中華民國第 54 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040412

被禁錮的軌跡－探討簡諧動點之中心軌跡

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 葉芝琦 高二 楊舒瑄 高二 林亞璇	陳建燁

關鍵詞：軌跡、簡諧運動、橢圓

摘要

本篇研究主要探討角速度相同的數個簡諧動點之質量中心的軌跡。我們先從兩分別在不同線段上做簡諧運動的動點 P'、Q' 之中點 M 出發，觀察並研究出其軌跡範圍，接著推導出其軌跡方程式。同時進一步分析不同線段相交情形之間的關聯性。另外我們討論 P'、Q' 有權重的情況，此時 M 為 $\overline{P'Q'}$ $m:n$ 內分點，發現結果與中點情況十分類似。

接著，我們研究三個動點的情況，觀察三動點重心的軌跡圖形，進而推廣為 k 個動點，此外我們也做了初步的三維推廣。

壹、 研究動機

有一次上數學課時，老師給我們看一個有趣的圖，圖上為兩分別在不同線段上以相同角速度做簡諧運動的點，當起始角度相等時，其中點軌跡為一斜線段，而當起始角度不同時，軌跡為一橢圓。我們覺得很有趣，並好奇在其他條件下，平面上各自作簡諧運動的點究竟可以迸出什麼樣的火花？於是我們使用 *geogebra* 繪圖，改變各種變因，沒想到意外地觀察到許多有趣的現象。

貳、 研究目的

一、 求出兩點在兩線段作簡諧運動的中點軌跡移動範圍及方程式，並研究軌跡由橢圓退化成圓或直線的條件

二、 探討兩線段相交於中點、一端點重合、交於一點（非中點或端點）以及不相交四種情形中點軌跡之間的關聯

三、 討論在三線段上各自作簡諧運動的三點之重心軌跡圖形及圖形中心點

四、 探討 k 個動點時的軌跡圖形

五、 加上質量不同的條件探討質量中心的軌跡

參、 研究設備及器材

Geogebra、紙筆

肆、 研究過程或方法

一、質量相同

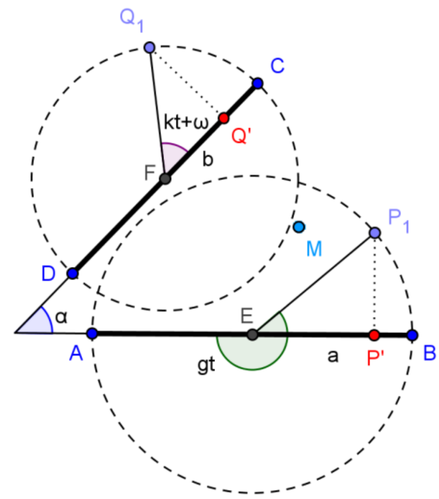
數個質量相同的動點之質心座標，即為所有動點座標之平均。以下我們從兩個動點的情況開始探討，並拓展到 k 個動點情況。

（一） 兩條線段（質點）

我們用 *Geogebra* 作圖觀察性質，發現當角速度不同時中點的軌跡非已知曲線，因此我們把研究重點擺在角速度相同時的情況，對於角速度不同的情形，僅針對其軌跡範圍做討論。

1. 名詞定義：

平面上有長度分別為 $2a$、$2b$ 的兩線段 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，母圓 C_1、C_2 為分別以兩線段為直徑的圓，其圓心為 E、F。在母圓上有以固定角速度運動的動點 P、Q。

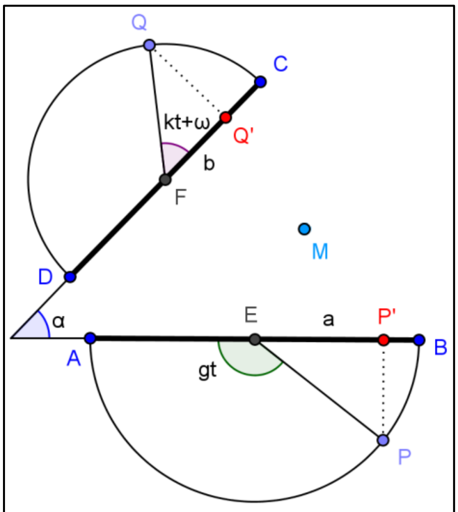


此為完整的定義圖

P' 為 P_1 在直徑上的投影點，當 P 在 C_1 上作等速率圓周運動時，P' 恰在 $\overline{AB}$上作簡諧運動，以同樣方式定義 Q_1 及 Q'。$\overline{P'Q'}$ 之中點 M 的軌跡是我們主要研究的對象。

設 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的夾角為 α（$0° \leq \alpha \leq 180°$）。另外令 gt 為以 $\overrightarrow{EA}$ 為始邊、$\overrightarrow{EP}$ 為終邊的有向角，$kt+\omega$ 為以 $\overrightarrow{FC}$ 為始邊、$\overrightarrow{FQ}$ 為終邊的有向角，P_1、Q_1 的起始角度分別是 $0°$、ω，其中 t 是經過的時間。

以上為我們推導算式時會用到的定義。但為了不使圖形過度複雜，我們另外定義 C_1 被 $\overline{AB}$ 切割成的兩個半圓中，較靠近 $\overline{CD}$ 的半圓為內半圓、遠離 $\overline{CD}$ 的半圓為外半圓，並且



此為省略內半圓的圖

$$P = \begin{cases} P_1\text{，當 } P_1 \text{ 在外半圓上} \\ P_1 \text{ 關於 } \overline{AB} \text{ 的對稱點，當 } P_1 \text{ 在內半圓上} \end{cases}$$

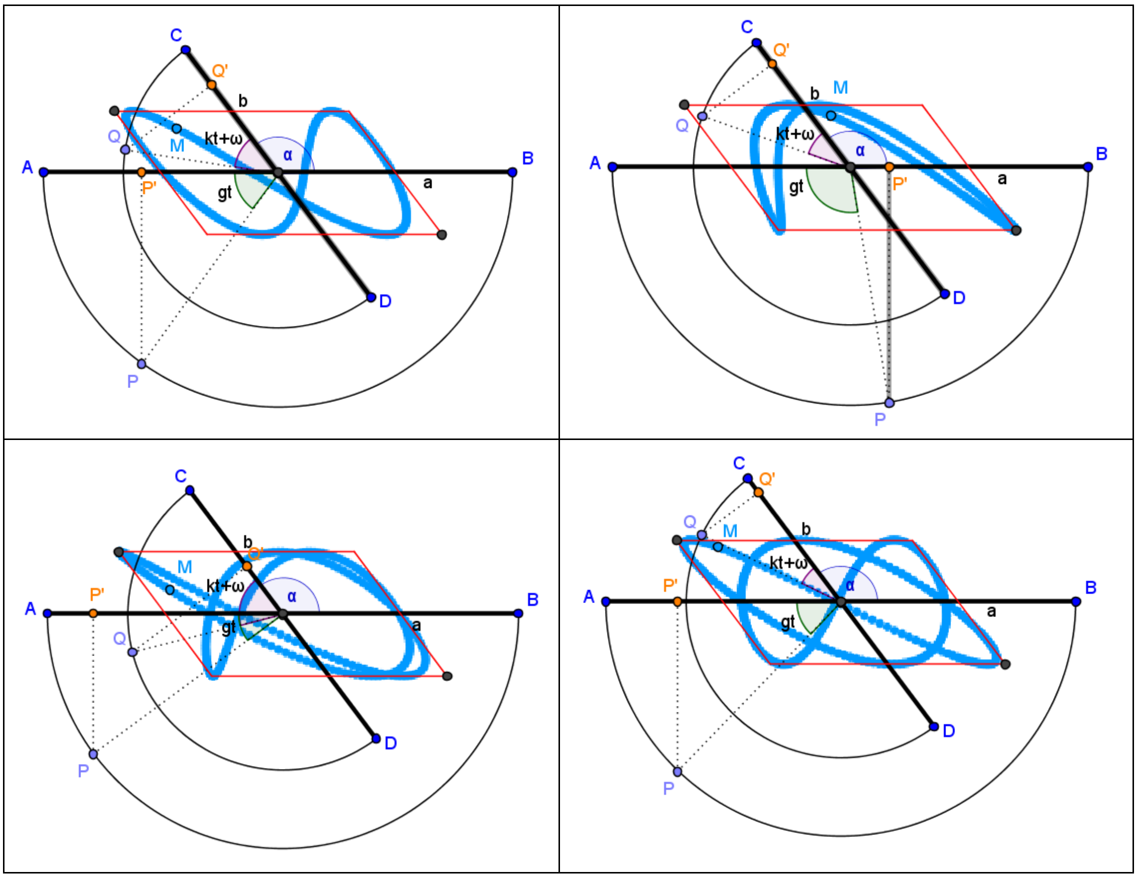
，這麼一來 P 是在半圓上等速率來回的點，而 P' 同時為 P_1 和 P 在 $\overline{AB}$ 上的投影點，以同樣方式定義 Q。接下來我們顯示的圖形將用 P、Q 及外半圓取代 P_1、Q_1 和整個圓，並且為了標示方便，我們將 gt 及 $kt+\omega$ 的終邊分別標為 $\overrightarrow{EP}$ 及 $\overrightarrow{FQ}$，但在定義上兩者的終邊仍為 $\overrightarrow{EP_1}$ 及 $\overrightarrow{FQ_1}$。

2. 軌跡範圍：

(1) 角速度不同

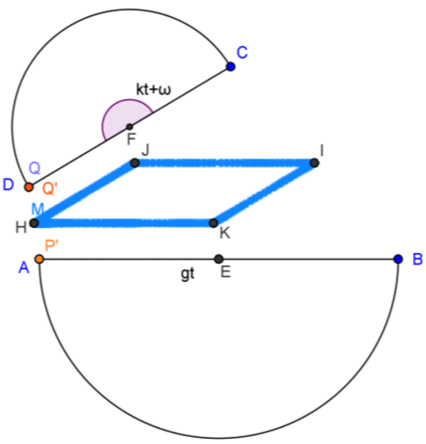
設兩圓 C_1、C_2 的角速度比為 $g:k$，我們觀察到當 $\frac{g}{k}$ 為有理數時，中點軌跡是一不規則的封閉曲線，且被禁錮在一平行四邊形內。若 $\frac{g}{k}$ 為有理數，則可找到兩正整數 m,n 使 $g:k=m:n$ 且 m,n 互質。當 P_1 繞了 m 圈回到起始點時，Q_1 亦繞了 n 圈回到起始點，於是 M 也會回到軌跡起始點，可知此軌跡必具有週期性。

以下四圖中 $\frac{g}{k}$ 之值相異，經過多次觀察，我們發現無論 $\frac{g}{k}$ 為多少，軌跡皆不會超出平行四邊形。此平行四邊形是通過 $\overline{AD}$ 中點 H 與 $\overline{BC}$ 中點 I、平行 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的四條直線所圍成，以下我們用動態操作說明此性質。



首先，將 P 固定在 A 上，Q 沿著半圓弧運動，所畫出的 M 軌跡為一平行 $\overline{CD}$ 的線段 $\overline{JH}$，其長度為 $\overline{CD}$ 的一半，組成點為在所有不同的角速度比及 ω 情況下，當 P 在 A 上時的 M 點。

接著改變 $\overset{\frown}{AB}$ 上的 P 點位置，同樣固定 P 點，並使 Q 沿著半圓弧運動，畫出的線段依然平行 $\overline{CD}$ ，且往



