中華民國第 54 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

040411

一指點亮世界－點燈遊戲的探討

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳家和 高二 楊淞普 高二 翁瑋齊	彭威銘

關鍵詞：初始暗格、C 值、P 值

一指點亮世界——點燈遊戲的探討

摘要

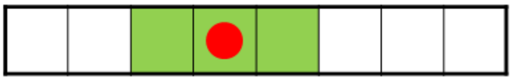
點燈遊戲是一款曾經風靡一時的益智遊戲，每個格子代表一個燈泡，有亮與暗兩種狀態，當按下某格時會改變自己及相鄰格的亮暗狀態，最後目的是將全部格子變亮。

本研究將按下某格時有哪些格子的亮暗狀態會被改變的規則，換成一新規則(以下稱包圍式點燈)，並將受影響格子的範圍大小一般化，最後目的是將全部格子變亮。在任意維度下我們推出如何從一開始各格的亮暗分布就能判斷最後能不能達成目的的檢驗法，還算出能達成目的時有會多少種按法，最後推廣到不只侷限亮暗兩種狀態的情形。

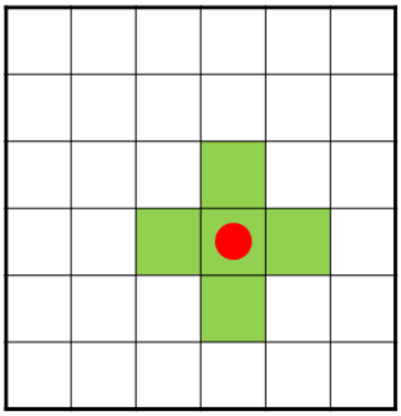
壹、研究動機

一、原遊戲規則：

每個格子代表一個燈泡，有亮與暗兩種狀態，當按下某格時會改變自己及相鄰格的亮暗狀態，如圖(一)為一維的情況，當按下標有紅色圓圈記號的格子時，會改變綠色部分格子的狀態；圖(二)為二維的情況。遊戲一開始有些格子亮，有些暗，最終目的是將全部格子變亮。



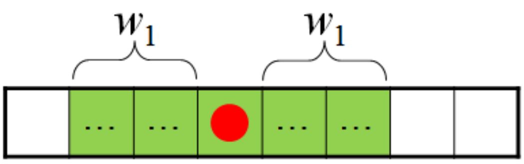
圖(一)



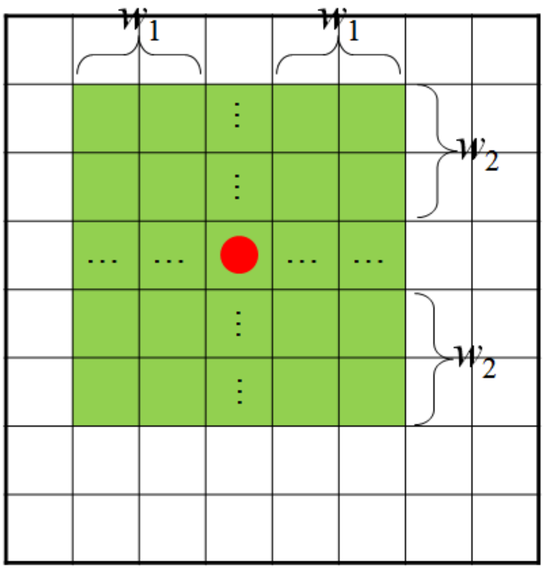
圖(二)

二、新遊戲規則：

我們找到許多研究都與上述規則有關，所以另創一新規則，以下稱包圍式點燈，圖(三)為一維的情況，當按下某格時，會改變左右各 w_1 格的狀態；圖(四)為二維的情況，當按下某格時，會改變左右各 w_1 格，上下各 w_2 格所展開矩形範圍內各格的狀態。同樣地，最終目的也是將全部格子變亮。

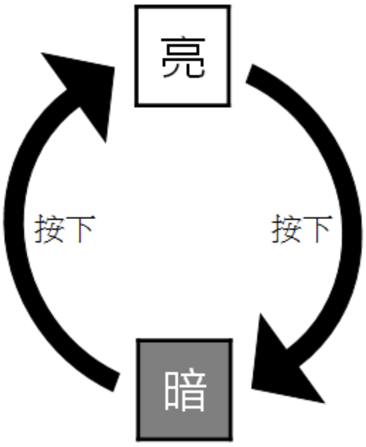


圖(三)

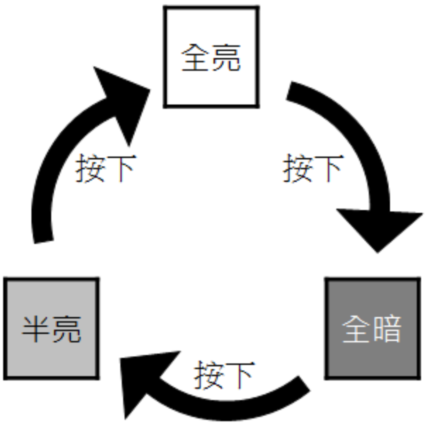


圖(四)

三、一般情形每個格子，只有亮與暗兩種狀態在循環，如圖(五)。我們將研究多種狀態循環，如圖(六)為全亮、全暗、半亮三種狀態循環。下以 g 表循環狀態數。



圖(五)



圖(六)

貳、研究目的

一、一維 2 循環狀態下有解與否之判定。

二、二維 2 循環狀態下有解與否之判定。

三、n 維($n \geq 3$) 2 循環狀態下有解與否之判定。

四、一維 g 循環狀態下有解與否之判定。

五、n 維($n \geq 2$) g 循環狀態下有解與否之判定。

六、n 維($n \in N$) g 循環狀態下有解時之解法數。

參、研究設備

一、電腦、紙筆等相關計算工具。

二、Dev C++

肆、研究過程

一、名詞定義、符號說明、遊戲目的

(一).名詞定義：

1.(1).一維方格：將一維分布的燈泡格子(設有 l_1 個)，建立一維坐標 $1, 2, 3,\ldots, l_1$ 依序代表各格：

1	2	3	…	l_1

以 $D(l_1)=\{x_1 \mid x_1 \in N, 1\le x_1 \le l_1\}$ 表之。

(2).二維方格：將二維分布的燈泡格子(設水平方向長有 l_1 個，鉛直方向長有 l_2 個)，將水平設為第一維度方向，鉛直設為第二維度方向，建立二維坐標依序代表各格：

	1	2	3	…	l_1
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	…	$(l_1,1)$
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	…	$(l_1,2)$
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	…	$(l_1,3)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
l_2	$(1,l_2)$	$(2,l_2)$	$(3,l_2)$	…	(l_1,l_2)

以 $D(l_1)\times D(l_2)=\{(x_1,x_2)\mid x_i \in N, 1\le x_i \le l_i, i=1,2\}$ 表之。

(3).n 維方格：將 n 維分布的燈泡格子(設第 i 維度長有 l_i 個，$i=1, 2, \ldots, n$)，建立 n 維坐標依序代表各格，以

$\prod_{i=1}^{n} D(l_i)=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_i \in N, 1\le x_i \le l_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 表之。

2.初始暗格：一開始狀態不是全亮的格子。

3.包圍式點燈：在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中，當我們按下格子 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 時，規定第 i 維度往兩邊各延伸 w_i 格所展開之 n 維長方體中所有格子的亮暗狀態皆被改變。即

$\{(x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\mid y_i \in Z, -w_i \le y_i \le w_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 中所有格子皆被改變。

4.虛格：在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中，當按的格子接近邊界時，改變狀態的格子有些將超出邊

界，為方便研究，將第 i 維度兩邊的邊界往外延伸 w_i 格(w_i 與一開始點燈規則設定值同)，展開之 n 維長方體後，多出來的格子稱為虛格，即為 $\{(z_1,z_2,...,z_n)\mid z_i\in Z,-(w_i-1)\le z_i\le l_i+w_i\}-\prod_{i=1}^{n}D(l_i)$ 中的所有格子。

5.循環狀態數 g：燈泡狀態的循環數。若燈泡僅有全亮、全暗兩種狀態，則 g 定為 2；若有全亮、全暗、半亮三種狀態，則 g 定為 3，以此類推。

(二).符號說明：

1. $C(x_1,x_2,...,x_n)$：在 $\prod_{i=1}^{n}D(l_i)$ 中，當格子 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 狀態被改變 g 次時等同沒變，所以遊戲過程中只須考慮狀態被改變的次數對模 g 同餘即可，值設為 $C(x_1,x_2,...,x_n)$。

2. $P(x_1,x_2,...,x_n)$：在 $\prod_{i=1}^{n}D(l_i)$ 中，當格子 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 按 g 次時等同沒按，所以遊戲過程中只須考慮按的次數對模 g 同餘即可，值設為 $P(x_1,x_2,...,x_n)$。特別一提的是，因虛格不可按下，所以 P 值必 0。

(三).遊戲目的：在 $\prod_{i=1}^{n}D(l_i)$ 中，一開始會有一個或數個初始暗格，要用包圍式點燈的規則去按某些格子，目的要使所有格子都變全亮。因按下各格的次序並不會影響最後結果，所以我們只要確定每一格按下的次數即可，即確定每一格的 P 值。若每一格的 P 值都有解，則遊戲目的可達成(有解)；若某些格的 P 值無解，則遊戲目的無法達成(無解)。

二、討論一維方格 $D(l_1)$ 下 g =2 的情形

按下某格時，會改變自己及左右各 w_1 格的亮暗狀態。所以格子(坐標 x_1)的狀態會因自己及左右各 w_1 格按下而改變。可列式：

$$\begin{cases} C(x_1)\equiv\sum_{k=-w_1}^{w_1}P(x_1+k) \\ C(x_1+1)\equiv\sum_{k=-w_1}^{w_1}P(x_1+1+k)\end{cases} \pmod 2$$

相減得

(一).引理一： $C(x_1+1)-C(x_1)\equiv P(x_1+w_1+1)-P(x_1-w_1) \pmod 2$

1.當 $C(x_1+1)=C(x_1)$時，$P(x_1+w_1+1)=P(x_1-w_1)$

2.當 $C(x_1+1)\ne C(x_1)$時，$P(x_1+w_1+1)\ne P(x_1-w_1)$

1.可看出：

(1).當 x_1 到 x_1+1 的 C 值不變，則由 x_1-w_1 跳動 $2w_1+1$ 格到 x_1+w_1+1 的 P

值亦不變。

(2).當 x_1 到 x_1+1 的 C 值改變(由 0 變 1 或由 1 變 0)，則由 x_1-w_1 跳動 $2w_1+1$ 格到 x_1+w_1+1 的 P 值亦會改變(由 0 變 1 或由 1 變 0)。

