中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040413

一筆畫圖形之最長路徑探討

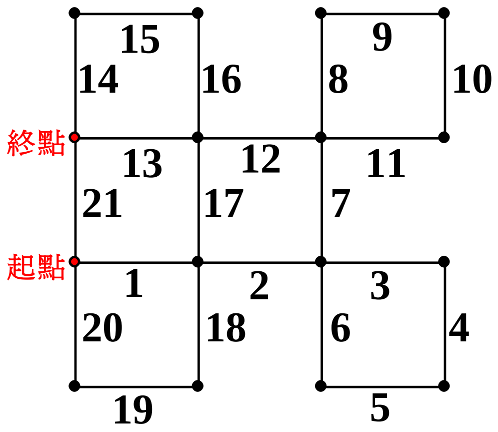
學校名稱：國立嘉義高級中學

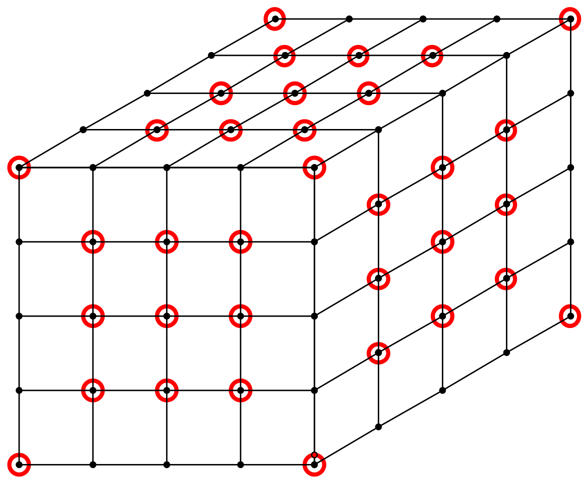
作者：	指導老師：
高二 林書逸 高二 孫培文 高二 徐英傑	賴文雄

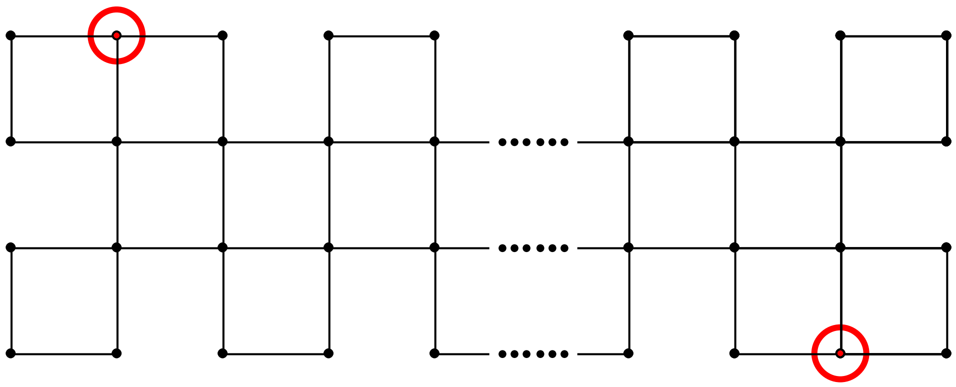
關鍵詞：奇點、蛇形、基本圖形

摘要

給定一 m × n 點方陣或一 a × b × c 點方塊，若兩點間的距離爲 1，則定義此兩點相鄰。於方陣或方塊內，一筆畫出一個由相鄰兩點連接之線段所組成之圖形，且路徑不重複，使得經過之路徑長最大。路徑長最大的圖形可能有多種。本次研究的主題，是探討點方陣與點方塊的一筆畫圖形之最長路徑，以及探討特定狀況下，圖形完成最長路徑之走法數。

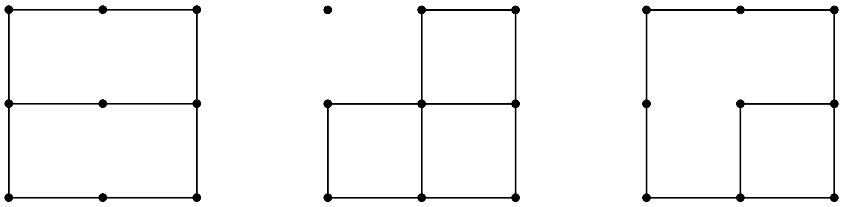






壹、　研究動機

在一本有關數學遊戲的書中，我們發現一個有趣的問題：在一個 3 × 3 點方陣中，如何用一筆畫連出最多條線段，且路徑不重複，不能斜走。經過幾次嘗試之後，我們可以很容易地得到結果：



以上 3 種圖形皆連出了 10 條線段，並無法再連出更多線段。這個問題引起了我們的興趣，當點方陣為 m × n 時結果又是如何？於是我們將點方陣加大，並延伸至立體的點方塊，探討其一筆畫連出線段的最大值，並計算特定情況下，一筆畫完成此圖形的方法數。

貳、　研究目的

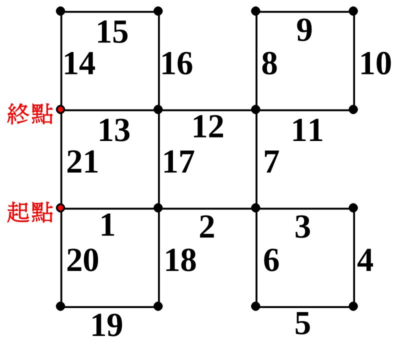
一、探討 m × n 點方陣中，一筆畫連出的線段最大值。
二、探討 a × b × c 點方塊中，一筆畫連出的線段最大值。
三、探討 3 × n 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數。
四、探討 4 × n 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數。
五、探討 5 × n 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數。

參、　研究設備及器材

紙、筆、GSP 繪圖軟體。

肆、　研究方法

給定一 m × n 點方陣，若兩點間的距離為 1，則定義此兩點相鄰。於方陣內，畫出一個由相鄰兩點連接之線段所組成之一筆畫圖形，且路徑不重複，使得經過之路徑長最大，（圖 1）為 4 × 4 點方陣中的一筆畫圖形。



（圖 1）

一、以 4 × 4 點方陣為例，連接所有相鄰的點，並標示出所有奇點，如（圖 2）。
二、圖中共有 8 個奇點，欲使其為一筆畫圖形，則必須消除 6 或 8 個奇點。

三、奇點消除法：

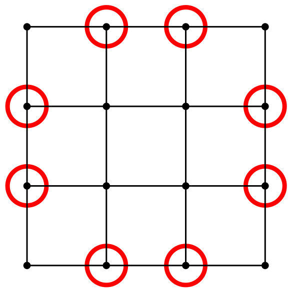
任取兩奇點，並將以此兩點爲起點和終點的其中一條路徑拆除，如（圖 3）。此時 A 點和 D 點由奇點變爲偶點， B 點和 C 點仍爲偶點。若消除之總路徑長爲 n，則稱此消除法爲 A_n 方法。

四、欲使此一筆畫圖形之路徑長最大，則必須消除最少的單位線段，且讓奇點剩下 0 或 2 個。若要以最少單位線段消除兩奇點，則必須消除相鄰兩奇點之間的線段，即 A_1 方法。

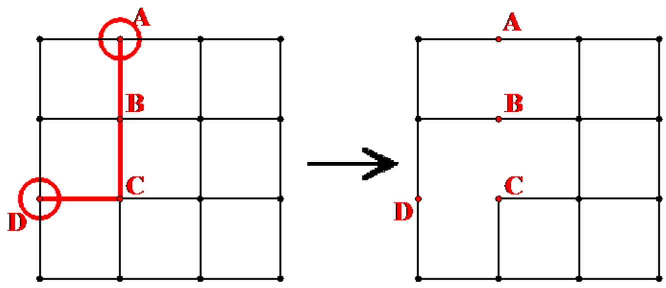
五、因爲剩下 0 個奇點比剩下 2 個奇點要消除更多線段，故最長路徑之一筆畫圖形有 2 個奇點。

六、將（圖 2）消除 3 條線段成爲（圖 1），即爲 4 × 4 點方陣中最長路徑之一筆畫圖形。

七、圖形需連通。



（圖 2）



（圖 3）

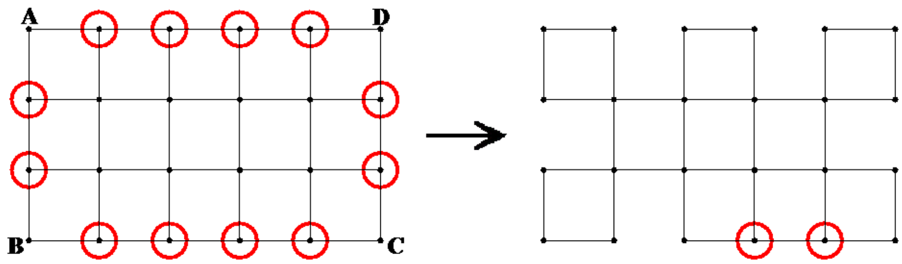
伍、　研究結果

一、探討 m × n 點方陣中，一筆畫連出的線段最大値 S。

(一) m、n 至少有一爲偶數

1. m、n 皆爲偶數

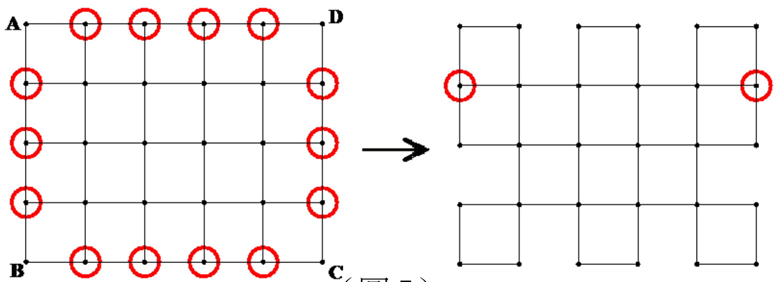
以 4 × 6 點方陣爲例，因爲 4 個邊上都有偶數個奇點，故可只用 A_1 方法將奇點消除至 2 個，如（圖 4）。



（圖 4）

2. m、n 爲一奇一偶

以 5 × 6 點方陣爲例，因爲 $\overline{BC}$、$\overline{DA}$ 上有偶數個奇點，且 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上有奇數個奇點，故用 A_1 方法可將 $\overline{BC}$、$\overline{DA}$ 上的奇點全部消除，且 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上各剩 1 個奇點，此時恰剩 2 個奇點，如（圖 5）。



（圖 5）

以上 2 種狀況其結果皆相同：

※全部線段長 $L = m(n-1) + n(m-1) = 2mn - (m+n)$

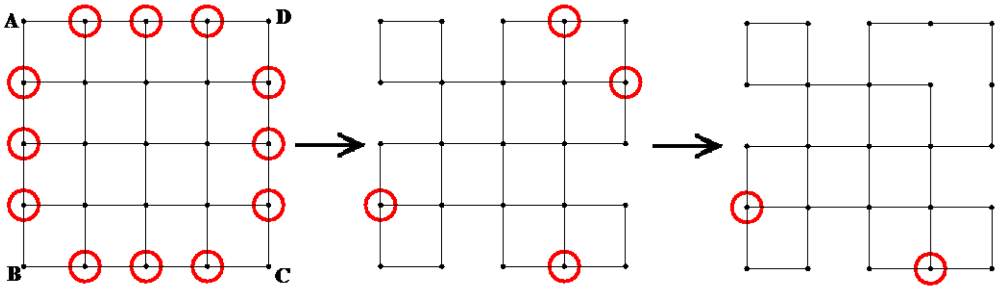
※奇點數目 $P = 2[(m-2) + (n-2)] = 2(m+n) - 8$

※消除的線段長 $d = \frac{P-2}{2} = m + n - 5$

※故一筆畫圖形的最長路徑 $\mathbf{S = L - d = 2mn - 2(m+n) + 5}$

(二) m、n 皆爲奇數

以 5 × 5 點方陣爲例，因爲 4 個邊上都有奇數個奇點，若僅用 A_1方法，只能將每邊上的奇點消除至 1 個，此時必須使用 A_2方法。使用 A_2方法時，須使一組相鄰邊上剩餘的奇點與同一頂點相鄰，如（圖 6）。