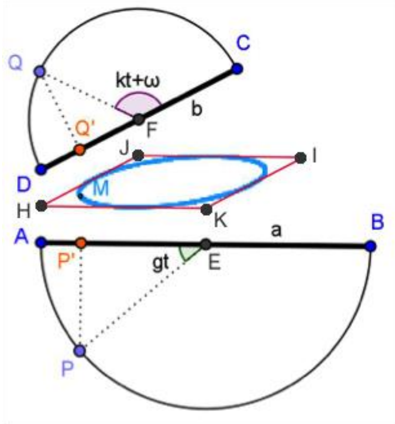
右平移，而長度皆與$\overline{JH}$一樣。當 P 與 B 重合時，移動 Q 所形成的線段 $\overline{IK}$ 為所有平行線段中最右端的。可知任一情況下 M 點必會在$\overline{JH}$、$\overline{IK}$ 兩條邊界之間（含兩條邊界）。

而將 Q 固定，在$\widehat{AB}$上移動 P，同理可證 M 點必在 $\overline{JI}$ 、$\overline{HK}$ 中間（包含$\overline{JI}$ 、$\overline{HK}$），所以 M 點必被禁錮在平行四邊形 $JHIK$ 中，其中$\overline{JH}$// $\overline{IK}$ // $\overline{CD}$ ，$\overline{JI}$ // $\overline{HK}$// $\overline{AB}$， H 為 $\overline{AD}$ 中點，I 為 $\overline{BC}$ 中點。

(2) 角速度相同

角速度相同時，中點軌跡亦在此平行四邊形內，如右圖所示。

其軌跡範圍不須另外證明，同樣利用前述證明即可。



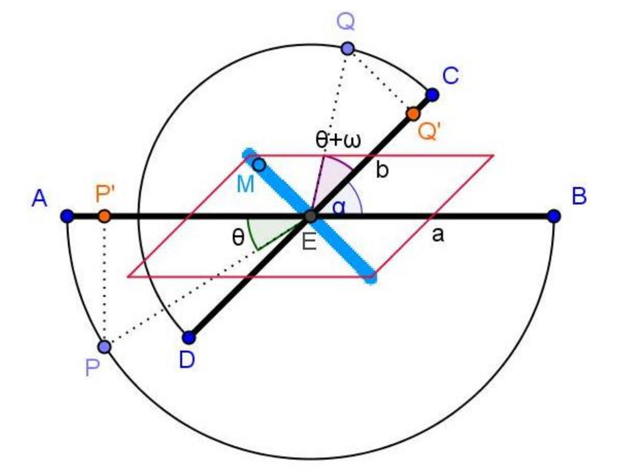
3. 軌跡方程式

(1) 角速度相同

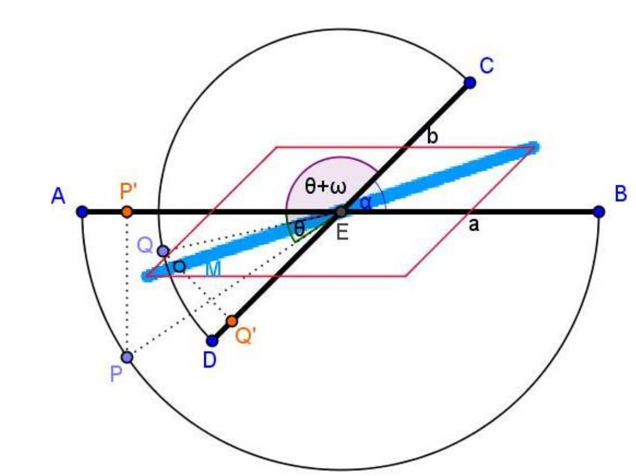
角速度相同時，我們令 $\theta(t) = gt$。

I. 兩線段中點重合的情形

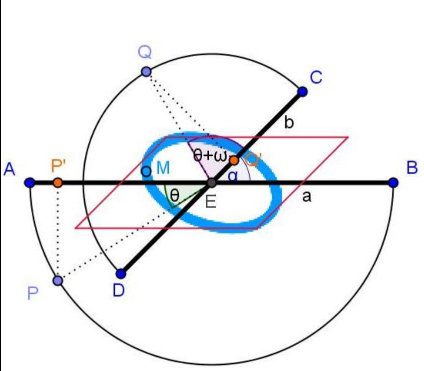
此時 E、F 重合，為了不使圖形太過複雜，圖中不顯示 F 點。



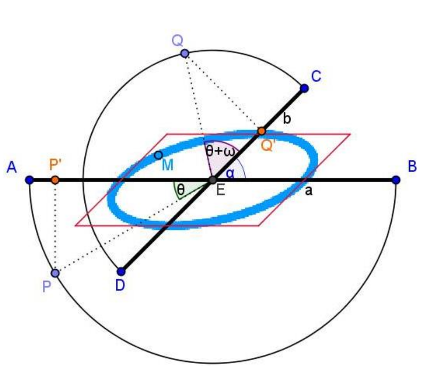
$\omega = 0°$



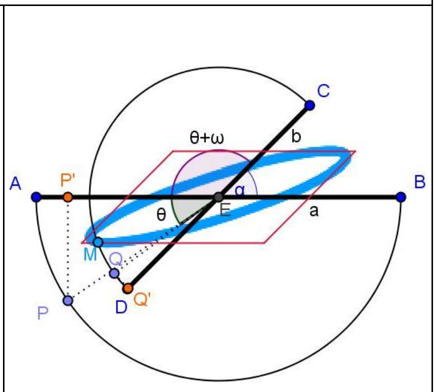
$\omega = 180°$



$\omega = 45°$



$\omega = 90°$



$\omega = 135°$

我們觀察到當角速度相同時，中點軌跡圖形為一橢圓或一直線，於是我們將圖形座標化以證明。

以重合之中點為原點，$\overleftrightarrow{AB}$ 為 x 軸，$\overrightarrow{AB}$ 為正向，可得：

$P'(-a\cos\theta\ ,0)$

$Q'(b\,cos(\theta+\omega)\,cos\,\alpha\ ,b\,cos(\theta+\omega)\,sin\,\alpha)$

M的 x 座標 $=\frac{1}{2}[-a\cos\theta+b\cos\alpha\cos(\theta+\omega)]$

y 座標 $=\frac{1}{2}b\sin\alpha\cos(\theta+\omega)$

$$\begin{aligned}2x&=-a\cos\theta+b\cos\alpha\cos(\theta+\omega)\\&=-a\cos\theta+b\cos\alpha\,(\cos\theta\cos\omega-\sin\theta\sin\omega)\\&=(-a+b\cos\alpha\cos\omega)\cos\theta-(b\cos\alpha\sin\omega)\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2y&=b\sin\alpha\cos(\theta+\omega)\\&=b\sin\alpha\,(\cos\theta\cos\omega-\sin\theta\sin\omega)\\&=(b\sin\alpha\cos\omega)\cos\theta-(b\sin\alpha\sin\omega)\sin\theta\end{aligned}$$

為消除變數 θ，我們以克拉瑪公式計算 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$，再使用恆等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 求出軌跡的方程式

$$\sin\theta=\frac{(-2b\sin\alpha\cos\omega)x+(2b\cos\alpha\cos\omega-2a)y}{ab\sin\alpha\sin\omega}$$

$$\cos\theta=\frac{(-2b\sin\alpha\sin\omega\sin\alpha)x+(2b\cos\alpha\sin\omega)\mathrm{y}}{ab\sin\alpha\sin\omega}$$

$$\begin{aligned}(ab\sin\alpha\sin\omega)^2=&(4b^2\sin^2\alpha)x^2+8b\sin\alpha\,(a\cos\omega-b\cos\alpha)xy\\&+4(a^2+b^2\cos^2\alpha-2ab\cos\alpha\cos\omega)y^2\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\ 1$$

$$\begin{aligned}\delta=&64[b^2\sin^2\alpha\,(b^2\cos^2\alpha+a^2\cos^2\omega-2ab\cos\alpha\cos\omega)\\&-b^2\sin^2\alpha\,(a^2+b^2\cos^2\alpha-2ab\cos\alpha\cos\omega)]\\=&64a^2b^2\sin^2\alpha\,(\cos^2\omega-1)\le0\end{aligned}$$

由引理 1（見附錄）可知，當 $\delta<0$ 時，此二次曲線為橢圓類，而當 $\delta=0$ 時，此二次曲線為非橢圓類。

注意軌跡非橢圓類的條件為 $\omega=0°$或 $180°$：

$$\begin{cases}\omega=0°\ \text{則軌跡為}\ y=-\dfrac{b\sin\alpha}{a-b\cos\alpha}x\ \text{的線段，其中}\ -\dfrac{a-b\cos\alpha}{2}\le x\le\dfrac{a-b\cos\alpha}{2}\\ \omega=180°\ \text{則軌跡為}\ y=\dfrac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}x\ \text{的線段，其中}\ -\dfrac{a+b\cos\alpha}{2}\le x\le\dfrac{a+b\cos\alpha}{2}\end{cases}$$

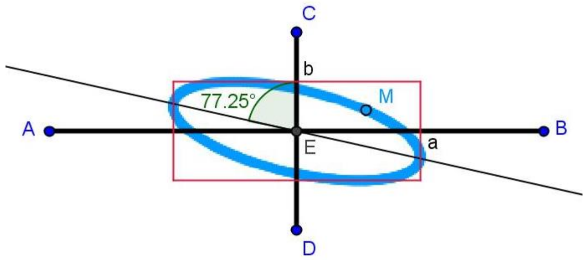
當 $\alpha = 90°$ 時，中點軌跡即為利薩如曲線（參見附錄）。

以下以 $\alpha = 90°$ 為特殊化情況作討論，特殊性質包括：

i. 由定理三（見附錄）可知，將座標軸旋轉 γ，使橢圓長短軸平行 $x.y$ 軸，則轉軸角度 $\cot 2\gamma = \frac{4(b^2-a^2)}{8ab\cos\omega}$，由此可知橢圓傾斜角度和起始角度差 ω 的關係

例：$a = 5$, $b = 2$, $\alpha = 90°$, $\omega = 60°$ 時 $\cot 2\gamma = -\frac{21}{10}$

查表得 $\gamma = 77.25° + n \times 90°$，如下圖



ii. $a = b$ 時

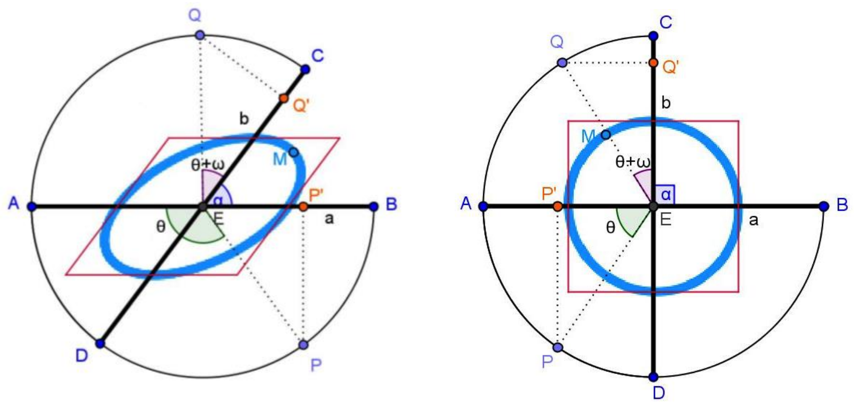
1) 橢圓皆傾斜 45° （如下圖左）

說明：$\cot 2\gamma = \frac{a^2-b^2}{2ab} = 0$，可知 $\gamma = 45°$

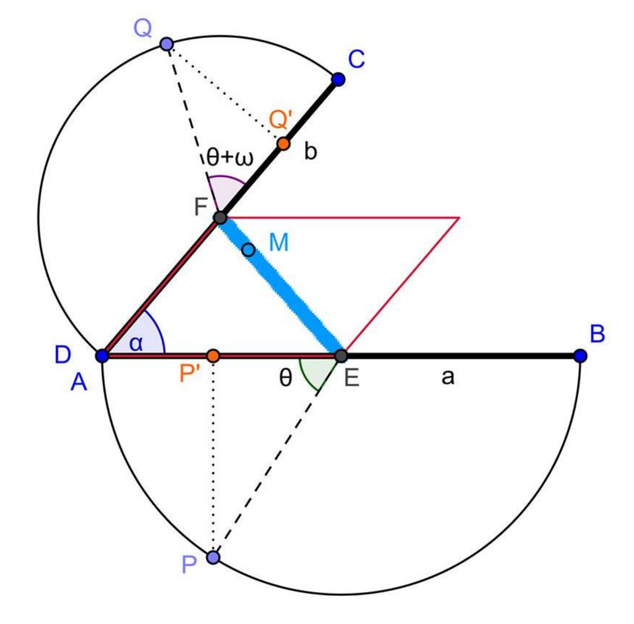
2) $\omega = 90°$ 時軌跡為一圓（如下圖右）

說明：$\omega = 90°$ 代入軌跡方程式整理後得 $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