所以在 $D(l_1)$ 中每格 C 值已知下，若某格的 P 值知道，則每跳動 $2w_1+1$ 格的 P 值都會知道。現將所有格(含虛格：$-(w_1-1), -(w_1-2), \ldots, 0$ 及 $l_1+1, l_1+2, \ldots, l_1+w_1$)對模 $2w_1+1$ 進行分類，餘數同為 r 者歸成一類 $K_r^{2w_1+1}$，計有 $K_1^{2w_1+1}, K_2^{2w_1+1}, \ldots, K_{2w_1+1}^{2w_1+1}$ 等 $2w_1+1$ 個剩餘類。以下所提到的 $K_R^{2w_1+1}$ 若 R 不在 1~$2w_1+1$ 範圍，則自動視為已調整成進入 1~$2w_1+1$ 範圍，如 $K_{2w_1+2}^{2w_1+1}$ 自動視為 $K_1^{2w_1+1}$。如此，只要知道類中任一格的 P 值，即可知該類所有格的 P 值。

2.以下我們將觀察每個剩餘類由小到大 P 值改變的次數稱為剩餘類轉換的次數，例如：

(1). K_1^9 中由小到大 P 值依序 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1，改變 1 次，稱 K_1^9 轉換一次。

(2). K_2^9 中由小到大 P 值依序 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0，改變 2 次，稱 K_2^9 轉換二次。

(3). K_3^9 中由小到大 P 值依序 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1，改變 0 次，稱 K_3^9 轉換 0 次。

3.定義：$-(w_1-1), -(w_1-2), \ldots, 0$ 為前虛格；$l_1+1, l_1+2, \ldots, l_1+w_1$ 為後虛格。則剩餘類可分成三種：

(1).不含虛格：只要決定最小者的 P 值就可確定其他所有格的 P 值，所以此類 P 值必有解。

(2).含前後虛格之一：最小或最大者之一為虛格，因虛格 P 值為 0，因此可確定其他所有格的 P 值，所以此類 P 值必有解。

(3).同時含前後虛格：最小與最大者皆為虛格，所以 P 值皆 0。若轉換奇數次會矛盾，則此類 P 值無解；但若轉換偶數次則符合，亦可確定其他所有格的 P 值，此時此類 P 值有解。

由上討論可知 $D(l_1)$ 有解的充要條件為同時含前後虛格的剩餘類須轉換偶數次。

(二).單一初始暗格有無解判定

設初始暗格坐標 t_1。若有解，則須使 $C(t_1)=1$ 且 $C(x_1)=0$, $x_1 \in D(l_1)-\{t_1\}$。因 C 值改變的位置只有 t_1-1 到 t_1 與 t_1 到 t_1+1，所以 P 值只有在 t_1-w_1-1 到 t_1+w_1 與 t_1-w_1 到 t_1+w_1+1 會改變，即剩餘類中只有 $K_{t_1+w_1}^{2w_1+1}$ 與 $K_{t_1+w_1+1}^{2w_1+1}$ 會轉換一次。以下針對 l_1 與 t_1 討論：

令 $l_1 \equiv l_1' \pmod{2w_1+1}$ 且 $t_1 \equiv t_1' \pmod{2w_1+1}$，其中 $1 \le l_1', t_1' \le 2w_1+1$

1.當 $2 \le l_1' \le w_1+1$ 時，同時含前後虛格的剩餘類為 $K_{w_1+2}^{2w_1+1}, K_{w_1+3}^{2w_1+1}, \ldots, K_{l_1'+w_1}^{2w_1+1}$

(1). $t_1' \in \{1, 2, \ldots, l_1'\}$，上述至少有一個剩餘類會轉換一次，所以無解。

(2). $t_1' \notin \{1, 2, \ldots, l_1'\}$，上述剩餘類皆轉換 0 次，所以有解。

2.當 $w_1+1\le l_1'\le 2w_1$ 時，同時含前後虛格的剩餘類為 $K_{l_1'+1}^{2w_1+1}, K_{l_1'+2}^{2w_1+1},\ldots,\ K_{2w_1+1}^{2w_1+1}$

(1). $t_1'\in\{l_1'-w_1,\ l_1'-w_1+1,\ldots,w_1+1\}$，上述至少有一個剩餘類會轉換一次，所以無解。

(2). $t_1'\notin\{l_1'-w_1,\ l_1'-w_1+1,\ldots,w_1+1\}$，上述剩餘類皆轉換 0 次，所以有解。

3.當 $l_1'=1$, $2w_1+1$ 時，沒有同時含前後虛格的剩餘類，所以有解。

(三).數個初始暗格有無解判定

由(二).的討論知，若要將一個位於 $K_{r-w_1-1}^{2w_1+1}$ 或 $K_{r-w_1}^{2w_1+1}$ 的初始暗格變亮且不改變其他格的狀態，皆會使 $K_r^{2w_1+1}$ 轉換一次。因有解的充要條件為同時含前後虛格的剩餘類須轉換偶數次，所以若 $K_r^{2w_1+1}$ 同時含前後虛格，則在 $K_{r-w_1-1}^{2w_1+1}$ 與 $K_{r-w_1}^{2w_1+1}$ 中的初始暗格數之和須為偶數。定義 $T(K_r^{2w_1+1})=$(剩餘類 $K_r^{2w_1+1}$ 中初始暗格的個數)。以下針對 l_1' 討論有解條件：

1.當 $2\le l_1'\le w_1+1$ 時， $K_{w_1+2}^{2w_1+1}, K_{w_1+3}^{2w_1+1},\ldots,\ K_{l_1'+w_1}^{2w_1+1}$ 須轉換偶數次，所以

$$\begin{cases} T(K_1^{2w_1+1})+T(K_2^{2w_1+1})\equiv 0 \\ T(K_2^{2w_1+1})+T(K_3^{2w_1+1})\equiv 0 \\ \qquad\cdots \\ T(K_{l_1'-1}^{2w_1+1})+T(K_{l_1'}^{2w_1+1})\equiv 0 \end{cases} \pmod 2$$

$\Rightarrow T(K_1^{2w_1+1})$ 、 $T(K_2^{2w_1+1})$ 、…、 $T(K_{l_1'}^{2w_1+1})$ 同偶或同奇。

2.當 $w_1+1\le l_1'\le 2w_1$ 時， $K_{l_1'+1}^{2w_1+1}, K_{l_1'+2}^{2w_1+1},\ldots,\ K_{2w_1+1}^{2w_1+1}$ 須轉換偶數次，所以

$$\begin{cases} T(K_{l_1'-w_1}^{2w_1+1})+T(K_{l_1'-w_1+1}^{2w_1+1})\equiv 0 \\ T(K_{l_1'-w_1+1}^{2w_1+1})+T(K_{l_1'-w_1+2}^{2w_1+1})\equiv 0 \\ \qquad\cdots \\ T(K_{w_1}^{2w_1+1})+T(K_{w_1+1}^{2w_1+1})\equiv 0 \end{cases} \pmod 2$$

$\Rightarrow T(K_{l_1'-w_1}^{2w_1+1})$ 、 $T(K_{l_1'-w_1+1}^{2w_1+1})$ 、…、 $T(K_{w_1+1}^{2w_1+1})$ 同偶或同奇。

3.當 $l_1'=1$, $2w_1+1$ 時，沒有同時含前後虛格的剩餘類，所以有解。

三、討論二維方格 $D(l_1)\times D(l_2)$ 下 $g=2$ 的情形

按下某格時，會改變自己左右各 w_1 格，上下各 w_2 格所展開之矩形中每格的亮暗狀態，所以格子 (x_1, x_2) 的狀態會因自己左右各 w_1 格，上下各 w_2 格所展開之矩形中每格按下而改變。可列式：

$$C(x_1,x_2)\equiv\sum_{k_1=-w_1}^{w_1}\sum_{k_2=-w_2}^{w_2}P(x_1+k_1,x_2+k_2)\ (\mathrm{mod}\,2)$$

(一).單一初始暗格有無解判定

設初始暗格坐標(t_1, t_2)。若有解，則須使

$C(t_1, t_2) = 1$ 且 $C(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2)\in D(l_1)\times D(l_2)-\{(t_1 , t_2)\}$。

以下針對 l_1, t_1 與 l_2, t_2 討論：

令 $l_i\equiv l_i'(\mathrm{mod}\,2w_i+1)$ 且 $t_i\equiv t_i'(\mathrm{mod}\,2w_i+1)$ ，其中 $1\le l_i', t_i'\le 2w_i+1$, i =1, 2

1.當 i =1, 2 之中有一滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\dots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\dots,w_i+1\}\end{cases}$ 時，無解。

2.當 i =1, 2 皆不滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\dots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\dots,w_i+1\}\end{cases}$ 時，有解。

[證明無解情形 1.]：

不失一般性，設 i =2 滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\dots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\dots,w_i+1\}\end{cases}$

定義 $C_{2^\perp}(x_1,x_2)\equiv\sum_{k=-w_1}^{w_1}P(x_1+k,x_2)\ (\mathrm{mod}\ 2)$

則 $C(t_1,x_2)\equiv\sum_{k=-w_2}^{w_2}C_{2^\perp}(t_1,x_2+k)\ (\mathrm{mod}\ 2)$

考慮一維方格 $D(l_2)$

令 $C(x_2) = C(t_1, x_2)$，$x_2 = 1, 2,\dots, l_2$

則 $C_{2^\perp}(t_1, x_2) = P(x_2)$，$x_2 = -(w_2-1), -(w_2-2), \dots , l_2 + w_2$

因 $\begin{cases}C(t_2)=C(t_1,t_2)=1\\ C(x_2)=C(t_1,x_2)=0,\ \ x_2\in D(l_2)-\{t_2\}\end{cases}$

所以由二.(二).知

在 i =2 滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\dots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\dots,w_i+1\}\end{cases}$ 下

$D(l_2)$中 $P(x_2)$無解

$\Rightarrow D(l_1)\times D(l_2)$ 中 $C_{2^\perp}(t_1, x_2)$無解

$\Rightarrow D(l_1)\times D(l_2)$ 中 $P(t_1 + k , x_2), k = -w_1 ,\dots,w_1$ 中至少有一無解

