中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040415

蜜蜂路徑－找回失落的數字

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄧宜欣	楊宗穎
高二 朱雅琪	吳銘祥

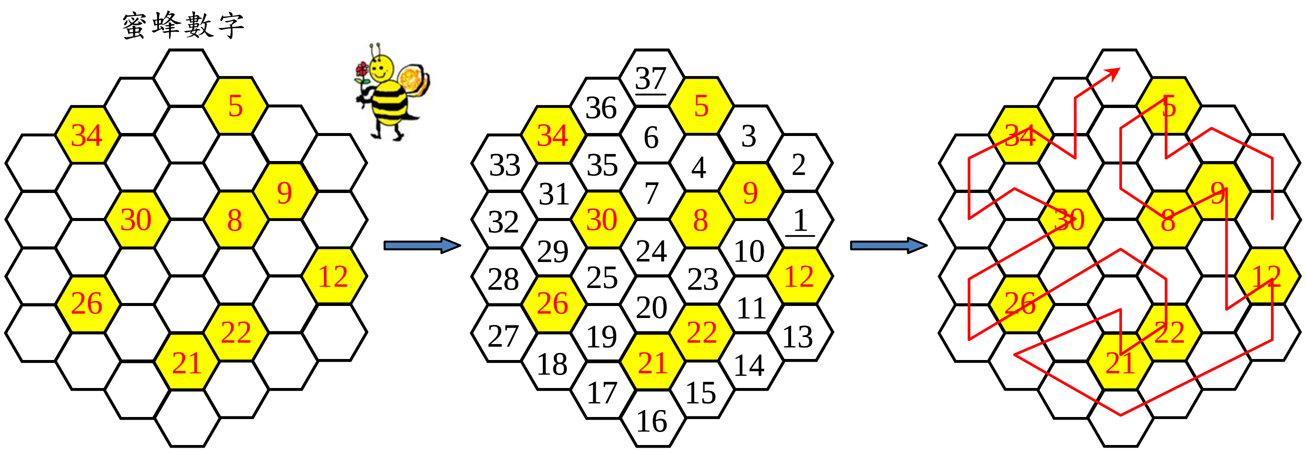
關鍵詞：n 階方陣、蜜蜂數字、一筆畫

摘要

給定 S 為 $\{1,2,3,\cdots,n^2\}$ 的一個子集合，並預先將 S 中的數字填入一個 n 階方陣。若能將剩餘自然數 $\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S$ 全部填入此方陣中尚未被 S 所佔據的格子，滿足『相鄰的數字需填入方陣中相鄰的區域』且『填入數字的方法是唯一的』，則稱 S 為 n 階方陣的一個『確定集』。由於子集合 S 的『元素個數』與『預先填入的位置』為此問題的重要條件，在本作品裡，我們探討確定集 S 所需的『最少元素個數』以及『填入 n 階方陣中的策略』，使得若刪除 S 中任何一個元素，則剩餘自然數填入方陣的方法皆不唯一。我們研究的手法是透過定義『連續對應函數』，並觀察低階方陣的特例，找出最小確定集的條件並加以推廣到一般情形。我們也觀察了填入路線，與路線轉折次數所造成的影響，並得出一些有趣的數學性質。

壹、研究動機

許多報紙的副刊中都會附上腦力激盪的小遊戲，最常見的就是各種形式的數獨。我們偶然在2013年7月7日（星期日）的聯合報上看到一個特別的遊戲−− 蜜蜂數字。它有些類似數獨，但在細節上又不太一樣。同樣是遊戲設計者先在部分格子中給定特定數字，然後由玩家將剩餘數字填入剩下的格子內，不過蜜蜂數字填數字的規則是：『從1開始，以相鄰且不間斷的方式將數字填入格子內』（因為這個正六邊形鑲嵌圖共有37個格子，故要填入的數字為1~37）。在嘗試了這個遊戲後，我們不禁好奇：它事先給定的數字，真的能造成唯一的解答嗎？而在這樣的圖形內，最少要事先給玩家幾個數字才可能使解答唯一？其解答也可視為一筆畫路徑的方法。



（初始狀態）　　　　（連續對應）　　　　（一筆畫路徑）

轉換此問題，我們將原本正鑲嵌圖中的正六邊形改成正方形來研究，也就是以方陣來探討這個遊戲。遊戲規則是：『在 $n\times n$ 的方陣中，從1開始，將數字 $1\sim n^2$ 以相鄰且不間斷的方式填入格子中；然而部分特定的格子已經被編號（已填入數字），因此玩家只需要將剩餘的數字填入剩下的格子』。同樣的，我們關心的是在設計遊戲時『事先可給定哪些數字？』以及『該擺放在哪些位置？』

在傳統的數獨遊戲中，目前已知至少要給定17個數才能保證有唯一解，然而在有唯一解的前提下，是否存在16個初始數的數獨題目呢？2012年1月1日，都柏林大學的*Gary McGuire*利用計算機已證明出『不存在16個初始數的數獨題目』，意即，在數獨遊戲中，最少需給定17數才能有唯一解。所以在我們的研究問題當中，我們同樣關心至少需填入多少個數字。因此我們要探討的是：在n階方陣中，該如何事先填入最少的數字，使其餘數字填入的方法唯一。

貳、研究目的

對於一個$n\times n$方陣，設計一個$\{1,2,3,\cdots,n^2\}$的子集合S_n，並將S_n中的數字預先安排在方陣中特殊的位置，滿足下列兩個條件：

（1） 能將其餘數字$\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S_n$也填入同一個被S_n佔據部分位置的方陣中時，相鄰的自然數可被安排在方陣中相鄰的位置，且填入方法唯一。

（2） 若在此方陣中刪除S_n中任意一個數字，皆會造成其餘數字填入的方法不唯一。

對於這個特殊的子集合S_n，我們欲說明存在一種策略，能將S_n中的數字預先填入n階方陣的特殊位置，並且能滿足上述兩個條件。

參、研究設備及器材

方格紙、筆、電腦、繪圖程式（powerpoint、word）、mathtype。

肆、研究過程或方法

一、基本概念與名詞解釋

對於一個$n\times n$的方陣，以下我們簡稱n階方陣，共有n^2個位置$\{a_{ij}\mid 1\le i\le n, 1\le j\le n\}$，如同矩陣的表示法，$i$代表列數，$j$代表行數，而$a_{ij}$即代表此方陣中第$i$列第$j$行的位置。此外，若方陣中$a_{i_1j_1}$與$a_{i_2j_2}$相鄰，則表示為『$a_{i_1j_1}\sim a_{i_2j_2}$』。若將此方陣中$n^2$個位置與自然數$\{1,2,\cdots,n^2\}$做一對一的對應，並要求相鄰的自然數必須由方陣中相鄰的位置所對應，我們將此對應的方式稱為**『連續對應』**。換句話說，所謂連續對應是一對一函數$f:\{a_{ij}\mid 1\le i,j\le n\}\to\{1,2,\cdots,n^2\}$，滿足『若$|f(a_{i_1j_1})-f(a_{i_2j_2})|=1$，則$a_{i_1j_1}\sim a_{i_2j_2}$』。

考慮1×1的方陣，則函數$f(a_{11})=1$即為一個連續對應函數。

考慮2×2的方陣，方陣中的位置為$\{a_{ij}:1\le i,j\le 2\}$，若定義函數$f:\{a_{ij}\mid 1\le i,j\le 2\}\to\{1,2,3,4\}$為$f(a_{11})=1$、$f(a_{21})=2$、$f(a_{22})=3$、$f(a_{12})=4$，則此函數即為一個連續對應函數。

為了方便函數的表達，我們可以用方陣搭配數字的圖表來呈現一個連續對應函數。將上述兩個函數以圖表呈現，即如下圖所示：

1

1	4
2	3

再以3階方陣為例，方陣中的位置為$\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le 3\}$，我們可以用圖表來表示一個連續對應函數$f:\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le 3\} \to \{1,2,\cdots,9\}$的對應關係。以下例說明：

1	8	9
2	7	6
3	4	5

上圖即表示定義函數$f:\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le 3\} \to \{1,2,\cdots,9\}$為$f(a_{11})=1$，$f(a_{21})=2$，$f(a_{31})=3$，$f(a_{32})=4$，$f(a_{33})=5$，$f(a_{23})=6$，$f(a_{22})=7$，$f(a_{12})=8$，$f(a_{13})=9$。

由此概念可知，一個連續對應函數可以用一個簡單的圖表來呈現。而為了方便起見，以下我們將利用圖表來表示一個連續對應函數。

對於一個n階方陣，當然存在有許多不同的連續對應函數，例如：

1	4
2	3

1	2
4	3

3	2
4	1

此三個圖表皆可視為2階方陣的連續對應函數。

1	4
3	2

則無法視為2階方陣的連續對應函數（因為相鄰的數字不在方陣中相鄰位置）。

我們可以知道：對於n階方陣，隨著自然數n的增加，連續對應函數的數量將隨之增加。如欲使n階方陣的連續對應函數唯一，則可利用給定若干函數值來限制其連續對應函數的數量。