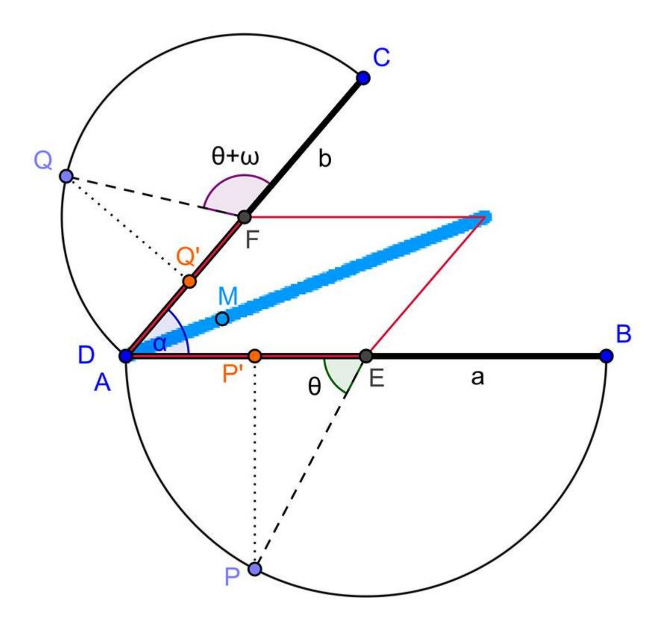
可知軌跡為一圓心於原點且半徑為 $\frac{a}{2}$ 的圓



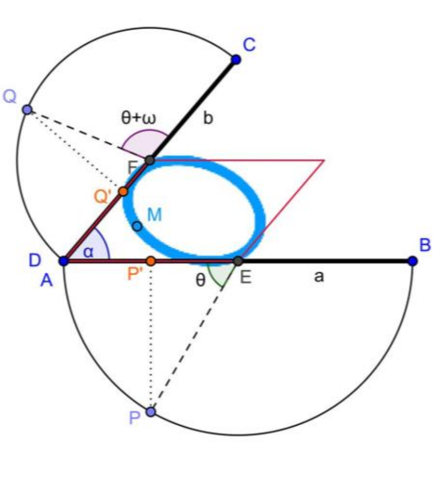
II. 兩線段有一端點重合的情形



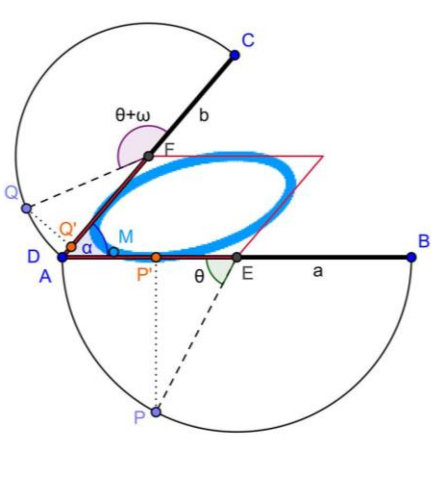
$\omega = 0°$



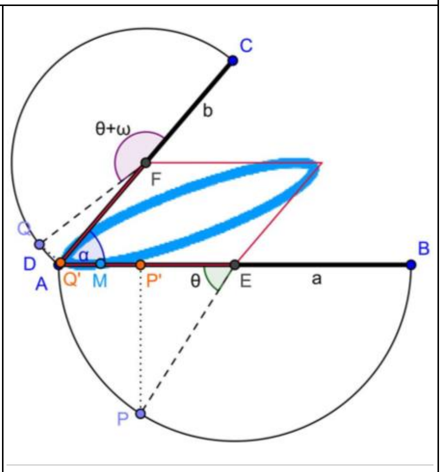
$\omega = 180°$



$\omega = 45°$



$\omega = 90°$



$\omega = 135°$

一端點重合（A、D重合）和兩線段中點重合的情形觀察到的圖形一樣為橢圓或線段，我們用相同的方法證實。

以重合之端點 A、D 為原點，$\overleftrightarrow{AB}$為 x 軸，$\overrightarrow{AB}$ 為正向，可得:

$P'(a[1-\cos\theta], 0)$

$Q'(b[1+\cos(\theta+\omega)]\cos\alpha, b[1+\cos(\theta+\omega)]\sin\alpha)$

$$M\text{的參數式為}\begin{cases} x = \frac{1}{2}\{a[1-\cos\theta] + b\cos\alpha\,[1+\cos(\theta+\omega)]\} \\ y = \frac{1}{2}b\sin\alpha\,[1+\cos(\theta+\omega)] \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
2x &= a[1-\cos\theta] + b\cos\alpha\ [1+\cos(\theta+\omega)] \\
&= a - a\cos\theta + b\cos\alpha + b\cos\alpha(\cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega) \\
&= a + (-a + b\cos\alpha\cos\omega)\cos\theta - (b\cos\alpha\sin\omega)\sin\theta + b\cos\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2y &= b\sin\alpha\,[1+\cos(\theta+\omega)] \\
&= b\sin\alpha + b\sin\alpha\,(\cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega) \\
&= b\sin\alpha + (b\sin\alpha\cos\omega)\cos\theta - (b\sin\alpha\sin\omega)\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{b\sin\alpha\cos\omega\,(2x - a - b\cos\alpha) + (a - b\cos\alpha\cos\omega)(2y - b\sin\alpha)}{b^2\sin\alpha\sin\omega\cos\alpha\cos\omega + (a - b\cos\alpha\cos\omega)(b\sin\alpha\sin\omega)} \\
&= \frac{2b\sin\alpha\cos\omega\, x - ab\sin\alpha\cos\omega + 2ay - ab\sin\alpha - 2b\cos\alpha\cos\omega\, y}{ab\sin\alpha\sin\omega} \\
&= \frac{(2b\sin\alpha\cos\omega)x + [2(a - b\cos\alpha\cos\omega)]y - ab\sin\alpha\,(\cos\omega + 1)}{ab\sin\alpha\sin\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{b\cos\alpha\sin\omega\,(2y - b\sin\alpha) - b\sin\alpha\sin\omega\,(2x - a - b\cos\alpha)}{ab\sin\alpha\sin\omega} \\
&= \frac{(-2b\sin\alpha\sin\omega)x + (2b\cos\alpha\sin\omega)y + ab\sin\alpha\sin\omega}{ab\sin\alpha\sin\omega}
\end{aligned}
$$

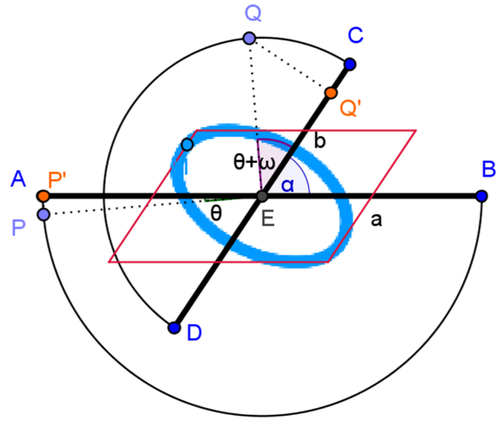
$$
\begin{aligned}
&(ab\sin\alpha\ \sin\omega)^2 \\
&= (4b^2\sin^2\alpha)x^2 + 8b\sin\alpha\,(a\cos\omega - b\cos\alpha)xy \\
&\quad + 4(a^2 + b^2\cos\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\omega)y^2 - 4ab^2\sin^2\alpha\,(\cos\omega + 1)x \\
&\quad - 4ab\sin\alpha\,(a - b\cos\alpha)(\cos\omega + 1)y + 2a^2b^2\sin^2\alpha\,(\cos\omega + 1) \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

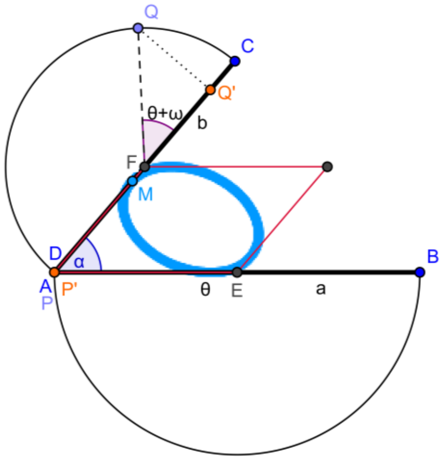
$$
\begin{aligned}
\delta &= 64b^2\sin^2\alpha\,(a^2\cos^2\omega + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\omega) \\
&\qquad - 64b^2\sin^2\alpha\,(a^2 + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\omega) \\
&= 64a^2b^2\sin^2\alpha\,(\cos^2\omega - 1) \le 0
\end{aligned}
$$

同樣僅在 $\cos\omega = 1$，$\omega = 0°$ or $180°$（即起始角相等或相差180°）時軌跡為一線段，其餘狀況軌跡皆為橢圓。

III. 兩線段中點重合與一端點重合之比較

將兩線段中點重合以及一端點重合兩種情形的圖並列，我們發現軌跡圖形極為相似，懷疑後者實為前者平移後的結果。下圖是 ω 同為 $45°$ 時的對照。





中點重合情況中 $\overline{AB}$ 向右移動 a 單位，$\overline{CD}$ 向右移動 $b\cos\alpha$ 單位、向上 $b\sin\alpha$ 單位，即為一端點重合的情況。從中點重合情況至一端點重合情況，M 需右移 $\frac{a+b\cos\alpha}{2}$、上移 $\frac{b\sin\alpha}{2}$，我們用定理 2 實際移動圖形，與前面求出的軌跡方程式比較。

移動中點重合的圖形 (x) 至一端點重合(x') 有此關係式 $\begin{cases} x = x' - \frac{a+b\cos\alpha}{2} \\ y = y' - \frac{b\sin\alpha}{2} \end{cases}$

① 式為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$，移動過後的方程式為 $A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$，則參照附錄定理 2，得 $A' = A\,, B' = B\,, C' = C$

$$\begin{aligned}
D' &= 2A\left(-\frac{a+b\cos\alpha}{2}\right) + B\left(-\frac{b\sin\alpha}{2}\right) \\
&= -4ab^2\sin^2\alpha - 4b^3\sin^2\alpha\cos\alpha - 4ab^2\sin^2\alpha\cos\omega + 4b^3\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= -4ab^2\sin^2\alpha\,(\cos\omega + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E' &= B\left(-\frac{a+b\cos\alpha}{2}\right) + 2C\left(-\frac{b\sin\alpha}{2}\right) \\
&= -4b\sin\alpha\,(a+b\cos\alpha)(a\cos\omega - b\cos\alpha) \\
&\quad -4b\sin\alpha\,(a^2 + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\omega) \\
&= -4ab\sin\alpha\,(a - b\cos\alpha)(\cos\omega + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F' &= A\left(-\frac{a+b\cos\alpha}{2}\right)^2 + B\left(-\frac{a+b\cos\alpha}{2}\right)\left(-\frac{b\sin\alpha}{2}\right) + C\left(-\frac{b\sin\alpha}{2}\right)^2 + F \\
&= b^2\sin^2\alpha\,(a+b\cos\alpha)^2 + 2b^2\sin^2\alpha\,(a\cos\omega - b\cos\alpha)(a+b\cos\alpha) \\
&\quad + b^2\sin^2\alpha\,(a^2 + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\omega) - a^2b^2\sin^2\alpha\sin^2\omega \\
&= 2a^2b^2\sin^2\alpha\,(1+\cos\omega) - a^2b^2\sin^2\alpha\sin^2\omega
\end{aligned}$$