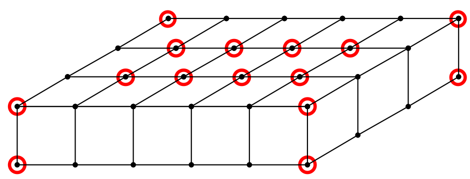
（圖 6）

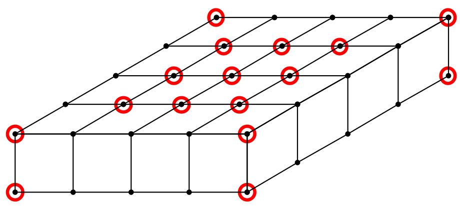
$\therefore \mathbf{S = L - d = 2mn - 2(m+n) + 4}$

二、探討 a × b × c 點方塊中，一筆畫連出的線段最大值 S。

(一) a、b、c 中至少有一爲 2，即 a × b × 2

如（圖 7）與（圖 8），因爲 8 個頂點皆爲奇點且可分爲 4 組兩兩相鄰，剩餘的奇點僅可能分佈於 a × b 的 2 個面上。此時不論 a × b 面上的奇點個數爲奇數或偶數，皆可以只用A_1方法將所有奇點消除至 2 個。


（圖 7）


（圖 8）

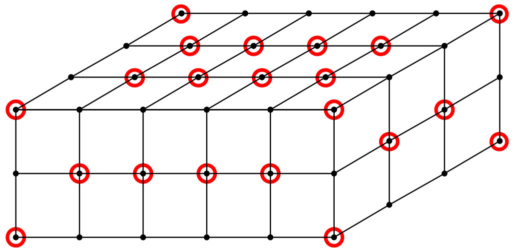
$\therefore \mathbf{S = 4ab - 7}$

(二) a、b、c＞2 且 a、b、c 中至少有一爲 3，即 $a \times b \times 3$

因爲 8 個頂點皆爲奇點且沒有任何奇點與之相鄰，故欲消除這些奇點，必須使用 A_2 方法，而其他奇點可用 A_1 方法消除，且 8 個頂點可分爲 4 組兩兩距離爲 2。若欲使消除的線段最少，使用 A_2 方法的次數須越少越好。

1. a、b 皆爲偶數

如（圖 9），每個面上都有偶數個奇點。此時使用 3 次 A_2 方法可消除 6 個頂點，其他奇點使用 A_1 方法消除，最後剩下 2 個頂點。

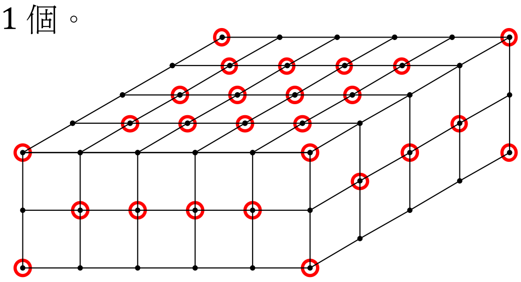


$\therefore \mathbf{S = 7ab - 2(a+b) - 6}$

（圖 9）

2. a、b 爲一奇一偶

如（圖 10），有 2 個面上有奇數個奇點，另外 4 個面上有偶數個奇點。此時使用 4 次 A_2 方法可消除 8 個頂點，其他奇點使用 A_1 方法消除，最後剩下 2 個奇點在具有奇數個奇點的 2 個面上各分佈 1 個。

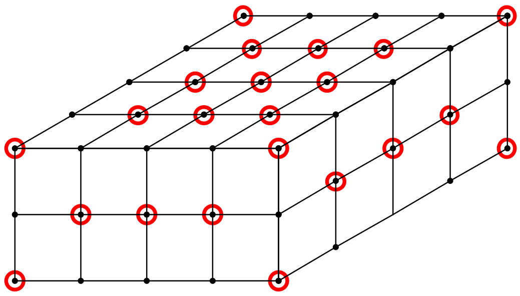


（圖 10）

$\therefore \mathbf{S = 7ab - 2(a+b) - 7}$

3. a、b 皆爲奇數

如（圖 11），每個面上都有奇數個奇點。故包含頂點總共有 14 個點在使用完 A_1 方法後不會被消除，此時若使用 A_2 方法 1 次消除 2 個奇點，至少須使用 6 次。



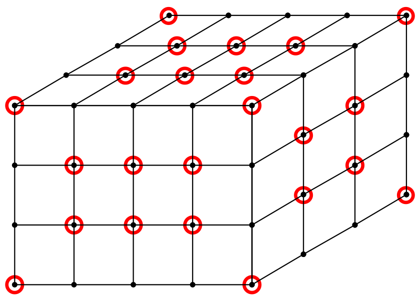
（圖 11）

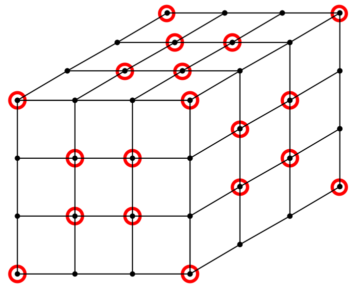
$\therefore \mathbf{S = 7ab - 2(a+b) - 9}$

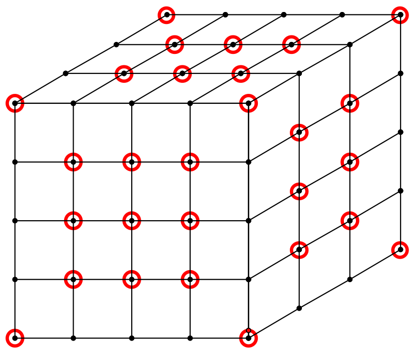
(三) a、b、c＞3

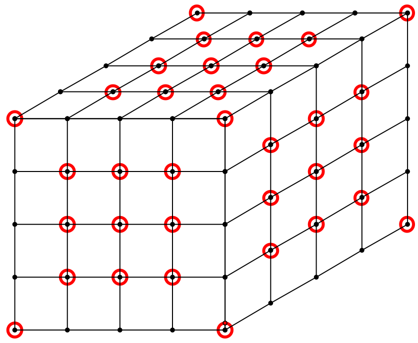
因爲 8 個頂點皆爲奇點且沒有任何奇點與之相鄰，故欲消除這些奇點，必須使用 A_2 方法，且無法使用 A_2 方法 1 次消除 2 個頂點，而其他奇點可用 A_1 方法消除。若欲使消除的線段最少，使用 A_2 方法的次數須越少越好，故最後留下的兩個奇點必須是頂點。欲使用 A_2 方法消除一個頂點，必會同時消除面上的一個奇點，又若一個面上有偶數個奇點，則這些奇點可僅用 A_1 方法消除。

1. a、b、c 中至少有 2 個偶數
   如（圖 12）與（圖 13），每個面上都有偶數個奇點。因爲有 6 個位於面上的奇點在以 A_2 方法消除頂點時會同時被消除，且要維持每個面上的奇點個數皆爲偶數，故此 6 奇點必須分佈在 3 個面上，每個面上各 2 個。
2. a、b、c 爲兩奇一偶
   如（圖 14），有 2 個面上有奇數個奇點，另外 4 個面上有偶數個奇點。因爲有 6 個位於面上的奇點在以 A_2 方法消除頂點時會同時被消除，且要維持每個面上的奇點個數皆爲偶數，故此 6 奇點的分佈爲：2 個含有奇數個奇點的面各分佈 1 個，其中 2 個含有偶數個奇點的面各分佈 2 個。
3. a、b、c 皆爲奇數
   如（圖 15），每個面上都有奇數個奇點。因爲有 6 個位於面上的奇點在以 A_2 方法消除頂點時會同時被消除，且要維持每個面上的奇點個數皆爲偶數，故此 6 奇點必須分佈在 6 個面上，每個面上分佈 1 個奇點。


（圖 12）


（圖 13）


（圖 14）

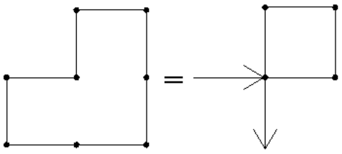
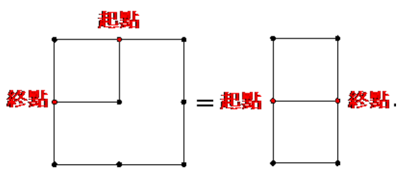
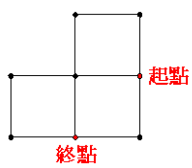

（圖 15）

以上 3 種狀況其結果皆相同：$\mathbf{S = 3abc - 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 21}$

三、探討 $3 \times n$ 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數 $(n \geq 2)$

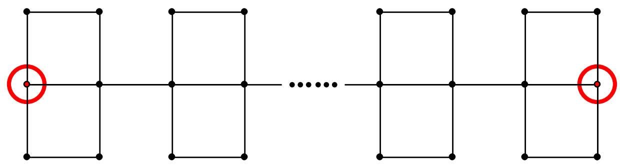
※以下只討論固定起點的情形。

(一) 基本圖形：

「口」字形	「日」字形	「L」形
		
2 種	6 種	16 種

(二) n 為偶數

定義其走法數為 A(n)。

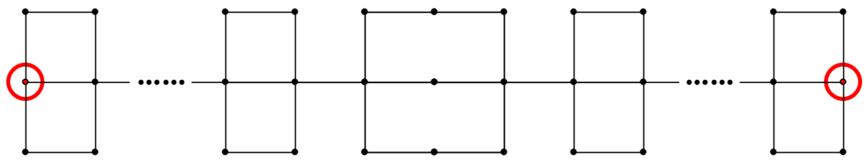
圖形 A	
走法數	$A(n)=6^t\,,t=\frac{n}{2}\,,n\geq 2$

(三) n 為奇數

n 為奇數時，奇點分佈情形共有 2 種。

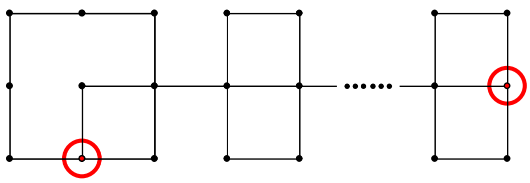
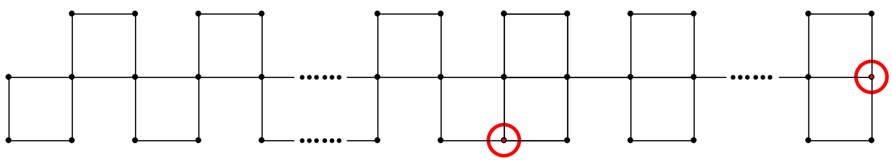
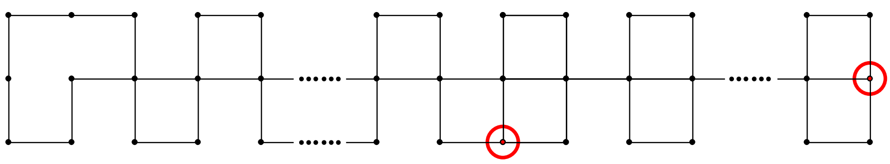
1. 2 個奇點都在邊長為 2 的邊上

此類圖形共有 $\left[\frac{n-3}{4}\right]+1$ 種，每一種的走法數皆相同，定義為 B(n)。

圖形 B	
走法數	$B(n)=6^t\,,t=\frac{n-1}{2}\,,n\geq 3$

2. 僅 1 個奇點在邊長為 2 的邊上

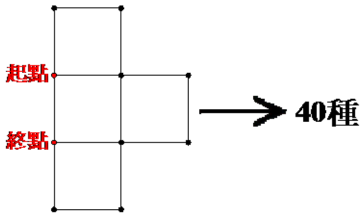
定義其走法數分別為$C_1(n)$、$C_2(p,q)$與$C_3(p,q)$，其中 p 是口字形的個數，q 是日字形的個數。

圖形 C_1	
走法數	$C_1(n)=6^t\,,t=\frac{n-1}{2}\,,n\geq 3$
圖形 C_2	
走法數	$C_2(p,q)=2^p\times 6^q\times 16\,,n=p+2q+3\,,n\geq 3\,,0\leq p\leq n-3$
圖形 C_3	
走法數	$C_3(p,q)=2^p\times 6^q\times 16\,,n=p+2q+4\,,n\geq 5\,,1\leq p\leq n-4$