對於一對一函數$f:\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\} \to \{1,2,\cdots,n^2\}$，限制若干位置的函數值，可能會造成下列幾種狀況：

1. 函數$f:\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\} \to \{1,2,\cdots,n^2\}$可能不為連續對應。

2. 若函數$f:\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\} \to \{1,2,\cdots,n^2\}$仍為連續對應，則其數量可能減少。

舉例來說，對於 2 階方陣：在不限制任何函數值的情況下，考慮旋轉以及翻轉，共存在八種不同的連續對應：

1	4	4	3	3	2	2	1	1	2	4	1	3	4	2	3
2	3	1	2	4	1	3	4	4	3	3	2	2	1	1	4

（1）若先給定 $f(a_{11})=1$、 $f(a_{22})=2$，則不存在連續對應。

（2）若先給定 $f(a_{11})=1$，則存在兩種不同的連續對應。

1	2		1	4
4	3		2	3

（3）若先給定 $f(a_{11})=1$、 $f(a_{12})=4$，則僅存在一種連續對應。

1	4
2	3

我們的問題是：『對於 n 階方陣，事先給定若干個函數值，能否使得連續對應函數是唯一的。』此問題等價於，給定一個 n 階方陣，其中若干的位置上已填有某些自然數，則是否能將自然數集合 $\{1,2,\cdots,n^2\}$ 全部填入此方陣，滿足相鄰的數字需填入方陣中相鄰的位置，且填入數字的方法必須是唯一的

接下來以 3 階方陣為例：

（1）若給定 $f(a_{22})=1$、 $f(a_{23})=4$、 $f(a_{31})=7$，則等價於給定此 3 階方陣（如圖），由此圖表可知此 3 階方陣可完成連續對應，且填入數字的方法唯一。

	1	4
7		

【說明】

(1) 考慮 4~7 中，5、6 必須填入 a_{33}、 a_{32}，使其滿足連續對應（如下圖）。

	1	4
7	6	5

(2) 由於與 7 相鄰位置只剩 a_{21}，則必填入 8；而 9 亦可接續填入 a_{11}。

9		
8	1	4
7	6	5

(3)剩餘 a_{12} 、 a_{13} 則必為 2、3。

9	2	3
8	1	4
7	6	5

■

（2）若給定 $f(a_{12})=1$ 、 $f(a_{23})=4$ 、 $f(a_{31})=7$ ，則等價於給定3階方陣（如圖），由此圖表可知此 3 階方陣無法完成連續對應。

	1	
		4
7		

【說明】

考慮與 1 相鄰的位置只有 a_{11} 、 a_{13} 、 a_{22} ：

(1) 若 2 填入 a_{11} ，由於沒有格子同時與 a_{11} 及 a_{23} 相鄰，因此 3 無位置可以填入，故無法完成連續對應（如下圖）。

2	1	
		4
7		

(2) 若 2 填入 a_{13} ，因為沒有格子與 a_{13} 相鄰，因此 3 無位置可以填入，故無法完成連續對應(如下圖)。

	1	2
		4
7		

(3) 若 2 填入 a_{22} ，同樣因為沒有格子同時與 a_{22} 及 a_{23} 相鄰，因此 3 無位置可以填入，故無法完成連續對應(如下圖)。

	1	
	2	4
7		

■

由上述幾個階數較少的例子解釋，不難得知，事先給定的數字必須安排在恰當的位置，方能完成連續對應，且填入其餘數字的方法是唯一的。

為了方便後續的論述，我們須先定義下列幾個名詞。

首先，考慮 n 階方陣，對於一個自然數集合 $S \subseteq \{1,2,3,\cdots,n^2\}$，針對下列條件分別給予不同的名詞定義。

條件(1)： 能將 S 中的數字預先安排在 n 階方陣的特殊位置當中，且使得 $\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S$ 亦能安排在同一方陣當中，並滿足相鄰的數字需填入方陣中相鄰的位置。此條件意指：將 S 安排在 n 階方陣的特殊位置後，仍可定義出連續對應函數。

條件(2)： 在滿足條件(1)的情況下，$\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S$ 安排的方法唯一。此條件即是指：將 S 安排在 n 階方陣的特殊位置後，定義的連續對應函數具有唯一性。

若 S 能滿足條件(1)，則稱 S 為 n 階方陣的 **『對應集』**。

若 S 為 n 階方陣的對應集，且滿足條件(2)，則稱 S 為 n 階方陣的 **『確定集』**。

不難得知，若 S 為 n 階方陣的確定集，則 S 必為 n 階方陣的對應集（反之不一定成立）。若 S 為 n 階方陣的對應集，則 S 的任意子集合也必為 n 階方陣的對應集。

Claim 1： 對於任意自然數 n，$\{1,2,3,\cdots,n^2\}$ 的任意子集合 S 皆為 n 階方陣的對應集。

【說明】

欲得知 S 是否為 n 階方陣的對應集，則須事先將 S 中的數字安排在 n 階方陣當中，接著確定 $\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S$ 亦可安排在同一方陣當中，且滿足相鄰的數字須在方陣中相鄰的位置。

首先，針對任意自然數 n，定義一個函數 $f(a_{ij}) \to \{1,2,3,\cdots,n^2\}$，此函數定義為：

$$f(a_{ij}) = \begin{cases} ni-(n-j) & if \quad i \quad is \quad odd \\ ni-(j-1) & if \quad i \quad is \quad even \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le n$$

對於自然數 n，函數 $f(a_{ij})$ 可以用 n 階方陣的圖表來呈現（如下圖）。

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

$(n=4)$

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

$(n=5)$

此時，若給定任意子集合 S ，我們即可以依此函數 $f(a_{ij})$ 將數字填入方陣中。換句話說，給定任意子集合 S ，我們皆可以得到一個 n 階方陣圖表。而此 n 階方陣圖表即是在原本 n 階方陣中，只保留 S 中的數字。因此可以確定 $\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S$ 亦能依上述函數 $f(a_{ij})$ 安排在同一方陣當中，且相鄰的數字在方陣中相鄰的位置。所以即可確定 S 為 n 階方陣的對應集。藉由以上方法，我們可以有 Claim 1 的結果。■

在定義了「對應集」與「確定集」2 個名詞後，我們要對「確定集」做更進一步的解釋。令 S 為一個 n 階方陣的確定集，即表示存在一種方法可以將 S 中的數字安排在 n 階方陣的特殊位置中，且能定義出連續對應函數。以同一方法將 S 中的數字安排於 n 階方陣後，在「集合 S 中的數字於 n 階方陣中位置不變」的條件下，若刪去 S 中任意一個數字，皆無法定義出唯一的連續對應函數，則稱 S 為 n 階方陣的**『極小確定集』**。以下面例子來做解釋：

例①： 同樣由之前的例子可知3階方陣（如圖）可完成連續對應，且定義出的連續對應函數是唯一的。故集合 $S=\{1,4,7\}$ 為3階方陣的一個確定集。然而若我們刪去 S 中任意一個數字，則此方陣皆會有兩個以上的連續對應函數，故 $S=\{1,4,7\}$ 即為3階方陣的一個極小確定集。

	1	4
7		

【說明】

刪除 1：

		4
7		

$\xrightarrow{\text{路線不唯一}}$

9	2	3
8	1	4
7	6	5

1	2	3
6	5	4
7	8	9

刪除 4：

	1	
7		

$\xrightarrow{\text{路線不唯一}}$

9	2	3
8	1	4
7	6	5

5	4	3
6	1	2
7	8	9

刪除 7：

	1	4

$\xrightarrow{\text{路線不唯一}}$

9	2	3
8	1	4
7	6	5

7	6	5
8	1	4
9	2	3

例②：若給定 $f(a_{11})=1$、$f(a_{12})=4$，則等價於給定3階方陣（如圖）。由此圖可知此3階方陣可以完成連續對應，且定義出的連續對應函數是唯一的。故集合 $S=\{1,4\}$ 為3階方陣的一個確定集。

1	4	

【說明】

(1)考慮1 ~ 4 中，2 、3必須填入 a_{21} 、 a_{22} 。

1	4	
2	3	

(2)由於與4相鄰的位置只剩 a_{13} ，則5, 6, 7, 8, 9亦可接續填入 a_{23} 、 a_{33} 、 a_{32} 、 a_{31} 。

1	4	5
2	3	6
9	8	7

然而若我們刪去 S 中任意一個數字，則此方陣不會有唯一的連續對應函數，故 $S=\{1,4\}$ 即為3階方陣的一個極小確定集。

【說明】

刪除 1 ：

	4	

路線不唯一 →

1	4	5
2	3	6
9	8	7

3	4	5
2	1	6
9	8	7

刪除 4 ：

1		

路線不唯一 →

1	4	5
2	3	6
9	8	7

1	2	3
8	7	4
9	6	5

■

由例①、例②我們可以知道：3階方陣的極小確定集中，有的集合包含3個元素，也有些集合只包含2個元素。可見 n 階方陣的極小確定集中，其元素個數不是只有一種可能。因此考慮 n 階方陣中的所有極小確定集，所有極小確定集的元素個數稱為**『確定數』**，並記為 R_n 。意即