代入以上數值，右移、上移後的軌跡方程式為

$$
\begin{aligned}
&(4b^2\sin^2\alpha)x^2+8b\sin\alpha\,(a\cos\omega-b\cos\alpha)xy\\
&\qquad+4(a^2+b^2\cos\alpha-2ab\cos\alpha\cos\omega)y^2-4ab^2\sin^2\alpha\,(\cos\omega+1)x\\
&\qquad-4ab\sin\alpha\,(a-b\cos\alpha)(\cos\omega+1)y+2a^2b^2\sin^2\alpha\,(\cos\omega+1)\\
&\qquad-(ab\sin\alpha\sin\omega)^2=0
\end{aligned}
$$

與 ② 式相等，可知表示一端點重合情形確實可透過平移化為中點重合情形。

除了此兩種情況以外，我們可以證明任何線段的平移，都不會改變中點的軌跡圖形。

設 t 時刻時，$P'(x_1,y_1)$，$Q'(x_2,y_2)$，則中點 M 座標為 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

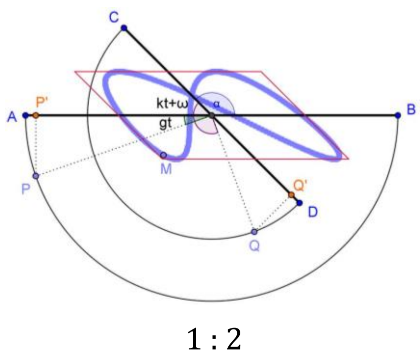
若將 $\overline{AB}$ 平移 $\vec{a}(a_1,a_2)$，$\overline{CD}$ 平移 $\vec{b}(b_1,b_2)$，則平移過後的 $P'(x_1+a_1,y_1+a_2)$，$Q'(x_2+b_1,y_2+b_2)$，而 M 座標為 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{a_1+b_1}{2},\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

後來的 M 點是將原本的 M 點平移 $\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$，此向量不隨時間變化，因此可知線段平移後的 M 軌跡實為原本的 M 軌跡平移後的結果。

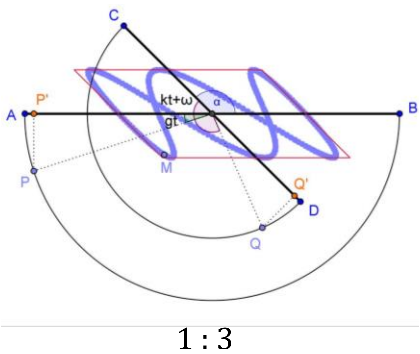
由此可知線段平移並不影響軌跡的圖形以及退化成線段的條件，而所有線段相交情形的軌跡方程式，也可藉由平移從兩線段中點重合情況推出，不必一一座標化去求。

(2) 角速度不同

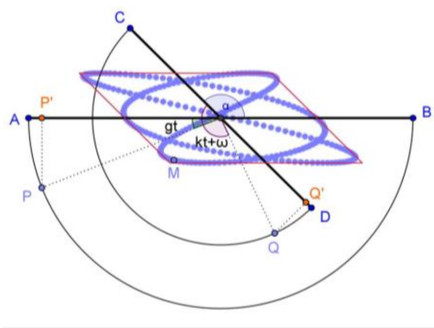
此時軌跡曲線為不規則封閉曲線，因此不推導軌跡方程式，僅就不同圖形討論，以下顯示圖形及 C_1、C_2 的角速度比。



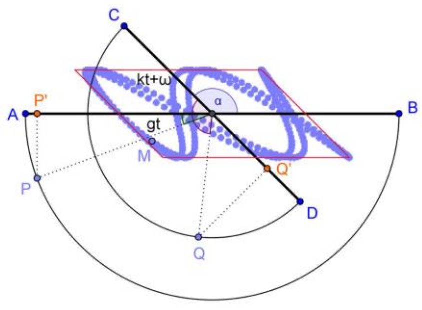
1 : 2



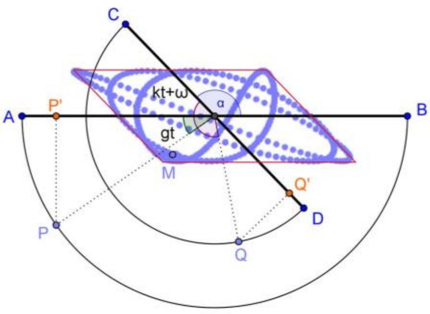
1 : 3



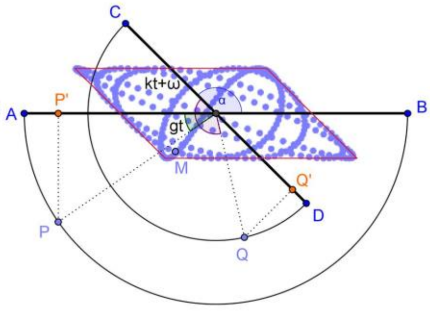
3 : 2



2 : 5



3 : 4



4 : 5

在平行四邊形內作兩直線 L_1、L_2，分別平行 $\overline{CD}$、$\overline{AB}$且不經過軌跡本身的交叉點，我們觀察後猜測兩直線與軌跡的交點數之比恰為 C_1、C_2 的角速度比。

（二） 三條線段（質點）

繼研究兩線段上動點的中點之後，我們想進一步研究三條線段上動點的重心。

我們發現在角速度相同的情況下，三個動點的重心軌跡為一封閉圖形。線段平移並不影響軌跡圖形，因此我們將平面上所有三條線段的排列方式分為兩種分別探討：平移後三條線段可恰形成一個三角形的情況，以及無論如何平移皆無法形成三角形的情況。

此外我們用向量觀點取代前面的全盤座標化以簡化過程，並且突顯結果之間的關聯性。

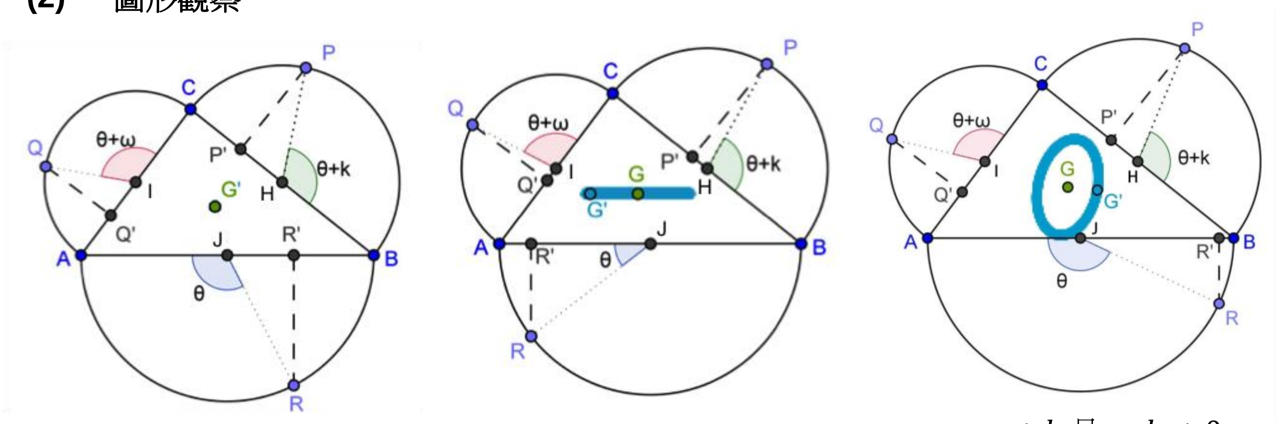
1. 第一部分：平移後可形成三角形

我們先討論三條線段可以平移為封閉圖形的情況。此部分可視為第二部分的特殊化情況。

(1) 名詞定義：

平面上有三點 A、B、C，以 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 為直徑，可得三個母圓 C_1、C_2、C_3，其圓心分別為 H、I、J 。仿前面同樣的方式定義 P_1、Q_1、R_1，在半圓上等速率來回的動點 P、Q、R，以及直徑上的三投影點 P'、Q'、R'，ΔHIJ 重心為 G，$\Delta P'Q'R'$ 重心為 G'。P、Q、R 分別以 H、I、J 為原點，$\overrightarrow{HB}$、$\overrightarrow{IC}$、$\overrightarrow{JA}$ 為始邊，$\overrightarrow{HP_1}$、$\overrightarrow{IQ_1}$、$\overrightarrow{JR_1}$ 為終邊的有向角為 $\theta+k$、$\theta+\omega$、θ，其中 $360° > \omega \geq k \geq 0°$ 且 $k \leq 180°$，起始角度為 k、ω、$0°$ 。

(2) 圖形觀察



$\omega = k = 0$　　　$\omega = k \neq 0$　　　$\omega \neq k$ 且 $\omega, k \neq 0$

(3) 數學證明：

$$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = 0$$

$$\overrightarrow{GP'} = \overrightarrow{GH} + t_1\overrightarrow{CB}，\overrightarrow{GQ'} = \overrightarrow{GI} + t_2\overrightarrow{AC}，\overrightarrow{GR'} = \overrightarrow{GJ} + t_3\overrightarrow{BA}$$

$$t_1 = \frac{\overline{BH}\cos(\theta+k)}{2\overline{BH}}，t_2 = \frac{\overline{CI}\cos(\theta+\omega)}{2\overline{CI}}，t_3 = \frac{\overline{AJ}\cos\theta}{2\overline{AJ}}$$

I.　三圓起始角度皆同 $\boldsymbol{\omega = k = 0}$

$$\Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{BA}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ 當三個角相等時，$\Delta P'Q'R'$ 的 G' 不變且與 ΔHIJ 的 G 重合

II.　兩圓起始角度同，一圓不同 $\boldsymbol{\omega = k \neq 0}$

$$\Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{1}{2}\cos(\theta + k)$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'}$$

$$= \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \frac{1}{2}\cos(\theta + k)\,\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\cos(\theta + k)\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}[\cos(\theta + k) - \cos\theta]$$

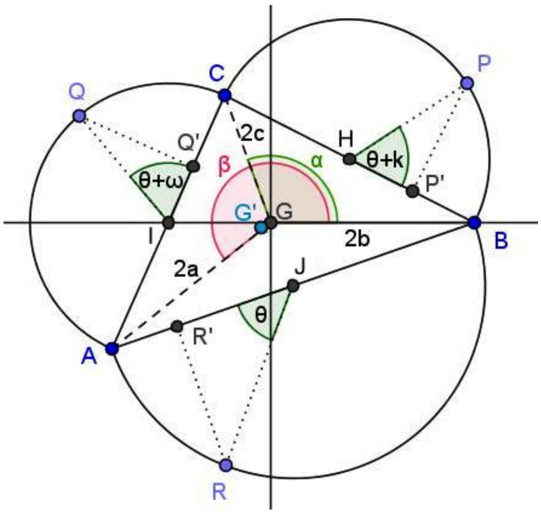
$\Rightarrow$ 當兩個角相等時， G' 的軌跡為一以 G 為中點的線段