$\Rightarrow D(l_1)\times D(l_2)$ 無解

得證。

接下來先放入一引理。

> 引理二：
>
> 若 $D(l_i)$中各格 P 值 $P_i(x_i)$, x_i =1, 2,…, l_i 會使各格 C 值為 $C_i(x_i)$, x_i =1, 2,…, l_i i =1, 2
>
> 則 $D(l_1)\times D(l_2)$ 中各格 P 值定為 $P(x_1, x_2)\equiv P_1(x_1)\,P_2(x_2) \pmod 2$
>
> 會使各格 C 值 $C(x_1, x_2)\equiv C_1(x_1)C_2(x_2) \pmod 2$
>
> [證明]：$C(x_1, x_2)\equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1}\sum_{k_2=-w_2}^{w_2} P(x_1+k_1, x_2+k_2) \pmod 2$
>
> $$\equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1}\sum_{k_2=-w_2}^{w_2} P_1(x_1+k_1)\cdot P_2(x_2+k_2) \pmod 2$$
>
> $$\equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1} P_1(x_1+k_1)\cdot \sum_{k_2=-w_2}^{w_2} P_2(x_2+k_2) \pmod 2$$
>
> $$\equiv C_1(x_1)C_2(x_2) \pmod 2$$

[證明有解情形 2.]：

考慮兩個一維方格 $D(l_1)$, $D(l_2)$

因 i =1, 2 不滿足 $\begin{cases} 2\le l_i'\le w_i+1 \\ t_i'\in\{1,2,\ldots,l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i+1\le l_i'\le 2w_i \\ t_i'\in\{l_i'-w_i, l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\} \end{cases}$

由二.(二).知

$D(l_i)$中可找到 P 值 $P_i(x_i)$使 $C(t_i)$ = 1 且 $C(x_i)$ = 0 , $x_i\in D(l_i)-\{t_i\}$, i =1, 2

由引理二

在 $D(l_1)\times D(l_2)$ 中定 $P(x_1, x_2)\equiv P_1(x_1)\,P_2(x_2) \pmod 2$

可使 $C(t_1, t_2)$ = 1 且 $C(x_1, x_2)$ = 0 , $(x_1, x_2)\in D(l_1)\times D(l_2)-\{(t_1 , t_2)\}$

得證。

(二).數個初始暗格有無解判定

將二維方格 $D(l_1)\times D(l_2)$切成 l_2 列個各自獨立的一維子方格 $D(l_1)$，第 j 列以 $D_{1(j)}(l_1)$ 表之；同時亦將 $D(l_1)\times D(l_2)$切成 l_1 行個各自獨立的一維子方格 $D(l_2)$，第 j 行以 $D_{2(j)}(l_2)$ 表之。

> 1.若每一 $D_{i(j)}(l_i)$ 滿足
>
> (1).當 $2\le l_i'\le w_i+1$時，$T(K_1^{2w_i+1})$ 、$T(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇
>
> (2).當 $w_i+1\le l_i'\le 2w_i$時，$T(K_{l_i'-w_i}^{2w_i+1})$ 、$T(K_{l_i'-w_i+1}^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{w_i+1}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇
>
> (3).當 l_i'=1 , $2w_i$+1 時，
>
> 則有解。
>
> 2.若有一 $D_{i(j)}(l_i)$ 不滿足 1.中條件(1).~(3).則無解。

[證明無解情形 2.]：

不失一般性，設 $D_{2(1)}(l_2)$ 不滿足 1.中條件(1).~(3).

考慮一維方格 $D(l_2)$
令 $C(x_2) = C(1, x_2)$，$x_2 = 1, 2,\ldots, l_2$
則 $C_{2^{\perp}}(1, x_2) = P(x_2)$，$x_2 = -(w_2-1), -(w_2-2), \ldots, l_2 + w_2$
因 $D_{2(1)}(l_2)$ 不滿足 1.中條件(1).~(3).，所以由二.(三).的討論知
$D(l_2)$中 $P(x_2)$無解
$\Rightarrow D(l_1)\times D(l_2)$ 中 $C_{2^{\perp}}(1, x_2)$無解
$\Rightarrow D(l_1)\times D(l_2)$ 中 $P(1+k, x_2)$, $k = -w_1,\ldots, w_1$ 中至少有一無解
$\Rightarrow D(l_1)\times D(l_2)$ 無解
得證。
[證明有解情形 1.]：
不失一般性，設每一 $D_{i(j)}(l_i)$ 皆滿足 1.中條件(1).
將 $D(l_1)\times D(l_2)$ 中的格子(x_1, x_2)分成三個區域：

(1).沒有 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$ ：

此區域的暗格可由三.(一).2.結論，一次將一個變亮，直到全區都變亮。

(2).恰一 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$ ：

(a).考慮區塊$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 且 $x_2 \notin \bigcup_{r=1}^{l_2'} K_r^{2w_2+1}\}$:

在 $D(l_2) - \bigcup_{r=1}^{l_2'} K_r^{2w_2+1}$ 中固定一坐標 j，
因 $D_{1(j)}(l_1)$ 上格子滿足 $T(K_1^{2w_1+1})$ 、$T(K_2^{2w_1+1})$ 、…、$T(K_{l_1'}^{2w_1+1})$ 同偶或同奇

由二.(三).知可找到 P 值 $P_1(x_1)$使 $\bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 中所有暗格變亮
又由二.(二).知
$D(l_2)$中可找到 P 值 $P_2(x_2)$使 $C(j) = 1$ 且 $C(x_2) = 0$, $x_2 \in D(l_2) - \{j\}$
由引理二
在 $D(l_1)\times D(l_2)$ 中定 $P(x_1, x_2) \equiv P_1(x_1)\, P_2(x_2) \pmod 2$

可使 $D_{1(j)}(l_1)$ 上 $\bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 中所有暗格變亮且其他格狀態不變

逐一改變 j，直到 $D(l_2) - \bigcup_{r=1}^{l_2'} K_r^{2w_2+1}$ 中坐標都固定過。

(b).區塊$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \notin \bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 且 $x_2 \in \bigcup_{r=1}^{l_2'} K_r^{2w_2+1}\}$仿(a).處理，最後全區都變亮。

(3).全部 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$ ：

(a).依序固定 $r = 1, 2,\ldots, l_2'$
依序對 $K_r^{2w_2+1} - \{r\}$ 中每一 j_r 操作以下動作：
由二.(三).知

$D(l_2)$中可找到 P 值 $P_2(x_2)$

使 $C(r)=1$, $C(j_r) = 1$ 且 $C(x_2) = 0$, $x_2 \in D(l_2)-\{r, j_r\}$

又因 $D_{1(j_r)}(l_1)$ 上格子滿足 $T(K_1^{2w_1+1})$ 、$T(K_2^{2w_1+1})$ 、…、$T(K_{l_1'}^{2w_1+1})$ 同偶或同奇

由二.(三).知

可找到 P 值 $P_1(x_1)$使 $\bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 中所有暗格變亮

由引理二

在 $D(l_1)\times D(l_2)$ 中定 $P(x_1, x_2) \equiv P_1(x_1)P_2(x_2) \pmod 2$

可使 $D_{1(j_r)}(l_1)$ 上 $\bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 中所有暗格變亮，且第 1 列上與之有相同對應位置的格子，狀態亦被改變一次，等同將 $D_{1(j_r)}(l_1)$ 上 $\bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 中所有暗格加到第 1 列上，但兩個暗格加在一起又變亮格。此動作對每一行、每一列 $D_{i(j)}(l_i)$, i =1, 2 而言依然繼續保有 $T(K_1^{2w_i+1})$ 、$T(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇。

(b).操作完(a).後，每一 $D_{2(j)}(l_2)$ 在 $\bigcup_{r=1}^{l_2'} K_r^{2w_2+1}$ 中除 1~l_2' 外，暗格皆變亮，

又因保有 $T(K_1^{2w_2+1})$ 、$T(K_2^{2w_2+1})$ 、…、$T(K_{l_2'}^{2w_2+1})$ 同偶或同奇，所以剩下的 1~l_2' 必全部亮或全部暗，

由二.(三).知 $D(l_2)$中可找到 P 值 $P_2(x_2)$

使 $C(x_2)=1$, $x_2 = 1, 2,\ldots, l_2'$ 且 $C(x_2) = 0$, $x_2 \in D(l_2)-\{1, 2, \ldots, l_2'\}$

又此時 $D_{1(1)}(l_1)$ 亦滿足 $T(K_1^{2w_1+1})$ 、$T(K_2^{2w_1+1})$ 、…、$T(K_{l_1'}^{2w_1+1})$ 同偶或同奇

由二.(三).知可找到 P 值 $P_1(x_1)$使 $\bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 中所有暗格皆變亮

由引理二

在 $D(l_1)\times D(l_2)$ 中定 $P(x_1, x_2) \equiv P_1(x_1)P_2(x_2) \pmod 2$

可使第 1~l_2' 列上行數位於 $\bigcup_{r=1}^{l_1'} K_r^{2w_1+1}$ 的所有暗格全變亮，遂完成全區都變亮。

得證。

四、討論 n 維(n≥3)方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 下 g =2 的情形

按下某格時，第 i 維度(i = 1, 2,…, n)往兩邊各延伸 w_i 格所展開之 n 維長方體中

所有格子的亮暗狀態皆被改變，所以格子(x_1 , x_2 ,…, x_n)會因

$\{(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n) \mid y_i \in Z, -w_i \le y_i \le w_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 中所有格子按下而改變狀態。可列式：

$$C(x_1,x_2,\cdots,x_n) \equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1}\sum_{k_2=-w_2}^{w_2}\cdots\sum_{k_n=-w_n}^{w_n} P(x_1+k_1, x_2+k_2,\cdots,x_n+k_n) \pmod 2$$

(一).單一初始暗格有無解判定

設初始暗格坐標($t_1, t_2,\ldots, t_n$)，若有解，則須使 $C(t_1, t_2,\ldots, t_n) = 1$ 且

$C(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0$, $(x_1, x_2,\ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} D(l_i) - \{(t_1, t_2,\ldots, t_n)\}$。

以下針對 l_i 與 t_i 討論：

令 $l_i \equiv l_i' \pmod{2w_i+1}$ 且 $t_i \equiv t_i' \pmod{2w_i+1}$ ，其中 $1 \le l_i', t_i' \le 2w_i+1$ ，i =1, 2,…, n

1.當 i =1, 2,…, n 之中有一滿足

$\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i+1 \\ t_i' \in \{1,2,\ldots,l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i+1 \le l_i' \le 2w_i \\ t_i' \in \{l_i'-w_i, l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\} \end{cases}$ 時，無解。

2.當 i =1, 2,…, n 皆不滿足 $\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i+1 \\ t_i' \in \{1,2,\ldots,l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i+1 \le l_i' \le 2w_i \\ t_i' \in \{l_i'-w_i, l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\} \end{cases}$

時，有解。

[證明無解情形 1.]：

不失一般性，設 $i = n$ 滿足 $\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i+1 \\ t_i' \in \{1,2,\ldots,l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i+1 \le l_i' \le 2w_i \\ t_i' \in \{l_i'-w_i, l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\} \end{cases}$

