中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040410

「費」盡心思從巴斯卡三角形「碎」變

學校名稱：臺北市立成淵高級中學

作者：	指導老師：
高二 賴柔嘉 高二 楊念潔	林鳳美

關鍵詞：巴斯卡三角形、碎形、遞迴關係

摘要

此份報告主要是探討一個最優化問題，即是給定特定的移動方式，求出至少要多少操作，才能夠把棋子從某一種分布狀態調整成另外一種。而經過許多例子的嘗試，發現因為原本的問題不帶有數學的式子於其中，故沒辦法用上任何已知的工具進行解題，所以引入座標系以及排列矩陣，讓其含有許多數學式，能夠幫助問題具體化。接著給出好的上界以及得知最大值達成時滿足的條件後，便是開始進行一連串的構造，而這我採取「先猜後調」的策略，簡言之，就是先放置一種看似不錯的分布狀態，再利用討論出來的一些工具，對此狀態進行調整，同時用簡單之圖論方法觀察內部的數學結構，以獲得最優的構造之一。

壹、 研究動機

有一次在同學下棋的時候，突然靈機一動想到：要將現今的棋子如『八城堡』般分布狀態，經由給定的移動方式，要改變成預定好的另外一種分步狀態，至少需要多少次操作呢？然而這個問題過於複雜，遠遠超出我的能力範圍。但基於天生的好奇心，仍希望能夠得到一些結果，為此，我必須要將問題簡化，而我想到數個簡化的點：一是移動的方式規定只能用城堡般之直線移動，因為這種移動方式最好討論；二則是最終的分布狀態為不妨定為對角線(實際上，可以通過行列的交換將最終的分布狀態改成對角線分布)，這也是較易討論的緣故。之後，經過許久的努力，總算有一丁點的進展，把簡化的問題解決並稍加推廣，即我的研究目的一與二。

貳、研究目的

1. n 是一個正整數，在一個邊長為 n 的棋盤上面，我們把 n 個棋子放置於上，使得每一行、每一列恰好有一個棋子。把一個棋子移動水平或垂直方向至相鄰的方格之中，稱為一次操作。數個棋子在移動的過程中允許位於同一方格，而我們的目標是把所有的棋子移至其中一條對角線，並且該對角線上之每一個方格都恰好有一個棋子。

求出最小的數字 $A(n)$ 使得對於任何一種初始情況，我們至多只須要 $A(n)$ 次操作便能夠完成目標。

2. n 是一個正偶數，在一個邊長為 n 的棋盤上面，我們把 $2n$ 個棋子放置於上，使得每一行、每一列恰好有兩個棋子。把一個棋子移動水平或垂直方向至相鄰的方格之中，稱為一次操作。數個棋子在移動的過程中允許位於同一方格，而我們的目標是把所有的棋子移至成兩條完整的對角線，也就是這兩條對角線上之每一個方格都恰好有一個棋子。

求出最小的數字 $B(n)$ 使得對於任何一種初始情況，我們至多只須要 $B(n)$ 次操作便能夠完成目標。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、MathType5、Microsoft Office Word

肆、名詞解釋與符號定義

(一). 相關函數：

（1） $A(n)$：保證能夠完成第一個目標所需要之最小步數值。

（2） $B(n)$：保證能夠完成第二個目標所需要之最小步數值。

（3） $f_n(i,j)$：座標(i,j)之棋子到對角線之距離總和，即 $f_{n_1}(i,j)+f_{n_2}(i,j)$ 。

（4） $f_{n_1}(i,j)$：位於(i,j)上之棋子到第一條對角線所需要之最小步數值。

（5） $f_{n_2}(i,j)$：位於(i,j)上之棋子到第二條對角線所需要之最小步數值。

（6） S_σ ：給定排列函數σ ，則 $S_\sigma=\sum_{i=1}^{n} f_n(i,\sigma(i))$ 。

（7） S_{σ_1} ：給定排列函數σ ，則 $S_{\sigma_1}=\sum_{i=1}^{n} f_{n_1}(i,\sigma(i))$ 。

（8） S_{σ_2} ：給定排列函數σ ，則 $S_{\sigma_2}=\sum_{i=1}^{n} f_{n_2}(i,\sigma(i))$ 。

（9） $g_\sigma(n,m)$：表示總共有幾個i使得 $f_n(i,\sigma(i))\geq m$ 。

（10） $Card\{X\}$：表示集合 X 的總元素個數。

（11） $A_\sigma(n)$：表示$\max\{S_{\sigma_1},S_{\sigma_2}\}$ 。

（12） $UB_A(n)$：假設$n=4m+a$ ，則其表示 $A(4m+a)$ 的一個上界 $6m^2+3am+\frac{a^2-a}{2}$ ，但注意到它並非最小上界。