III.　三圓起始角度皆相異 $\boldsymbol{\omega \neq k}$ 且 $\boldsymbol{\omega, k \neq 0}$

座標化：以 ΔHIJ 的重心 G 為原點， $\overrightarrow{GB}$ 為 x 軸

C 點之有向角為 α，A點之有向角為 β，其中 $\alpha < \beta$ 且 $\alpha, \beta < 360°$

$\overline{GA} = 2a$，$\overline{GB} = 2b$，$\overline{GC} = 2c$



可得三頂點座標為

$A(2a\cos\beta, 2a\sin\beta)$, $B(2b, 0)$,

$C(2c\cos\alpha, 2c\sin\alpha)$

且 $\begin{cases} a\cos\beta + b + c\cos\alpha = 0 \\ a\sin\beta + c\sin\alpha = 0 \end{cases}$

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'}$$

$$= \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \frac{1}{2}\cos(\theta + k)\,\overrightarrow{CB}$$

$$+ \frac{1}{2}\cos(\theta + \omega)\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{\cos\theta - \cos(\theta + \omega)}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\cos(\theta + k) - \cos\theta}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{\cos(\theta + k) - \cos(\theta + \omega)}{2}\overrightarrow{OC}$$

$G'(x, y)$

$$3x = a\cos\beta\,[\cos\theta - \cos(\theta + \omega)] + b[\cos(\theta + k) - \cos\theta] + c\cos\alpha\,[\cos(\theta + \omega) - \cos(\theta + k)]$$

$$3y = a\sin\beta\,[\cos\theta - \cos(\theta + \omega)] + c\sin\alpha\,[\cos(\theta + \omega) - \cos(\theta + k)]$$

展開後化簡得

$3x = \sin\theta\,[a\cos\beta\,(2\sin\omega - \sin k) - b\,(2\sin k - \sin\omega)] + \cos\theta\,[a\cos\beta\,(\cos k - 2\cos\omega + 1) + b\,(2\cos k - \cos\omega - 1)]$

$3y = \sin\theta\,[a\sin\beta\,(2\sin\omega - \sin k)] + \cos\theta\,[a\sin\beta\,(\cos k - 2\cos\omega + 1)]$

令兩式中 $\sin\theta$ 係數分別為 a_1、a_2，$\cos\theta$ 係數為 b_1、b_2，$(-3x) = c_1$且 $(-3y) = c_2$，若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，則由克拉瑪公式可求得

$$\sin\theta = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\text{，}\cos\theta = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

又 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3b_2x - 3b_1y}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 + \left(\frac{-3a_2x + 3a_1y}{a_1b_2 - a_2b_2}\right)^2 = 1$$

令 $A = \dfrac{3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$，$B = \dfrac{-3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$，$C = \dfrac{-3a_2}{a_1b_2 - a_2b_2}$，$D = \dfrac{3a_1}{a_1b_2 - a_2b_2}$

則 $(Ax + By)^2 + (Cx + Dy)^2 = 1$

$$AD - BC = \frac{[(3b_2)(3a_1) - (-3b_1)(-3a_2)]}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = \frac{9}{a_1b_2 - a_2b_1} \neq 0$$

檢查 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ 的條件

$a_1b_2 - a_2b_1 = -3ab\sin\beta\,[\sin(\omega - k) + \sin k - \sin\omega]$

若 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$\Rightarrow\ \sin(\omega - k) + \sin k - \sin\omega = 0$

$$\Rightarrow\ 2\sin\frac{(\omega - k)}{2}\cos\frac{(\omega - k)}{2} - 2\sin\frac{(\omega - k)}{2}\cos\frac{(\omega + k)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\ 2\sin\frac{(\omega - k)}{2}[\cos\frac{(\omega - k)}{2} - \cos\frac{(\omega + k)}{2}] = 0$$

$$\Rightarrow\ 4\sin\frac{(\omega - k)}{2}\sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{k}{2} = 0$$

當 $(\omega - k)$、ω、k 皆不為 0°（即三角相異）時，中心軌跡必為橢圓。

(4) 物理證明：

I. 三圓起始角度皆同

根據簡諧運動公式 $\overrightarrow{a} = -\omega^2R\cos(\theta_0 + \omega t)$ 及牛頓第二定律 $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$，得 $\overrightarrow{F} = -m\omega^2R\cos(\theta_0 + \omega t)$，數學上三點的重心相當於物理上三個質量相等的質點之質心，兼之三圓的 θ_0 及 ω 皆相等，可知三個質點所受力之比為 $\overline{BC}$:$\overline{AC}$:$\overline{AB}$ 且各自平行

三邊長，三力恰可圍成一封閉三角形，合力為零，合力為零則質心不動。

當 $\theta_0+\omega t=0$ 時可輕易看出三點質心位於 G，綜合兩個結論可知三動點重心恆與 G 重合。

II.　兩圓起始角度同，一圓不同

設 C_1 起始角度異於 C_2、C_3，則 Q'、R' 兩質點所受力之比依然為 $\overline{AC}:\overline{AB}$，此兩力之合力平行 $\overline{BC}$，P' 所受之力亦平行 $\overline{BC}$，因此三力之合力平行 $\overline{BC}$，質心沿著平行$\overline{BC}$ 的方向移動，軌跡為一平行 $\overline{BC}$ 的直線。

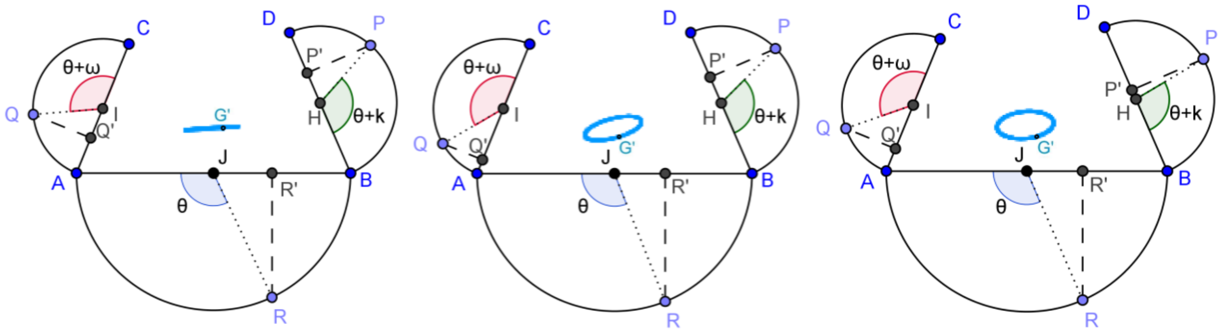
2.　第二部分：平移後無法形成三角形

平面上三條線段 L_1、L_2、L_3 上有三個簡諧動點，為了討論方便，我們平移 L_2 與 L_3 使兩線段分別有一端點與 L_1 一端點重合，L_1、L_2 的交點異於 L_1、L_3 的交點，且 L_2 與 L_3 在 L_1 的同一邊。

(1)　名詞定義：

以平面上三條線段 $\overline{BD}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 為直徑，可得三個母圓 C_1、C_2、C_3，其圓心分別為 H、I、J。同樣方式定義 P_1、Q_1、R_1，在半圓上等速率來回的動點 P、Q、R，以及直徑上的三投影點 P'、Q'、R'，ΔHIJ 重心為 G，$\Delta P'Q'R'$ 重心為 G'。$\theta+k$、$\theta+\omega$、θ 分別是以$\overrightarrow{HB}$、$\overrightarrow{IC}$、$\overrightarrow{JA}$ 為始邊，$\overrightarrow{HP_1}$、$\overrightarrow{IQ_1}$、$\overrightarrow{JR_1}$ 為終邊的有向角，其中 $360°>\omega\geq k\geq 0°$ 且$k\leq 180°$，起始角度為 k、ω、$0°$。

(2)　圖形觀察



$\omega=k=0$　　　$\omega\neq k=0$　　　$\omega\neq k$ 且 $\omega,k\neq 0$

(3)　數學證明：

$$\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=0$$

$$\overrightarrow{GP'}=\overrightarrow{GH}+\frac{\cos(\theta+k)}{2}\overrightarrow{DB}，\overrightarrow{GQ'}=\overrightarrow{GI}+\frac{\cos(\theta+\omega)}{2}\overrightarrow{AC}，\overrightarrow{GR'}=\overrightarrow{GJ}+\frac{\cos\theta}{2}\overrightarrow{BA}$$

I.　三圓起始角度皆同 $\omega=k=0$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GP'}+\overrightarrow{GQ'}+\overrightarrow{GR'}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{BA}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{DC}$$

$\Longrightarrow$ 當三個角相等時， G' 軌跡為一以 G 為中點的線段
注意當 $\overline{DC}=0$ 時 C、D 重合，為三線段可圍成一三角形的情形。

II. 兩圓起始角度同，一圓不同 $\omega \neq k=0$

$$\Longrightarrow 3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GP'}+\overrightarrow{GQ'}+\overrightarrow{GR'}$$

$$=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\cos(\theta+\omega)\,\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{BA}$$

$$=\frac{1}{2}[\cos\theta\,\overrightarrow{DA}+\cos(\theta+\omega)\,\overrightarrow{AC}]$$

以 ΔHIJ 的重心 G 為原點， $\overrightarrow{GD}$ 為 x 軸座標化
C 點之有向角為 α ，A 點之有向角為 β，其中 $\alpha<\beta$ 且 $\alpha,\beta<360°$
$\overline{GA}=2a$ ，$\overline{GC}=2c$ ，$\overline{GD}=2d$

則 $A(2a\cos\beta, 2a\sin\beta)$, $C(2c\cos\alpha, 2c\sin\alpha)$, $D(2d,0)$
$G'(x,y)$
$3x=\cos\theta\,(a\cos\beta-d)+\cos(\theta+\omega)(c\cos\alpha-a\cos\beta)$
$3y=\cos\theta\,(a\sin\beta)+\cos(\theta+\omega)(c\sin\alpha-a\sin\beta)$

展開後化簡得

$3x=\sin\theta\,[\sin\omega\,(a\cos\beta-c\cos\alpha)]+\cos\theta\,[a\cos\beta-d+\cos\omega\,(c\cos\alpha-a\cos\beta)]$
$3y=\sin\theta\,[\sin\omega\,(a\sin\beta-c\sin\alpha)]+\cos\theta\,[a\sin\beta+\cos\omega\,(c\sin\alpha-a\sin\beta)]$

仿前作法定義 a_1、a_2、b_1、b_2 及 A、B、C、D ，則 $AD-BC$ 依然為 $\frac{9}{a_1b_2-a_2b_1}$

$a_1b_2-a_2b_1=\sin\omega\,[ac\sin(\alpha-\beta)+d(a\sin\beta-c\sin\alpha)]$
當 C、D 重合時(即可圍成一三角形的情形)，$\alpha=0$ 且 $c=d$，$a_1b_2-a_2b_1$ 恰等於零，圖形實為一線段。

III. 三圓起始角度皆相異 $\omega \neq k$ 且 $\omega,k\neq 0$

$$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GP'}+\overrightarrow{GQ'}+\overrightarrow{GR'}$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\theta+k)\,\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\cos(\theta+\omega)\,\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cos\theta\,\overrightarrow{BA}$$

以 ΔHIJ 的重心 G 為原點，$\overrightarrow{GD}$ 為 x 軸座標化
C 點之有向角為 α ，A 點之有向角為 β，B 點之有向角為 γ
$\overline{GA}=2a$，$\overline{GB}=2b$，$\overline{GC}=2c$，$\overline{GD}=2d$

$A(2a\cos\beta, 2a\sin\beta)$, $B(2b\cos\gamma, 2b\sin\gamma)$, $C(2c\cos\alpha, 2c\sin\alpha)$, $D(2d,0)$

$$且\begin{cases}2a\cos\beta+2b\cos\gamma+c\cos\alpha+d=0\\ 2a\sin\beta+2b\sin\gamma+c\sin\alpha=0\end{cases} \qquad \ldots\ldots ③$$