定義

$$C_{n^\perp}(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1}\sum_{k_2=-w_2}^{w_2}\cdots\sum_{k_{n-1}=-w_{n-1}}^{w_{n-1}} P(x_1+k_1, x_2+k_2,...,x_{n-1}+k_{n-1}, x_n) \pmod 2$$

則 $C(t_1,t_2,...,t_{n-1},x_n) \equiv \sum_{k=-w_n}^{w_n} C_{n^\perp}(t_1,t_2,...,t_{n-1},x_n+k) \pmod 2$

考慮一維方格 $D(l_n)$

令 $C(x_n) = C(t_1, t_2,\ldots, t_{n-1}, x_n)$，$x_n = 1, 2,\ldots, l_n$

則 $C_{n^\perp}(t_1, t_2,\ldots, t_{n-1}, x_n) = P(x_n)$，$x_n = -(w_n-1), -(w_n-2), \ldots, l_n + w_n$

又 $\begin{cases} C(t_n) = C(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},t_n) = 1 \\ C(x_n) = C(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},x_n) = 0,\ \ x_n \in D(l_n) - \{t_n\} \end{cases}$

所以由二.(二).知

在 $i = n$ 滿足 $\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i + 1 \\ t_i' \in \{1, 2, \ldots, l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i + 1 \le l_i' \le 2w_i \\ t_i' \in \{l_i' - w_i, l_i' - w_i + 1, \ldots, w_i + 1\} \end{cases}$ 下

$D(l_n)$的 $P(x_n)$無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $C_{n^\perp}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, x_n)$無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $P(t_1+k_1, t_2+k_2, \ldots, t_{n-1}+k_{n-1}, x_n)$, $k_i = -w_i, \ldots, w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ 中至少有一無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 無解

得證。

接下來先放入一引理。

引理三：

$1 \le s < n$

若 $\prod_{i=1}^{s} D(l_i)$ 中各格 P 值 $P_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $x_i = 1, 2, \ldots, l_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ 會使各格 C 值為 $C_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $x_i = 1, 2, \ldots, l_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$

又 $D(l_i)$, $i = s+1, s+2, \ldots, n$ 中各格 P 值 $P_i(x_i)$, $x_i = 1, 2, \ldots, l_i$ 會使各格 C 值為 $C_i(x_i)$, $x_i = 1, 2, \ldots, l_i$

則 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中各格 P 值定為 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P_s(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot \prod_{i=s+1}^{n} P_i(x_i) \pmod 2$

會使各格 C 值 $C(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv C_s(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot \prod_{i=s+1}^{n} C_i(x_i) \pmod 2$

[證明]： $C(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1} \sum_{k_2=-w_2}^{w_2} \cdots \sum_{k_n=-w_n}^{w_n} P(x_1+k_1, x_2+k_2, \cdots, x_n+k_n) \pmod 2$$

$$\equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1} \sum_{k_2=-w_2}^{w_2} \cdots \sum_{k_n=-w_n}^{w_n} P_s(x_1+k_1, x_2+k_2, \cdots, x_s+k_s) \cdot \prod_{i=s+1}^{n} P_i(x_i+k_i) \pmod 2$$

$$\equiv \sum_{k_1=-w_1}^{w_1} \sum_{k_2=-w_2}^{w_2} \cdots \sum_{k_s=-w_s}^{w_s} P_s(x_1+k_1, x_2+k_2, \cdots, x_s+k_s) \cdot \prod_{i=s+1}^{n} \Big(\sum_{k_i=-w_i}^{w_i} P_i(x_i+k_i)\Big) \pmod 2$$

$$\equiv C_s(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot \prod_{i=s+1}^{n} C_i(x_i) \pmod 2$$

[證明有解情形 2.]：

考慮 n 個一維方格 $D(l_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

因所有 i 不滿足 $\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i + 1 \\ t_i' \in \{1, 2, \ldots, l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i + 1 \le l_i' \le 2w_i \\ t_i' \in \{l_i' - w_i, l_i' - w_i + 1, \ldots, w_i + 1\} \end{cases}$

由二.(二).知

$D(l_i)$中可找到 P 值 $P_i(x_i)$使 $C(t_i)=1$ 且 $C(x_i)=0$, $x_i\in D(l_i)-\{t_i\}$, $i=1, 2,\ldots, n$

由引理三

在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中定 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n)\equiv\prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)\pmod 2$

可使 $C(t_1, t_2,\ldots, t_n)=1$

且 $C(x_1, x_2,\ldots, x_n)=0$, $(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in\prod_{i=1}^{n} D(l_i)-\{(t_1, t_2,\ldots, t_n)\}$

得證。

(二).數個初始暗格有無解判定

將 n 維方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 平行第 k 維度($k=1, 2,\ldots, n$)方向切成($\prod_{i=1}^{n} l_i\div l_k$)個各自獨立的一維子方格 $D(l_i)$，

以 $D_{k(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)}(l_k)=\{(x_1,\ldots, x_{k-1}, j, x_{k+1},\ldots, x_n)\mid j=1, 2, \ldots, l_k\}$表之。

1.若每一 $D_{i(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)}(l_i)$ 滿足 (1).當 $2\le l_i'\le w_i+1$時，$T(K_1^{2w_i+1})$ 、$T(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇 (2).當 $w_i+1\le l_i'\le 2w_i$時，$T(K_{l_i'-w_i}^{2w_i+1})$ 、$T(K_{l_i'-w_i+1}^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{w_i+1}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇 (3).當 $l_i'=1$, $2w_i+1$ 時， 則有解。 2.若有一 $D_{i(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)}(l_i)$ 不滿足 1.中條件(1).~(3).則無解。

[證明無解情形 2.]：

不失一般性，設 $D_{n(1,2,\cdots,n-1)}(l_n)$不滿足 1.中條件(1).~(3).

考慮一維方格 $D(l_n)$

令 $C(x_n)=C(1, 2,\ldots, n-1, x_n)$，$x_n=1, 2,\ldots, l_n$

則 $C_{n^{\perp}}(1, 2,\ldots, n-1, x_n)=P(x_n)$，$x_n=-(w_n-1), -(w_n-2), \ldots, l_n+w_n$

因 $D_{n(1,2,\cdots,n-1)}(l_n)$不滿足 1.中條件(1).~(3).，所以由二.(三).知

$D(l_n)$中 $P(x_n)$無解

$\Rightarrow\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $C_{n^{\perp}}(1, 2,\ldots, n-1, x_n)$無解

$\Rightarrow\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $P(1+k_1, 2+k_2,\ldots, (n-1)+k_{n-1}, x_n)$, $k_i=-w_i,\ldots,w_i$, $i=1, 2,\ldots, n-1$ 中至

少有一無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 無解

得證。

[證明有解情形 1.]：

不失一般性，設皆滿足條件(1).

對維度作數學歸納法

1.當維度 2 時，由三.(二).1.知成立

2.設維度比 n 小皆成立

當維度為 n 時

將 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中的格子$(x_1, x_2,\ldots, x_n)$分成三個區域：

(1).沒有 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, $i = 1, 2,\ldots, n$：

此區暗格可由四.(一).2.結論，一次將一個變亮，直到全區都變亮。

(2).部分 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, $i = 1, 2,\ldots, n$：

(a).依序固定 $s = 1, 2,\ldots, n-1$，再由$\{1, 2,\ldots, n\}$中依序選出 $e_1, e_2,\ldots, e_s$ 等 s 個相異元素，一次將一個區塊

$$\{ (x_1, x_2,\ldots, x_n) \mid x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \in \{e_1, e_2,\ldots, e_s\}$$

$$\text{且 } x_i \notin \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \notin \{e_1, e_2,\ldots, e_s\} \}$$

中所有暗格變亮，最後全區就都變亮。

(b).不失一般性，說明區塊

$$\{ (x_1, x_2,\ldots, x_n) \mid x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \in \{1, 2,\ldots, s\}$$

$$\text{且 } x_i \notin \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \in \{s+1, s+2,\ldots, n\} \}$$

的處理過程：

先定義第 k 維度坐標固定為 j 所形成的$(n-1)$維子方格為

$$D_{k^{\perp}(j)}\left(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_k\right) = \{(x_1,\ldots, x_{k-1}, j, x_{k+1},\ldots, x_n) \mid x_i = 1, 2,\ldots, l_i, i \neq k\}$$

在 $D(l_i) - \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, $i = s+1, s+2,\ldots, n$ 中分別固定一坐標 j_i ,

考慮 $\bigcap_{k=s+1}^{n} D_{k^{\perp}(j_k)}\left(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_k\right)$ 所形成 s 維子方格 $\prod_{i=1}^{s} D(l_i)$ ，

因分別平行第 1~s 維度所切成之獨立的一維子方格 $D(l_i)$ 皆滿足 $T(K_1^{2w_i+1})$ 、$T(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇

由歸納假設知

可找到 P 值 $P_s(x_1, x_2,\ldots, x_s)$使 $\prod_{i=1}^{s}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 中所有暗格變亮

又由二.(二).知

$D(l_i)$, $i = s+1, s+2,\ldots, n$ 中可找到 P 值 $P_i(x_i)$

使 $C(j_i)=1$ 且 $C(x_i) = 0$, $x_i\in D(l_i)-\{j_i\}$

由引理三

在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中定 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv P_s(x_1, x_2,\ldots, x_s)\cdot \prod_{i=s+1}^{n} P_i(x_i) \pmod 2$

可使$\{(x_1, x_2,\ldots, x_s, j_{s+1}, j_{s+2},\ldots, j_n) \mid (x_1, x_2,\ldots, x_s)\in \prod_{i=1}^{s}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})\}$中所有暗格變亮且其他格狀態不變。逐一調整 j_i，$i = s+1, s+2,\ldots, n$，直到 $D(l_i)-\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$ 中坐標都固定過。

(3).全部 $x_i\in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, $i =1, 2,\ldots, n$：

(a).依序固定 $r =1, 2,\ldots, l_n'$

依序對 $K_r^{2w_n+1}-\{r\}$ 中每一 j_r 操作以下動作：

由二.(三).知 $D(l_n)$中可找到 P 值 $P_n(x_n)$

使 $C(r)=1$, $C(j_r) = 1$ 且 $C(x_n) = 0$, $x_n\in D(l_n)-\{r, j_r\}$

又因 $D_{n^\perp(j_r)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 所形成的$(n-1)$維子方格 $\prod_{i=1}^{n-1} D(l_i)$ 分別平行第 1~$(n-1)$維度所切成之獨立一維子方格 $D(l_i)$ 皆滿足 $T(K_1^{2w_i+1})$ 、$T(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇