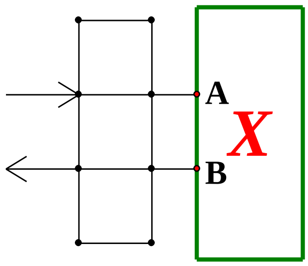
四、探討 $4 \times n$ 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數 $(n \geq 4)$

※以下只討論固定起點的情形。

(一) 基本圖形：

「T」字形	

在探討 $4 \times n$ 圖形的走法時，我們發現一個重要的圖形，稱為「目」字形，如（圖 16）（起終點在目字形左側）。假設目字形右側圖形之走法數為 X（起終點為 A , B），則扣除該圖形後，目字形可視為 T 字形，因此（圖 16）的走法數為 40X，故可知**每增加 1 個「目」字形，圖形走法數會變成原來的 40 倍。**



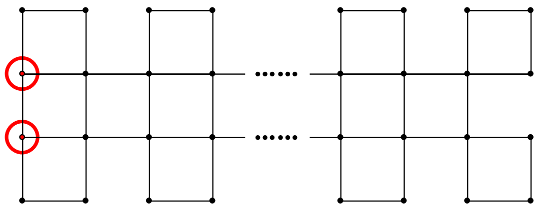
（圖 16）

(二) 基本圖形及其延伸

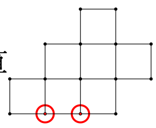
1. n 為偶數

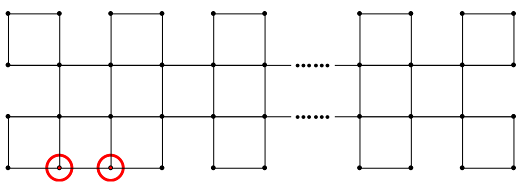
(1) 2 個奇點都在邊長為 3 的邊上

定義其走法數為 D(n)。

圖形 D	
走法數	$D(n) = 4 \times 40^t, t = \dfrac{n-2}{2}, n \geq 4$

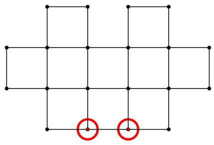
(2) 2 個奇點相鄰且在邊長為 $n-1$ 的邊上，其中 1 個奇點與頂點相鄰

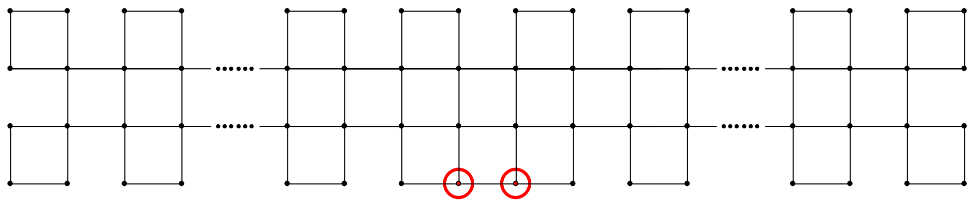
定義其走法數為 E(n)，此時只需計算的走法數，為 768。

圖形 E	
走法數	$E(n) = 8 \times 768 \times 40^t = 6144 \times 40^t, t = \dfrac{n-6}{2}, n \geq 6$

(3) 2 個奇點相鄰且在邊長爲 $n-1$ 的邊上，2 個奇點皆不與頂點相鄰

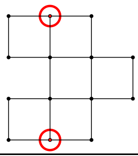
此類圖形共有$\left[\frac{n-8}{4}\right]+1$種，每一種的走法數皆相同，定義爲 $F(n)$，此時只需計算

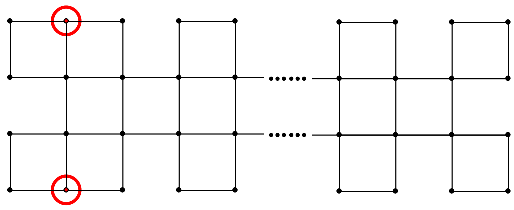
的走法數，爲 14720。

圖形 F	
走法數	$F(n)=16\times 14720\times 40^{t}=235520\times 40^{t}, t=\frac{n-8}{2}, n\geq 8$

2. n 爲奇數

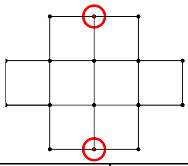
(1) 2 個奇點在同一直線上且與頂點相鄰

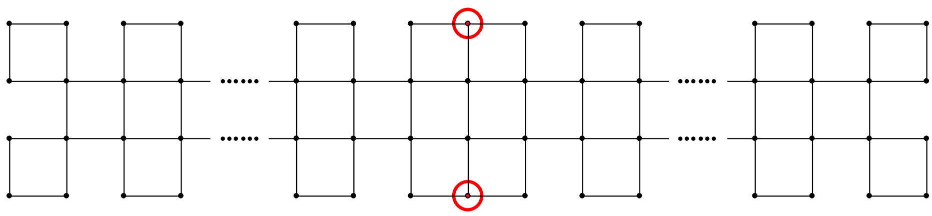
定義其走法數爲 $G(n)$，此時只需計算的走法數，爲 312。

圖形 G	
走法數	$G(n)=4\times 312\times 40^{t}=1248\times 40^{t}, t=\frac{n-5}{2}, n\geq 5$

(2) 2 個奇點在同一直線上且都不與頂點相鄰

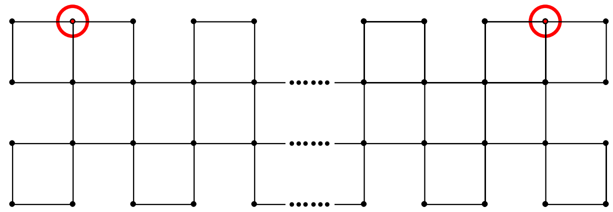
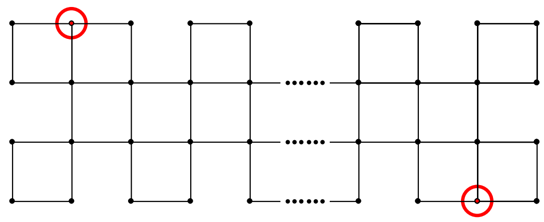
此類圖形共有$\left[\frac{n-7}{4}\right]+1$種，每一種的走法數皆相同，定義爲 $H(n)$，此時只需計算

的走法數，爲 2592。

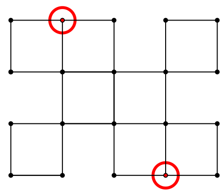
圖形 H	
走法數	$H(n)=16\times 2592\times 40^{t}=41472\times 40^{t}, t=\frac{n-7}{2}, n\geq 7$

(三)蛇形及其延伸

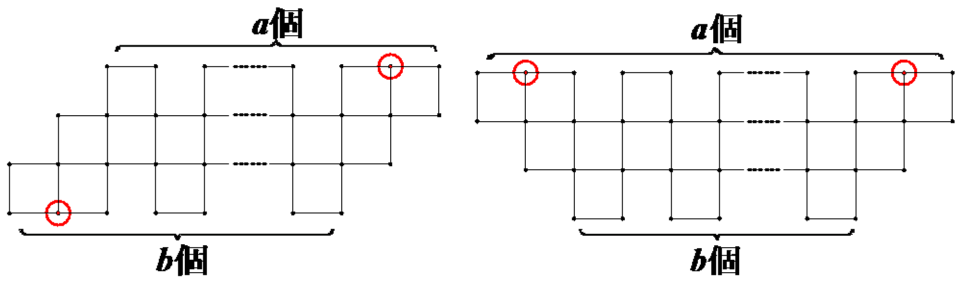
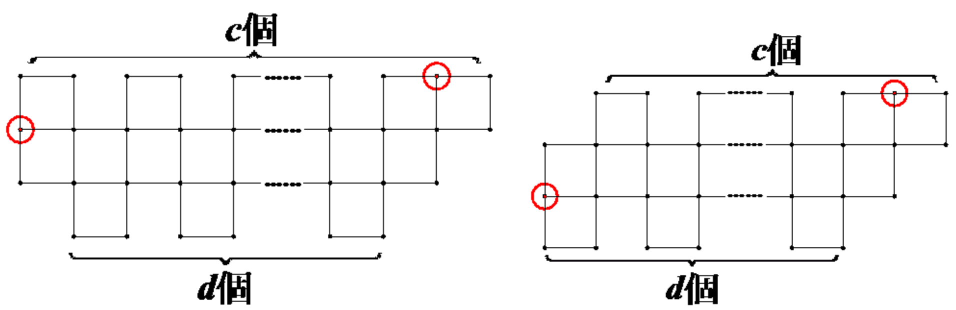
1. 2 個奇點不相鄰且在邊長為 $n-1$ 的邊上，2 個奇點皆與頂點相鄰

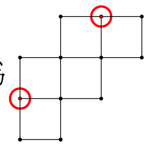
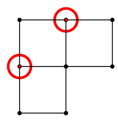
n 為偶數	
n 為奇數	

定義此類圖形為 I，走法數為 I(n)，$n \geq 5$。
為了方便討論，我們將 I(5) 獨立計算，求出走法數為 1312，I(5)如右圖。

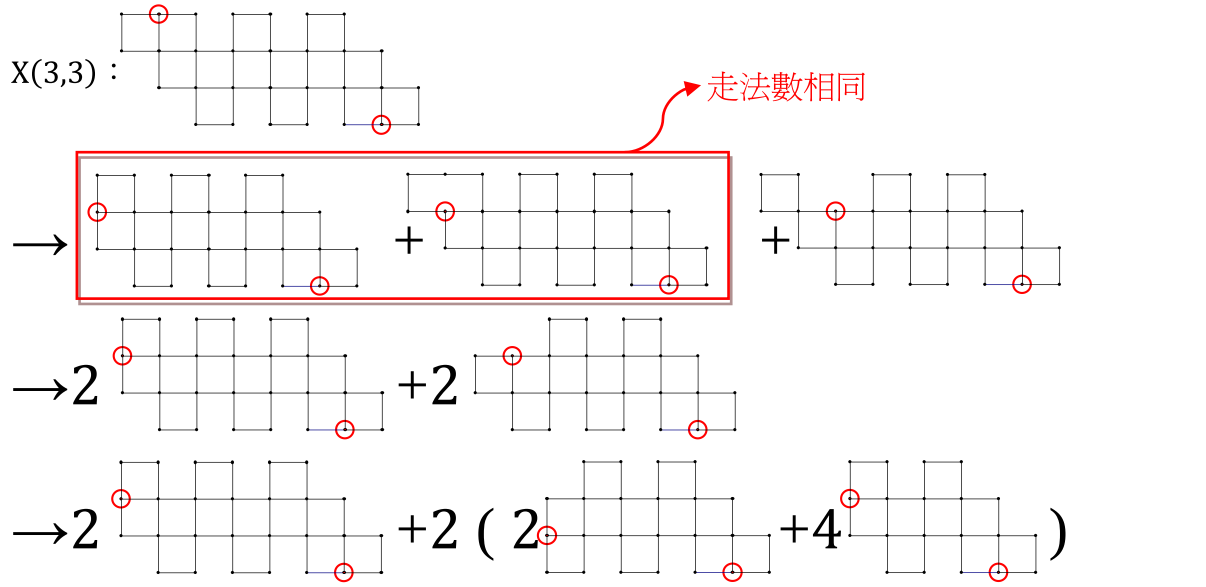


在討論走法前，我們先定義 X 圖形與 Y 圖形。

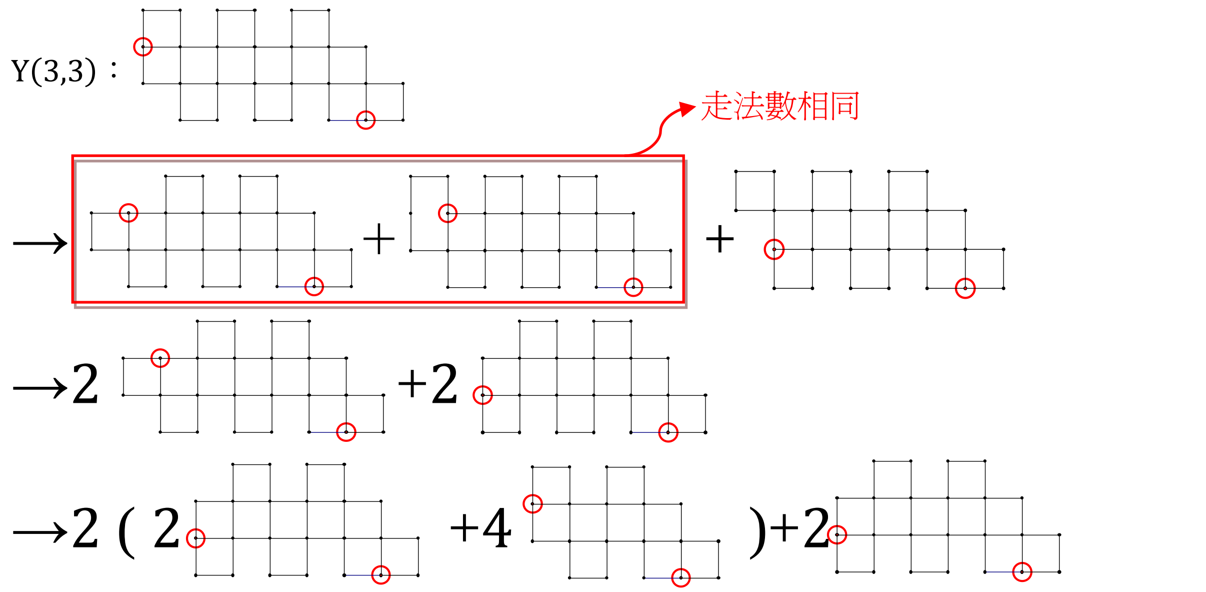
X 圖形	 定義其走法數為 X(a, b)，其中 a 為上方凸起數，b 為下方凸起數，$a, b \in N$。
Y 圖形	 定義其走法數為 Y(c, d)，其中 c 為上方凸起數，d 為下方凸起數，$c, d \in N \cup \{0\}$且$c + d \neq 0$。