$G'(x, y)$

$3x = \cos(\theta + k)(b\cos\gamma - d) + \cos(\theta + \omega)(c\cos\alpha - a\cos\beta) + \cos\theta\,(a\cos\beta - b\cos\gamma)$

$3y = \cos(\theta + k)(b\sin\gamma) + \cos(\theta + \omega)(c\sin\alpha - a\sin\beta) + \cos\theta\,(a\sin\beta - b\sin\gamma)$

展開後化簡得

$3x =$
$\sin\theta\,[\sin\omega\,(3a\cos\beta + 2b\cos\gamma + d) - \sin k\,(b\cos\gamma - d)] +$
$\cos\theta\,[\cos\omega\,(-3a\cos\beta - 2b\cos\gamma - d) + \cos k\,(b\cos\gamma - d) + a\cos\beta - b\cos\gamma]$

$3y = \sin\theta\,[\sin\omega\,(3a\sin\beta + 2b\sin\gamma) - \sin k\,(b\sin\gamma)] + \cos\theta\,[\cos\omega\,(-3a\sin\beta - 2b\sin\gamma) + \cos k\,(b\sin\gamma) + a\sin\beta - b\sin\gamma]$

同樣定義 a_1、a_2、b_1、b_2 並檢查 $a_1b_2 - a_2b_1$ 是否為零

$a_1b_2 - a_2b_1$
$= \sin(\omega - k)\,[3ab\sin(\gamma - \beta) + 3d(b\sin\gamma + a\sin\beta)] + \sin\omega\,[-5ab\sin(\gamma - \beta) + d(a\sin\beta - b\sin\gamma) + \sin k\,[ab\sin(\gamma - \beta) + d(a\sin\beta - b\sin\gamma)]$

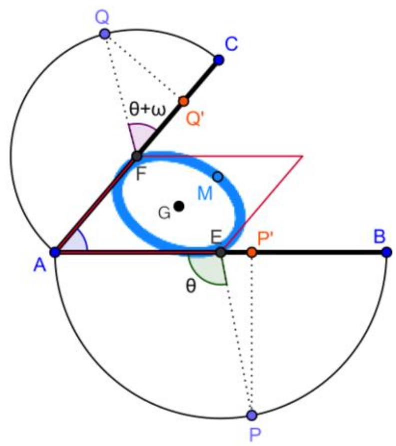
當 $k = 0$ 且 C、D 重合時因為三線段可圍成一三角形，所以 $\frac{d}{\sin(\gamma-\beta)} = \frac{b}{\sin\beta}$，且由③可知 $a\sin\beta + b\sin\gamma = 0$

$\Rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = \sin\omega\,[-2ab\sin(\gamma - \beta) + 4ad\sin\beta + 2bd\sin\gamma]$
$= 2a\sin\omega\,[-b\sin(\gamma - \beta) + d\sin\beta] = 0$

此時圖形為一線段。

（三） 向量觀點

三個動點的研究中，將 P'、Q'、R' 的座標轉換為向量後可以看出線段位置不會改變圖形，真正影響圖形的是 $\cos\theta\,\vec{a} + \cos(\theta + \omega)\,\vec{b} + \cos(\theta + k)\,\vec{c}$。



事實上在兩個動點的研究中也有同樣的概念，若取 $\overline{EF}$ 中點為 G，則 $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'}) = \frac{1}{2}[\cos\theta\,\overrightarrow{EA} + \cos(\theta + \omega)\,\overrightarrow{FC}]$，影響圖形的是這兩個帶有 cos 值的向量 $\cos\theta\,\overrightarrow{EA}$ 及 $\cos(\theta + \omega)\,\overrightarrow{FC}$。

既然所有狀況都可以用向量觀點來看，於是我們有了一個想法，若以「最少能合成為多少個帶有 cos 值且互相不平行的向量」來將所有情況分類，我們就能夠一次證明許多情況，而不需要一個一個個別座標化來證明。

例如我們可立一個命題：若 $\overrightarrow{OM}=\cos\theta\,\vec{a}+\cos(\theta+\omega)\,\vec{b}$，其中 $\omega\neq 0°, 180°$ 且 $\vec{a}\nparallel\vec{b}$，則 M 的軌跡為一個橢圓。

此命題得證後，可直接套用在兩個動點的研究、三個動點第一部分三角相異以及三個動點第二部分兩角相異的研究中，合併解決三者，而不用分別座標化求證。

證明如下：

設 $\vec{a}=(a_1,b_1)$，$\vec{b}=(a_2,b_2)$

M 的參數式為 $\begin{cases} x=a_1\cos\theta+a_2\cos(\theta+\omega)=(a_1+a_2\cos\omega)\cos\theta-a_2\sin\omega\sin\theta \\ y=b_1\cos\theta+b_2\cos(\theta+\omega)=(b_1+b_2\cos\omega)\cos\theta-b_2\sin\omega\sin\theta \end{cases}$

$$\sin\theta=\frac{(b_1+b_2\cos\omega)x-(a_1+a_2\cos\omega)y}{\sin\omega\,(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$$\cos\theta=\frac{\sin\omega\,(a_2y-b_2x)}{\sin\omega\,(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$$\left({b_1}^2+2b_1b_2\cos\omega+{b_2}^2\right)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+a_1b_2\cos\omega+a_2b_1\cos\omega)xy \\ +({a_1}^2+2a_1a_2\cos\omega+{a_2}^2)y^2=\sin^2\omega\,(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$\delta=4(a_1b_1+a_2b_2+a_1b_2\cos\omega+a_2b_1\cos\omega)^2 \\ -4\left({b_1}^2+2b_1b_2\cos\omega+{b_2}^2\right)({a_1}^2+2a_1a_2\cos\omega+{a_2}^2)$$

$$=-4\sin^2\omega\,(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

等號成立時 $a_1b_2=a_2b_1$，即 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，與題設矛盾。

$\delta<0\Longrightarrow$ 圖形為一橢圓，證畢。

（四） k 條線段（質點）

若推廣至四個動點、五個動點⋯⋯ k 個動點，決定軌跡圖形的依然是 $\boldsymbol{\cos(\theta+\omega_1)\,\overrightarrow{n_1}+\cos(\theta+\omega_2)\,\overrightarrow{n_2}+\cdots+\cos(\theta+\omega_k)\,\overrightarrow{n_k}}$，此為簡諧運動合成的本質。

設 $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}}=(a_1,b_1)$，$\boldsymbol{\overrightarrow{n_2}}=(a_2,b_2)$，……，$\boldsymbol{\overrightarrow{n_k}}=(a_k,b_k)$，若 $\overrightarrow{OM}=\cos(\theta+\omega_1)\,\overrightarrow{n_1}+\cos(\theta+\omega_2)\,\overrightarrow{n_2}+\cdots+\cos(\theta+\omega_k)\,\overrightarrow{n_k}$

則 M 的參數式為

$$\begin{cases} \boldsymbol{kx=\sum_{i=1}^{k}a_i\cos(\theta+\omega_i)=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\cos\omega_i\right)\cos\theta-\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\sin\omega_i\right)\sin\theta} \\ \boldsymbol{ky=\sum_{i=1}^{k}b_i\cos(\theta+\omega_i)=\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\cos\omega_i\right)\cos\theta-\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\sin\omega_i\right)\sin\theta} \end{cases}$$

令 $P=\sum a_i\sin\omega_i$,$Q=\sum a_i\cos\omega_i$,$R=\sum b_i\sin\omega_i$,$S=\sum b_i\cos\omega_i$

以克拉瑪公式解 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$，得

$$\sin\theta=\frac{kRx-kQy}{-PS+QR}\text{，}\cos\theta=\frac{-kPy+kRx}{-PS+QR}$$

M 的軌跡方程式即為

$$(QR-PS)^{\,2}=k^2[(R^2+S^2)x^2-2(PR+QS)xy+(P^2+Q^2)y^2]$$

$$\delta=4k^4(2PQRS-P^2S^2-Q^2R^2)=-4k^4(PS-QR)^2$$

以下就 $PS-QR$ 之值分兩類討論

1. $\boldsymbol{PS-QR\neq 0}$

   若 $PS-QR\neq 0$，則 $\delta<0$，軌跡圖形為**一橢圓**。

2. $\boldsymbol{PS-QR=0}$

   若 $PS-QR=0$，即 M 的参數式中$\Delta=0$，則 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 為無解或無限多解。

   由於 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 在每一瞬間都真實存在，因此不可能為無解，必為無限多解。

   可知参數式的兩式係數成比例，令 $\boldsymbol{\frac{\sum_{i=1}^{k}b_i\cos\omega_i}{\sum_{i=1}^{k}a_i\cos\omega_i}=\frac{\sum_{i=1}^{k}b_i\sin\omega_i}{\sum_{i=1}^{k}a_i\sin\omega_i}}=\frac{ky}{kx}=m$，

   則 $y=mx$ 必成立，當 $m\neq 0$ 時軌跡圖形為**一線段**，$m=0$ 時軌跡圖形為**一點**。

至此我們已證明出 k 個質量相同的動點之重心軌跡只可能是橢圓、線段及一定點，並且圖形種類可以從 $\boldsymbol{PS-QR}$ 及 m 是否等於零看出。

另外，$\boldsymbol{PS-QR}$ **可進一步化簡為**

$$\left(\sum a_i\sin\omega_i\right)\left(\sum b_i\cos\omega_i\right)-(\sum a_i\cos\omega_i)\left(\sum b_i\sin\omega_i\right)=\sum_{1\le i<j\le k}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix}\sin(\omega_i-\omega_j)$$

（五） 三維之推廣

二維推廣至 k 個動點以後，我們轉往三維的推廣，但目前只證出了部分特殊情形。

1. 兩條線段（質點）

兩條線段有可能平行、相交於一點或歪斜，其中只有歪斜為兩者不共平面的情況。歪斜情況的中點軌跡事實上與二維中的兩條線段情況相同，證明如下：

考慮空間中有兩歪斜線 L_1、 L_2，分別位於兩互相平行的平面 E_1、E_2 上，設 E_3 為 E_1、E_2 之間且與兩者平行的平面，滿足 $d(E_1,E_3)=d(E_2,E_3)$，可令 $E_1:z=0$ ，$E_2:z=c$，$E_3:z=\frac{c}{2}$。

有兩點 P'、Q' 各自在 L_1、 L_2 上做簡諧運動，將 L_2 和 Q' 投影至 E_1 上，得 ${L_2}'$ 和 Q''，L_1 和 ${L_2}'$ 同在 E_1 上，由前面的研究結果可知 P' 和 Q''的中點軌跡為一個在 E_1 上的橢圓。

Q'' 上移 c 單位即為 Q'，所以 P' 和 Q''的中點軌跡上移 $\frac{c}{2}$ 單位即為 P' 、Q' 中點軌跡。

可知兩點中點軌跡依然會是一橢圓（當 $\omega=0°$ 或 $180°$ 時為一線段），且此橢圓位於 E_3 上。

2. 三條線段（質點）

我們僅討論三條線段互相垂直（即三條線段平移後分別在 x 軸、y 軸及 z 軸上）的情況。

設 P'、Q'、R' 分別在 x 軸、y 軸及 z 軸上運動，線段長分別為 $2a$、$2b$、$2c$。將原點設在三圓心之重心 G，可得 G' 的參數式為

$$\begin{cases} 3x=a\cos\theta \\ 3y=b\cos(\theta+\omega)=b\,(\cos\theta\cos\omega-\sin\theta\sin\omega) \\ 3z=c\cos(\theta+k)=c\,(\cos\theta\cos k-\sin\theta\sin k) \end{cases}$$