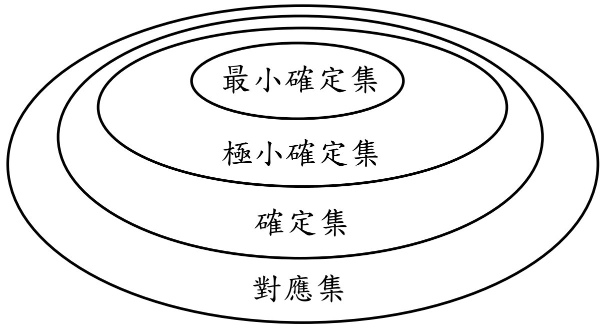
$$R_n=\{|S|\,|\,S\text{為}n\text{階方陣的極小確定集}\}\text{為}n\text{階方陣的確定數。}$$

由上述例子可知，當$n=3$時，$\{2,3\}\subseteq R_3$。而對於n階方陣，考慮所有的極小確定集，其元素個數最少的集合，我們稱為『**最小確定集**』，而最小確定集的元素個數定義為『**最小確定數**』，並以符號記為$M(n)$。意即：

$$M(n)=\min\{|S|\mid S\text{為}n\text{階方陣的極小確定集}\}\text{為}n\text{階方陣的最小確定數。}$$

若S為極小確定集且滿足$|S|=M(n)$，則S即為n階方陣的最小確定集。

對於以上定義的名詞，我們可用文氏圖來表示各集合定義之間的包含關係。



二、簡單的例子說明

> **Claim 2**：(1) 空集合ϕ為1階方陣的一個最小確定集，意即最小確定數$M(1)=0$。
> (2) 集合$\{1,4\}$為2階方陣的一個最小確定集，意即最小確定數$M(2)=2$。

【說明】

(1) 1階方陣只有一格，所以不需安排任何數字，即可確定要填入1，且為連續對應函數。故可知ϕ為1階方陣的一個極小確定集。而此空集合必為所有極小確定集中元素個數最少的集合（因為元素個數為零），因此空集合ϕ為1階方陣的一個最小確定集，而最小確定數$M(1)=0$。

(2) 2階方陣中，若將集合$\{1,4\}$的1、4分別安排在a_{11}、a_{12}（參考下圖），則$\{1,\cdots,2\}^2-\{1,4\}\quad\{2,3\}$。

1	4

由於與1相鄰的位置只剩a_{21}，若欲使其成為連續對應函數，2必填於a_{21}，則最後的3必填入所剩唯一的a_{22}。由此可得知在確定集合$\{1,4\}$中的數字已安排在2階方陣的特殊位置之後，所能定義出的連續對應函數是唯一的。

1	4
2	3

保持集合$\{1,4\}$在2階方陣中的位置，我們還需確定，若任意刪除其中一個數字，是否無法定義出唯一的連續對應函數。若是，則集合$\{1,4\}$為2階方陣的一個極小確定集。

①若刪除1，則無法定義出唯一的連續對應函數：

1	4
2	3

3	4
2	1

②若刪除4，亦無法定義出唯一的連續對應函數：

1	4
2	3

1	2
4	3

至此，我們可以確定集合$\{1,4\}$為2階方陣的一個極小確定集。

欲進一步確定集合$\{1,4\}$是否為2階方陣的一個最小確定集，則須先檢驗是否存在元素個數少於2的極小確定集。

若以上述方法檢驗$\{1,\cdots,2^2\}$所有子集合中元素個數少於2的集合：ϕ、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{4\}$是否為2階方陣的一個極小確定集。可得知這些集合皆不是2階方陣的極小確定集，因此可以確定不存在元素個數少於2的極小確定集。故得知集合$\{1,4\}$為2階方陣的一個最小確定集，而最小確定數$M(2)=2$。■

給定一個自然數子集S，該如何檢驗S是否為n階方陣的極小確定集呢？依照極小確定集的定義，檢驗方法分為下列幾個步驟：

a. 首先我們必須在n階方陣中選定特定的位置，並將S中的數字安排在這些位置內。
b. 將$\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S$填入n階方陣中剩餘的位置，使其能成為一個連續對應函數。
c. 在確定S中的數字已安排在n階方陣之後，確保所能定義出的連續對應函數是唯一的。
d. 在保持S在n階方陣中的位置，若任意刪除S中的一個數字，皆無法定義出唯一連續對應函數。
若能說明一個自然數子集S能滿足上述四個條件，則可確認S為n階方陣的極小確定集。

Claim 3： 集合$\{1,4\}$為3階方陣的最小確定集，意即$M(3)=2$。

【說明】

1	4	

首先，依據上述步驟檢驗集合$\{1,4\}$是否為3階方陣的極小確定集。
(a): 3階方陣中，若將集合$\{1,4\}$的1、4分別安排在a_{11}、a_{12}（參考右圖），則$\{1,\cdots,3^2\}-\{1,4\}=\{2,3,5,6,7,8,9\}$。

(b,c): 由於與1相鄰的位置只剩a_{21}，若欲使其成為連續對應函數，2必填於a_{21}；此時，同時與2、4相鄰的位置只有a_{22}，所以3必填於a_{22}（參考左下圖）；則剩餘的5、6、7、8、9必只能分別填入a_{13}、a_{23}、a_{33}、a_{32}、a_{31}（參考右下圖）。由此可得知在確定集合$\{1,4\}$中的數字已

安排在3階方陣之後，所能定義出的連續對應函數是唯一的。

1	4	
2	3	

1	4	5
2	3	6
9	8	7

(d): 保持集合$\{1,4\}$在3階方陣中的位置，我們還需確定若任意刪除其中一個數字，是否無法定義出唯一的連續對應函數。若是，則集合$\{1,4\}$為3階方陣的一個極小確定集；若否，則集合$\{1,4\}$不為3階方陣的一個極小確定集。

①若刪除1，則無法定義出唯一的連續對應函數：

1	4	5
2	3	6
9	8	7

3	4	5
2	1	6
9	8	7

②若刪除4，亦無法定義出唯一的連續對應函數：

1	4	5
2	3	6
9	8	7

1	2	3
8	7	4
9	6	5

至此，我們可以確定集合$\{1,4\}$為3階方陣的一個極小確定集。
欲進一步確定集合$\{1,4\}$是否為3階方陣的一個最小確定集，則需先檢驗是否存在元素個數少於2的極小確定集。

若以上述方法檢驗$\{1,\cdots,3^2\}$所有子集合中元素個數少於2的集合：ϕ、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{4\}$、$\{5\}$、$\{6\}$、$\{7\}$、$\{8\}$、$\{9\}$是否為3階方陣的一個極小確定集。可得知這些集合皆不是3階方陣的極小確定集，因此可以確定不存在元素個數少於2的極小確定集。故得知集合$\{1,4\}$為3階方陣的一個最小確定集，而最小確定數$M(3)=2$。■

有了 Claim 3 的結論後，我們試圖找出 3 階方陣所有的最小確定集。

Claim 4： 3階方陣中，最小確定集只有八種類型。

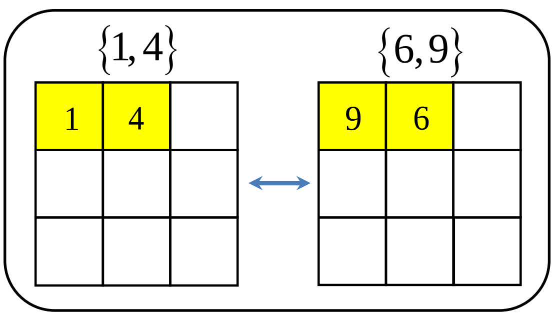
【說明】

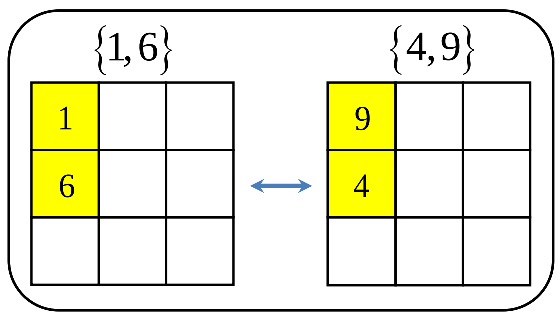
從 Claim 3 的結論我們可以知道：在3階方陣當中，最少必須給定2個數字才能使路線唯一。
以下，我們找出所有最小確定集的可能和其擺放方式。
在3階方陣中，任選2個數字安排在方陣中，共有 $C_2^9 = 36$ 種不同的選法，而根據方陣的對稱性，我們可以知道：給定 $\{1,2\}$ 相當於給定 $\{8,9\}$，給定 $\{2,3\}$ 相當於給定 $\{7,8\}$。