（13） $\mathrm{Re}\,v(\sigma)$：表示一個排列函數的逆序數對總數。

（14）$Com(a,b)$：為表示大小的函數，如果$a > b$，則$Com(a,b) = 1$；而其餘的情況，$Com(a,b) = 0$。

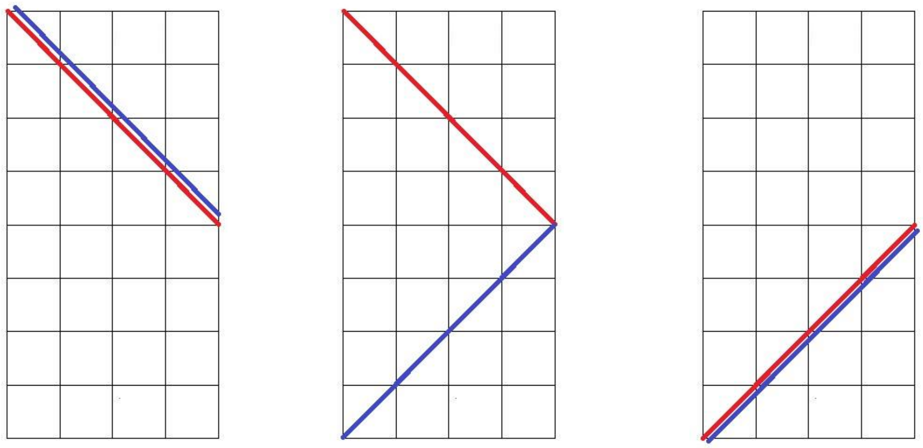
（15）$block(p)$：棋盤被兩條對角線分成的四個區塊，將其編號為$1,2,3,4$，那麼我們假想這四個區域為四個集合$block(1), block(2), block(3)$，以及$block(4)$，又為了方便，定義$block(p+4k) = block(p)$，$\forall k \in \square$。其中必須注意到，對角線上的格子是同時屬於$block(q), block(q+1)$，然而使用「工具」便會出現問題，所以我們要視情況而決定它屬於那一個$block$。

(二). 完整的對角線：

一條完整之對角線即是某一條對角線上有n個棋子，並且該對角線上得每一個格子恰好有一個棋子。

但注意到，2條完整的對角線不是某一條對角線上有$2n$個棋子，且該對角線上每個格子恰好有2的棋子。而是如右圖所示，共有3種方式形成兩條完整的對角線(見下面之示意圖)。

而k條完整對角線依此類推，共有$k+1$種方式可以形成之。



(三). 棋子到對角線的距離：

我們定義一個棋子到對角線的距離為此棋子所需之最小次操作步數，可以使得其位於對角線的某一個格子內。

(四). 良好矩陣：

良好矩陣$[P_{ij}]_{n \times n}$滿足，$P_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j)$上有棋子，$P_{ij} = 0 \Leftrightarrow (i,j)$沒有棋子

且有$\forall i \in \{1,2,...,n\}$，$\exists! j \ni P_{ij} = 1$，$\forall j \in \{1,2,...,n\}$，$\exists! i \ni P_{ij} = 1$

伍、研究過程

(一). 問題一之研究過程與結果：

步驟一：(求出 $A(n)$ 之上界)

不妨建立一個平面座標系，建立的方式如下：

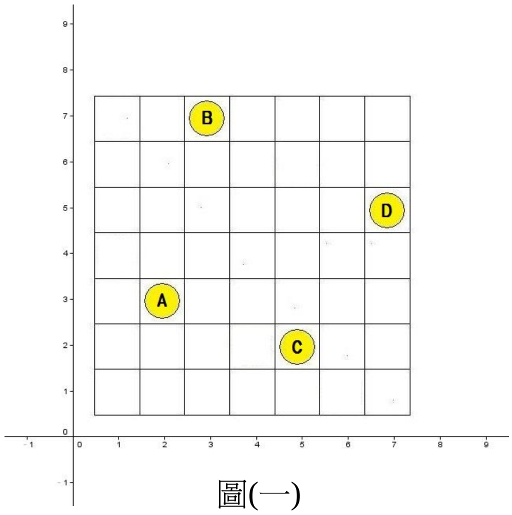
棋盤上的棋子座標為 (i,j)，其中 $1\le i,j\le n$

如圖(一)所示，舉例來說，A,B,C,D 的座標分別為 $(2,3),(3,7),(5,2),(7,5)$

接著記座標為 (i,j) 的棋子到兩條對角線的距離總和為 $f_n(i,j)$

［備注：$f_n(i,j)$ 即對每一個格子賦值］

而 $f_n(i,j)$ 的函數值趨勢如圖(二)



圖(一)

6	6	6	6	6	6	6
6	4	4	4	4	4	6
6	4	2	2	2	4	6
6	4	2	0	2	4	6
6	4	2	2	2	4	6
6	4	4	4	4	4	6
6	6	6	6	6	6	6

圖(二)

而為了能夠適當的用座標表示棋子的所在位置，因此引入排列函數以方便表達，舉例來說：

在右圖的擺法中

令 A,B,C,D,E,F,G,H,I

由左而右的座標分別為

$(1,\sigma(1)),(2,\sigma(2)),...,(9,\sigma(9))$

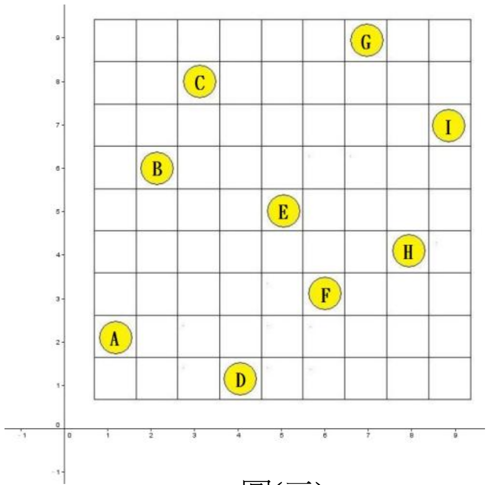
則與其真正之座標

$(1,2),(2,6),...,(9,7)$

比較便會得到

$\sigma=(2,6,8,1,5,3,9,4,7)$

這就是所要的排列函數！



圖(三)

$$\Pi=\{\sigma\mid\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\},\sigma(i)\ne\sigma(j),\forall i\ne j\}$$