由歸納假設知

可找到 P 值 $P_{n-1}(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$，使 $D_{n^\perp(j_r)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 所形成的$(n-1)$維子方格 $\prod_{i=1}^{n-1} D(l_i)$ 中 $\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$的所有暗格變亮

由引理三

在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中定 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv P_{n-1}(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})P_n(x_n) \pmod 2$

可使 $D_{n^\perp(j_r)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 中前$(n-1)$維坐標在 $\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 中的所有暗格變亮，且 $D_{n^\perp(r)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 中前$(n-1)$維坐標與變亮暗格相同的格子的狀態亦被改變一次。即會將 $D_{n^\perp(j_r)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 中前$(n-1)$維坐標在 $\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$

的所有暗格加到 $D_{n^{\perp}(r)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 上，但兩個暗格加在一起又變亮格。此動作對每一 $D_{i(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)}(l_i)$, i =1, 2,…, n 而言依然繼續保有 $T(K_1^{2w_i+1})$ 、$T(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇。

(b).操作完(a).後，前(n–1)維坐標在 $\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 中的暗格只剩下第 n 維坐標 x_n =1~l_n' 可能還有。又因每一 $\mathrm{D}_{n(x_1,x_2\cdots x_{n-1})}(l_n)$ 保有 $T(K_1^{2w_n+1})$ 、$T(K_2^{2w_n+1})$ 、…、$T(K_{l_n'}^{2w_n+1})$ 同偶或同奇，

所以對每一 $(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})\in\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ ，

$\{(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}, j) \mid j =1, 2,\ldots, l_n'\}$中所有格子必全部亮或全部暗，

由二.(三).知 $D(l_n)$中可找到 P 值 $P_n(x_n)$使

$C(x_n)=1, x_n = 1, 2,\ldots, l_n'$ 且 $C(x_n) = 0$, $x_n \in D(l_n) -\{1, 2, \ldots, l_n'\}$

又此時 $D_{n^{\perp}(r)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_k)$ 所形成(n–1)維子方格 $\prod_{i=1}^{n-1} D(l_i)$ 分別平行第 1~(n–1)維度所切成之獨立一維子方格 $D(l_i)$ 皆滿足 $T(K_1^{2w_i+1})$ 、$T(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$T(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 同偶或同奇

由歸納假設知

可找到 P 值 $P_{n-1}(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$使 $\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 中所有暗格變亮

由引理三

在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中定 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv P_{n-1}(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})P_n(x_n) \pmod 2$

可使$\{(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}, x_n) \mid (x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})\in\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ ，$x_n =1, 2,\ldots, l_n'\}$

中的暗格全變亮，遂完成全區都變亮。

得證。

五、討論一維方格 $D(l_1)$ 下循環狀態數 g 任意的情形

我們規定格子每按一下，狀態值會依 1→ 2→…→ g–1→ 0→ 1→ 2→…不斷循環著，其中 0 表全亮狀態，也就是我們最後希望所有格子都達到的狀態。

由
$$\begin{cases} C(x_1) \equiv \sum_{k=-w_1}^{w_1} P(x_1+k) \\ C(x_1+1) \equiv \sum_{k=-w_1}^{w_1} P(x_1+1+k) \end{cases} \pmod g$$

相減得

(一).引理四： $\boxed{C(x_1+1)-C(x_1) \equiv P(x_1+w_1+1)-P(x_1-w_1) \pmod g}$

1.可看出 x_1 到 x_1+1 的 C 值改變量與 x_1-w_1 到 x_1+w_1+1 的 P 值改變量對模 g 同餘。所以在 $D(l_1)$ 中每格 C 值已知下，若某格的 P 值知道，則每跳動 $2w_1+1$ 格的 P 值都會知道。現同樣將所有格(含虛格)對模 $2w_1+1$ 進行分類，餘數同為 r 者歸成一類 $K_r^{2w_1+1}$，只要知道類中任一格的 P 值，即可知該類所有格的 P 值。

2.以下我們將觀察每個剩餘類中坐標由小到大，P 值改變量總和對模 g 的餘數，稱為剩餘類的轉換量。例如在 $g=5$ 下：

(1). K_1^9 中由小到大 P 值依序 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 0，改變 1 次，由 3 到 0。
轉換量 $=0-3\equiv 2 \pmod 5$。

(2). K_2^9 中由小到大 P 值依序 0, 0, 3, 3, 3, 3, 1, 1，改變 2 次，由 0 到 3，再由 3 到 1。轉換量 $=(3-0)+(1-3)\equiv 1 \pmod 5$。

3.剩餘類分三種：

(1).不含虛格：只要決定類中最小者的 P 值就可確定其他所有格的 P 值，所以此類 P 值有解。

(2).含前後虛格之一：類中最小或最大者之一為虛格，因虛格 P 值為 0，因此可確定其他所有格的 P 值，所以此類 P 值有解。

(3).同時含前後虛格：類中最小與最大者皆為虛格，所以 P 值皆 0。若轉換量不為 0 會矛盾，則此類 P 值無解；但若轉換量為 0 則符合，亦可確定其他所有格的 P 值，此時此類 P 值有解。

由上討論可知 $D(l_1)$ 有解的充要條件為同時含前後虛格的剩餘類之轉換量須為 0。

(二).單一初始暗格有無解判定

設初始暗格坐標 t_1, 狀態值前進 m 才會變全亮。若有解，須滿足 $C(t_1)=m$ 且 $C(x_1)=0$, $x_1\in D(l_1)-\{t_1\}$。因由 t_1-1 到 t_1 與 t_1 到 t_1+1 的 C 值改變量分別為 m 與 $g-m$，所以 P 值只有在 t_1-w_1-1 到 t_1+w_1 與 t_1-w_1 到 t_1+w_1+1 會分別有 m 與 $g-m$ 的改變量，即剩餘類中只有 $K_{t_1+w_1}^{2w_1+1}$ 與 $K_{t_1+w_1+1}^{2w_1+1}$ 會轉換一次且轉換量分別為 m 與 $g-m$。所以針對 l_1 與 t_1 討論：令 $l_1\equiv l_1' \pmod{2w_1+1}$ 且 $t_1\equiv t_1' \pmod{2w_1+1}$ ，其中 $1\le l_1', t_1' \le 2w_1+1$

1.當 $2\le l_1'\le w_1+1$ 時，同時含前後虛格的剩餘類為 $K_{w_1+2}^{2w_1+1}, K_{w_1+3}^{2w_1+1}, \ldots,\ K_{l_1'+w_1}^{2w_1+1}$

(1). $t_1' \in\{1 , 2 ,\ldots, l_1'\}$，上述至少一個剩餘類轉換量為 m 或 $g-m$，所以無解。

(2). $t_1' \notin\{1 , 2 ,\ldots, l_1'\}$，上述剩餘類轉換量皆 0，所以有解。

2.當 $w_1+1\le l_1'\le 2w_1$ 時，同時含前後虛格的剩餘類為 $K_{l_1'+1}^{2w_1+1}, K_{l_1'+2}^{2w_1+1}, \ldots,\ K_{2w_1+1}^{2w_1+1}$

(1). $t_1' \in\{ l_1'-w_1,\ l_1'-w_1+1, \ldots, w_1+1\}$，上述至少一個剩餘類轉換量為 m 或 $g-m$，所以無解。

(2). $t_1' \notin\{ l_1'-w_1,\ l_1'-w_1+1, \ldots, w_1+1\}$，上述剩餘類轉換量皆 0，所以有解。

3.當 $l_1'=1$, $2w_1+1$ 時，沒有同時含前後虛格的剩餘類，所以有解。

(三).數個初始暗格有無解判定

若 $K_r^{2w_1+1}$ 為同時含前後虛格的剩餘類，其坐標由小到大依序 $x_{r1}, x_{r2},\ldots, x_{rq}$，其中 $x_{ri} = x_{r(i-1)} + (2w_1+1)$。由引理四可列式：

$$\begin{cases} C(x_{r1}+w_1+1)-C(x_{r1}+w_1)\equiv P(x_{r2})-P(x_{r1}) \\ C(x_{r2}+w_1+1)-C(x_{r2}+w_1)\equiv P(x_{r3})-P(x_{r2}) \\ \qquad\cdots \\ C(x_{r(q-1)}+w_1+1)-C(x_{r(q-1)}+w_1)\equiv P(x_{rq})-P(x_{r(q-1)}) \end{cases} \pmod g$$

加總得 $\sum_{k=1}^{q-1} C(x_{rk}+w_1+1)-\sum_{k=1}^{q-1} C(x_{rk}+w_1)\equiv P(x_{rq})-P(x_{r1}) \pmod g$

若有解，因最小與最大坐標為虛格，P 值必 0，所以轉換量 $P(x_{rq}) - P(x_{r1}) = 0$

即須滿足 $\sum_{k=1}^{q-1} C(x_{rk}+w_1+1)-\sum_{k=1}^{q-1} C(x_{rk}+w_1)\equiv 0 \pmod g$ ①式

定義：$C(K_r^{2w_1+1}) = ($ $K_r^{2w_1+1}$ 中所有格變全亮所需的狀態值前進量之和)。

則①式可表成 $C(K_{r-w_1}^{2w_1+1}) - C(K_{r-w_1-1}^{2w_1+1})\equiv 0 \pmod g$

以下針對 l_1' 討論有解條件：

1.當 $2\le l_1'\le w_1+1$ 時， $K_{w_1+2}^{2w_1+1}, K_{w_1+3}^{2w_1+1},\ldots,$ $K_{l_1'+w_1}^{2w_1+1}$ 為同時含前後虛格的剩餘類，所以

$$\begin{cases} C(K_2^{2w_1+1})-C(K_1^{2w_1+1})\equiv 0 \\ C(K_3^{2w_1+1})-C(K_2^{2w_1+1})\equiv 0 \\ \qquad\cdots \\ C(K_{l_1'}^{2w_1+1})-C(K_{l_1'-1}^{2w_1+1})\equiv 0 \end{cases} \pmod g$$

$\Rightarrow C(K_1^{2w_1+1})$ 、$C(K_2^{2w_1+1})$ 、…、$C(K_{l_1'}^{2w_1+1})$ 對模 g 同餘。

2.當 $w_1+1\le l_1'\le 2w_1$ 時， $K_{l_1'+1}^{2w_1+1}, K_{l_1'+2}^{2w_1+1},\ldots,$ $K_{2w_1+1}^{2w_1+1}$ 為同時含前後虛格的剩餘類，所以

$$\begin{cases} C(K_{l_1'-w_1+1}^{2w_1+1})-C(K_{l_1'-w_1}^{2w_1+1})\equiv 0 \\ C(K_{l_1'-w_1+2}^{2w_1+1})-C(K_{l_1'-w_1+1}^{2w_1+1})\equiv 0 \\ \qquad\cdots \\ C(K_{w_1+1}^{2w_1+1})-C(K_{w_1}^{2w_1+1})\equiv 0 \end{cases} \pmod g$$