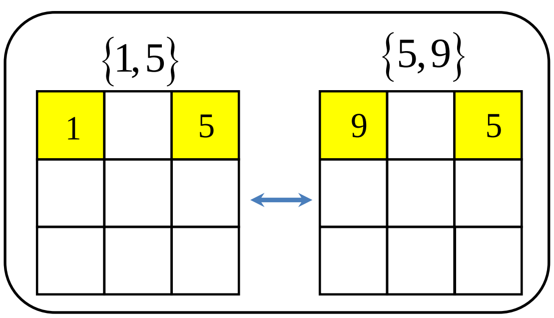
所有可能：

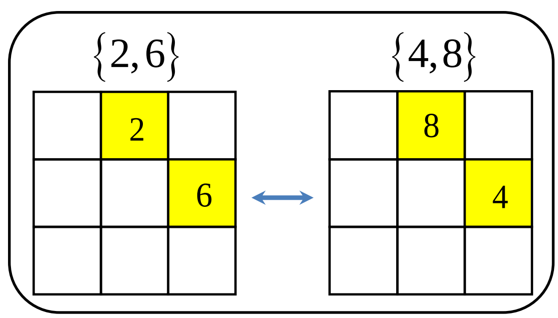
$\{1,2\} \leftrightarrow \{8,9\}$	$\{2,3\} \leftrightarrow \{7,8\}$	$\{3,4\} \leftrightarrow \{6,7\}$	
$\{1,3\} \leftrightarrow \{7,9\}$	$\{2,4\} \leftrightarrow \{6,8\}$	$\{3,5\} \leftrightarrow \{5,7\}$	
$\{1,4\} \leftrightarrow \{6,9\}$	$\{2,5\} \leftrightarrow \{5,8\}$	$\{3,6\} \leftrightarrow \{4,7\}$	
$\{1,5\} \leftrightarrow \{5,9\}$	$\{2,6\} \leftrightarrow \{4,8\}$	$\{3,7\}$	
$\{1,6\} \leftrightarrow \{4,9\}$	$\{2,7\} \leftrightarrow \{3,8\}$		
$\{1,7\} \leftrightarrow \{3,9\}$	$\{2,8\}$	$\{4,5\} \leftrightarrow \{5,6\}$	
$\{1,8\} \leftrightarrow \{2,9\}$		$\{4,6\}$	
$\{1,9\}$			

因為數字的對稱性，所以接下來我們僅需討論方框內的 20 種可能即可。
以下是我們找出可確定唯一路線的集合：（由於無法確定唯一路線的方法太多，故不逐一列舉）

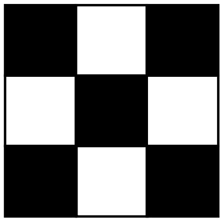








首先，根據數字的奇偶性我們可以知道：在 3 階方陣中，有 5 個奇數，4 個偶數，所以奇數必定放在下圖中的黑色格子，而偶數就放在白色格子。



而依據 3 階方陣的可翻轉性，圖一及圖二所代表的意義是相同的。

1	4	

(圖一)

1		
4		

(圖二)

（**1**）以{1,4}為例，其所有可能的擺法如下：

(Ⅰ)

1	4	

(Ⅱ)

	1	4

(Ⅲ)

1		
	4	

但(Ⅱ)、(Ⅲ)皆無法確定出唯一路線，而(Ⅰ)可以。所以{1,4}為 3 階方陣的最小確定集且擺法必定為(Ⅰ)。

(Ⅱ)

	1	4

$\xrightarrow{\text{路線不唯一}}$

7	6	5
8	1	4
9	2	3

9	2	3
8	1	4
7	6	5

(Ⅲ)

1		
	4	

$\xrightarrow{\text{路線不唯一}}$

1	8	7
2	9	6
3	4	5

1	6	7
2	5	8
3	4	9

（2）再來看到 {1,5} ，其所有可能的擺法如下：

(I)

1		**5**

(II)

1		
	5	

(III)

1		
		5

(IV)

5		
	1	

在這四種擺法中，只有(I)可以確定出一條唯一路線，所以 {1,5} 為 3 階方陣的最小確定集且擺法必為(I)。

(II)

1		
	5	

路線不唯一 →

1	2	3
6	**5**	4
7	8	9

1	6	7
2	**5**	8
3	4	9

(III)

1		
		5

路線不唯一 →

1	2	3
8	7	4
9	6	**5**

1	8	9
2	7	6
3	4	**5**

(IV)

5		
	1	

路線不唯一 →

5	6	7
4	**1**	8
3	2	9

5	4	3
6	**1**	2
7	8	9

（3）接著，{1,6} 所有可能的擺法有：

(I)

1		
6		

(II)

1		
	6	

(III)

	6	
	1	

這三種擺法中，只有(I)可以確定出一條唯一路線，所以 {1,6} 為 3 階方陣的最小確定集且擺法必定為(I)。

（Ⅱ）

1		
	6	

路線不唯一 →

1	2	3
8	7	4
9	6	5

1	2	9
4	3	8
5	6	7

（Ⅲ）

	6	
	1	

路線不唯一 →

7	6	5
8	1	4
9	2	3

5	6	7
4	1	8
3	2	9

（4）最後，{2,6}的擺法只有兩種可能性：

（Ⅰ）

	2	
		6

（Ⅱ）

	2	
	6	

其中只有(Ⅰ)可以確定出一條唯一路線，所以{2,6}為 3 階方陣的最小確定集且擺法必定為(Ⅰ)。

（Ⅱ）

	2	
	6	

路線不唯一 →

1	2	3
8	7	4
9	6	5

1	2	3
8	9	4
7	6	5

由上述討論可知，對於3階方陣，最小確定集僅有{1,4}、{6,9}、{1,5}、{5,9}、{1,6}、{4,9}、{2,6}、{4,8}等八種情形。■

Claim 5：集合{1,4,16}為4階方陣的極小確定集。

【說明】

在此，我們依據上面整理的步驟檢驗集合{1,4,16}是否為4階方陣的極小確定集。

(a):在 4 階方陣中，若將集合 $\{1,4,16\}$ 中的 1 、 4 、 16 分別安排在 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{14} （參考下圖），則 $\{1,2,3,\cdots,4^2\}-\{1,4,16\}=\{2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ 。

1	4		16

(b,c):由於與 1 相鄰的位置只剩 a_{21}，若欲使其成為連續對應函數，2 必填於 a_{21}；此時，同時與 2 、 4 相鄰的位置只有 a_{22} ，所以 3 必填於 a_{22} （參考左下圖）；接著，若欲將集合 $\{1,2,3,\cdots,4^2\}$ 中剩餘的數字填入此方陣中且成為連續對應函數，則剩餘的 5~15 必只能依序填入 a_{13} 、 a_{23} 、 a_{33} 、 a_{32} 、 a_{31} 、 a_{41} 、 a_{42} 、 a_{43} 、 a_{44} 、 a_{34} 、 a_{24}（參考右下圖）。由此可得知在確定集合 $\{1,4,16\}$ 中的數字已安排在 4 階方陣之後，所能定義出的連續對應函數是唯一的。

1	4		16
2	3		

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

(d):保持集合 $\{1,4,16\}$ 在 4 階方陣中的位置，我們還需確定若任意刪除其中一個數字，是否無法定義出唯一的連續對應函數。若是，則集合 $\{1,4,16\}$ 為 4 階方陣的一個極小確定集；若否，則集合 $\{1,4,16\}$ 不為 4 階方陣的一個極小確定集。

①若刪除 1，無法定義出唯一的連續對應函數。

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

3	4	5	16
2	1	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

②若刪除 4 ，亦無法定義出唯一的連續對應函數。

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

1	2	3	16
8	7	4	15
9	6	5	14
10	11	12	13

③若刪除16，同樣無法定義出唯一的連續對應函數。

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

1	4	5	6
2	3	8	7
15	14	9	10
16	13	12	11

因此，我們可以確定集合$\{1,4,16\}$為4階方陣的一個極小確定集。■

三、主要定理

在觀察許多的例子之後，對於極小確定集，我們發現了以下結果：

Theorem 1：對於任意自然數n，在n階方陣中，若S_n定義為

$$S_n=\begin{cases}\phi & if \quad n \quad is \quad 1\\ \{1,4,\cdots,(2k)^2,\cdots,n^2\} & if \quad n \quad is \quad even\\ \{1,4,\cdots,(2k)^2,\cdots,(n-1)^2\} & if \quad n\neq 1 \quad is \quad odd\end{cases}$$

，則S_n必為n階方陣的一個極小確定集。

當$n=1$時，$S_1=\phi$為1階方陣的極小確定集是顯然的。

然而我們知道，一個最小確定集必為極小確定集，由先前 Claim 2，Claim 3 的結論，可知當$n=2$時，$S_2=\{1,4\}$為2階方陣的極小確定集。當$n=3$時，$S_3=\{1,4\}$為3階方陣的極小確定集。再由 Claim 5 可知$S_4=\{1,4,16\}$為4階方陣的極小確定集。

因此對於$n=1,2,3,4$，Theorem 1 中的敘述皆成立。為了完整的證明我們的主要定理，我們必須先規定以下符號並說明幾個必要的引理。

對自然數n，定義自然數集合S_n如下：

$$S_n=\begin{cases}\phi & if \quad n \quad is \quad 1\\ \{1,4,\cdots,(2k)^2,\cdots,n^2\} & if \quad n \quad is \quad even\\ \{1,4,\cdots,(2k)^2,\cdots,(n-1)^2\} & if \quad n\neq 1 \quad is \quad odd\end{cases}。$$