對於 $\sigma\in\Pi$，定義函數 $g_\sigma(n,m)=\sum_{i=1}^{n}Card\{(i,\sigma(i))\mid f_n(i,\sigma(i))\ge m\}$

那麼會有以下的引理：

引理一： $g_\sigma(n,n-2k+1)\le 4k$ ，$\forall 0\le k\le\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$

證明：

$\forall L\in\{1,2,\ldots,n\}$

$\exists!\,i=L, i\in\{1,2,\ldots,n\}\wedge\exists!\,\sigma(i)=L, i\in\{1,2,\ldots,n\}$

$\because f_n(i,j)=n-2k+1\Leftrightarrow i=k,n+1-k\vee j=k,n+1-k$

$\therefore g_\sigma(n,n-2k+3)-g_\sigma(n,n-2k+1)\le 4$

$$\to g_\sigma(n,n-2k+1)\le\sum_{i=1}^{k}[g_\sigma(n,n-2i+3)-g_\sigma(n,n-2i+1)]=\sum_{i=1}^{k}(4)=4k$$

利用上述之引理可得到以下的定理：

定理一： $A(n)\le 6m^2+3am+\dfrac{a^2-a}{2}$ ，$n=4m+a$

證明：

令 $S_\sigma=\sum_{i=1}^{n}f_n(i,\sigma(i))$ ，則由 $g_\sigma(n,n-2k+1)\le 4k$ ，$\forall 0\le k\le\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ 可知

$$S_\sigma\le 4[(4m+a)-1]+4[(4m+a)-3]+\ldots+4[(2m+a)+1]+a[(2m+a)-1]$$

$$=4\times\frac{[(4m+a-1)+(2m+a+1)]\times[m]}{2}+a\times(2m+a-1)$$

$$=12m^2+6am+a^2-a$$

$\because A(n)\le\dfrac{S_\sigma}{2}$

$\therefore A(n)\le 6m^2+3am+\dfrac{a^2-a}{2}$

並且取 $UB_A(n)=6m^2+3am+\dfrac{a^2-a}{2}$

引理二： $A(n)\equiv 0(\operatorname{mod}2)$ ，$\forall n\in\mathbb{N}$

證明：

取一個矩陣 $[P_{ij}]_{n\times n}$ ，$P_{ij}=1\Leftrightarrow(i,j)$ 上有棋子，$P_{ij}=0\Leftrightarrow(i,j)$ 沒有棋子

若 $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ ，$\exists!\,j\ni P_{ij}=1$ ，$\forall j\in\{1,2,\ldots,n\}$ ，$\exists!\,i\ni P_{ij}=1$

則稱 $[P_{ij}]_{n\times n}$ 為一個良好矩陣，且記 $S_{\sigma1}=\sum_{1\le i,j\le n}[f_{n_1}(i,j)\times P_{ij}]$

如果 $P' = I_{st}P$（見圖(四)）

$$\to S'_{\sigma 1} = \sum_{1\le i,j\le n} [f_{n_1}(i,j)\times P'_{ij}]$$

$$= \sum_{1\le i,j\le n} [f_{n_1}(i,j)\times P_{ij}] - f_{n_1}(s,\sigma(s)) - f_{n_1}(t,\sigma(t)) + f_{n_1}(s,\sigma(t)) + f_{n_1}(t,\sigma(s))$$

但注意到 $f_{n_1}(i,j) = |j-i|$

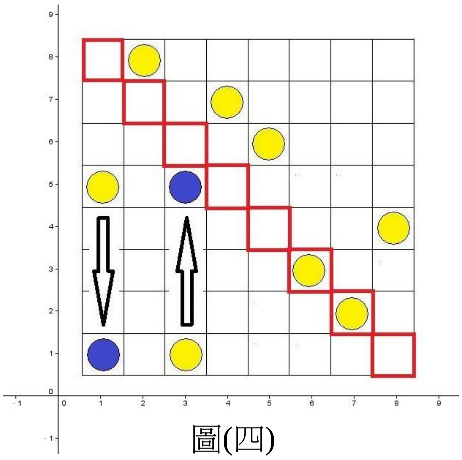
$$\to S'_{\sigma 1} \equiv S_{\sigma 1} - f_{n_1}(s,\sigma(s)) - f_{n_1}(t,\sigma(t)) + f_{n_1}(s,\sigma(t)) + f_{n_1}(t,\sigma(s))$$

$$\equiv S_1 - |\sigma(s)-s| - |\sigma(t)-t| + |\sigma(t)-s| + |\sigma(s)-t|$$

$$\equiv S_1 + (\sigma(s)-s) + (\sigma(t)-t) + (\sigma(t)-s) + (\sigma(s)-t)$$

$$\equiv S_1 \pmod 2$$

再者，對於任意良好矩陣，可藉著 I_n 與數個 I_{st} 相乘得到它。故給一個矩陣 $[P_{ij}]_{n\times n}$，必存在 c 個交換矩陣 I_{st} 使 $P = [\prod_{i=1}^{i=c}(I_{s_i t_i})]I_n \Rightarrow S'_{\sigma 1} \equiv S_{\sigma 1} \equiv 0 \pmod 2$



圖(四)

步驟二：(構造)

想法：

首先討論當 $n = 4m$ 時的情況，由於前些尋找出 $A(n)$ 的上界的方法，曾利用到 $A(n) \le \frac{S_\sigma}{2}$，所以 $A_\sigma(n)$ 最大值，應當要發生在 $S_{\sigma_1} = S_{\sigma_2}$，而若圖形呈現點對稱的話，就有 $S_{\sigma_1} = \sum f_{n_1}(i,\sigma(i)) = \sum f_{n_2}(i,\sigma(i)) = S_{\sigma_2}$。