$\Rightarrow C(K_{l_1'-w_1}^{2w_1+1})$ 、$C(K_{l_1'-w_1+1}^{2w_1+1})$ 、…、$C(K_{w_1+1}^{2w_1+1})$ 對模 g 同餘。

3.當 $l_1'=1$, $2w_1+1$ 時，沒有同時含前後虛格的剩餘類，所以有解。

六、討論 n 維($n\ge 2$)方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 下循環狀態數 g 任意的情形

$$C(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv\sum_{k_1=-w_1}^{w_1}\sum_{k_2=-w_2}^{w_2}\cdots\sum_{k_n=-w_n}^{w_n}P(x_1+k_1,x_2+k_2,\cdots,x_n+k_n)\pmod g$$

(一).單一初始暗格有無解判定

設初始暗格坐標$(t_1, t_2,\ldots, t_n)$，狀態值前進 m 才會變全亮。若有解，則須使 $C(t_1, t_2,\ldots, t_n) = m$ 且 $C(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0$, $(x_1 , x_2 ,\ldots, x_n)\in\prod_{i=1}^{n}D(l_i)-\{(t_1, t_2,\ldots, t_n)\}$。

以下針對 l_i 與 t_i 討論：

令 $l_i\equiv l_i'\pmod{2w_i+1}$ 且 $t_i\equiv t_i'\pmod{2w_i+1}$ ，其中 $1\le l_i',t_i'\le 2w_i+1$, i =1, 2,…, n

1.當 i =1, 2,…, n 之中有一滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\ldots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\}\end{cases}$ 時，無解。
2.當 i =1, 2,…, n 皆不滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\ldots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\}\end{cases}$ 時，有解。

[證明無解情形 1.]：

不失一般性，設 $i = n$ 滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\ldots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\}\end{cases}$

定義

$$C_{n^\perp}(x_1,x_2,...,x_n)\equiv\sum_{k_1=-w_1}^{w_1}\sum_{k_2=-w_2}^{w_2}\cdots\sum_{k_{n-1}=-w_{n-1}}^{w_{n-1}}P(x_1+k_1,x_2+k_2,...,x_{n-1}+k_{n-1},x_n)\pmod g$$

則 $C(t_1,t_2,...,t_{n-1},x_n)\equiv\sum_{k=-w_n}^{w_n}C_{n^\perp}(t_1,t_2,...,t_{n-1},x_n+k)\pmod g$

考慮一維方格 $D(l_n)$

令 $C(x_n) = C(t_1, t_2,\ldots, t_{n-1}, x_n)$，$x_n = 1, 2,\ldots, l_n$

則 $C_{n^\perp}(t_1, t_2,\ldots, t_{n-1}, x_n) = P(x_n)$，$x_n = -(w_n-1), -(w_n-2), \ldots , l_n + w_n$

又 $\begin{cases}C(t_n)=C(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},t_n)=m\\ C(x_n)=C(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},x_n)=0,\ \ x_n\in D(l_n)-\{t_n\}\end{cases}$

所以由五.(二).知

在 $i = n$ 滿足 $\begin{cases}2\le l_i'\le w_i+1\\ t_i'\in\{1,2,\ldots,l_i'\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_i+1\le l_i'\le 2w_i\\ t_i'\in\{l_i'-w_i,l_i'-w_i+1,\ldots,w_i+1\}\end{cases}$ 下

$D(l_n)$的 $P(x_n)$無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $C_{n^{\perp}}(t_1, t_2,\ldots, t_{n-1}, x_n)$無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $P(t_1+k_1, t_2+k_2 ,\ldots, t_{n-1}+k_{n-1} , x_n), k_i = -w_i ,\ldots, w_i , i =1, 2, \ldots, n-1$ 中至少有一無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 無解

得證。

接下來先放入一引理。

引理五：

$1\le s < n$

若 $\prod_{i=1}^{s} D(l_i)$ 中各格 P 值 $P_s(x_1, x_2,\ldots, x_s), x_i =1, 2,\ldots, l_i , i =1, 2,\ldots, s$ 會使各格 C 值為 $C_s(x_1, x_2,\ldots, x_s), x_i =1, 2,\ldots, l_i , i =1, 2,\ldots, s$

又 $D(l_i), i = s+1, s+2,\ldots, n$ 中各格 P 值 $P_i (x_i), x_i =1, 2,\ldots, l_i$ 會使各格 C 值為 $C_i (x_i), x_i =1, 2,\ldots, l_i$

則 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中各格 P 值定為 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv P_s(x_1, x_2,\ldots, x_s)\cdot \prod_{i=s+1}^{n} P_i(x_i) \pmod g$

會使各格 C 值 $C(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv C_s(x_1, x_2,\ldots, x_s)\cdot \prod_{i=s+1}^{n} C_i(x_i) \pmod g$

[證明]：仿引理三，將(mod 2)改成(mod g)即可證出。

[證明有解情形 2.]：

考慮 n 個一維方格 $D(l_i)$, $i = 1, 2,\ldots, n$

因所有 i 不滿足 $\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i + 1 \\ t_i' \in \{1, 2, \ldots, l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i + 1 \le l_i' \le 2w_i \\ t_i' \in \{l_i' - w_i, l_i' - w_i + 1, \ldots, w_i + 1\} \end{cases}$

由五.(二).知

$D(l_1)$中可找到 P 值 $P_1(x_1)$使 $C(t_1)= m$ 且 $C(x_1) = 0$, $x_1\in D(l_1)-\{t_1\}$

$D(l_i)$中可找到 P 值 $P_i(x_i)$使 $C(t_i)=1$ 且 $C(x_i) = 0$, $x_i\in D(l_i)-\{t_i\}, i =2, 3,\ldots, n$

由引理五

在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中定 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i) \pmod g$

可使

$C(t_1, t_2,\ldots, t_n) = m$ 且 $C(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0$, $(x_1 , x_2 ,\ldots, x_n)\in \prod_{i=1}^{n} D(l_i) -\{(t_1, t_2,\ldots, t_n)\}$

得證。

(二).數個初始暗格有無解判定

將 n 維方格 $\prod_{i=1}^{n}\mathrm{D}(l_i)$ 平行第 k 維度(k =1, 2,…, n)方向切成($\prod_{i=1}^{n} l_i \div l_k$)個各自獨立的一維子方格 $D(l_k)$，以

$D_{k(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)}(l_k)$ ={(x_1,…, x_{k-1}, j, x_{k+1},…, x_n)｜j =1, 2, …, l_k}表之。

1.若每一 $D_{i(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)}(l_i)$ 滿足

(1).當 $2 \le l_i' \le w_i + 1$ 時，$C(K_1^{2w_i+1})$ 、$C(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$C(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 對模 g 同餘

(2).當 $w_i + 1 \le l_i' \le 2w_i$ 時，$C(K_{l_i'-w_i}^{2w_i+1})$ 、$C(K_{l_i'-w_i+1}^{2w_i+1})$ 、…、$C(K_{w_i+1}^{2w_i+1})$ 對模 g 同餘

(3).當 l_i' =1 , $2w_i$ +1 時，

則有解。

2.若有一 $D_{i(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)}(l_i)$ 不滿足 1.中條件(1).~(3).則無解。

[證明無解情形 2.]：

不失一般性，設 $D_{n(1,2,\cdots,n-1)}(l_n)$ 不滿足 1.中條件(1).~(3).

考慮一維方格 $D(l_n)$

令 $C(x_n) = C(1, 2,\ldots, n-1, x_n)$，$x_n = 1, 2,\ldots, l_n$

則 $C_{n^{\perp}}(1, 2,\ldots, n-1, x_n) = P(x_n)$，$x_n = -(w_n-1), -(w_n-2), \ldots , l_n + w_n$

因 $D_{n(1,2,\cdots,n-1)}(l_n)$ 不滿足 1.中條件(1).~(3).，由五.(三).知

$D(l_n)$中 $P(x_n)$無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $C_{n^{\perp}}(1, 2,\ldots, n-1, x_n)$無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中 $P(1+k_1, 2+k_2,\ldots, (n-1)+k_{n-1}, x_n)$, $k_i = -w_i ,\ldots,w_i$, i =1, 2,…, n–1 中至少有一無解

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 無解

得證。

[證明有解情形 1.]：

不失一般性，設皆滿足條件(1).

對維度作數學歸納法

1.當維度 1 時，由五.(三).知成立

2.設維度比 n 小皆成立

當維度為 n 時

將 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中的格子(x_1, x_2,…, x_n)分成三個區域：

(1).沒有 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, i =1, 2,…, n：

此區暗格可由六.(一).2.結論，一次將一個變全亮，直到全區都變全亮。

(2).部分 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, i =1, 2,…, n：

(a).依序固定 s =1, 2,…, n−1，再由{1, 2,…, n}中依序選出 $e_1, e_2,\ldots, e_s$ 等 s 個相異元素，一次將一個區塊

$$\{ (x_1, x_2,\ldots, x_n) \mid x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \in \{e_1, e_2,\ldots, e_s\}$$

$$\text{且 } x_i \notin \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \notin \{e_1, e_2,\ldots, e_s\} \}$$

中所有暗格變全亮，全區就都變全亮。

(b).不失一般性，說明區塊

$$\{ (x_1, x_2,\ldots, x_n) \mid x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \in \{1, 2,\ldots, s\}$$

$$\text{且 } x_i \notin \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}, i \in \{s+1, s+2,\ldots, n\} \}$$

的處理過程：

在 $D(l_i) - \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, $i = s+1, s+2,\ldots, n$ 中固定一坐標 j_i

考慮 $\bigcap_{k=s+1}^{n} D_{k^{\perp}(j_k)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_k)$ 所形成 s 維子方格 $\prod_{i=1}^{s} D(l_i)$ ，

因分別平行第 1~s 維度所切成之獨立的一維子方格 $D(l_i)$ 皆滿足

$C(K_1^{2w_i+1})$ 、$C(K_2^{2w_i+1})$ 、…、$C(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 對模 g 同餘

由歸納假設知

可找到 P 值 $P_s(x_1, x_2,\ldots, x_s)$使 $\prod_{i=1}^{s}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 中所有暗格變全亮

又由五.(二).知

$D(l_i)$, $i = s+1, s+2,\ldots, n$ 中可找到 P 值 $P_i(x_i)$

使 $C(j_i)$=1 且 $C(x_i) = 0$, $x_i \in D(l_i) - \{j_i\}$

由引理五

在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中定 $P(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv P_s(x_1, x_2,\ldots, x_s) \cdot \prod_{i=s+1}^{n} P_i(x_i) \pmod g$