欲說明S_n為n階方陣的一個對應集，須先將S_n中的數字適當的安排在n階方陣中。進一步，維持S_n中的數字在方陣中的位置，須建構一對一的函數$f:\{a_{ij}\mid 1\le i,j\le n\}\to\{1,2,\cdots,n^2\}$，使其成為連續對應函數。建構出的連續對應函數若具有唯一性，意味著S_n亦為n階方陣的一個確定集。

針對自然數 $n \ge 2$，首先定義一個特殊的函數 $f_n : \{a_{11}\} \cup \{a_{1(2k)} \mid 1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\} \to S_n$，函數定義為

$$f_n(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & if \quad i = j = 1 \\ (j)^2 & if \quad i = 1, j = 2k, 1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}。$$

對於自然數 $n \ge 2$，函數 f_n 可以用 n 階方陣的圖表來呈現，如下所示：
當 $n = 2,3$，函數 f_n 以圖表來呈現分別為：

1	4

、

1	4	

當 $n = 4,5,6$，函數 f_n 以圖表來呈現分別為：

1	4		16

、

1	4		16	

、

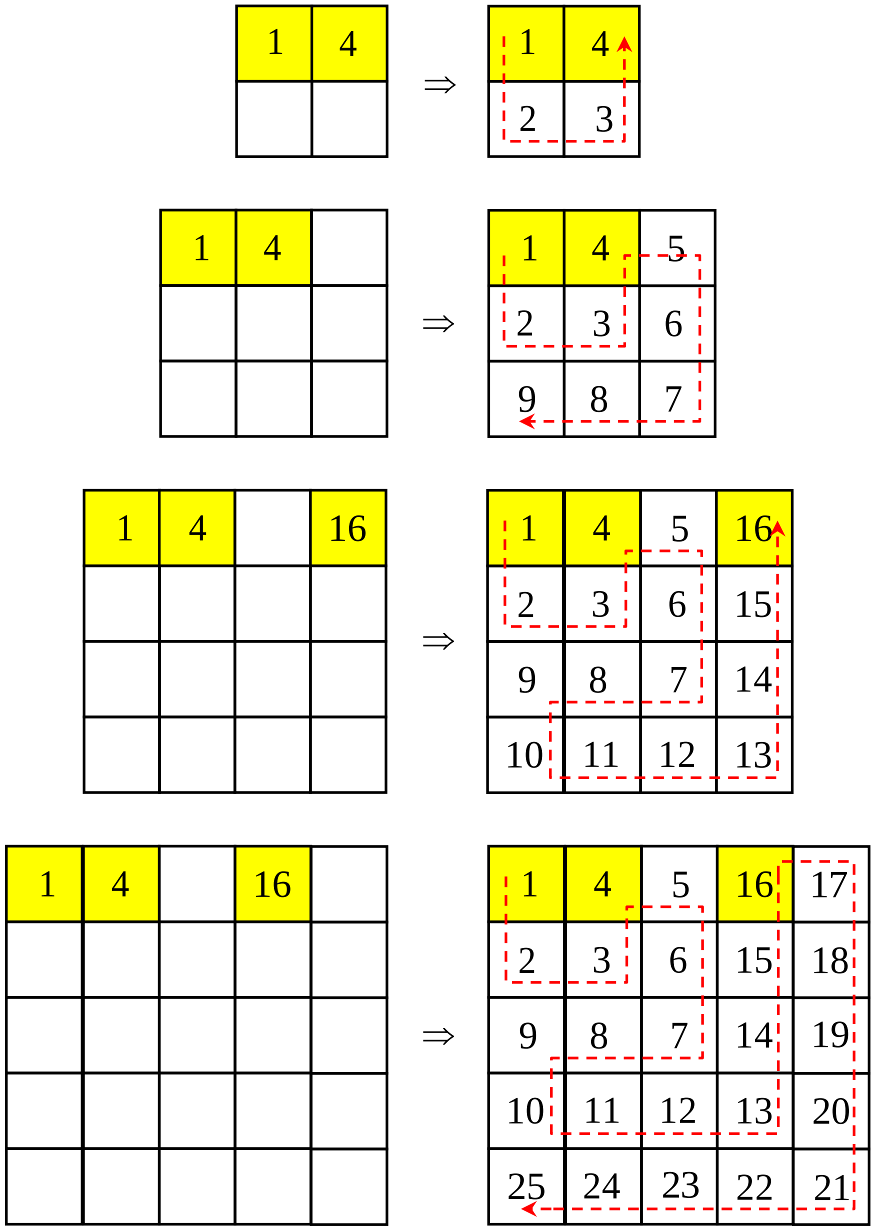
1	4		16		36

（對於其它自然數，函數 f_n 的圖表可以此類推）

Lemma 1：任意自然數 $n \ge 2$，考慮 n 階方陣。函數 f_n 可擴充為連續對應函數。

【證明】
對於自然數 $n \ge 2$，函數 f_n 可用圖表來呈現。
一個連續對應函數也可用圖表來表示。
欲說明函數 f_n 可擴充為連續對應函數，我們只需將函數 f_n 的圖表，擴充為連續對應函數的圖表即可。

參考下列圖表的擴充方式，函數 f_n 將決定陰影部分的數字，我們可以用一種規律的方式，在維持陰影部分數字的位置的條件下，將自然數依序填入方陣中，每次皆先填滿階數較小的方陣，再依序圍繞方陣的右邊與下邊以完成下一個階數的方陣。其圖表的擴充方式，如下圖所示（以下只列出 $n = 2,3,4,5,6$ 的例子，其餘依此類推）：



由於圖表擴充的方式，每次皆是以完成方陣的數字為一個段落，再接續進行擴充圖表的動作，因此不難得知所有完全平方數必出現在方陣中第一列或第一行的位置。因此這樣的圖表擴充方式，說明了對任意自然數 $n \geq 2$ ，函數 f_n 皆可擴充為 n 階方陣的連續對應函數。故 Lemma 1 得證。■

有鑑於上述引理中，我們將函數 f_n 擴充為 n 階方陣的連續對應函數，所得的連續對應函數具有規律性，故我們針對此種連續對應函數將給予特殊的符號來作為表達。

給定自然數 n ，令 $\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\}$ 為 n 階方陣中所有的位置。考慮函數 $f_{n,c} : \{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\} \to \{1, 2, \cdots, n^2\}$，對於定義域中的 a_{ij}，令 $m = \max\{i, j\}$ ，其函數 $f_{n,c}$ 定義方式為：

$$f_{n,c}(a_{ij}) = \begin{cases} m^2 - m + (i-j) + 1 & if \quad m \quad is \quad odd \\ m^2 - m - (i-j) + 1 & if \quad m \quad is \quad even \end{cases}$$ 。

不難得知， $f_{n,c}$ 必為 n 階方陣的一個連續對應函數（即為 Lemma 1 所擴充的方式）。
對於自然數 n ，根據 Lemma 1 的結論可知，函數 f_n 可以擴充為連續對應函數 $f_{n,c}$ 。

Claim 6：考慮下列四個圖表，每個圖表分別代表不同的函數，試說明由下列四個函數所擴充之 6 階方陣的連續對應函數皆不具唯一性。

	4		16		36

1			16		36

1	4				36

1	4		16		

【說明】
由於每一個連續對應函數皆可用圖表來表示，故我們針對上述每一個圖表，將自然數$\{1, 2, \cdots, 36\}$完整的填入圖表中，在陰影部分數字的位置不變且滿足連續對應的條件下，皆可有兩種以上不同的方法，如此即說明了每個圖表所擴充的連續對應函數不具唯一性。

然而根據Lemma 1 ，可知上述每一個圖表所代表的函數，皆可擴充為連續對應函數$f_{6,c}$ 。故我們只需說明，上述每一個圖表所對應的函數，可擴充為另一個不同於$f_{6,c}$的連續對應函數即可。

	4		16		36

$\Rightarrow$

3	4	5	16	17	36
2	1	6	15	18	35
9	8	7	14	19	34
10	11	12	13	20	33
25	24	23	22	21	32
26	27	28	29	30	31

1			16		36

$\Rightarrow$

1	2	3	16	17	36
8	7	4	15	18	35
9	6	5	14	19	34
10	11	12	13	20	33
25	24	23	22	21	32
26	27	28	29	30	31

1	4				36

$\Rightarrow$

1	4	5	8	9	36
2	3	6	7	10	35
15	14	13	12	11	34
16	17	18	19	20	33
25	24	23	22	21	32
26	27	28	29	30	31

1	4		16		

$\Rightarrow$

1	4	5	16	17	18
2	3	6	15	36	19
9	8	7	14	35	20
10	11	12	13	34	21
29	30	31	32	33	22
28	27	26	25	24	23