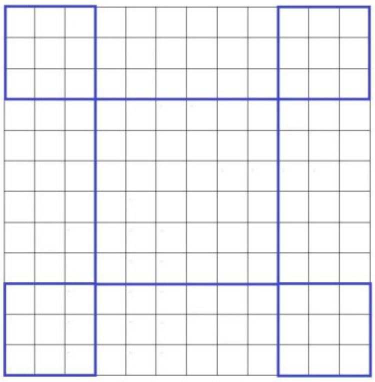
因此不妨一開始在兩條對角線所分割出來的四個區域內放相同數目的棋子且讓圖形呈現點對稱之情況 $\to !\exists i,j \in block(p) \ni \sigma(i)+\sigma(j) = n+1$

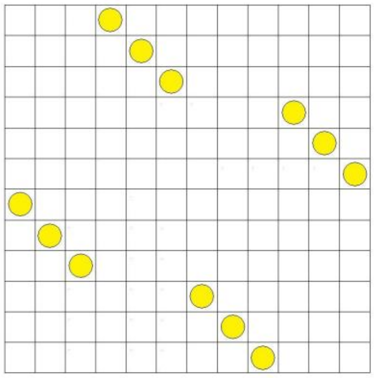
再者，必須要有 $g_\sigma(n, n-2k+1) = 4k$，$\forall k \le m$

若不然，將有 $A(n) < 6m^2$，因為中間放縮的不等式不會同時成立。

此限制亦即藍色框內部不能放置任何一個棋子(見圖(五))

而下就是最終構造的結果(見圖(六))：


圖(五)


圖(六)

此時所有棋子移至兩條對角線的距離總和是$6m^2$，恰好是達到$A(n)$的上界，也就代表完成了構造。然而其他的呢？像是：$4m+1$、$4m+2\cdots$。我們猜測圖形應該會跟先前所構造出來的兩個相似，因此，不妨現用之前的構造方式，再利用一些調整的操作，已完成所需要的構造。並且想到，前面的證明有使用到I_{st}進行兩個良好狀態的轉換，故討論I_{st}之s,t與$\sigma(s),\sigma(t)$的位置關係，然後看S_σ值經I_{st}作用之後變化的情況。

工具一：交換棋子

說明：

◎如下圖(七)所示，$(i,\sigma(i)),(j,\sigma(j))\in block(p)$

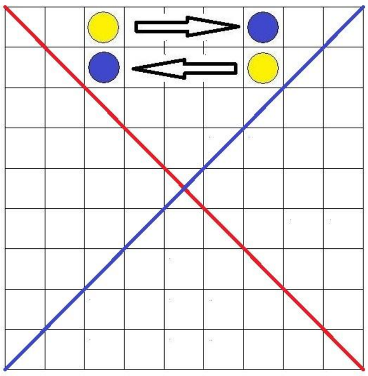
現在如果進行交換$(i,\sigma(i)),(j,\sigma(j))\to(i,\sigma(j),j,\sigma(i))$

此時 $f_{\sigma_1'}(n)=f_{\sigma_1}(n)-|\sigma(i)-i|-|\sigma(j)-j|+|\sigma(i)-\mathrm{j}|+|\sigma(\mathrm{j})-i|=f_{\sigma_1}(n)$

$$f_{\sigma_2'}(n)=f_{\sigma_2}(n)-|\sigma(i)-(\mathrm{n}+1\text{-}i)|-|\sigma(j)-(\mathrm{n}+1\text{-}j)|$$

$$+|\sigma(i)-(\mathrm{n}+1\text{-}\mathrm{j})|+|\sigma(\mathrm{j})-(\mathrm{n}+1\text{-}i)|=f_{\sigma_2}(n)$$

綜合以上，$f_{\sigma_1'}(n)=f_{\sigma_1}(n),f_{\sigma_2'}(n)=f_{\sigma_2}(n)$


圖(七)

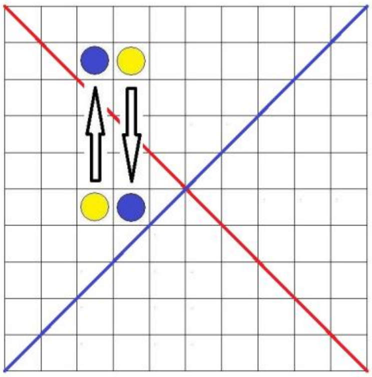
◎如下圖(八)所示，$(i,\sigma(i))\in block(p),(j,\sigma(j))\in block(p+1)$
要是進行交換 $(i,\sigma(i)),(j,\sigma(j))\to(i,\sigma(j),j,\sigma(i))$

則 $f_{\sigma_1'}(n)=f_{\sigma_1}(n)-|\sigma(i)-i|-|\sigma(j)-j|+|\sigma(i)-\mathrm{j}|+|\sigma(\mathrm{j})-i|\le(\ge)f_{\sigma_1}(n)$

$$f_{\sigma_2'}(n)=f_{\sigma_2}(n)-|\sigma(i)-(\mathrm{n}+1\text{-}i)|-|\sigma(j)-(\mathrm{n}+1\text{-}j)|$$

$$+|\sigma(i)-(\mathrm{n}+1\text{-j})|+|\sigma(\mathrm{j})-(\mathrm{n}+1\text{-}i)|\le(\ge)f_{\sigma_2}(n)$$