以下分兩種情形討論：

(1) $\sin\omega=\sin k=0$

$(\omega,k)=(0°,0°)\,,(0°,180°)\,,(180°,0°)\,,(180°,180°)$

當 $(\omega,k)=(0°,0°)$ 時，$\overrightarrow{GG'}=\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)\cos\theta$，軌跡圖形為一線段。而其他三種情況也同樣可以化成一個向量，軌跡為一線段。

(2) $\sin\omega$ 和 $\sin k$ 皆不為零或其一為零。

不失其一般性，我們假設 $\sin\omega\neq 0$。

若 G' 軌跡落於一固定平面 $E: Ax+By+Cz=D$ 上（ A,B,C,D 不含變數 θ），則 $\begin{cases} Aa+Bb\cos\omega+Cc\cos k=0 \\ Bb\sin\omega+Cc\sin k=0 \end{cases}$，解得 $A:B:C=bc\sin(k-\omega):(-ac\sin k):ab\sin\omega$

，可知此平面存在。

$$E: bc\sin(k-\omega)\,x-ac\sin k\,y+ab\sin\omega\,z=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

另外，我們利用參數式可解出

$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{x}{a} \\ \sin\theta=\dfrac{(b\cos\omega)x-ay}{ab\sin\omega} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

「同時滿足 ④ 和 ⑤ 式」和「滿足參數式」互為充要條件。

並且從 ⑤ 式及恆等式可導出二元二次式：

$$(ab\sin\omega)^2=b^2x^2+a^2y^2-2ab\cos\omega\,xy \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

至此我們證明「滿足 ⑤ 式」是「滿足 ⑥ 式」的充分條件。此二元二次式在空間中為一無線延伸之橢圓柱，其中心軸平行 z 軸。

將 ⑥ 式視為 y 的一元二次式，則判別式 $D=(-2ab\cos\omega\,x)^2-4a^2(b^2x^2-a^2b^2\sin^2\omega)\geq 0$，解得 $x^2\leq a^2$，即 $-a\leq x\leq a$，因此我們可倒回去假設 $x=a\cos\theta$，代入 ⑥ 求 y。

$$a^2y^2-2a^2b\cos\omega\cos\theta\,y+a^2b^2(\cos^2\theta-\sin^2\omega)=0$$

$$y=\frac{2a^2b\cos\omega\cos\theta\pm\sqrt{4a^4b^2\cos^2\omega\cos^2\theta-4a^4b^2(\cos^2\theta-\sin^2\omega)}}{2a^2}$$

$$=b\cos\omega\cos\theta\pm b\sin\omega\sin\theta=b\cos(\theta\pm\omega)$$

$$(x,y)=(a\cos\theta,b\cos(\theta+\omega)),(a\cos\theta,b\cos(\theta-\omega))$$

將 $-\theta$ 代入 θ ，發現兩座標可互通，因此我們僅取前者。可知「滿足 ⑤ 式」實為「滿足 ⑥ 式」的充要條件。

綜合以上結果，我們得到「同時滿足 ④ 和 ⑥ 式」和「滿足參數式」互為充要條件。同時滿足 ④ 和 ⑥ 式，軌跡圖形為空心橢圓柱的截面，由於 $\sin\omega\neq 0$，平面不可能平行橢圓中心軸，因此截面為一橢圓。我們將橢圓柱斜截面仍為一橢圓的證明放在附錄。

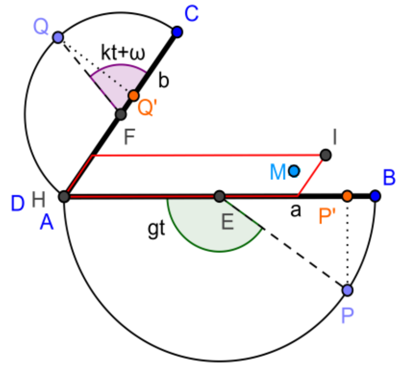
二、質量不同

除了研究質量相同情況，我們也試著推廣到質量不同情形。數個質量不同的動點之質心座標，即為所有動點的加權平均座標。

（一）兩條線段（質點）

M 為 P'、Q' 的內分點，與兩點的距離比恆為 $m:n$。

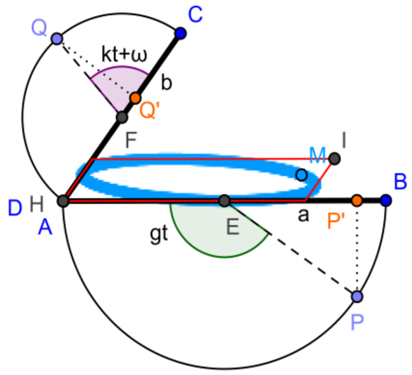
1. 軌跡範圍



令 $\overline{AD}$ $m:n$ 的內分點為 H，$\overline{BC}$ $m:n$ 的內分點為 I。軌跡的邊界為一平行四邊形，此平行四邊形是由通過 H 與 I、平行 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的四條直線所圍成。

前面質量相同情況中，求軌跡範圍的證明也可套用在這裡，此略。

2. 角速度相同時的軌跡方程式



我們用一端點重合的狀況來推導

$P'(a\,[1-\cos(gt)]\,,0)$

$Q'(b\cos\alpha\,[1+\cos(\omega+kt)]\,,b\sin\alpha\,[1+\cos(\omega+kt)])$

M的參數式為

$$\begin{cases}(m+n)x = am\,[1-\cos(gt)] + bn\cos\alpha\,[1+\cos(kt+\omega)]\\ (m+n)y = bn\sin\alpha\,[1+\cos(kt+\omega)]\end{cases}$$

與中點情況的方程式比較： $a\to am$，$b\to bn$，$2\to(m+n)$

$$\begin{aligned}(abmn\sin\alpha\sin\omega)^2 &= (m+n)^2b^2n^2\sin^2\alpha\,x^2 + 2(m+n)^2bn\sin\alpha\,(am\cos\omega - bn\cos\alpha)xy\\ &\quad + (m+n)^2(a^2m^2+b^2n^2\cos^2\alpha - 2abmn\cos\alpha\cos\omega)y^2\\ &\quad - 2(m+n)ab^2mn^2\sin^2\alpha\,(\cos\omega+1)x\\ &\quad + 2(m+n)abmn\sin\alpha\,(am-bn\cos\alpha)(\cos\omega+1)y\\ &\quad + 2a^2b^2m^2n^2\sin^2\alpha\,(\cos\omega+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta &= 4b^2n^2(m+n)^4\sin^2\alpha\,[(a^2m^2\cos^2\omega + b^2n^2\cos^2\alpha - 2abmn\cos\alpha\cos\omega)\\ &\quad - (a^2m^2+b^2n^2\cos^2\alpha - 2abmn\cos\alpha\cos\omega)]\\ &= 4a^2b^2m^2n^2(m+n)^4\sin^2\alpha\,(\cos^2\omega - 1)\le 0\end{aligned}$$

（二）k 條線段（質點）

設 k 個動點的質量之最簡整數比為 m_1：m_2：⋯⋯：m_k，我們可將第一個動點拆成

m_1 個質量相同的動點、第二個動點拆成 m_2 個質量相同的動點……以此類推。則原來 k 個動點的重心軌跡，會與後來質量相同的 $\sum_{i=1}^{k} m_i$ 個動點之重心軌跡相同。

所有質量不同的情況皆可以藉此轉化為質量相同的情況，即可套用前面質量相同時 k 個動點的結論。

附錄

引理 1

形為 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的二次曲線，若其判別式 $\delta=b^2-4ac<0$，則此二次曲線為橢圓類

定理 1

形為 $(Ax+By)^2+(Cx+Dy)^2=1$ 的二次曲線，其中 A、B、C、D 不全為零。則 $AD-BC\neq 0 \leftrightarrow$ 此二次曲線為橢圓類

證明：

由引理 1 可知一二次曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 圖形為橢圓的充分必要條件為 $b^2-4ac<0$

將 $(Ax+By)^2+(Cx+Dy)^2=1$ 展開化為上述形式，得

$(A^2+C^2)x^2+2(AB+CD)xy+(B^2+D^2)y^2-1=0$

$b^2-4ac<0$
$\Leftrightarrow\ 4(A^2B^2+2ABCD+C^2D^2)-4(A^2B^2+A^2D^2+B^2C^2+C^2D^2)<0$
$\Leftrightarrow\ (AD-BC)^2>0$
$\Leftrightarrow\ AD-BC\neq 0$
以上步驟皆可逆

定理 2

形為 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的二次曲線，將圖形左移 h、下移 k，新的二元二次方程式為 $a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0$，則

$$\begin{cases} a'=a\text{，}b'=b\text{，}c'=c \\ d'=2ah+bk+d \\ e'=bh+2ck+e \\ f'=ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f \end{cases}$$

證明：

$$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$$

代入原方程式展開即得證

定理 3

將座標軸逆時針旋轉θ°，使形為 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的橢圓的長短軸其一與 X 軸平行，則 $\cot 2\theta=\frac{a-c}{b}$

證明：

原本的 (x,y) 與轉軸後的 (x',y') 有 $\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$ 的關係式

將其代入 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，欲使 $x'y'$ 項為 0

$x'y'=a(-2\sin\theta\cos\theta)+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+c(2\sin\theta\cos\theta)=0$

$\Longrightarrow \cot 2\theta=\frac{a-c}{b}$

利薩如曲線（*Lissajous Curve*）

利薩如曲線為兩個互相垂直的正弦振動（即簡諧運動）合成的軌跡，其定義為

$$\begin{cases} x(\theta)=a\sin(\theta) \\ y(\theta)=b\sin(n\theta+\omega) \end{cases}$$

其中 $0\le\omega\le\frac{\pi}{2}$， $n\ge1$ （ n 與 $\frac{1}{n}$ 對稱，所以不需討論 $n<1$ ），n 為兩正弦振動的頻率比，ω 為起始角度差。

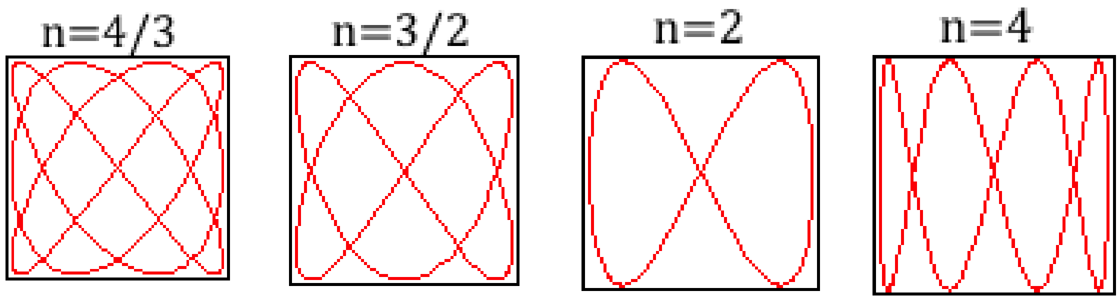
若 n 為無理數，則曲線在長方形中稠密。若 n 為有理數，則軌跡為封閉曲線。

以下列出幾種特殊情況：

若 $a=b$ 且 $n=1$，則曲線為橢圓

(1) 若 $\omega=\frac{\pi}{2}$ ，則橢圓退化為圓

(2) 若 $\omega=0°$ ，則橢圓退化為線段



空心橢圓柱的截面

橢圓柱截面依然為一橢圓（若平面平行橢圓柱中心軸則例外）

證明：

若平面平行橢圓中心軸，易知兩者交於兩條直線。

以下討論平面不平行橢圓中心軸的情況。平移並不會改變截面圖形，因此我們設橢圓柱的中心位於 $OXYZ$ 座標系中的原點 O，且中心軸平行 Z 軸：$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$。