由上述圖表可知，原命題中的四個圖表，所擴充6階方陣的連續對應函數皆不具唯一性。■

從 Claim 6 的連續函數擴充的方法，我們歸納出建構有別於 $f_{6,c}$ 的連續對應函數，進而推廣，因而觀察出以下定理。

> **Theorem 2**：任意自然數 $n\ge 2$，考慮 n 階方陣，函數 $f_n:\{a_{11}\}\cup\{a_{1(2k)}\mid 1\le k\le \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\}\to S_n$ 的定義域為 D_n，若 D_n' 為 D_n 的任一子集合且 $|D_n'|=|D_n|-1$， f_n' 為 f_n 在 D_n' 上的限制函數（ $f_n'=f_n|_{D_n'}$ ），則由 f_n' 所擴充的連續對應函數非唯一。

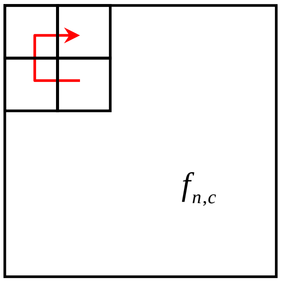
【證明】

令 D_n' 為 D_n 的任一子集合且 $|D_n'|=|D_n|-1$，根據 Lemma 1， f_n' 必可擴充為連續對應函數 $f_{n,c}$ 。

因此，對於 D_n'，我們將設計另一個連續對應函數 $f\ne f_{n,c}$ ，使得 f_n' 可以擴充為 f 。

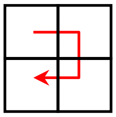
（1） 若 $D_n' = D_n - \{a_{11}\}$，

則定義 $f(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & if \quad i=2, j=2 \\ 2 & if \quad i=2, j=1 \\ 3 & if \quad i=1, j=1 \\ f_{n,c}(a_{ij}) & if \quad otherwise \end{cases}$



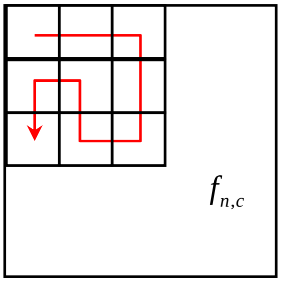
（2） 若 $D_n' = D_n - \{a_{12}\}$，且 $n=2$，

則定義 $f(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & if \quad i=1, j=1 \\ 2 & if \quad i=1, j=2 \\ 3 & if \quad i=2, j=2 \\ 4 & if \quad i=2, j=1 \end{cases}$



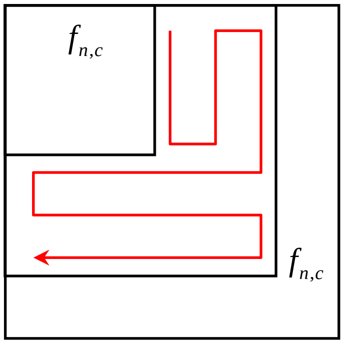
（3） 若 $D_n' = D_n - \{a_{12}\}$，且 $n \geq 3$，

則定義 $f(a_{ij}) = \begin{cases} j & if \quad i=1, 1 \leq j \leq 3 \\ i+2 & if \quad 2 \leq i \leq 3, j=3 \\ 3j-i+3 & if \quad 2 \leq i \leq 3, j=2 \\ 8 & if \quad i=2, j=1 \\ f_{n,c}(a_{ij}) & if \quad otherwise \end{cases}$



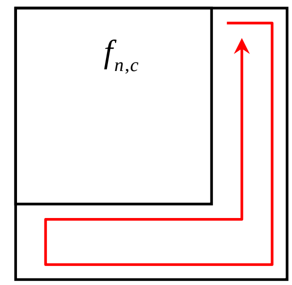
（4） 若 $D_n' = D_n - \{a_{1(2k)}\}$，且 $4 \leq 2k \leq n-2$，$n \geq 6$

則定義 $f(a_{ij}) = \begin{cases} (2k-2)^2 + i & if \quad 1 \leq i \leq 2k-2, j=2k-1 \\ (2k-1)^2 - i & if \quad 1 \leq i \leq 2k-2, j=2k \\ (2k-1)^2 + i - 1 & if \quad 1 \leq i \leq 2k-2, j=2k+1 \\ (2k)^2 - j & if \quad i=2k-1, 1 \leq j \leq 2k+1 \\ (2k)^2 + j - 1 & if \quad i=2k, 1 \leq j \leq 2k+1 \\ (2k+1)^2 - j + 1 & if \quad i=2k+1, 1 \leq j \leq 2k+1 \\ f_{n,c}(a_{ij}) & if \quad otherwise \end{cases}$



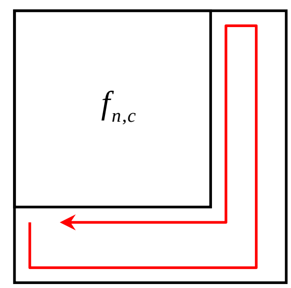
（**5**） 若 $D_n' = D_n - \{a_{1(2k)}\}$，且 $4 \le 2k = n$，

$$\text{則定義 } f(a_{ij}) = \begin{cases} (2k-2)^2 + i + 1 & \text{if} \quad 1 \le i \le 2k,\ j = 2k \\ (2k-2)^2 + 4k + 1 - j & \text{if} \quad i = 2k, 1 \le j \le 2k-1 \\ (2k-2)^2 + 4k + j & \text{if} \quad i = 2k-1, 1 \le j \le 2k-1 \\ (2k-2)^2 + 8k - 2 - i & \text{if} \quad 2 \le i \le 2k-2,\ j = 2k-1 \\ f_{n,c}(a_{ij}) & \text{if} \quad otherwise \end{cases}$$



（**6**） 若 $D_n' = D_n - \{a_{1(2k)}\}$，且 $4 \le 2k = n-1$，

$$\text{則定義 } f(a_{ij}) = \begin{cases} (2k-1)^2 + j + 1 & \text{if} \quad i = 2k+1, 1 \le j \le 2k+1 \\ (2k-1)^2 + 4k + 3 - i & \text{if} \quad 1 \le i \le 2k,\ j = 2k+1 \\ (2k-1)^2 + 4k + 2 + i & \text{if} \quad 1 \le i \le 2k,\ j = 2k \\ (2k-1)^2 + 8k + 2 - j & \text{if} \quad i = 2k, 2 \le j \le 2k-1 \\ f_{n,c}(a_{ij}) & \text{if} \quad otherwise \end{cases}$$



以上六種情形，皆可檢驗為與 $f_{n,c}$ 相異的連續對應函數，且對所有 $a_{ij} \in D_n'$ 皆滿足 $f(a_{ij}) = f_{n,c}(a_{ij})$。由此可知，若 f_n' 為『將 f_n 定義域限制在 D_n' 上的函數』，則由 f_n' 所擴充的連續對應函數皆不具有唯一性。■

在 Theorem 1 中，我們欲證明 S_n 為 n 階方陣的一個極小確定集。由先前的說明中，如欲確定 S_n 為其極小確定集，須確定以下四點：

1. 能將 S_n 中的數字恰當的安排在 n 階方陣中某些特殊的位置。

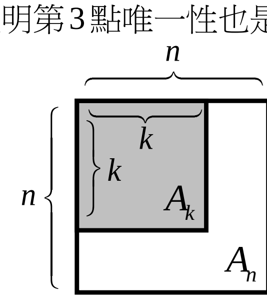
2. 能將 $\{1, 2, 3, \cdots, n^2\} - S_n$ 填入 n 階方陣中剩餘的位置，且成為一個連續對應函數。

3. 確保此連續對應函數是唯一的。

4. 保持 S_n 在 n 階方陣中的位置，若任意刪除 S_n 中的一個數字，則其連續對應函數將不具唯一性。

截至目前為止，我們由函數 f_n 確定第1點可完成；再藉由 Lemma 1 得知第 2 點成立；接著又透過 Theorem 2 肯定第 4 點成立。最後我們剩下第 3 點尚未確定。為了說明第 3 點唯一性也是正確的，我們必須再定義幾個概念，並提出相關的引理。

對於一個 n 階方陣 A_n，方陣中所有的位置為 $\{a_{ij} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$，若考慮自然數 $k < n$，則方陣 A_n 中局部的位置 $\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le k\}$ 將形成另一個階數較小的 k 階方陣，我們稱 $\{a_{ij} \mid 1 \le i, j \le k\}$ 所形成的方陣為 A_n 的『***k* 階子方陣**』，並記為『 $\boldsymbol{A_k}$ 』。



(A_k 為 A_n 的 k 階子陣列)

令 $f:\{a_{ij}\,|\,1\le i,j\le n\}\to\{1,2,\cdots,n^2\}$ 為 n 階方陣的一個連續對應數，$1\le p<q\le n^2$ ，則集合 $\{f^{-1}(t)\,|\,p\le t\le q\}$ 在 n 階方陣中表示 $f^{-1}(p)$ 到 $f^{-1}(q)$ 的一條連續路徑，我們將此路徑稱為 **『 $f-(p,q)-$路徑 』**，並將此路徑記為 **『 $f^{-1}[p,q]$ 』**。意即 $f^{-1}[p,q]=\{f^{-1}(t)\,|\,p\le t\le q\}$ 。若欲呈現路徑的順序，則 $f^{-1}[p,q]$ 可以用序對 $\left(f^{-1}(p),f^{-1}(p+1),\cdots,f^{-1}(q)\right)$ 來表示。