並且可知 $f_{\sigma_1'}(n)+f_{\sigma_2'}(n)<(>)f_{\sigma_1}(n)+f_{\sigma_2}(n)$（即不等號不會同時成立）



圖(八)

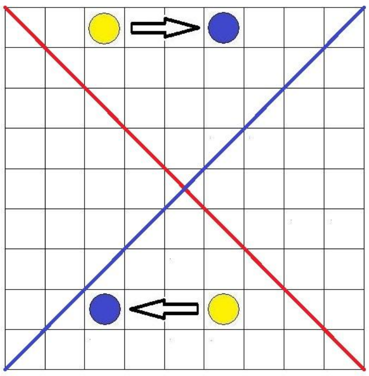
◎如下圖(九)所示，$(i,\sigma(i))\in block(p),(j,\sigma(j))\in block(p+2)$
如果進行交換 $(i,\sigma(i)),(j,\sigma(j))\to(i,\sigma(j),j,\sigma(i))$

則 $f_{\sigma_1'}(n)=f_{\sigma_1}(n)-|\sigma(i)-i|-|\sigma(j)-j|+|\sigma(i)-\mathrm{j}|+|\sigma(\mathrm{j})-i|\ge(\le)f_{\sigma_1}(n)$

$$f_{\sigma_2'}(n)=f_{\sigma_2}(n)-|\sigma(i)-(\mathrm{n}+1\text{-}i)|-|\sigma(j)-(\mathrm{n}+1\text{-}j)|$$

$$+|\sigma(i)-(\mathrm{n}+1\text{-j})|+|\sigma(\mathrm{j})-(\mathrm{n}+1\text{-}i)|\le(\ge)f_{\sigma_2}(n)$$

並且可知 $f_{\sigma_1'}(n)+f_{\sigma_2'}(n)=f_{\sigma_1}(n)+f_{\sigma_2}(n)$



圖(九)

以下是其他$n \neq 0 (\bmod 4)$的情況討論

1. $8k+1$型

模仿$8k$型的構造方式，也就是如下的分類：

$i = 1 \sim 2k, \sigma(i) = i + 2k$

$i = 2k+1 \sim 4k+1, \sigma(i) = i + 4k$

$i = 4k+2 \sim 6k+1, \sigma(i) = i - 4k - 1$

$i = 6k+2 \sim 8k+1, \sigma(i) = i - 2k - 1$

現在計算 $f_{\sigma_1}(8k+1), f_{\sigma_2}(8k+1)$

$$f_{\sigma_1}(8k+1) = 2k \times 2k + 4k \times (2k+1) + (4k+1) \times 2k + (2k+1) \times 2k$$

$$= 24k^2 + 8k$$

$$f_{\sigma_2}(8k+1) = 2 \times UB_A(8k+1) - f_{\sigma_1}(8k+1) = 24k^2 + 4k$$

然而實際上有 $A(8k+1) \leq 24k^2 + 6k$ ，所以我們想要微調σ ，盡可能使得

$\rightarrow f_{\sigma_1}(8k+1) = f_{\sigma_2}(8k+1) = 24k^2 + 6k$

利用到剛剛所敘述工具一「交換棋子」

可以發現到若$\sigma(2k+1) \rightarrow \sigma(2k+1) - 1, \sigma(8k+1) \rightarrow \sigma(8k+1) + 1$

則有以下的變化：

$$f_{\sigma_1'}(8k+1) = f_{\sigma_1}(8k+1) - 2$$

$$f_{\sigma_2'}(8k+1) = f_{\sigma_2}(8k+1) + 2$$

依照這個趨勢走向，可知能夠完成目標 $f_{\sigma_1}(8k+1) = f_{\sigma_2}(8k+1) = 24k^2 + 6k$

而這是最後的調整結果：

$i = 1 \sim 2k, \sigma(i) = i + 2k$

$i = 2k+1, \sigma(i) = i + 3k$

$i = 2k+2 \sim 4k+1, \sigma(i) = i + 4k$

$i = 4k+2 \sim 6k+1, \sigma(i) = i - 4k - 1$

$i = 6k+2 \sim 7k+1, \sigma(i) = i - 2k - 1$

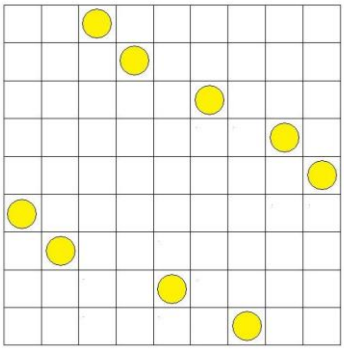
$i = 7k+2 \sim 8k+1, \sigma(i) = i - 2k$

此時 $f_{\sigma_1}(8k+1) = f_{\sigma_2}(8k+1) = 24k^2 + 6k$

故由 $A(8k+1) \geq \min\{f_{\sigma_1}(8k+1), f_{\sigma_2}(8k+1)\} = 24k^2 + 6k$

結合 $A(8k+1) \le 24k^2 + 6k$

$\Rightarrow A(8k+1) = 24k^2 + 6k$



圖(十)

2. $8k+2$ 型

一樣地模仿 $8k$ 型的構造方式，也就是如下的分類：

$i = 1 \sim 2k, \sigma(i) = i + 2k$

$i = 2k+1 \sim 4k+1, \sigma(i) = i + 4k + 1$

$i = 4k+2 \sim 6k+1, \sigma(i) = i - 4k - 1$

$i = 6k+2 \sim 8k+2, \sigma(i) = i - 2k - 1$

現在計算 $A_{\sigma_1}(8k+2), A_{\sigma_2}(8k+2)$

$$A_{\sigma_1}(8k+2) = 2k \times 2k + (4k+1) \times (2k+1) + (4k+1) \times 2k + (2k+1) \times (2k+1)$$