而平面位於 $oxyz$ 座標系中：$z=0$，兩座標系原點重合。

設 $\overrightarrow{OX}$ 和 $\overrightarrow{OY}$ 對 $oxyz$ 座標系的方向餘弦分別為 (m_1,m_2,m_3) 和 (n_1,n_2,n_3)

則 $\begin{cases} X=m_1x+m_2y+m_3z \\ Y=n_1x+n_2y+n_3z \end{cases}$，代入橢圓柱方程式，並與 $z=0$ 解聯立。

$$\frac{(m_1x+m_2y)^2}{a^2}+\frac{(n_1x+n_2y)^2}{b^2}=1$$

$$\left(\frac{{m_1}^2}{a^2}+\frac{{n_1}^2}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{2m_1m_2}{a^2}+\frac{2n_1n_2}{b^2}\right)xy+\left(\frac{{m_2}^2}{a^2}+\frac{{n_2}^2}{b^2}\right)y^2=1$$

$$\delta=\frac{4}{a^2b^2}\left(2m_1m_2n_1n_2-{m_1}^2{n_2}^2-{m_2}^2{n_1}^2\right)$$

$$=-\frac{4}{a^2b^2}(m_1n_2-m_2n_1)^2\leq 0$$

$OXYZ$ 座標系中的 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 在 xy 平面上的投影點分別為 $(m_1,m_2,0)$ 和 $(n_1,n_2,0)$。當 $m_1n_2=m_2n_1$ 時，表示兩點與原點共線，即 X 軸和 Y 軸在 xy 平面上的投影為同一直線，XY 平面垂直 xy 平面，平行橢圓中心軸，與原假設不符。

當 $m_1n_2\neq m_2n_1$ 時，$\delta<0$，證畢。

伍、 研究結果

一、質量相同

（一） 兩條線段

1. 軌跡範圍：
   中點軌跡的邊界為一平行四邊形，此平行四邊形是由通過 $\overline{AD}$ 中點 H 與 $\overline{BC}$ 中點 I、平行 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的四條直線所圍成。

2. 軌跡圖形：

   (1) 角速度不同：軌跡為一不規則封閉曲線。

   (2) 角速度相同：$\omega \neq 0°$ 或 $180°$ 時，軌跡為一橢圓。若 $\omega = 0°$ 或 $180°$，則軌跡為一線段。

3. 不同相交情形之比較：

   中點重合、一端點重合、交於一點（非中點或端點）、不相交四種情形，當 ω 相等時軌跡圖形皆同，僅位置不同。

4. 角速度相同時的軌跡方程式：

   中點重合情形之軌跡方程式為
   $(ab\sin\alpha\sin\omega)^2 = (4b^2\sin^2\alpha)x^2 + 8b\sin\alpha\,(a\cos\omega - b\cos\alpha)xy + 4(a^2 + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\omega)y^2$。由第三點可知只要求出中點重合情形的軌跡方程式，即可利用移軸公式求出其他三種。

5. 角速度相同時的特殊情形：$\alpha = 90°$（即利薩如曲線中 $n = 1$的情況）

   (1) 若 $a = b$，則
      I. 橢圓皆傾斜 45°
      II. $\omega = 90°$ 時軌跡為一圓

（二） 三條線段

1. 軌跡圖形：

   (1) 可圍成一三角形
      I. 三圓起始角度皆同：軌跡為一定點不動
      II. 兩圓起始角度同，一圓不同：軌跡為一線段
      III. 三圓起始角度皆相異：軌跡為一橢圓

   (2) 無法圍成三角形

I. 三圓起始角度皆同：軌跡為一線段

II. 兩圓起始角度同，一圓不同：軌跡為一橢圓

III. 三圓起始角度皆相異：軌跡為一橢圓

（三） k 條線段

1. **$\cos(\theta+\omega_1)\overrightarrow{n_1}+\cos(\theta+\omega_2)\overrightarrow{n_2}+\cdots+\cos(\theta+\omega_k)\overrightarrow{n_k}$ 為簡諧運動合成的本質。**

2. 設 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2)$, …… , $\overrightarrow{n_k}=(a_k,b_k)$，若 $\overline{OM}=\cos(\theta+\omega_1)\overrightarrow{n_1}+\cos(\theta+\omega_2)\overrightarrow{n_2}+\cdots+\cos(\theta+\omega_k)\overrightarrow{n_k}$

(1) 若 $\sum_{1\le i<j\le k}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix}\sin(\omega_i-\omega_j)\neq 0$，則軌跡圖形為一橢圓。

(2) 若 $\sum_{1\le i<j\le k}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix}\sin(\omega_i-\omega_j)=0$，則軌跡圖形為一線段或一定點。

（四） 三維推廣

1. 歪斜兩線段可以從二維的兩線段平移而來

2. 互相垂直的三線段

(1) 若起始角度皆為 0° 或 180° ，重心軌跡為一線段。

(2) 若起始角度不全為 0° 和 180° ，重心軌跡為一橢圓柱的截面，即一橢圓。

二、質量不同

質量不同的情況皆可以轉化為質量相同的情況，不需另外討論。

陸、 討論

一、利薩如曲線的參數式為 $\begin{cases} x=a'\sin(\theta)\\ y=b'\sin(n\theta+\omega)\end{cases}$，當 $n=1$ 時，$\begin{cases}\sin\theta=\frac{x}{a'}\\ \cos\theta=\frac{a'y-b'\cos\omega x}{a'b'\sin\omega}\end{cases}$

同樣的可求出其軌跡方程式為 $(a'b'\sin\omega)^2=b'^2x^2-2a'b'\cos\omega\, xy+a'^2y^2$

① 式中 α 代入 90°，得 $(ab\sin\omega)^2=4b^2x^2+8ab\cos\omega\, xy+4a^2y^2$將兩式相互比較，發現若$\begin{cases}a'=-\frac{a}{2}\\ b'=\frac{b}{2}\end{cases}$ 則兩軌跡方程式完全相等。

二、我們觀察到隨著 α 的變動，軌跡範圍及圖形的變化像是經過了一個推移矩陣，以下我們

將從垂直情況（即利薩茹曲線）推移至夾角為 α，提供另一種證明。

令中點重合且$\alpha = 90°$ 時 $\overline{AB} = 2A$，$\overline{CD} = 2B$

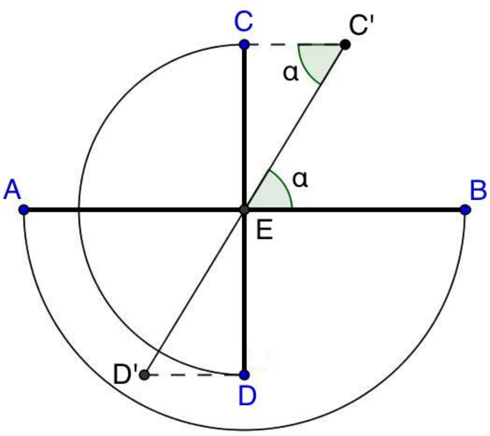
比較利薩茹曲線中角速度相同（n = 1）的情況與我們研究中中點重合且 $\alpha = 90^0$的情況

由上述可知，當 $\begin{Bmatrix} a' = -\frac{1}{2}A \\ b' = \frac{1}{2}B \end{Bmatrix}$ 時兩式相等

代入軌跡方程式，可求出中點重合且 $\alpha = 90°$ 之軌跡方程式為

$4B^2x^2 + 8AB\cos\omega\, xy + 4A^2y^2 = (AB\sin\omega)^2$ ……⑦

將座標平面上每一點做推移，使$\begin{Bmatrix} x' = x + \cot\alpha y & \text{……⑧} \\ y' = y & \end{Bmatrix}$，$\overline{CD}$ 推移後成為$\overline{C'D'}$



$\mathrm{P}'(-A\cos\theta, 0)$ 推移後不變

$Q'(0, B\cos(\theta+\omega))$ 推移後為

$Q''(B\cot\alpha\cos(\theta+\omega), B\cos(\theta+\omega))$

$M\left(-\frac{A}{2}\cos\theta, \frac{B}{2}\cos(\theta+\omega)\right)$推移後為

$M'\left(-\frac{A}{2}\cos\theta + \frac{B}{2}\cot\alpha\cos(\theta+\omega), \frac{B}{2}\cos(\theta+\omega)\right)$

由座標可知推移後 M'仍為 $\overline{P'Q''}$ 中點

將⑧代入⑦，可求出推移後的中點軌跡方程式為

$4B^2x'^2 + 8B(A\cos\omega - B\cot\alpha)x'y' + 4(A^2 - 2AB\cos\omega\cot\alpha + B^2\cot^2\alpha)y'^2 =$
$(AB\sin\omega)^2$ ……⑨

推移後 $\overline{C'D'} = 2\dfrac{B}{\sin\alpha}$，為符合前面定義（$P', Q'$分別在長度為 $2a, 2b$ 的線段上）

我們令 $A = a$，$B = b\sin\alpha$，代入⑨得

$$4b^2\sin^2\alpha\, x'^2 + 8b\sin\alpha(a\cos\omega - b\cos\alpha)x'y' + 4(a^2 - 2ab\cos\omega\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha)\,y'^2 = (ab\sin\alpha\sin\omega)^2$$

$$\delta = 64b^2\sin^2\alpha(a^2\cos^2\omega + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\omega) - 64b^2\sin^2\alpha(a^2 + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\omega\cos\alpha)$$

$$= 64a^2b^2\sin^2\alpha\,(\omega - 1) \le 0$$

由此可知長度為 $2a, 2b$ 且夾角為 α 的 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 兩線段，其動點中點軌跡可由長度為 $2a, 2b\sin\alpha$ 且互相垂直的兩線段之動點中點軌跡推移而得出，且兩者由橢圓退化為線段的條件一致。

柒、 結論與未來展望

一、結論

在這篇研究中，我們結合向量、解析幾何及物理的簡諧運動，但為了導出軌跡方程式，我們大量使用展開、化簡的方法，算式太過繁複。事實上我們觀察到兩條線段及三條線段情況中，圖形的中心（即橢圓形的中心或線段的中點）皆為一固定點，兩條線段中的圖形中心為 E、F 中點，而三條線段中的圖形中心為 D、E、F 之重心。若能將圖形中心改為座標原點將可使算式簡化許多。

二、未來展望

在 k 的動點的推廣中，雖然導出了代數式，但是找不出簡單的幾何解釋，因此判斷軌跡圖形只有代入數值一法，不夠直觀，未來希望能找出其潛藏的意義。三維的推廣也希望能一般化，甚至推廣到 k 的動點。而在角速度不同的部分，目前未能導出曲線方程式，希望未來能針對此種曲線做更進一步的研究，並與利薩如曲線互相比較。

捌、 參考資料及其他

一、張詠盛、楊雅涵、陳碩文。軌謎心竅。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會。

二、利薩如曲線 http://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve

三、林信安。二元二次方程式的化簡。
http://math1.ck.tp.edu.tw/%E6%9E%97%E4%BF%A1%E5%AE%89/%E5%AD%B8%E8%A1%93%E7%A0%94%E7%A9%B6/%E4%B8%8A%E8%AA%B2%E8%AC%9B%E7%BE%A9/%E7%AC%AC%E4%BA%94%E5%86%8A/2-3%E5%8C%96%E7%B0%A1%E4%BA%8C%E6%AC%A1%E6%9B%B2%E7%B7%9A.pdf

#【評語】040412

對於 k 個作簡諧運動的質點，作者找出決定其質心軌跡圖形的關係式，得出角速度相同時的軌跡為一點、圓或橢圓。然而角速度不同時，會產生像利薩如曲線(Lissajous Curve)的圖形，因為利薩如曲線在物理上有應用，若朝此方向研究，或許可以得出一些較有意義圖形或結果。建議參考第四屆丘成桐中學獎佳作作品「並蒂花開」的研究思路。