以下圖為例，左下方的圖表為一個 4 階方陣的連續對應函數 $f:\{a_{ij}\,|\,1\le i,j\le 4\}\to\{1,2,\cdots,16\}$。根據函數 f 的對應關係，集合 $\{f^{-1}(t)\,|\,3\le t\le 9\}$ 即代表 $f-(3,9)-$路徑，然而序對 $\left(f^{-1}(3),f^{-1}(4),f^{-1}(5),f^{-1}(6),f^{-1}(7),f^{-1}(8),f^{-1}(9)\right)$ 即代表路徑的順序，換句話說 $f-(3,9)-$路徑即為 4 階方陣中 $(a_{22},a_{12},a_{13},a_{23},a_{33},a_{32},a_{31})$ 連續位置所構成的路徑，並用集合 $f^{-1}[3,9]=\{a_{22},a_{12},a_{13},a_{23},a_{33},a_{32},a_{31}\}$ 來表示之。同樣的 $f-(3,9)-$路徑也可用圖表來表示，如右下圖所示。

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

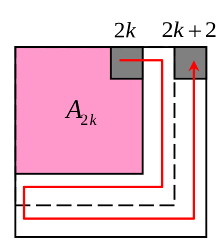
(連續對應函數f)

1	4	5	16
2	3	6	15
9	8	7	14
10	11	12	13

($f-(3,9$路徑

Lemma 2：任意自然數 $n\ge 4$ ，$1\le k\le\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-1$ ，考慮 n 階方陣 A_n ， A_{2k} 為 A_n 的 $(2k)$ 階子方陣，令 f 為 n 階方陣的連續對應函數。若對所有 $1\le t\le\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ ， f 皆滿足 $f(a_{1(2t)})=f_n(a_{1(2t)})$ 且 $f^{-1}[1,(2k)^2]$ 完全包含在 A_{2k} 中，則 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必包含在 A_{2k+2} 中。

【證明】



$(n=2k+2)$

已知 $f^{-1}[1,(2k)^2]$ 完全包含在 A_{2k} 。
若 $n=2k+2$ ，則 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必包含在 A_{2k+2} 中。

以下考慮 $n\ge 2k+3$ 。
假設 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 不包含在 A_{2k+2} 中。
根據 f 的假設，可知 $f(a_{1(2k)})=f_n(a_{1(2k)})=(2k)^2$ 、 $f(a_{1(2k+2)})=f_n(a_{1(2k+2)})=(2k+2)^2$ 。
若 $a_{(2k+1)1}\in f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ ，可知 $f(a_{(2k+1)1})\ge(2k+1)^2$ 。
以下分別討論 $f(a_{(2k+1)1})>(2k+1)^2$ 及 $f(a_{(2k+1)1})=(2k+1)^2$ 的情形

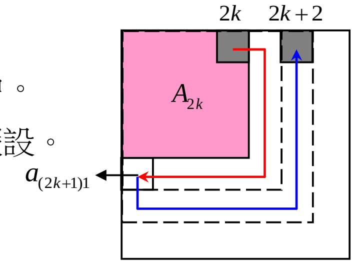
(1) 若 $f(a_{(2k+1)1})>(2k+1)^2$，則 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+1)^2]$ 必不包含在 A_{2k+1} 中，導致 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 無法成為連續路徑，矛盾原先的條件。

(2) 若 $f(a_{(2k+1)1})=(2k+1)^2$，則 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+1)^2]$ 必包含在 A_{2k+1} 中，

又 $f(a_{1(2k+2)})=(2k+2)^2$，故 $f^{-1}[(2k+1)^2,(2k+2)^2]$ 必包含在 A_{2k+2} 中。

如此一來，$f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必包含在 A_{2k+2} 中，矛盾一開始的假設。

故 $a_{(2k+1)1}\notin f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$。



$(n\geq 2k+3)$

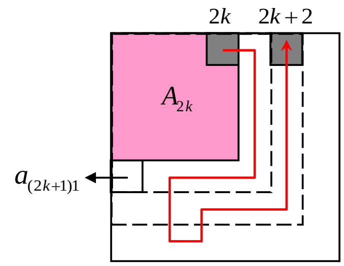
若 $n=2k+3$，因為 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 不包含在 A_{2k+2} 中，

故 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 中必有一元素 $a_{ij}\in A_{2k+3}$ 且 $a_{ij}\notin A_{2k+2}$。

因為 $a_{(2k+1)1}$ 被 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 隔開，所以 $f(a_{(2k+1)1})$ 無法定義，

故可知 $f^{-1}[(2k+2)^2,(2k+3)^2]$ 不為連續路徑，即表示 f 不為連續對應函數，此為矛盾。

故 $n=2k+3$ 時，$f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必包含在 A_{2k+2} 中。



$(n=2k+3)$

以下考慮 $n\geq 2k+4$。

因為 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 不包含在 A_{2k+2} 中，表示 $a_{(2k+1)1}\notin f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$。

若 n 為偶數，則對所有偶數 $t\in\{2k+2,2k+4,\cdots,n-2\}$，$a_{(2k+1)1}\notin f^{-1}[(t)^2,(t+2)^2]$。

(若 $a_{(2k+1)1}\in f^{-1}[(t)^2,(t+2)^2]$，因為受到先前路徑的影響且已知 $f(a_{1t})=f_n(a_{1t})=t^2$，$f^{-1}[(t)^2,(t+2)^2]$ 將不為連續路徑)

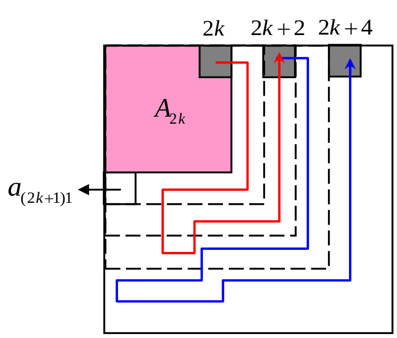
因為 $f(a_{1n})=n^2$，所以 $f(a_{(2k+1)1})$ 無法定義，故 f 不為連續對應函數，此為矛盾。

若 n 為奇數，則對所有偶數 $t\in\{2k+2,2k+4,\cdots,n-3\}$，$a_{(2k+1)1}\notin f^{-1}[(t)^2,(t+2)^2]$。

(若 $a_{(2k+1)1}\in f^{-1}[(t)^2,(t+2)^2]$，因為受到先前路徑的影響且已知 $f(a_{1t})=f_n(a_{1t})=t^2$，$f^{-1}[(t)^2,(t+2)^2]$ 將不為連續路徑)

因為 $f(a_{1(n-1)})=(n-1)^2$，所以 $f(a_{(2k+1)1})$ 也無法定義，故 f 不為連續對應函數，此為矛盾。

故 $n\geq 2k+4$ 時，$f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必包含在 A_{2k+2} 中。



$(n\geq 2k+4)$

總結以上討論，可知若 f 為連續對應函數， f 在 $\{a_{11}\}\cup\{a_{1(2t)}\mid 1\le t\le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\}$ 的函數值皆與 f_n 相同，且 $f^{-1}[1,(2k)^2]$ 完全包含在 A_{2k} 中，其中 $1\le k\le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$，則 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必包含在 A_{2k+2} 中。由此得證 Lemma 2。■

一旦有了 Lemma 2，我們則可以得知下面定理。

Theorem 3：任意自然數 n，考慮 n 階方陣，由函數 f_n 所擴充的連續對應函數具有唯一性。換句話說，由函數 f_n 所擴充的連續對應函數必為 $f_{n,c}$。

【證明】

由 Claim 2、Claim 3、Claim 5 的結果可知，當 $n=1,2,3,4$ 時， f_n 所擴充的連續對應函數必為 $f_{n,c}$。因此當 $n=1,2,3,4$ 時，本定理敘述成立，故考慮 $n\ge 5$。

假設 $5\le n\le p$ 時，命題皆成立。

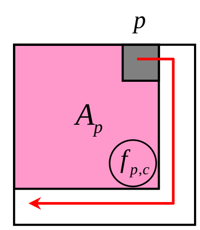
今考慮 $n=p+1$，考慮 $(p+1)$ 階方陣 A_{p+1}，令函數 f 為 f_n 所擴充的連續對應函數。

根據 $(p+1)$ 的奇偶性，我們分開討論。

（**1**）令 $(p+1)$ 為奇數。考慮 $f^{-1}[1,p^2]$。

若 $f^{-1}[1,p^2]$ 不包含在子方陣 A_p 中，則存在偶數 $2k$，$1\le 2k\le p-2$，使得 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 不包含在子方陣 A_p 中，同時 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必不包含在子方陣 A_{2k+2} 中。

令 $2k$ 為最小的偶數，使得 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 也不包含在子方陣 A_{2k+2} 中，根據 Lemma 2，可知 $f^{-1}[1,(2k)^2]$ 不包含在子方陣 A_{2k} 中，則必存在一個更小的偶數 $1\le 2t\le 2k-2$，使得 $f^{-1}[(2t)^2,(2t+2)^2]$ 不包含在子方陣 A_{2t+2} 中，此為矛盾。