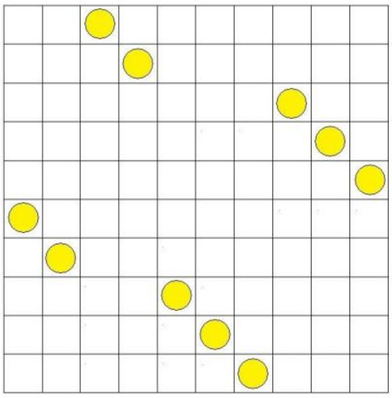
$$= 24k^2 + 12k + 2$$

$$A_{\sigma_2}(8k+2) = 2 \times UB_A(8k+2) - A_{\sigma_1}(8k+2) = 24k^2 + 12k$$

$$A(8k+1) \ge \min\{A_{\sigma_1}(8k+1), A_{\sigma_2}(8k+1)\} = 24k^2 + 12k$$

然而實際上有 $A(8k+2) \le 24k^2 + 12k$

$\Rightarrow A(8k+1) = 24k^2 + 12k$



圖(十一)

3. $8k+3$ 型

同樣模仿 $8k$ 型的構造方式，也就是如下的分類：

$i=1\sim 2k,\sigma(i)=i+2k$

$i=2k+1\sim 4k+2,\sigma(i)=i+4k+1$

$i=4k+3\sim 6k+2,\sigma(i)=i-4k-2$

$i=6k+3\sim 8k+3,\sigma(i)=i-2k-2$

現在計算 $A_{\sigma_1}(8k+3),A_{\sigma_2}(8k+3)$

$$A_{\sigma_1}(8k+3)=2k\times 2k+(4k+1)\times(2k+2)+(4k+2)\times 2k+(2k+2)\times(2k+1)$$

$$=24k^2+20k+4$$

$$A_{\sigma_2}(8k+3)=2\times UB_A(8k+3)-A_{\sigma_1}(8k+3)=24k^2+16k+2$$

然而實際上有 $A(8k+3)\le 24k^2+18k+2$

一樣使用「工具一」可知 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+3),A_{\sigma_2}(8k+3)\}=24k^2+18k+2$

而這是最後的調整結果：

$i=1\sim 2k,\sigma(i)=i+2k$

$i=2k+1,\sigma(i)=i+3k$

$i=2k+2\sim 4k+2,\sigma(i)=i+4k+1$

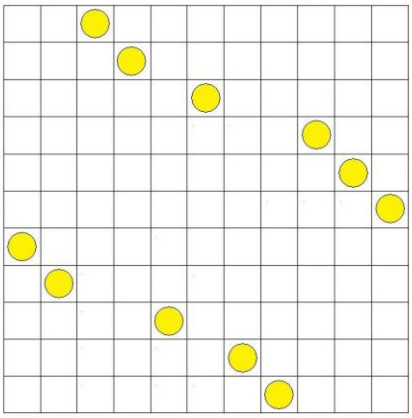
$i=4k+3\sim 6k+2,\sigma(i)=i-4k-2$

$i=6k+3\sim 7k+2,\sigma(i)=i-2k-2$

$i=7k+3\sim 8k+3,\sigma(i)=i-2k-1$

此時 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+3),A_{\sigma_2}(8k+3)\}=24k^2+18k+2$

$\Rightarrow A(8k+3)=24k^2+18k+2$



圖(十二)

5. $8k+5$ 型

再一次模仿 $8k$ 型的構造方式，也就是如下的分類：

$i=1\sim 2k+1, \sigma(i)=i+2k+1$

$i=2k+2\sim 4k+3, \sigma(i)=i+4k+2$

$i=4k+4\sim 6k+4, \sigma(i)=i-4k-3$

$i=6k+5\sim 8k+5, \sigma(i)=i-2k-2$

現在計算 $A_{\sigma_1}(8k+5), A_{\sigma_2}(8k+5)$

$$A_{\sigma_1}(8k+5)=(2k+1)\times(2k+1)+(4k+2)\times(2k+2)$$
$$+(4k+3)\times(2k+1)+(2k+2)\times(2k+1)$$
$$=24k^2+32k+10$$

$$A_{\sigma_2}(8k+5)=2\times UB_A(8k+5)-A_{\sigma_1}(8k+5)=24k^2+28k+8$$

然而實際上有 $A(8k+5)\le 24k^2+30k+8$

利用「工具一」可知 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+5), A_{\sigma_2}(8k+5)\}=24k^2+30k+8$

而這是最後的調整結果：

$i=1\sim 2k+1, \sigma(i)=i+2k+1$

$i=2k+2, \sigma(i)=i+3k+1$

$i=2k+3\sim 4k+3, \sigma(i)=i+4k+2$

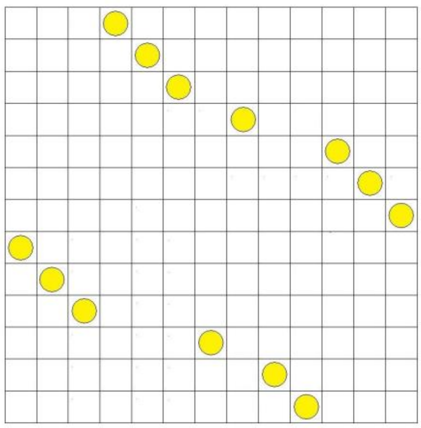
$i=4k+4\sim 6k+4, \sigma(i)=i-4k-3$

$i=6k+5\sim 7k+4, \sigma(i)=i-2k-2$

$i=7k+5\sim 8k+5, \sigma(i)=i-2k-1$

此時 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+5), A_{\sigma_2}(8k+5)\}=24k^2+30k+8$