Y(1,1)為 ，走法數為 120；Y(1,0)為 ，走法數為 16。

以 X(3,3) 和 Y(3,3) 為例，將它們以下列方式拆解：



$\rightarrow X(3,3) = 2Y(3,3) + 4Y(2,3) + 8Y(2,2)$



$\rightarrow Y(3,3) = 6Y(2,3) + 8Y(2,2)$

$$\text{同理}\begin{cases} X(n,n) = 2Y(n,n) + 4Y(n,n-1) + 8Y(n-1,n-1) \ldots (1) \\ X(n,n-1) = 2Y(n,n-1) + 4Y(n-1,n-1) + 8Y(n-1,n-2) \ldots (2) \\ Y(n,n) = 6Y(n,n-1) + 8Y(n-1,n-1) \ldots (3) \\ Y(n,n-1) = 6Y(n-1,n-1) + 8Y(n-1,n-2) \ldots (4) \end{cases}$$

由 (1)、(3)、(4) 可得：

$$\begin{aligned} X(n,n) &= 2Y(n,n) + 4Y(n,n-1) + 8Y(n-1,n-1) \\ &= 16Y(n,n-1) + 24Y(n-1,n-1) \end{aligned}$$

令 $Q_1 = 16, R_1 = 24$

由 (3)、(4) 可得下列遞迴式：

$$
\begin{aligned}
X(n,n) &= 16Y(n,n-1) + 24Y(n-1,n-1)\\
&= Q_1Y(n,n-1) + R_1Y(n-1,n-1)\\
&= Q_2Y(n-1,n-1) + R_2Y(n-1,n-2)\\
&= Q_3Y(n-1,n-2) + R_3Y(n-2,n-2)\\
&\vdots\\
&= Q_{2n-2}Y(1,1) + R_{2n-2}Y(1,0)\\
&= 120Q_{2n-2} + 16R_{2n-2}
\end{aligned}
$$

同理 $X(n,n-1) = 120Q_{2n-3} + 16R_{2n-3}$

其中 $Q_{n+1} = 6Q_n + R_n, R_{n+1} = 8Q_n$

$$\therefore \begin{bmatrix} Q_n \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, n \in N$$

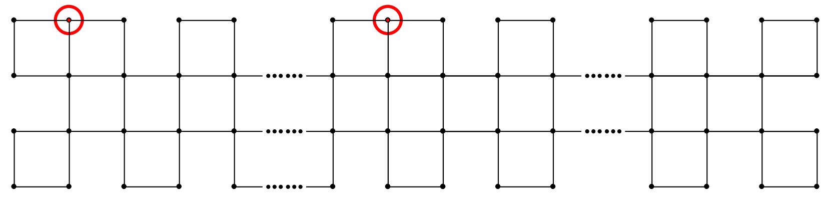
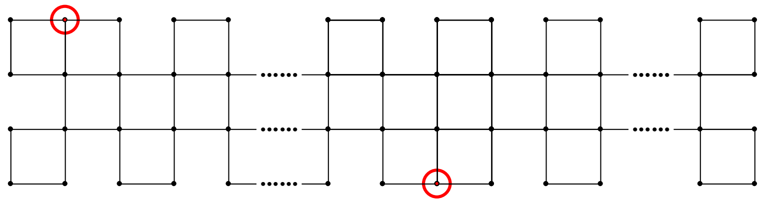
又由矩陣對角化得到：$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} T_{n+1} & T_n \\ 8T_{n+1} & 8T_{n-1} \end{bmatrix}, n \in N$

$$\text{其中}\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(3+\sqrt{17}\right)^k\left(3-\sqrt{17}\right)^{n-k-1}, n \in N \end{cases}$$

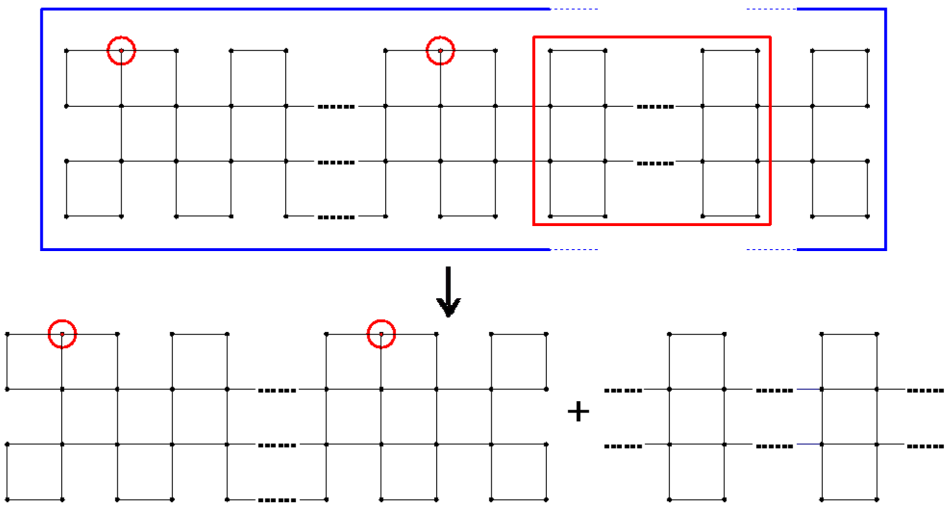
$$
\begin{aligned}
\therefore I(n) &= \begin{cases} 4X\left(\dfrac{n-2}{2}, \dfrac{n-4}{2}\right), n \text{ 爲偶數} \\ 4X\left(\dfrac{n-3}{2}, \dfrac{n-3}{2}\right), n \text{ 爲奇數} \end{cases}\\
&= 480Q_{n-5} + 64R_{n-5}\\
&= 480(3T_{n-4} - 2T_{n-5}) + 64(24T_{n-5} - 16T_{n-6})\\
&= 1440T_{n-4} + 576T_{n-5} - 1024T_{n-6}
\end{aligned}
$$

$$\text{故}\begin{cases} I(5) = 1312 \\ I(n) = 1440T_{n-4} + 576T_{n-5} - 1024T_{n-6}, n \geq 6 \end{cases}$$

2. 2 個奇點不相鄰且在邊長爲 $n-1$ 的邊上，僅 1 個奇點與頂點相鄰

n 爲偶數	
n 爲奇數	

定義此類圖形爲 J。在討論走法前，我們先將圖形拆爲兩部分如（圖 17），一爲蛇形部分(如藍色框內)，另一則爲「目」字形部分(如紅色框內)。

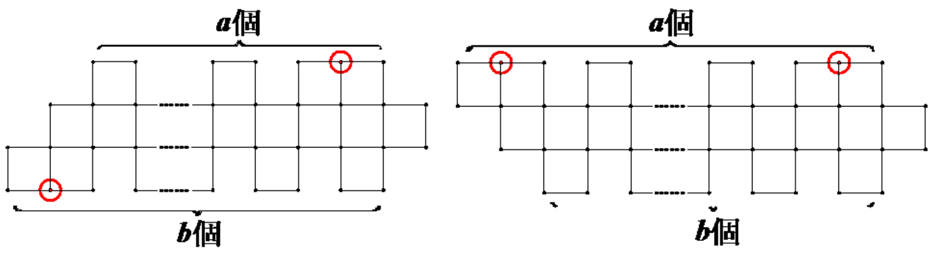
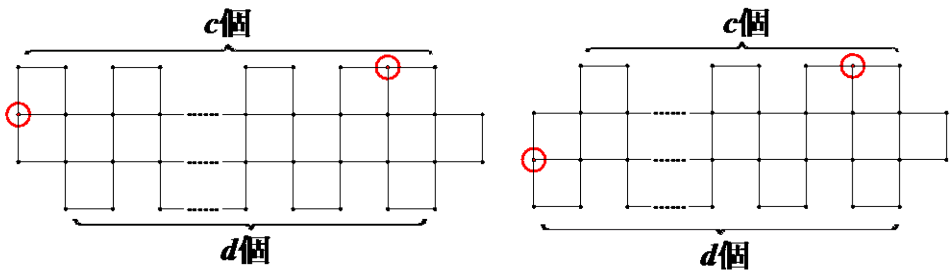


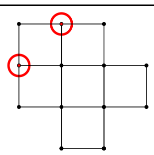
（圖 17）

定義圖形走法數爲 $J(p,q)$，其中 p 爲蛇形部分長邊上的總點數，q 爲目字形的個數，$n=p+2q$，$7\le p\le n$。

以下討論蛇形部分。

我們一樣先定義 Z 圖形與 W 圖形。

Z 圖形	 定義其走法數爲 $Z(a,b)$，其中 a 爲上方凸起數，b爲下方凸起數，$a,b\in\mathbb{N}$。
W圖形	 定義其走法數爲 $W(c,d)$，其中 c 爲上方凸起數，d 爲下方凸起數，$c,d\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 且 $c+d\neq 0$ 。

$W(1,1)$爲 ，走法數爲 304。雖然 $W(0,1)$ 的圖形並不存在，但依據 $W(2,1)=6W(1,1)+448=6W(1,1)+8W(1,0)$，定義 $W(1,0)=56$。

以同 X 圖形和 Y 圖形的拆解方式，得：

$$\begin{cases} Z(n,n)=2W(n,n)+4W(n,n-1)+8W(n-1,n-1)\ldots(1) \\ Z(n,n-1)=2W(n,n-1)+4W(n-1,n-1)+8W(n-1,n-2)\ldots(2) \\ W(n,n)=6W(n,n-1)+8W(n-1,n-1)\ldots(3) \\ W(n,n-1)=6W(n-1,n-1)+8W(n-1,n-2)\ldots(4) \end{cases}$$

由 (1)、(3)、(4) 可得：

$$Z(n,n)=2W(n,n)+4W(n,n-1)+8W(n-1,n-1)$$
$$=16W(n,n-1)+24W(n-1,n-1)$$

令 $Q_1=16, R_1=24$

由 (3)、(4) 可得：

$$Z(n,n)=Q_{2n-2}W(1,1)+R_{2n-2}W(1,0)=304Q_{2n-2}+56R_{2n-2}$$

同理 $Z(n,n-1)=304Q_{2n-3}+56R_{2n-3}$

其中 $Q_{n+1}=6Q_n+R_n, R_{n+1}=8Q_n$

$$\therefore \begin{bmatrix} Q_n \\ R_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} Q_1 \\ R_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}^{n}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, n\in N$$

又由矩陣對角化得到：$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix} T_{n+1} & T_n \\ 8T_{n+1} & 8T_{n-1} \end{bmatrix}, n\in N$