$(奇數n=p+1)$

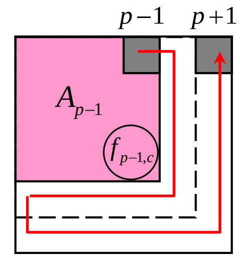
因此 $f^{-1}[1,p^2]$ 必包含在子方陣 A_p 中，根據歸納法假設， f 在 $\{a_{ij}\mid 1\le i,j\le p\}$ 中的函數值皆等於 $f_{n,c}$。所以 $f^{-1}[1,p^2]$ 將佈滿於 A_p，故 $f^{-1}[p^2,(p+1)^2]$ 只有唯一的可能性。因此 f 必為 $f_{n,c}$。

（**2**）令 $(p+1)$ 為偶數。考慮 $f^{-1}[1,(p-1)^2]$。

若 $f^{-1}[1,(p-1)^2]$ 不包含在子方陣 A_{p-1} 中，則存在偶數 $2k$，$1\le 2k\le p-3$，使得 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 不包含在子方陣 A_{p-1} 中，同時 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 必不包含在子方陣 A_{2k+2} 中。

令 $2k$ 為最小的偶數，使得 $f^{-1}[(2k)^2,(2k+2)^2]$ 也不包含在子方陣 A_{2k+2} 中，根據 Lemma 2，可知 $f^{-1}[1,(2k)^2]$ 不包含在子方陣 A_{2k} 中，則必存在一個更小的偶數 $1\le 2t\le 2k-2$，使得 $f^{-1}[(2t)^2,(2t+2)^2]$ 不包含在子方陣 A_{2t+2} 中，此為矛盾。

因此 $f^{-1}[1,(p-1)^2]$ 必包含在子方陣 A_{p-1} 中，根據歸納法假設，f 在 $\{a_{ij}\,|\,1\le i,j\le p-1\}$ 中的函數值皆等於 $f_{n,c}$。所以 $f^{-1}[1,(p-1)^2]$ 將佈滿於 A_{p-1}，故 $f^{-1}[(p-1)^2,(p+1)^2]$ 只有唯一的可能性。因此 f 必為 $f_{n,c}$。



(偶數 $n=p+1$)

由上述討論得知，當 $n=p+1$ 時，函數 f 必為 $f_{n,c}$。
根據數學歸納法得證：對任意自然數 n，由函數 f_n 所擴充的連續對應函數必為 $f_{n,c}$。■

透過 Theorem 2 與 Theorem 3 的結果，等同於證明了 Theorem 1。

最後我們也猜測，我們建立出來的集合 S_n，是 n 階方陣中數量最少的確定集。因此我們提出了下面的猜想：

Conjecture：任意自然數 n，集合 S_n 為 n 階方陣的最小確定集。

意即 n 階方陣的最小確定數 $M(n)=\begin{cases}0 & \text{當} n=1\\ \left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor+1 & \text{當} n\ge 2\end{cases}$。

當 $n=1,2,3$ 時，我們已知 $M(1)=0$、$M(2)=2$、$M(3)=2$。若再更深入的討論，我們相信當 $n=4$ 時，上述對於最小確定數 $M(4)=3$ 的猜測仍舊是正確的。對於一般自然數 n，我們將持續研究，尋求更一般化的證明。

伍、研究結果

以下我們用表格來呈現目前對於集合 S_n 所得知的結果：

	數量極小性	對應唯一性	極小確定集	最小確定集	最小確定數
$n=1$	○	○	○	○	0
$n=2$	○	○	○	○	2
$n=3$	○	○	○	○	2
$n=4$	○	○	○	?	?
$n=k$	○	○	○	?	?

陸、討論

我們將原本「蜜蜂數字」題目的正六邊形鑲嵌圖改成正方形陣列，試圖找出最少需要給定幾個數字才可以確定出唯一路線。在真正設計遊戲題目時，最棘手的問題就是「數字安排的位置」及「要安排哪些數」。面對這樣子的困難，我們考慮各種不同的路線，接著嘗試保留部分數字，再經過縝密的檢驗之後，好不容易才能找到一個具有一般性的集合。

在研究的過程中，著重於如何建構出一條連續的路徑。我們發現，有規律的路線可以給較少數字使路線唯一；另外，我們還發現路線轉折的次數同樣會影響其須給定的數字個數，若轉折越多，則須提供較多數字方能達成其唯一性，因此「路線」扮演著極重要的角色；而欲在路徑中，挑選出關鍵的數字更是件難度很高的事。如何透徹瞭解在方陣中所有路徑的特性，為實際問題中棘手的瓶頸。除此之外，在表達各自想法時，我們發覺難以用數學代號敘述問題所在，所以研究說明中必須定義很多新的名詞以方便溝通。我們從來沒有察覺一個看似普通的方陣，用數學描述起來竟然如此困難！

柒、結論

我們將「蜜蜂數字」的遊戲轉換至方陣中討論。在討論問題的過程中，往往難以找到適合的詞來描述我們所要表達的概念，因此對於這個「設計遊戲」的問題，我們依照了我們的需求定義了許多名詞。在定義的過程中，最需要注意的是個名詞之間不可以有矛盾的現象，所以每個名詞都是經過縝密的思考而產生的。而在陣列中，我們著實找到了一個設計遊戲的方法可以使得解答唯一，且竭盡可能的減少給定的數字。雖然我們所找到的路線十分規律，感覺已經不具有遊戲價值，但我們認為這可能也是無法避免的事，因為在研究過程中我們發現：倘若路線不規律而過於複雜，那麼「需要保留的數字」的數量將會變多。我們覺得「減少給定的數字」與「不規則的路線」兩者是難以兼顧的。

儘管我們已經盡可能減少給定的數字，也強烈認為我們所給的數字是最少的，但仍舊難以說明這件事。或許我們無法真正確認「給定數字的個數」的最小值，卻已經盡力逼近那個最小值。我們也持續思考著是否能提出一個說法確定「我們所給的數字就是最少的」。

捌、未來展望

我們猜想，在文章中所定義的集合 S_n 必為 n 階方陣的最小確定集。同時我們也嘗試去思考相關問題可能的發展，並羅列如下：

1. 在方陣中，我們找到一定的規律可以滿足我們的條件，我們好奇：
   在其餘正鑲嵌圖中，是否也可以找到相似的規律使其滿足我們的條件？
   若欲將終點安排在起點的相鄰位置，則是否也有相似規律滿足我們的條件？

2. 對於任意自然數 n ，集合 S_n 已為 n 階方陣的極小確定集，希望持續將結果擴展至 S_n 為 n 階方陣的最小確定集。

意即證明最小確定數為 $M(n)=\begin{cases}0 & 當n=1\\ \left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor+1 & 當n\geq 2\end{cases}$。

3. 對於任意自然數 n ，若 S 為 n 階方陣的極小確定集，則 $|S|$ 的可能性為何？這值得我們繼續研究。持續獲得確定數 R_n 完整的資訊（最大值、最小值或範圍），將是我們繼續研究的目標。進一步探討 R_n 可能的值是否必為連續的自然數。

玖、參考資料及其它

1. (2013 年 7 月 7 日 星期日)。蜜蜂數字。聯合報，P.16。
2. 許志農（民 101）。普通高級中學數學，第二冊。龍騰文化。
3. 許志農（民 101）。普通高級中學數學，第四冊。龍騰文化。
4. 楊任孝（民 101）。普通高級中學數學，教師手冊第二冊。全華圖書。
5. 徐力行（民 92）。沒有數字的數學。天下文化。
6. 徐力行（民 100）。動物園裡的數學。天下文化。
7. 姜伯駒（民 93）。數學大師講數學系列(一筆畫和郵遞路線問題)。智能教育出版社。
8. Gary McGuire, Bastian Tugemann, Gilles Civario.（2012）.There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem. Data Structures and Algorithms. http://arxiv.org/abs/1201.0749v2

【評語】040415

本作品主要目的是在求 n 階最小確定數 $M(n)$。給定 S 為 $\{1,2,3,\cdots,n^2]$的一個子集合，並預先將 S 中的數字填入一個 n 階方陣，若能將剩餘的自然數$\{1,2,3,\ldots,n^2\}$-S 全部填入此方陣中尚未被 S 所佔的格子，滿足「相鄰的數字須填入方陣中相鄰的格子」而且「填入的數字的方法是唯一的」，則稱 S 為 n 階方陣的一個「確定集」，最小確定數 $M(n)$就是這樣的 S 的大小 |S| 的最小可能值。

本作品最重要的結果是當 $n>1$ 時恒有 $M(n)\leqq\frac{n}{2}+1$。文末並且猜測當 $n>1$ 時恒有 $M(n)=\frac{n}{2}+1$。整體來說，這是一篇撰寫非常清楚的文章，說明解釋，已經達到職業水準，如果能夠將猜想的下界證出來，是一篇不可多得的好文章。如果不能完全證出來，或許可以考慮先得到一個差一點的下界，例如$\frac{n}{4}$。甚至是$\frac{n}{100}$也是一個好的開始。

面試評審時，作者以海報呈現 M(4)=2，否定了上述的猜測，並且相信當 n 是偶數時，$M(n)=\frac{n}{2}$。