$\Rightarrow A(8k+5)=24k^2+30k+8$



圖(十三)

6. $8k+6$ 型

再度模仿 $8k$ 型的構造方式，也就是如下的分類：

$i=1\sim 2k+1, \sigma(i)=i+2k+1$

$i=2k+2\sim 4k+3, \sigma(i)=i+4k+3$

$i=4k+4\sim 6k+4, \sigma(i)=i-4k-3$

$i=6k+5\sim 8k+6, \sigma(i)=i-2k-2$

現在計算 $A_{\sigma_1}(8k+6), A_{\sigma_2}(8k+6)$

$$A_{\sigma_1}(8k+6)=(2k+1)\times(2k+1)+(4k+3)\times(2k+2)$$
$$+(4k+3)\times(2k+1)+(2k+2)\times(2k+2)$$
$$=24k^2+36k+16$$

$$A_{\sigma_2}(8k+6)=2\times UB_A(8k+6)-A_{\sigma_1}(8k+6)=24k^2+36k+8$$

然而實際上有 $A(8k+6)\le 24k^2+36k+12$

利用「工具一」可知 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+6), A_{\sigma_2}(8k+6)\}=24k^2+32k+12$

而這是同之前方式所得到的調整結果：

$i=1\sim 2k+1, \sigma(i)=i+2k+1$

$i=2k+2, \sigma(i)=i+4k+1$

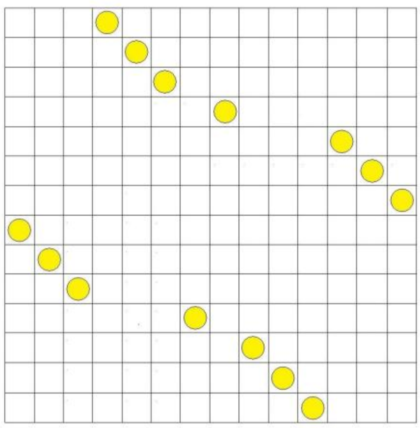
$i=2k+3\sim 4k+3, \sigma(i)=i+4k+3$

$i=4k+4\sim 6k+4, \sigma(i)=i-4k-3$

$i=6k+5\sim 8k+6, \sigma(i)=i-2k-1$

此時 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+6), A_{\sigma_2}(8k+6)\}=24k^2+36k+12$

$\Rightarrow A(8k+6)=24k^2+32k+12$



圖(十四)

7. $8k+7$ 型

最後一次模仿 $8k$ 型的構造方式，也就是如下的分類：

$i=1\sim 2k+1, \sigma(i)=i+2k+2$

$i=2k+2\sim 4k+3, \sigma(i)=i+4k+4$

$i=4k+4\sim 6k+5, \sigma(i)=i-4k-3$

$i=6k+6\sim 8k+7, \sigma(i)=i-2k-2$

現在計算 $A_{\sigma_1}(8k+7), A_{\sigma_2}(8k+7)$

$$\begin{aligned} A_{\sigma_1}(8k+7) &= (2k+2)\times(2k+1)+(4k+4)\times(2k+2) \\ &\quad +(4k+3)\times(2k+2)+(2k+2)\times(2k+2) \\ &= 24k^2+44k+20 \end{aligned}$$

$A_{\sigma_2}(8k+7)=2\times UB_A(8k+7)-A_{\sigma_1}(8k+7)=24k^2+40k+16$

然而實際上有 $A(8k+7)\le 24k^2+42k+18$

利用「工具一」可知 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+7), A_{\sigma_2}(8k+7)\}=24k^2+42k+18$

而這是最後的調整結果：

$i=1\sim 2k+1, \sigma(i)=i+2k+2$

$i=2k+2, \sigma(i)=i+3k+3$

$i=2k+3\sim 4k+3, \sigma(i)=i+4k+4$

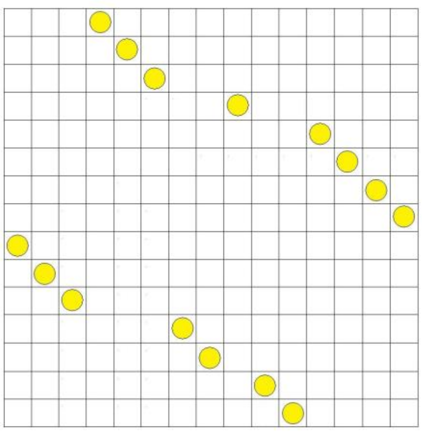
$i=4k+4\sim 6k+5, \sigma(i)=i-4k-3$

$i=6k+6\sim 7k+6, \sigma(i)=i-2k-2$

$i=7k+7\sim 8k+7, \sigma(i)=i-2k-1$

此時 $\min\{A_{\sigma_1}(8k+7), A_{\sigma_2}(8k+7)\}=24k^2+42k+18$

$\Rightarrow A(8k+7)=24k^2+42k+18$



圖(十五)

定理二： $A(n)=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}n^2\right]}{2}\right]$，$\forall n\in\mathbb{N}$