可使$\{(x_1, x_2,\ldots, x_s, j_{s+1}, j_{s+2},\ldots, j_n) \mid (x_1, x_2,\ldots, x_s) \in \prod_{i=1}^{s}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}) \}$所有暗格變全亮且其他格狀態值不變。逐一調整 j_i，$i = s+1, s+2,\ldots, n$，直到 $D(l_i) - \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$ 中坐標都固定過。

(3).全部 $x_i \in \bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1}$, i =1, 2,…, n：

(a).設 $\bigcup_{r=1}^{l_n'} K_r^{2w_n+1}$ 中元素由小到大依序 $j_1, j_2,\ldots, j_q$，

依序由 $\alpha = q, q-1, \ldots, l_n'$ 操作以下動作：

因 $j_{\alpha-l_n'+1}$ $j_{\alpha-l_n'+2}, \ldots, j_\alpha$ (共 l_n' 個)分別在不同的 $K_r^{2w_n+1}$, $r=1, 2, \ldots, l_n'$ 中

由五.(三).知

$D(l_n)$中可找到 P 值 $P_n(x_n)$使 $C(j_k)=1$, $k=\alpha-l_n'+1, \alpha-l_n'+2, \ldots, \alpha$

且 $C(x_n)=0$, $x_n \in D(l_n)-\{j_{\alpha-l_n'+1}\ j_{\alpha-l_n'+2}, \ldots, j_\alpha\}$

又因 $D_{n^\perp(j_\alpha)}(\prod_{i=1}^{n} l_i/l_n)$ 所形成的$(n-1)$維子方格 $\prod_{i=1}^{n-1} D(l_i)$ 分別平行第 1~$(n-1)$維度所切成之獨立一維子方格 $D(l_i)$ 皆滿足 $C(K_1^{2w_i+1})$ 、$C(K_2^{2w_i+1})$ 、…、 $C(K_{l_i'}^{2w_i+1})$ 對模 g 同餘

由歸納假設知

可找到 P 值 $P_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$使 $D_{n^\perp(j_\alpha)}(\prod_{i=1}^{n} l_i/l_n)$ 所形成的$(n-1)$維子方格中 $\prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 的所有暗格變全亮

在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中定 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) P_n(x_n) \pmod g$

可使$\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, j_\alpha) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})\}$中的暗格皆變全亮，且每一$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, j_\alpha)$的狀態值前進量同時加到 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, j_k)$, $k=\alpha-l_n'+1, \alpha-l_n'+2, \ldots, \alpha-1$。此時對每個一維子方格 $\mathrm{D}_{i(x_1,\cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)}(l_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$ 而言依然保有 $C(K_1^{2w_n+1})$ 、$C(K_2^{2w_n+1})$ 、…、 $C(K_{l_n'}^{2w_n+1})$ 對模 g 同餘。

(b).操作完(a).後，

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, j_k) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 且 $k=l_n', l_n'+1, \ldots, q\}$

中的暗格皆變全亮，所以

每一 $D_{n(x_1, x_2 \cdots x_{n-1})}(l_n)$ 皆滿足 $C(K_{l_n'}^{2w_n+1}) \equiv 0 \pmod g$

又此時保有 $C(K_1^{2w_n+1})$ 、$C(K_2^{2w_n+1})$ 、…、 $C(K_{l_n'}^{2w_n+1})$ 對模 g 同餘，所以剩下的

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, j_k) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1}(\bigcup_{r=1}^{l_i'} K_r^{2w_i+1})$ 且 $k=1, 2, \ldots, l_n'-1\}$

中的暗格亦皆變全亮。遂完成全區都變全亮。

得證。

七、n 維$(n \in N)$ g 循環狀態下有解時之解法數 S_n^g 計算

(一).計算 S_1^g

因為按下格子的先後不會影響結果，所以我們只考慮每格的 P 值有幾種不同填法。由五.(一).3.的討論知，只要填入不含虛格之剩餘類中最小者的 P 值就可確定所有格的 P 值，而它們受條件

$$\sum_{k=1}^{2w_1+1} P(k) \equiv C\left(w_1+1\right) \pmod g \text{ 為已知}$$

的限制，所以

(可自由決定填入 0, 1,...., (g−1)的格數)
= (不含虛格的剩餘類數) −1
= 2w_1+1− (含虛格類數) −1
= (同時含前後虛格類數 Δ_1)

又由五. (二).的討論：

1.當 $2 \le l_1' \le w_1+1$時，同時含前後虛格的剩餘類為 $K_{w_1+2}^{2w_1+1}, K_{w_1+3}^{2w_1+1}, \ldots, K_{l_1'+w_1}^{2w_1+1}$ ，有 $l_1'-1$ 個。

2.當 $w_1+1 \le l_1' \le 2w_1$時，同時含前後虛格的剩餘類為 $K_{l_1'+1}^{2w_1+1}, K_{l_1'+2}^{2w_1+1}, \ldots, K_{2w_1+1}^{2w_1+1}$ ，有 $2w_1+1-l'$ 個。

3.當 l_1' =1 , 2w_1+1 時，同時含前後虛格的剩餘類有 0 個。

知同時含前後虛格的剩餘類數 $\Delta_1 = w_1 - \left| l_1' - (w_1+1) \right|$ 。所以 $S_1 = g^{\Delta_1}$ 。

(二).計算 S_n^g (n≥2)

只要知道 $D_{n^\perp(k)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 上每格之 $C_{n^\perp}$ 值，就可以求出 $D_{n^\perp(k)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 的 P 值有幾組解。而 $D_{n^\perp(k)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 上每格之 $C_{n^\perp}$ 值區分成：

1.已被確定： $D_{n^\perp(k)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 上 P 值填法數有 S_{n-1}^g 種。

2.可自由決定：有解時，此時 $D_{n^\perp(k)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 上每格 P 值可自由決定填 0~(g−1)，

所以填法數有 $g^{(\prod_{i=1}^{n} l_i)/l_n}$ 種。

以下求出 l_n 個 $D_{n^\perp(k)}(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)$ 中屬於上述情形 2 者個數：

只要確定 $D_{n(w_1+1, w_2+1, \cdots, w_n+1)}(l_n)$ 中各格有幾格 $C_{n^\perp}$ 是可自由填入 0~(g−1)即可，
考慮一維方格 $D(l_n)$

令 $C(x_n) = C(w_1+1, w_2+1, \cdots, w_{n-1}+1, x_n)$，$x_n$ = 1, 2,…, l_n 為已知

則 $C_{n^\perp}(w_1+1, w_2+1, ..., w_n+1, x_n) = P(x_n)$，$x_n = -(w_n-1), -(w_n-2), \ldots, l_n + w_n$
所以

($D_{n(w_1+1, w_2+1, \cdots, w_n+1)}(l_n)$ 中各格 $C_{n^\perp}$ 可自由填入 0~(g−1)的個數)

$= ($ $D(l_n)$中 P 值可自由決定填入 0~(g–1)的格數)

$=\Delta_n$

其中 $\Delta_n = w_n - \left| l_n' - (w_n + 1) \right|$ 。所以 $S_n^g = (S_{n-1}^g)^{l_n - \Delta_n} \cdot (g^{(\prod_{i=1}^{n} l_i / l_n)})^{\Delta_n}$ 。

下證 $S_n^g = g^{[\prod_{i=1}^{n} l_i - \prod_{i=1}^{n} (l_i - \Delta_i)]}$ ：

[證明]：對 n 作數學歸納法

(1).n = 1 時， $S_1^g = g^{l_1 - (l_1 - \Delta_1)} = g^{\Delta_1}$ 成立

(2).設 $n = k$ 時成立，則 $S_k^g = g^{[\prod_{i=1}^{k} l_i - \prod_{i=1}^{k} (l_i - \Delta_i)]}$

當 $n = k + 1$ 時，

$$
\begin{aligned}
S_{k+1}^g &= (S_k^g)^{l_{k+1} - \Delta_{k+1}} \cdot (g^{(\prod_{i=1}^{k+1} l_i / l_{k+1})})^{\Delta_{k+1}} \\
&= \left(g^{[\prod_{i=1}^{k} l_i - \prod_{i=1}^{k} (l_i - \Delta_i)]} \right)^{l_{k+1} - \Delta_{k+1}} \cdot (g^{(\prod_{i=1}^{k+1} l_i / l_{k+1})})^{\Delta_{k+1}} \\
&= g^{\prod_{i=1}^{k+1} l_i - (\prod_{i=1}^{k} l_i)\Delta_{k+1} - [\prod_{i=1}^{k} (l_i - \Delta_i)] l_{k+1} + [\prod_{i=1}^{k} (l_i - \Delta_i)]\Delta_{k+1} + (\prod_{i=1}^{k} l_i)\Delta_{k+1}} \\
&= g^{\prod_{i=1}^{k+1} l_i - l_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} (l_i - \Delta_i) + \Delta_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} (l_i - \Delta_i)} \\
&= g^{\prod_{i=1}^{k+1} l_i - \prod_{i=1}^{k} (l_i - \Delta_i) \cdot (l_{k+1} - \Delta_{k+1})} \\
&= g^{\prod_{i=1}^{k+1} l_i - \prod_{i=1}^{k+1} (l_i - \Delta_i)}
\end{aligned}
$$

得證。

伍、結論

一、n 維方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ (循環狀態數 2)：

先令 $l_i \equiv l_i' \pmod{2w_i + 1}$ ，其中 $1 \le l_i' \le 2w_i + 1$, i =1, 2,…, n

(一).單一初始暗格(坐標(t_1, t_2,…, t_n))有無解判定：

令 $t_i \equiv t_i' \pmod{2w_i + 1}$ ，其中 $1 \le t_i' \le 2w_i + 1$, i =1, 2,…, n

條件(A)： $\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i + 1 \\ t_i' \in \{1, 2, \ldots, l_i'\} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w_i + 1 \le l_i' \le 2w_i \\ t_i' \in \{l_i' - w_i, l_i' - w_i + 1, \ldots, w_i + 1\} \end{cases}$

1.有一 i 滿足條件(A)時，無解。

2.每一 i 不滿足條件(A)時，有解。

(二).數個初始暗格有無解判定：

先將 n 維方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 平行第 k 維度(k =1, 2,…, n)方向切成($\prod_{i=1}^{n} l_i \div l_k$)個各自獨立的一維子方格 $D(l_i)$。

條件(B)：$\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i + 1 \\ T(K_1^{2w_i+1}), T(K_2^{2w_i+1}), \cdots, T(K_{l_i'}^{2w_i+1})\text{同偶或同奇} \end{cases}$