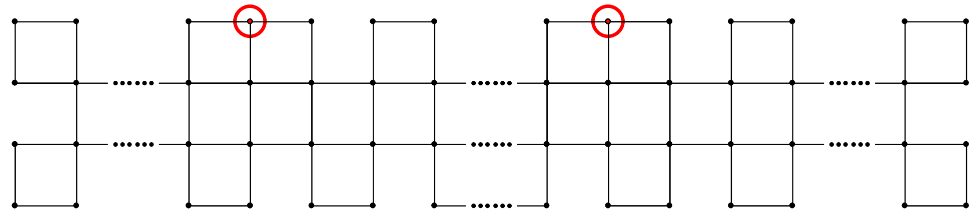
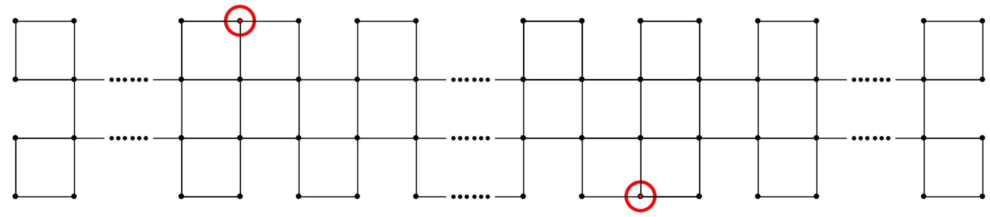
$$\text{其中}\begin{cases} T_0=0 \\ T_n=\sum_{k=0}^{n-1}(3+\sqrt{17})^k(3-\sqrt{17})^{n-k-1}, n\in N \end{cases}$$

再將其與「目」字形結合可得：

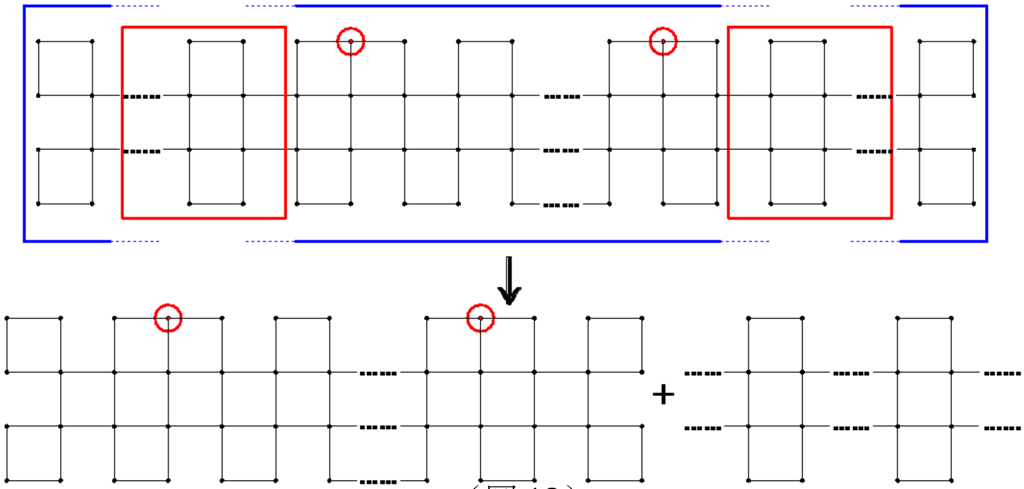
$$J(p,q)=\begin{cases} 8Z\left(\frac{p-4}{2},\frac{p-4}{2}\right)\times 40^q, n\text{ 為偶數} \\ 8Z\left(\frac{p-3}{2},\frac{p-5}{2}\right)\times 40^q, n\text{ 為奇數} \end{cases}$$
$$=(2432Q_{p-6}+448R_{p-6})\times 40^q$$
$$=(7296T_{p-5}+5888T_{p-6}-7168T_{p-7})\times 40^q$$

故 $\forall\, 7\le p\le n, n=p+2q, J(p,q)=(7296T_{p-5}+5888T_{p-6}-7168T_{p-7})\times 40^q$

3. 2 個奇點不相鄰且在邊長為 $n-1$的邊上，2 個奇點皆不與頂點相鄰

n 為偶數	
n 為奇數	

定義此類圖形為 K。在討論走法前，我們先將圖形拆為兩部分如（圖 18），一為蛇形部分(如藍色框內)，另一則為「目」字形部分(如紅色框內)。

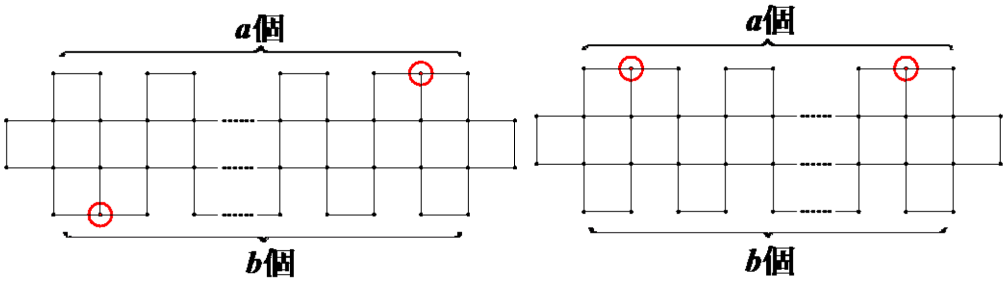


（圖 18）

此類圖形共有 $\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-9}{2}\right]}\left(\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)$ 種，每一種的走法數為 $K(p,q)$種，其中 p 為蛇形部分長邊上的總點數，q 為目字形個數，$n=p+2q$，$9\le p\le n$。

以下討論蛇形部分。

我們一樣先定義 S 圖形。

S 圖形	 定義其走法數為 $S(a,b)$，其中 a 為上方凸起數，b為下方凸起數，$a,b\in N$。

將 S 圖形拆解後，得：

$$\begin{cases} S(n,n)=2W(n,n)+8W(n-1,n)+168W(n-1,n-1)+288W(n-2,n-1)\ldots(1) \\ S(n-1,n)=2W(n-1,n)+8W(n-1,n-1)+168W(n-2,n-1) \\ \qquad\qquad +288W(n-2,n-2)\ldots(2) \\ W(n,n)=6W(n,n-1)+8W(n-1,n-1)\ldots(3) \\ W(n,n-1)=6W(n-1,n-1)+8W(n-1,n-2)\ldots(4) \end{cases}$$

由(1)、(3)、(4)可得：

$$\begin{aligned} S(n,n)&=2W(n,n)+8W(n-1,n)+168W(n-1,n-1)+288W(n-2,n-1) \\ &=304W(n-1,n-1)+448W(n-2,n-1) \end{aligned}$$

令$U_1=304$，$V_1=448$

再由(3)、(4)可得：

$S(n,n)=U_{2n-3}W(1,1)+V_{2n-3}W(1,0)=304U_{2n-3}+56V_{2n-3}$

同理 $S(n-1,n)=U_{2n-4}W(1,1)+V_{2n-4}W(0,1)=304U_{2n-4}+56V_{2n-4}$

其中 $U_1=304$，$V_1=448$，$U_{n+1}=6U_n+V_n$，$V_{n+1}=8U_n$

$$\therefore \begin{bmatrix}U_n\\V_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1\\8&0\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}U_1\\V_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1\\8&0\end{bmatrix}^{n}\begin{bmatrix}56\\-32\end{bmatrix}，n\in N$$

$$\therefore K(p,q) = \begin{cases} 16S\left(\dfrac{p-6}{2},\dfrac{p-4}{2}\right) \times 40^q \text{ , n 爲偶數} \\ 16S\left(\dfrac{p-5}{2},\dfrac{p-5}{2}\right) \times 40^q\text{, n 爲奇數} \end{cases}$$

$$= (4864U_{p-8} + 7168V_{p-8}) \times 40^q$$

$$= (272384T_{p-7} + 3055616T_{p-8} - 1835008T_{p-9}) \times 40^q$$

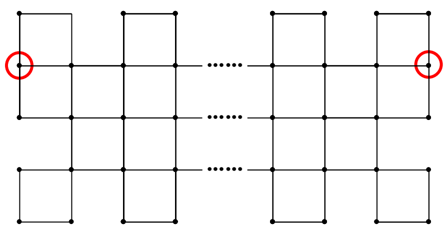
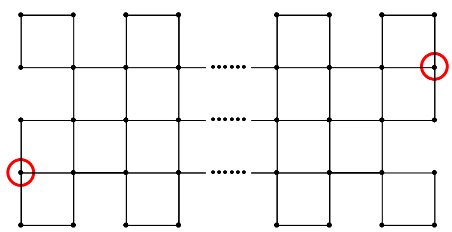
故 $\forall\, 9 \le p \le n$, $n = p + 2q$,

$K(p,q) = (272384T_{p-7} + 3055616T_{p-8} - 1835008T_{p-9}) \times 40^q$

五、探討 $5 \times n$ 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數 $(n \ge 5)$

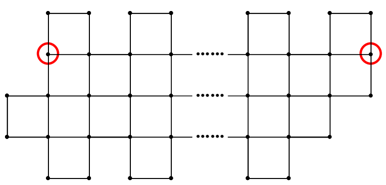
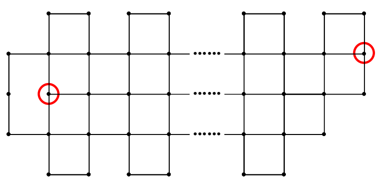
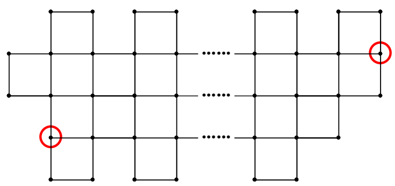
※以下只討論固定起點的情形。

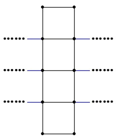
(一) n 爲偶數

圖形 L_1	圖形 L_2
2 個奇點在同一直線上 	2 個奇點不在同一直線上 

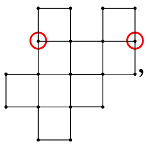
定義其走法數分別爲 $L_1(n)$、$L_2(n)$。

在討論走法前，我們先定義圖形 γ_1、γ_2、γ_3

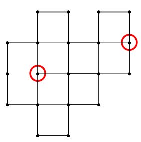
圖形γ_1	圖形γ_2	圖形γ_3
		

若圖形中有 n 個  (長條形)，則稱該圖形的走法數分別爲$\gamma_1(n)$、$\gamma_2(n)$及 $\gamma_3(n)$。

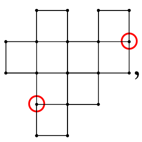
其中$\gamma_1(1)$圖形爲



，走法數爲 5952、$\gamma_2(1)$圖形爲



，走法數爲 6784

、$\gamma_3(1)$圖形爲 ，走法數爲 6144

經由路徑分析，我們得到以下關係式：

$$\begin{cases} \gamma_1(n) = 176\gamma_1(n-1) + 112\gamma_2(n-1) + 128\gamma_3(n-1) \ldots (1) \\ \gamma_2(n) = 160\gamma_1(n-1) + 144\gamma_2(n-1) + 160\gamma_3(n-1) \ldots (2) \\ \gamma_3(n) = 128\gamma_1(n-1) + 112\gamma_2(n-1) + 176\gamma_3(n-1) \ldots (3) \end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)可得：

$$\begin{bmatrix}\gamma_1(n)\\ \gamma_2(n)\\ \gamma_3(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}\gamma_1(1)\\ \gamma_2(1)\\ \gamma_3(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{n}\begin{bmatrix}12\\ 16\\ 16\end{bmatrix}$$

$$\therefore L_1(n)=4\left[10\gamma_1\left(\frac{n-4}{2}\right)+6\gamma_2\left(\frac{n-4}{2}\right)+6\gamma_3\left(\frac{n-4}{2}\right)\right]$$

$$=40\gamma_1\left(\frac{n-4}{2}\right)+24\gamma_2\left(\frac{n-4}{2}\right)+24\gamma_3\left(\frac{n-4}{2}\right)$$

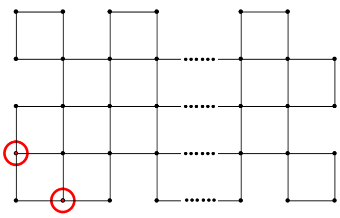
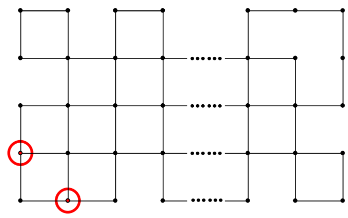
$$=\det\left(\begin{bmatrix}40 & 24 & 24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{\frac{n-4}{2}}\begin{bmatrix}12\\ 16\\ 16\end{bmatrix}\right)$$

