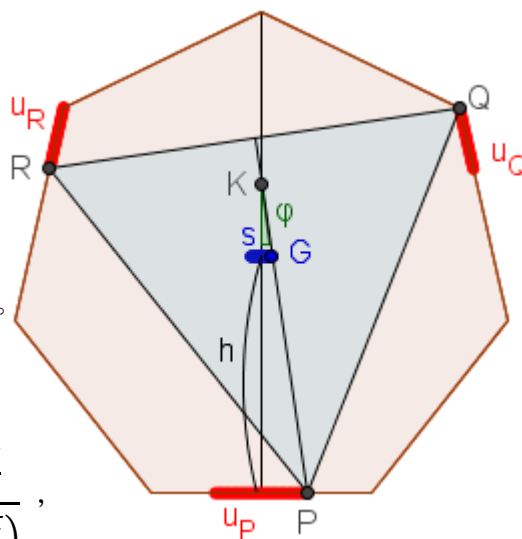
$$(四) \theta \text{ 的最大值 } \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{n}, & \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{\pi}{3n}, & \text{當 } n \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases}$$

(五) $\triangle PQR$ 重心 G 的軌跡

1. 若 $n \equiv 0 \pmod{3}$
 G 是一個定點，即該正 n 邊形的中心。
2. 若 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$
 G 的軌跡是一條平行底邊的線段，

$$\text{其與底邊的距離 } h = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3} \sin \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)},$$

$$\text{且其長度 } s = \frac{4 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{3n} \tan \frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3} \sin \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}, \text{ 與 } u_P \text{ 的比值爲 } \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{\sqrt{3} \cos \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}.$$



圖(六十四)

六、將所有內接正三角形畫出後

(一) 中央空白區域的圖形

1. 當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時，中央空白區域是由 n 條拋物線包圍出的圖形。
2. 當 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ 時，中央空白區域則是一個正 n 邊形：
 - (1) 若 n 是奇數，相對於原正 n 邊形，它不旋轉。
 - (2) 若 n 是偶數，相對於原正 n 邊形，它旋轉了 $\frac{\pi}{n}$ 弧度。

$$\text{而不論 } n \text{ 的奇偶，它與原正 } n \text{ 邊形的大小比爲 } \frac{\sqrt{3} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin \left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3n}} - \sec \frac{\pi}{n}.$$

(二) 若 n 不是 3 的倍數，內接正三角形的重心軌跡將是一個 n 芒星。

(三) 在以 P 為底的標準型中，除了 $n = 4$ 時的 $\overline{QR}$ 外， $\overline{PQ}$ 、 $\overline{PR}$ 、 $\overline{QR}$ 都將包絡出拋物線。

柒、未來展望

一、探討正 n 邊形內接正 m 邊形的情況？是否每個正 n 邊形都有無限多個內接正 m 邊形？

二、正多面體內接正四面體的情形？

捌、參考資料

一、大考中心 101 年學測試題

http://www.ceec.edu.tw/AbilityExam/AbilityExamPaper/101SAT_Paper/101SAT_PaperIndex0.htm

二、拋物線作圖

[http://web2.tcssh.tc.edu.tw/school/tcsshmath/yang/edu-parabola/parabola\(web1\).htm](http://web2.tcssh.tc.edu.tw/school/tcsshmath/yang/edu-parabola/parabola(web1).htm)

三、正方形內接正三角形作圖

<http://www.xzbu.com/9/view-849450.htm>

【評語】 040416

從正方形內接正三角形的計算與實作發現固定點 K 點的性質是解題的關鍵。通過 K 點可以做出所有內接正三角形，還有重心軌跡平行於底邊的性質，都蠻有意思的。作者進一步，還可以找出內接正三角所包絡的圖形，是一份很成熟的作品！建議思考，當 P 點變動時，正三角形面積是否有最大值或最小值？