或$\begin{cases} w_i + 1 \le l_i' \le 2w_i \\ T(K_{l_i'-w_i}^{2w_i+1}), T(K_{l_i'-w_i+1}^{2w_i+1}), \cdots, T(K_{w_i+1}^{2w_i+1})\text{同偶或同奇} \end{cases}$

或 $l_i' = 1, 2w_i + 1$

其中 $K_r^{2w_i+1}$ ={x∈Z｜−(w_i−1)≤x≤ l_i + w_i 且 $x \equiv r$ (mod2w_i+1) }

$T(K_r^{2w_i+1}) = K_r^{2w_i+1}$ 中初始暗格的個數

1.有一 $D(l_i)$不滿足條件(B)時，無解。

2.每一 $D(l_i)$滿足條件(B)時，有解。

二、n 維方格 $\prod_{k=1}^{n} D(l_k)$ (循環狀態數 g)：

先令 $l_i \equiv l_i' (\bmod 2w_i + 1)$ ，其中 $1 \le l_i' \le 2w_i + 1$, i =1, 2,…, n

(一).單一初始暗格(坐標(t_1, t_2,…, t_n))有無解判定：

令 $t_i \equiv t_i' (\bmod 2w_i + 1)$ ，其中 $1 \le t_i' \le 2w_i + 1$, i =1, 2,…, n

1.有一 i 滿足條件(A)時，無解。

2.每一 i 不滿足條件(A)時，有解。

(二).數個初始暗格有無解判定：

先將 n 維方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 平行第 k 維度(k =1, 2,…, n)方向切成($\prod_{i=1}^{n} l_i \div l_k$)個各自獨立的一維子方格 $D(l_i)$。

條件(C)：$\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_i + 1 \\ C(K_1^{2w_i+1}), C(K_2^{2w_i+1}), \cdots, C(K_{l_i'}^{2w_i+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$

或$\begin{cases} w_i + 1 \le l_i' \le 2w_i \\ C(K_{l_i'-w_i}^{2w_i+1}), C(K_{l_i'-w_i+1}^{2w_i+1}), \cdots, C(K_{w_i+1}^{2w_i+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$

或 $l_i' = 1, 2w_i + 1$

其中 $C(K_r^{2w_i+1}) = K_r^{2w_i+1}$ 中所有格變全亮所需的狀態值前進量之和

1.有一 $D(l_i)$不滿足條件(C)時，無解。

2.每一 $D(l_i)$滿足條件(C)時，有解。

(三).有解時，無論初始暗格如何分布，解法數都只與 l_i , w_i 有關。

$$S_n^g = g^{[\prod_{i=1}^{n} l_i - \prod_{k=i}^{n} (l_i - \Delta_i)]}$$ ，其中 $\Delta_i = w_i - \left| l_i' - (w_i + 1) \right|$

陸、內容推廣

為使本研究更一般化，在 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 中，當我們按下格子 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 時，原先規定第 i 維度往兩邊各延伸 w_i 格所展開之 n 維長方體中所有格子的亮暗狀態皆被改變，現將兩邊的 w_i 改成不同的值，往坐標較小方向者為 w_{if}，往坐標較大方向者為 w_{ib}，即 $\{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \mid y_i \in Z, -w_{if} \le y_i \le w_{ib}, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 中所有格子皆被改變，得到 n 維方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 循環狀態數 g 之結論如下：(因受限篇幅無法詳列證明)

先令 $l_i \equiv l_i' (\bmod\, w_{if} + w_{ib} + 1)$ ，其中 $1 \le l_i' \le w_{if} + w_{ib} + 1$, i =1, 2,…, n

(一).單一初始暗格(坐標(t_1, t_2,…, t_n))有無解判定：

令 $t_i \equiv t_i' (\bmod\, w_{if} + w_{ib} + 1)$ ，其中 $1 \le t_i' \le w_{if} + w_{ib} + 1$, i =1, 2,…, n

條件(D)：

(1).當 $w_{if} > w_{ib}$ 時，

$$\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_{ib} + 1 \\ t_i' \in \{1, 2, \ldots, l_i'\} \end{cases} \text{或} \begin{cases} w_{ib} + 1 \le l_i' \le w_{if} + 1 \\ t_i' \in \{l_i' - w_{ib}, l_i' - w_{ib} + 1, \ldots, l_i'\} \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} w_{if} + 1 \le l_i' \le w_{if} + w_{ib} \\ t_i' \in \{l_i' - w_{ib}, l_i' - w_{ib} + 1, \ldots, w_{if} + 1\} \end{cases}$$

(2).當 $w_{ib} > w_{if}$ 時，

$$\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_{if} + 1 \\ t_i' \in \{1, 2, \ldots, l_i'\} \end{cases} \text{或} \begin{cases} w_{if} + 1 \le l_i' \le w_{ib} + 1 \\ t_i' \in \{1, 2, \ldots, w_{if} + 1\} \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} w_{ib} + 1 \le l_i' \le w_{if} + w_{ib} \\ t_i' \in \{l_i' - w_{ib}, l_i' - w_{ib} + 1, \ldots, w_{if} + 1\} \end{cases}$$

1.有一 i 滿足條件(D)時，無解。

2.每一 i 不滿足條件(D)時，有解。

(二).數個初始暗格有無解判定：

先將 n 維方格 $\prod_{i=1}^{n} D(l_i)$ 平行第 k 維度(k =1, 2,…, n)方向切成($\prod_{i=1}^{n} l_i \div l_k$)個各自獨立的一維子方格 $D(l_i)$。

條件(E)：

(1).當 $w_{if} > w_{ib}$ 時，

$$\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_{ib}+1 \\ C(K_1^{w_{if}+w_{ib}+1}), C(K_2^{w_{if}+w_{ib}+1}), \cdots, C(K_{l_i'}^{w_{if}+w_{ib}+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases} w_{ib}+1 \le l_i' \le w_{if}+1 \\ C(K_{l_i'-w_{ib}}^{w_{if}+w_{ib}+1}), C(K_{l_i'-w_{ib}+1}^{w_{if}+w_{ib}+1}), \cdots, C(K_{l_i'}^{w_{if}+w_{ib}+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases} w_{if}+1 \le l_i' \le w_{if}+w_{ib} \\ C(K_{l_i'-w_{ib}}^{w_{if}+w_{ib}+1}), C(K_{l_i'-w_{ib}+1}^{w_{if}+w_{ib}+1}), \cdots, C(K_{w_{if}+1}^{w_{if}+w_{ib}+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$$

或 $l_i' = 1, w_{if}+w_{ib}+1$

(2).當 $w_{ib} > w_{if}$ 時，

$$\begin{cases} 2 \le l_i' \le w_{if}+1 \\ C(K_1^{w_{if}+w_{ib}+1}), C(K_2^{w_{if}+w_{ib}+1}), \cdots, C(K_{l_i'}^{w_{if}+w_{ib}+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases} w_{if}+1 \le l_i' \le w_{ib}+1 \\ C(K_1^{w_{if}+w_{ib}+1}), C(K_2^{w_{if}+w_{ib}+1}), \cdots, C(K_{w_{if}+1}^{w_{if}+w_{ib}+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases} w_{ib}+1 \le l_i' \le w_{if}+w_{ib} \\ C(K_{l_i'-w_{ib}}^{w_{if}+w_{ib}+1}), C(K_{l_i'-w_{ib}+1}^{w_{if}+w_{ib}+1}), \cdots, C(K_{w_{if}+1}^{w_{if}+w_{ib}+1})\text{對模}g\text{同餘} \end{cases}$$

或 $l_i' = 1, w_{if}+w_{ib}+1$

其中 $K_r^{w_{if}+w_{ib}+1}$={$x \in$Z｜ $-(w_{if}-1) \le x \le\ l_i + w_{ib}$ 且 $x \equiv r \pmod{w_{if}+w_{ib}+1}$ }

$C(K_r^{w_{if}+w_{ib}+1}) = K_r^{w_{if}+w_{ib}+1}$ 中所有格變全亮所需的狀態值前進量之和

1.有一 $D(l_i)$不滿足條件(D)時，無解。

2.每一 $D(l_i)$皆滿足條件(D)時，有解。

(三).有解時，無論初始暗格如何分布，解法數都只與 l_i, w_{if}, w_{ib} 有關。

解法數 $S_n^{g}{}' = g^{[\prod_{i=1}^{n} l_i - \prod_{i=1}^{n}(l_i - \Delta_i')]}$，其中 $\Delta_i' = \dfrac{w_{ib} - \left|l_i' - (w_{ib}+1)\right| + w_{if} - \left|l_i' - (w_{if}+1)\right|}{2}$

柒、展望

雖然我們已在方格結構中各維度的長度、初始暗格位置、個數與點燈影響範圍上做深入研究和討論，但我們仍然希望能夠把點燈問題做得更加完整，甚至更加趨於生活化，例如：在不同方格中放入影響範圍與狀態數相異的燈泡、不同的點燈法、不同的方格結構形狀等等，並且針對各式各樣的狀況做出簡單易懂又有條理的數學模型，讓點燈問題的內容更加的豐富，也更加的有挑戰性，也讓原本一個簡單有趣的益智小遊戲，能夠更貼近我們的生活。

捌、參考資料

一、第 43 屆中小學科學展覽會《輕鬆解有趣的益智遊戲「點燈」》

二、第 49 屆中小學科學展覽會《迴蟲世代》

三、第 50 屆中小學科學展覽會《關燈遊戲》

四、蔡宗賢 (2011)。《提升點燈遊戲之拼圖法搜尋速度》。國立臺灣師範大學資訊工程研究所碩士論文，未出版，臺北市。

五、林有鈿 / 關燈遊戲(Lights Out)
http://ntuer.lib.ntue.edu.tw/bitstream/392430000/3376/1/%E5%8C%97%E5%8D%80%E5%9C%8B%E4%B8%AD13.pdf

六、怎樣來點燈 http://oddest.nc.hcc.edu.tw/math172.htm

七、演算法筆記 http://acm.nudt.edu.cn/~twcourse/Modeling.html

【評語】040411

本作品主要是在討論 n 維格盤上的點燈問題，依序針對一維、二維、n 維格盤，配合 2 循環和 g 循環分成 6 種情形去討論，其討論手法均十分類似，其實只要有 n 維格盤配合 g 循環就可以，其他的或可看為是研究的實驗過程。其實，本問題只是要討論在整數模 g 的算術下，解一組線性方程組就可以，因為本作品規定的點燈規則很整齊，方程組相對容易解，整體困難度不大。或許可以考慮有權重的點燈規則，例如，比較靠近被按的燈的格子其變化越大，這樣或許更能得到深刻的結果。