同理 $L_2(n)=\det\left(\begin{bmatrix}24 & 24 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{\frac{n-4}{2}}\begin{bmatrix}12\\ 16\\ 16\end{bmatrix}\right)$

$$\therefore\begin{cases}L_1(n)=\det\left(\begin{bmatrix}40 & 24 & 24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{\frac{n-4}{2}}\begin{bmatrix}12\\ 16\\ 16\end{bmatrix}\right), n\geq 6\\ L_2(n)=\det\left(\begin{bmatrix}24 & 24 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{\frac{n-4}{2}}\begin{bmatrix}12\\ 16\\ 16\end{bmatrix}\right), n\geq 6\end{cases}$$

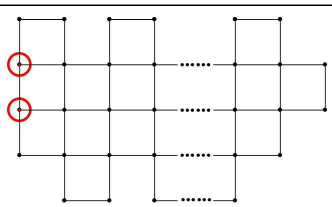
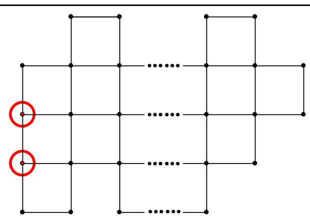
(二) n 為奇數

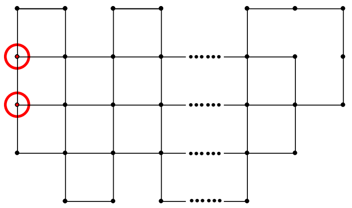
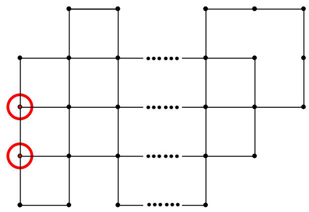
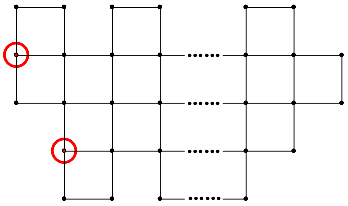
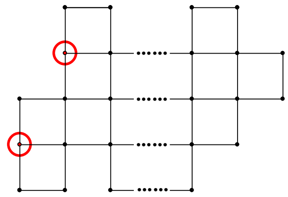
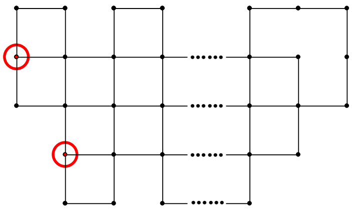
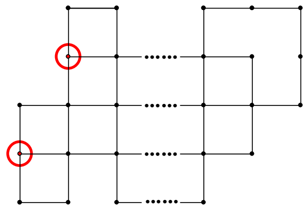
1. 2 奇點與同一頂點相鄰

圖形 M_1	圖形 M_2
	

定義其走法數分別為 $M_1(n)$、$M_2(n)$。

在討論走法前，我們先定義圖形 α_1、α_2、β_1、β_2

圖形 α_1		

圖形 α_2	 
圖形 β_1	 
圖形 β_2	 

定義其走法數分別爲 $\alpha_1(a,b)$、$\alpha_2(a,b)$、 $\beta_1(a,b)$、$\beta_2(a,b)$，其中 a 爲上方凸起數，b爲下方凸起數。

將 α_1 、β_1 圖形拆解得：

$$\begin{cases}\alpha_1(n,n) = 16\alpha_1(n,n-1) + 8\beta_1(n,n-1)\\ \alpha_1(n,n-1) = 16\alpha_1(n-1,n-1) + 8\beta_1(n-1,n-1)\\ \beta_1(n,n) = 6\alpha_1(n,n-1) + 4\beta_1(n,n-1)\\ \beta_1(n,n-1) = 6\alpha_1(n-1,n-1) + 4\beta_1(n-1,n-1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha_1(n,n)\\ \beta_1(n,n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1(n,n-1)\\ \beta_1(n,n-1)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha_1(n,n)\\ \beta_1(n,n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}\alpha_1(1,1)\\ \beta_1(1,1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}768\\ 304\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore M_1(n) = 4\left[6\alpha_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}\right) + 4\beta_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}\right)\right]$$

$$= 24\alpha_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}\right) + 16\beta_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}\right)$$

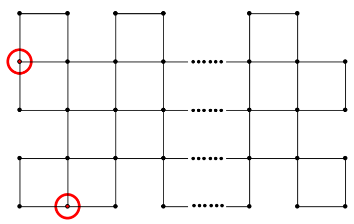
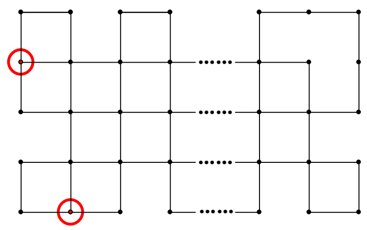
$$= \det\left(\begin{bmatrix}24 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-3}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

同理 $\begin{bmatrix}\alpha_2(n,n)\\ \beta_2(n,n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}\alpha_2(1,1)\\ \beta_2(1,1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-2}\begin{bmatrix}304\\ 120\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$$\therefore M_2(n) = \det\left(\begin{bmatrix}24 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-3}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\therefore \begin{cases}M_1(n) = \det\left(\begin{bmatrix}24 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-3}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right), n \geq 5\\ M_2(n) = \det\left(\begin{bmatrix}24 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-3}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right), n \geq 5\end{cases}$$

2. 2 奇點不與同一頂點相鄰

圖形 N_1	圖形 N_2
	

定義其走法數分別爲 $N_1(n)$、$N_2(n)$。

同圖形 M_1、M_2 的方式推得：

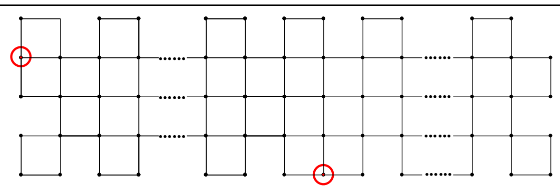
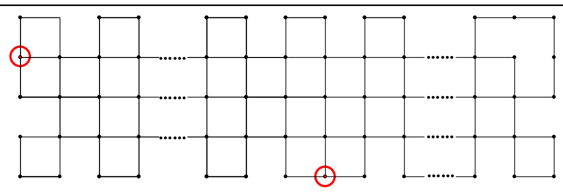
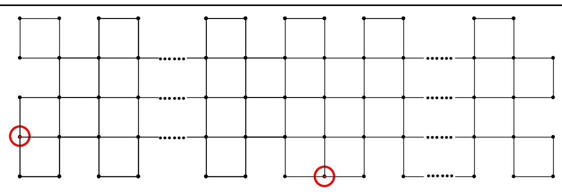
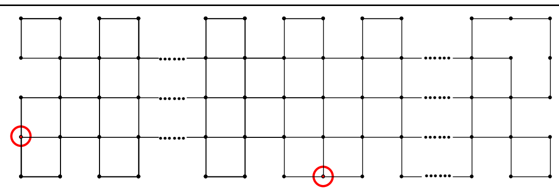
$$N_1(n)=2\left[10\alpha_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2}\right)+28\beta_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2}\right)\right]$$

$$=20\alpha_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2}\right)+56\beta_1\left(\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2}\right)$$

$$\text{又}\begin{cases}\begin{bmatrix}\alpha_1(n,n-1)\\ \beta_1(n,n-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-3}\begin{bmatrix}\alpha_1(1,1)\\ \beta_1(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-3}\begin{bmatrix}768\\ 304\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-1}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\alpha_2(n,n-1)\\ \beta_2(n,n-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-3}\begin{bmatrix}\alpha_2(1,1)\\ \beta_2(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-3}\begin{bmatrix}304\\ 120\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{2n-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\end{cases}$$

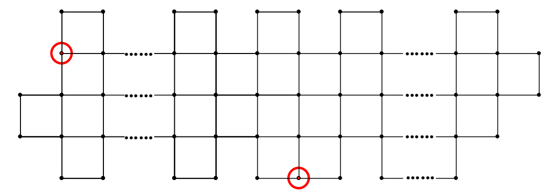
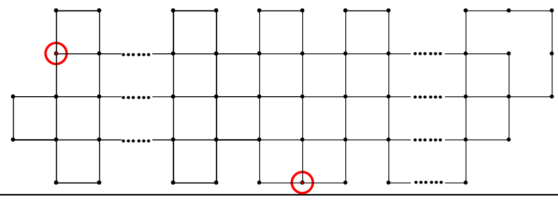
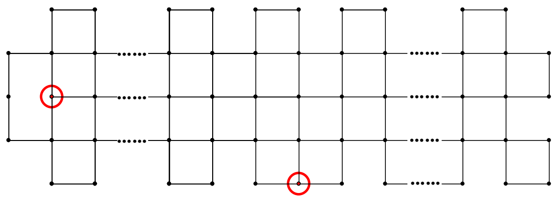
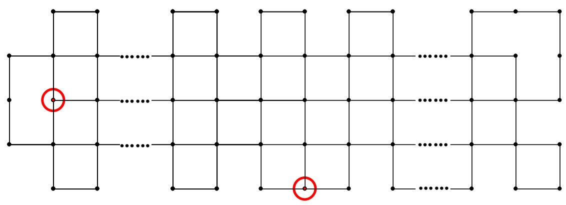
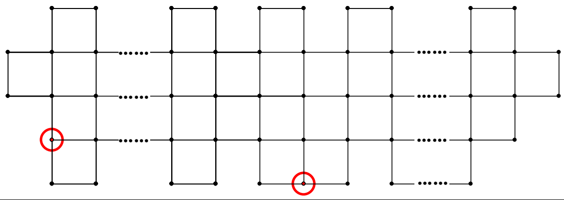
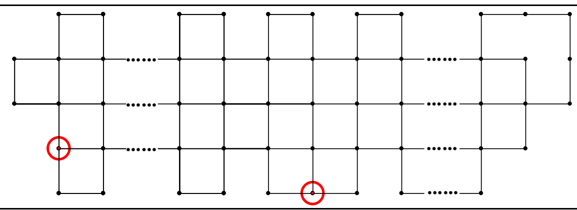
$$\therefore\begin{cases}N_1(n)=\det\left(\begin{bmatrix}20 & 56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-4}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right),n\ge 5\\ N_2(n)=\det\left(\begin{bmatrix}20 & 56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-4}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right),n\ge 5\end{cases}$$

3. 僅一奇點與頂點相鄰

圖形 O_1	圖形 O_2
	
圖形 P_1	圖形 P_2
	

若左邊有 p 個長條形，右邊的蛇形部分上下共有 q 個凸起(不計入口字形)，稱圖形的走法數爲 $O_1(p,q)$、$O_2(p,q)$、$P_1(p,q)$、$P_2(p,q)$，其中$n=2p+q+4$，$n\ge 7$。

在討論走法時，我們先定義圖形 λ_1、λ_2、π_1、π_2、φ_1和 φ_2。

圖形 λ_1	圖形 λ_2
	
圖形 π_1	圖形 π_2
	
圖形 φ_1	圖形 φ_2
	

若左邊有 p 個長條形，右邊上方有 $\frac{q+1}{2}$ 個凸起，右邊下方有 $\frac{q-1}{2}$ 個凸起，則定義圖形之走法數爲 $\lambda_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)$、$\lambda_2\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)$、$\pi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)$、$\pi_2\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)$、$\varphi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)$ 和 $\varphi_2(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2})$。

$$\therefore O_1(p,q) = 4\left[10\lambda_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)+6\pi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)+6\varphi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\right]$$

$$= 4\left[a_1\lambda_1\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)+b_1\pi_1\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)+c_1\varphi_1\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\right]$$

其中 $\begin{bmatrix}\lambda_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \pi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \varphi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p \begin{bmatrix}\lambda_1\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \pi_1\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \varphi_1\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\end{bmatrix}$,

$$[a_1 \quad b_1 \quad c_1] = [10 \quad 6 \quad 6]\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p$$

再將此 3 種圖形作路徑分析，得：

$$\begin{cases}\lambda_1(0,n,n-1) = 2624\alpha_1(n-1,n-2)+1600\beta_1(n-1,n-2)\\ \pi_1(0,n,n-1) = 2800\alpha_1(n-1,n-2)+1680\beta_1(n-1,n-2)\\ \varphi_1(0,n,n-1) = 2272\alpha_1(n-1,n-2)+1280\beta_1(n-1,n-2)\end{cases}$$

$$\therefore O_1(p,q)=4\left[(2624a_1+2800b_1+2272c_1)\alpha_1\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)+(1600a_1+1680b_1\right.$$

$$\left.+1280c_1)\beta_1\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)\right]$$

$$=(10496a_1+11200b_1+9088c_1)\alpha_1\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)+(6400a_1+6720b_1$$

$$+5120c_1)\beta_1\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)$$

又 $\begin{bmatrix}\alpha_1\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)\\ \beta_1\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

$$\therefore O_1(p,q)=\det\left([10\quad 6\quad 6]\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p\begin{bmatrix}10496 & 6400\\ 11200 & 6720\\ 9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

同理 $\begin{bmatrix}\lambda_2\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \pi_2\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \varphi_2\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p\begin{bmatrix}\lambda_2\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \pi_2\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\\ \varphi_2\left(0,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\end{bmatrix}$,

$$\begin{cases}\lambda_2(0,n,n-1)=2624\alpha_2(n-1,n-2)+1600\beta_2(n-1,n-2)\\ \pi_2(0,n,n-1)=2800\alpha_2(n-1,n-2)+1680\beta_2(n-1,n-2)\\ \varphi_2(0,n,n-1)=2272\alpha_2(n-1,n-2)+1280\beta_2(n-1,n-2)\end{cases}$$

又 $\begin{bmatrix}\alpha_2\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)\\ \beta_2\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$$\therefore O_2(p,q)=\det\left([10\quad 6\quad 6]\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p\begin{bmatrix}10496 & 6400\\ 11200 & 6720\\ 9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)$$

又 $P_1(p,q)=4\left[6\lambda_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)+6\pi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)+10\varphi_1\left(p,\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\right]$

$$\therefore P_1(p,q)=\det\left([6\quad 6\quad 10]\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p\begin{bmatrix}10496 & 6400\\ 11200 & 6720\\ 9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

同理 $P_2(p,q)=\det\left([6\quad 6\quad 10]\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p\begin{bmatrix}10496 & 6400\\ 11200 & 6720\\ 9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)$

陸、 結論

一、$m \times n$ 點方陣中的一筆畫圖形

(一) m、n 至少有一為偶數

一筆畫圖形之最長路徑 $S = 2mn - 2(m+n) + 5$

(二) m、n 皆為奇數

一筆畫圖形之最長路徑 $S = 2mn - 2(m+n) + 4$

二、$a \times b \times c$ 點方塊中的一筆畫圖形

(一) a、b、c 中至少有一為 2 $(c = 2)$

一筆畫圖形之最長路徑 $S = 4ab - 7$

(二) a、b、$c > 2$ 且 a、b、c 中至少有一為 3 $(c = 3)$

1. a、b 皆為偶數

   一筆畫圖形之最長路徑 $S = 7ab - 2(a+b) - 6$

2. a、b 為一奇一偶

   一筆畫圖形之最長路徑 $S = 7ab - 2(a+b) - 7$

3. a、b 皆為奇數

   一筆畫圖形之最長路徑 $S = 7ab - 2(a+b) - 9$

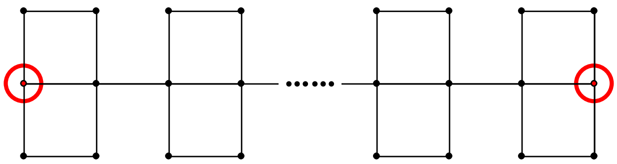
(三) a、b、$c > 3$

無論 a、b、c 是奇數或是偶數，一筆畫圖形之最長路徑

$S = 3abc - 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 21$

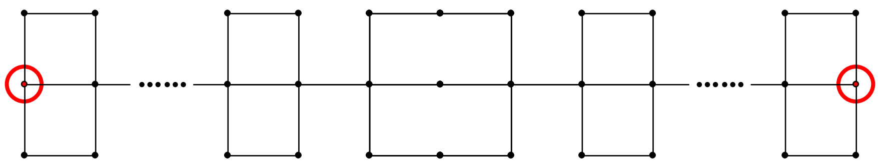
三、$3 \times n$ 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數

(一) n 為偶數

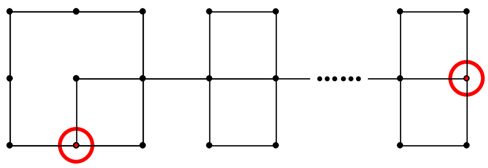
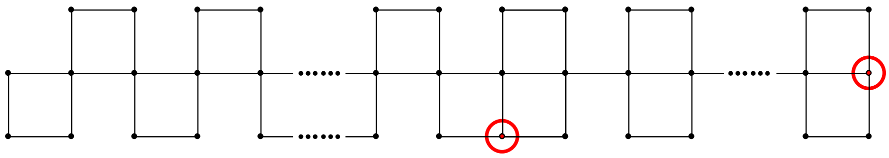
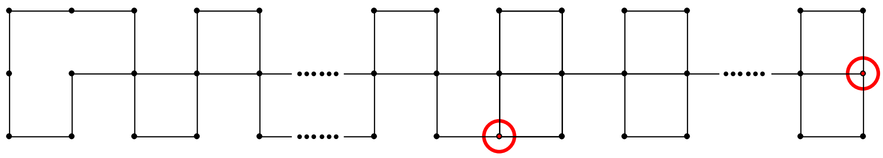
圖形 A	
走法數	$A(n) = 6^t, t = \frac{n}{2}, n \geq 2$

(二) n 為奇數

1. 2 個奇點都在邊長為 2 的邊上，共有 $\left[\frac{n-3}{4}\right] + 1$ 種

圖形 B	
走法數	$B(n) = 6^t, t = \frac{n-1}{2}, n \geq 3$

2. 僅 1 個奇點在邊長為 2 的邊上

圖形 C_1	
走法數	$C_1(n) = 6^t, t = \frac{n-1}{2}, n \geq 3$
圖形 C_2	
走法數	$C_2(p,q) = 2^p \times 6^q \times 16, n = p + 2q + 3, n \geq 3, 0 \leq p \leq n-3$
圖形 C_3	
走法數	$C_3(p,q) = 2^p \times 6^q \times 16, n = p + 2q + 4, n \geq 5, 1 \leq p \leq n-4$

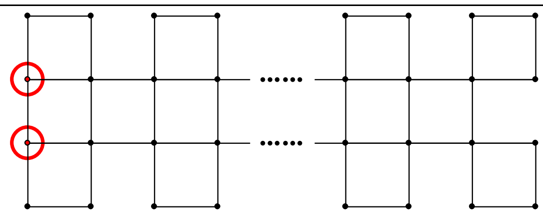
其中 q 為日字形的個數，p 為口字形的個數。

四、$4 \times n$ 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數

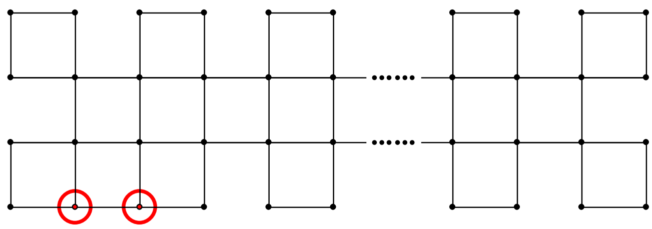
(一)基本圖形及其延伸

1. n 為偶數

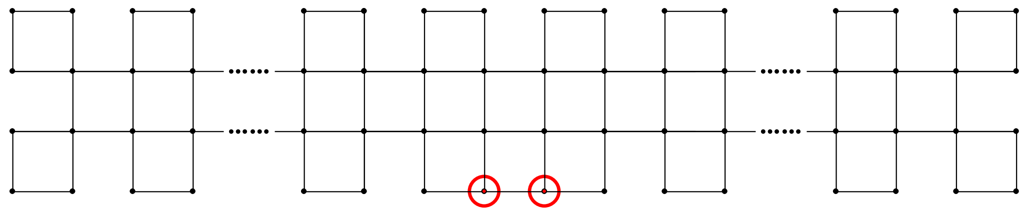
(1) 2 個奇點都在邊長為 3 的邊上

圖形 D	
走法數	$D(n) = 4 \times 40^t, t = \frac{n-2}{2}, n \geq 2$

(2) 2 個奇點相鄰且在邊長為 $n-1$的邊上，其中 1 個奇點與頂點相鄰

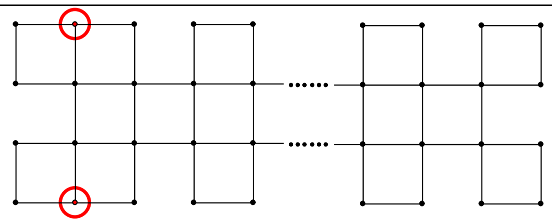
圖形 E	
走法數	$E(n) = 6144 \times 40^t, t = \frac{n-6}{2}, n \geq 6$

(3) 2 個奇點相鄰且皆不與頂點相鄰且在邊長爲 $n-1$的邊上，共有$\left[\frac{n-8}{4}\right]+1$種

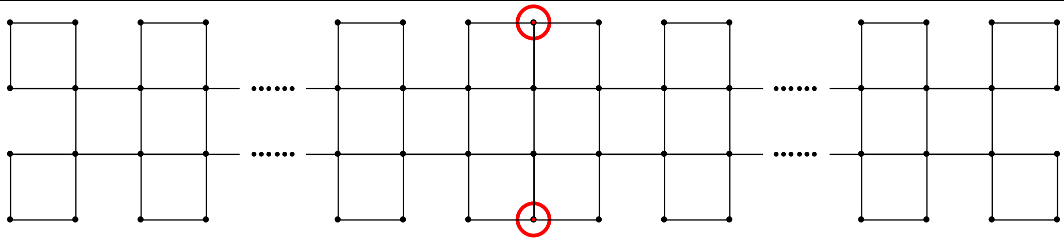
圖形 F	
走法數	$F(n)=235520\times 40^{t}\,,t=\dfrac{n-8}{2}\,,n\geq 8$

2. n 爲奇數

(1) 2 個奇點在同一直線上且與頂點相鄰

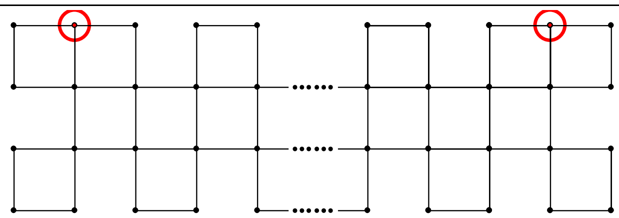
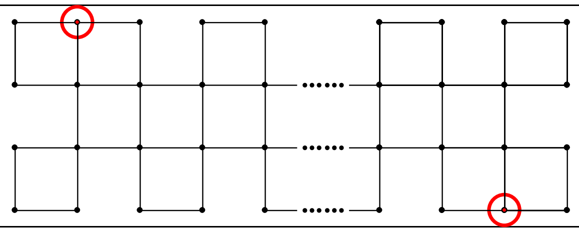
圖形 G	
走法數	$G(n)=1248\times 40^{t}\,,t=\dfrac{n-5}{2},n\geq 5$

(2) 2 個奇點在同一直線上且都不與頂點相鄰，共有$\left[\dfrac{n-7}{4}\right]+1$種

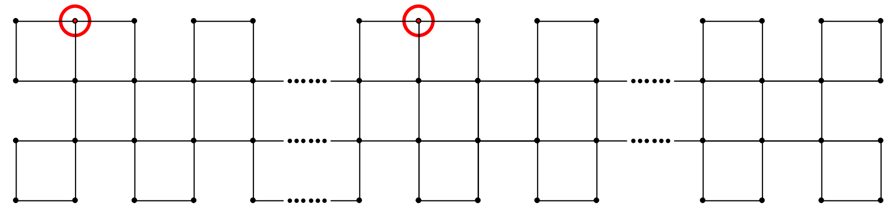
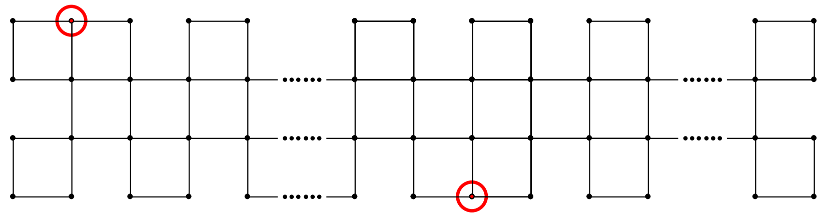
圖形 H	
走法數	$H(n)=41472\times 40^{t}\,,t=\dfrac{n-7}{2},n\geq 7$

(二) 蛇形及其延伸

1. 2 個奇點不相鄰且在邊長爲 $n-1$的邊上，2 個奇點皆與頂點相鄰

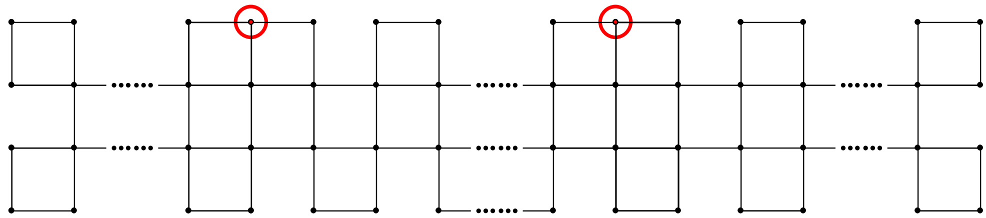
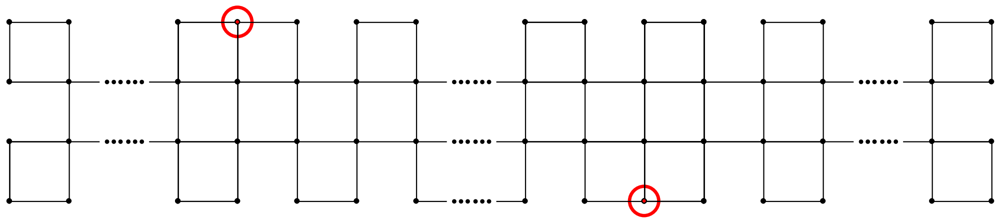
n 爲偶數	
n爲奇數	
走法數	$\begin{cases} I(5)=1312 \\ I(n)=1440T_{n-4}+576T_{n-5}-1024T_{n-6}\,,n\geq 6 \end{cases}$

2.　2 個奇點不相鄰且在邊長爲 $n-1$的邊上，僅 1 個奇點與頂點相鄰

n 爲偶數	
n爲奇數	
走法數	$J(p,q)=\left(7296T_{p-5}+5888T_{p-6}-7168T_{p-7}\right)\times 40^{q}, 7\le p\le n$, $n=p+2q$

3.　2 個奇點不相鄰且在邊長爲 $n-1$的邊上，2 個奇點皆不與頂點相鄰

，共有 $\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-9}{2}\right]}\left(\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)$ 種

n 爲偶數	
n爲奇數	
走法數	$K(p,q)=\left(272384T_{p-7}+3055616T_{p-8}-1835008T_{p-9}\right)\times 40^{q}$, $9\le p\le n$, $n=p+2q$

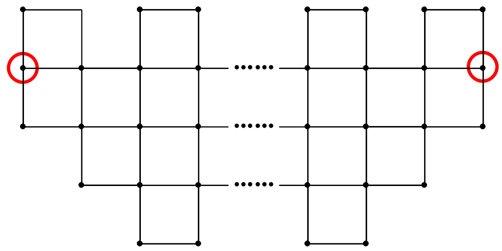
其中 $\begin{cases} T_0=0 \\ T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(3+\sqrt{17}\right)^{k}\left(3-\sqrt{17}\right)^{n-k-1}, n\in N \end{cases}$

p 爲蛇形部分長邊上的總點數，q 爲目字形的個數

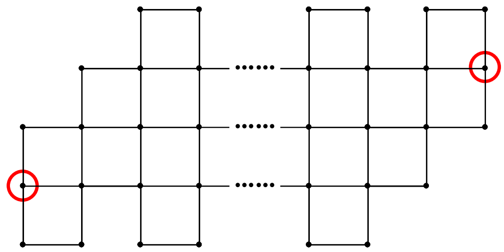
五、5 × n 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數

(一) n 爲偶數：2 個奇點皆位於邊長爲 5 的邊上

1. 2 個奇點在同一直線上

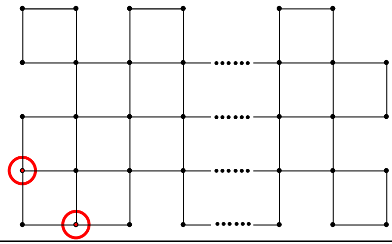
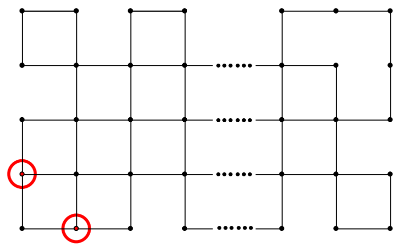
圖形L_1	
走法數	$L_1(n)=\det\left(\begin{bmatrix}40 & 24 & 24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\160 & 144 & 160\\128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{\frac{n-4}{2}}\begin{bmatrix}12\\16\\16\end{bmatrix}\right), n\geq 6$

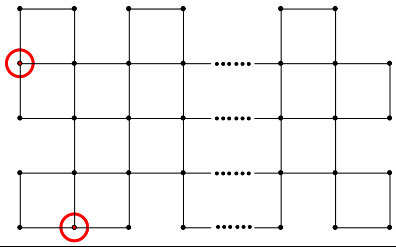
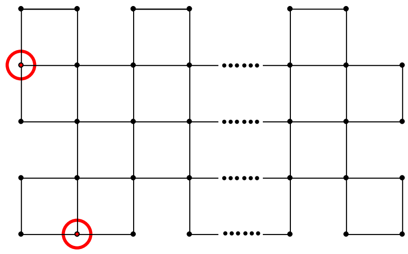
2. 2 個奇點不在同一直線上

圖形L_2	
走法數	$L_2(n)=\det\left(\begin{bmatrix}24 & 24 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\160 & 144 & 160\\128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{\frac{n-4}{2}}\begin{bmatrix}12\\16\\16\end{bmatrix}\right), n\geq 6$

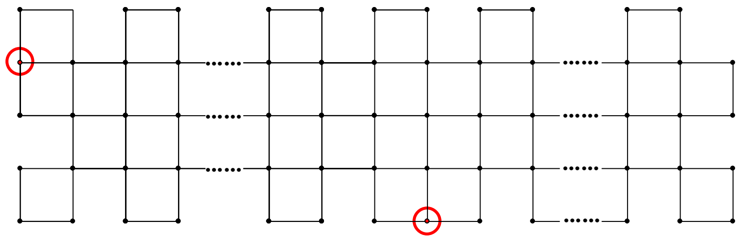
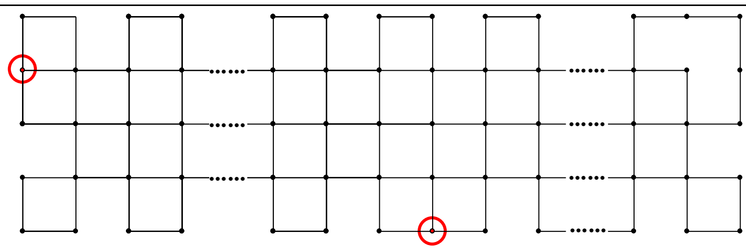
(二) n 爲奇數

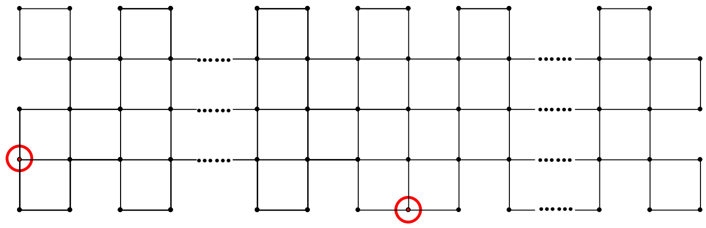
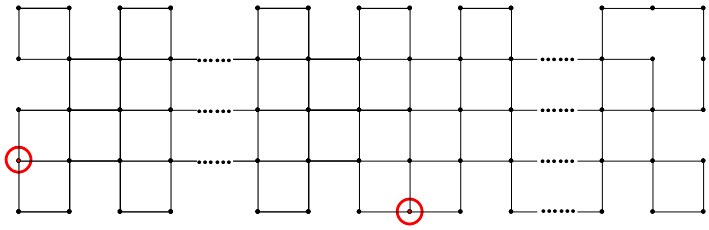
1. 2 奇點皆與頂點相鄰

圖形M_1	
走法數	$M_1(n)=\det\left(\begin{bmatrix}24 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\6 & 4\end{bmatrix}^{n-3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right), n\geq 5$
圖形M_2	
走法數	$M_2(n)=\det\left(\begin{bmatrix}24 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\6 & 4\end{bmatrix}^{n-3}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right), n\geq 5$

圖形N_1	
走法數	$N_1(n)=\det\left(\begin{bmatrix}20 & 56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-4}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right), n\geq 5$
圖形N_2	
走法數	$N_2(n)=\det\left(\begin{bmatrix}20 & 56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{n-4}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right), n\geq 5$

2. 僅一奇點與頂點相鄰

圖形O_1	
走法數	$O_1(p,q)=\det\left(\begin{bmatrix}10 & 6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{p}\begin{bmatrix}10496 & 6400\\ 11200 & 6720\\ 9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right)$
圖形O_2	
走法數	$O_2(p,q)=\det\left(\begin{bmatrix}10 & 6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\ 160 & 144 & 160\\ 128 & 112 & 176\end{bmatrix}^{p}\begin{bmatrix}10496 & 6400\\ 11200 & 6720\\ 9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\ 6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)$

圖形P_1	
走法數	$P_1(p,q)=\det\left(\begin{bmatrix}6 & 6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\160 & 144 & 160\\128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p\begin{bmatrix}10496 & 6400\\11200 & 6720\\9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$
圖形P_2	
走法數	$P_2(p,q)=\det\left(\begin{bmatrix}6 & 6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}176 & 112 & 128\\160 & 144 & 160\\128 & 112 & 176\end{bmatrix}^p\begin{bmatrix}10496 & 6400\\11200 & 6720\\9088 & 5120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 8\\6 & 4\end{bmatrix}^{q-2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$

其中 p 爲長條形個數， q 爲蛇形部分上下總凸起數(不計入口字形)

柒、 未來展望

在探討 $m\times n$ 點方陣完成最長路徑的走法數時，使用路徑分析並求出遞迴關係的方法有其局限性，圖形的拆解會隨著 m 值的增大而更趨困難複雜，期望未來能找到更簡單的方法，求出在所有情形下 $m\times n$ 點方陣的走法數，並延伸至 $a\times b\times c$ 點方塊中。

此外本次研究只探討點方陣和點方塊，希望未來能夠朝向其他類圖形發展。

捌、 參考資料

一、網路資源

(一)七橋問題

http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%9F%AF%E5%B0%BC%E6%96%AF%E5%A0%A1%E4%B8%83%E6%A1%A5%E9%97%AE%E9%A2%98

(二)矩陣對角化

http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8F%AF%E5%AF%B9%E8%A7%92%E5%8C%96%E7%9F%A9%E9%98%B5

【評語】040413

這個作品討論方格上的一筆畫最長路徑以及最長路徑的所有走法數，分門別類討論 2xn, 3xn, 4xn 就因太過複雜而無以為繼。雖然就以上特例的圖形去分析出一些計數公式，但是因為沒有引入太多數學觀念，基本上就是暴力法。這樣的計數工作，在統計力學和碎形都經常碰到，但是由於像本作品那樣計算精確數量確實不可行，多半是尋求一個以 order 作為函數的估計公式。本作品另有一個問題點就是對於分類是否完整均未加以說明，而且寫法上只有圖形(未詳細說明)然後就是最終公式，因此計數結果是否正確難以被驗證。作者口述表達作品清晰完整，令人印象深刻，但是其他同學卻沒有太多發表機會，這對於一件團體合作的作品是一個沒有說服力之處。