證明：

根據構造所得到的，可以發現到：

$A(8k)=24k^2=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k)^2\right]}{2}\right]$，$A(8k+1)=24k^2+6k=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k+1)^2\right]}{2}\right]$

$A(8k+2)=24k^2+12k=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k+2)^2\right]}{2}\right]$，$A(8k+3)=24k^2+18k+2=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k+3)^2\right]}{2}\right]$

$A(8k+4)=24k^2+24k+6=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k+4)^2\right]}{2}\right]$，$A(8k+5)=24k^2+30k+8=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k+5)^2\right]}{2}\right]$

$A(8k+6)=24k^2+36k+12=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k+6)^2\right]}{2}\right]$，$A(8k+7)=24k^2+42k+18=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}(8k+7)^2\right]}{2}\right]$

因為以上八種分類為正整數的一種分割方式

所以我們便得到 $A(n)=2\left[\dfrac{\left[\frac{3}{8}n^2\right]}{2}\right]$，$\forall n\in\mathbb{N}$

(二). 問題二之研究過程與結果：

步驟一：(求出 $B(n)$ 之上界)

以下先引入「工具二」：

工具二：移動一個棋子

說明：(見圖(十六))

◎要是移動棋子位於兩條對角線之間，且移動的過程之中並沒有越過對角線，那麼不難知其要到兩條對角線的距離改變量和為零。說明：

讓我們回顧前些的公式 $f_{n_1}(i,j)=|j-i|$， $f_{n_2}(i,j)=|j-(n+1-i)|$

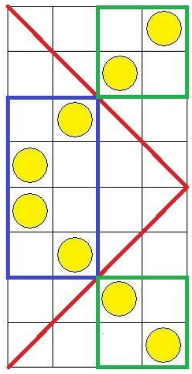
考慮移動方向是垂直方向即可，注意到因為移動過程中沒有越過對角線 $\to j\in[i,n+1-i]$，而 $j'\in[i,n+1-i]$。

$\Rightarrow f_{n_1}(i,j')-f_{n_1}(i,j)=f_{n_2}(i,j)-f_{n_2}(i,j')$

◎棋子移動過程中有越過對角線，那麼其要到兩條對角線的距離改變量差是為零。說明：

一樣利用前面的公式，注意到因為移動過程中沒有越過對角線 $\to j\in[i,n+1-i]$，而 $j'\notin[i,n+1-i]$。

$\Rightarrow f_{n_1}(i,j')-f_{n_1}(i,j)=f_{n_2}(i,j')-f_{n_2}(i,j)$



圖(十六)

定理三(1)： $B(n)\le 40k^2$ ， $n=8k$

證明：

首先我們注意到 $\min\{S_{\sigma_{1.1}},S_{\sigma_{2.2}}\}\le A(n)=24k^2$ ，接著我們欲得到 $S_{\sigma_{1.2}}\le 16k^2$

而此時必須利用到一個結果：$\sum|f_{4k_1}(i,j)\times P_{ij}|\le 8k^2$

說明：

假設 $\exists i,j,k \ni j<k, P_{ij}=1, P_{(i+1)k}=1$ ，考慮變換 $[P'_{ij}]_{2k\times 2k}=I_{i(i+1)}\times[P_{ij}]_{2k\times 2k}$

則有 $S'_{\sigma 1}-S_{\sigma 1}=\sum\limits_{1\le i,j\le n}[f_{n_1}(i,j)\times P'_{ij}]-\sum\limits_{1\le i,j\le n}[f_{n_1}(i,j)\times P_{ij}]$

$=-f_{n_1}(i,\sigma(i))-f_{n_1}(i+1,\sigma(i+1))+f_{n_1}(i,\sigma(i+1))+f_{n_1}(i+1,\sigma(i))$

$=[f_{n_1}(i,\sigma(i+1))-f_{n_1}(i,\sigma(i))]+[f_{n_1}(i+1,\sigma(i))-f_{n_1}(i+1,\sigma(i))]$

以下分成兩種情況進行討論：

① $f_{n_1}(i,\sigma(i))\times f_{n_1}(i+1,\sigma(i+1))\geq 0$

$\rightarrow[f_{n_1}(i,\sigma(i+1))-f_{n_1}(i,\sigma(i))]+[f_{n_1}(i+1,\sigma(i))-f_{n_1}(i+1,\sigma(i))]=0$

② $f_{n_1}(i,\sigma(i))\times f_{n_1}(i+1,\sigma(i+1))<0$

$\rightarrow[f_{n_1}(i,\sigma(i+1))-f_{n_1}(i,\sigma(i))]+[f_{n_1}(i+1,\sigma(i))-f_{n_1}(i+1,\sigma(i))]>0$

$\Rightarrow\ S'_{\sigma 1}\geq S_{\sigma 1}$

接著為了說明以上的操作只可進行有限次，故考慮逆序數對總數

即 $Rev(\sigma)=Card\{(i,j)\,|\,i<j,\sigma(i)>\sigma(j)\}$

經變換，$Rev(\sigma')-Rev(\sigma)=\sum\limits_{1\leq i<j\leq 4k}com(\sigma'(i),\sigma'(j))-\sum\limits_{1\leq i<j\leq 4k}com(\sigma(i),\sigma(j))$

$$=com(\sigma'(i),\sigma'(i+1))=1$$

$\rightarrow Rev(\sigma')>Rev(\sigma)$

而 $Rev(\pi)=\sum\limits_{1\leq i<j\leq 4k}com(\pi(i),\pi(j))=\sum\limits_{i=1}^{4k-1}\sum\limits_{j=2}^{4k}com(\sigma(i),\sigma(j))$

$$\leq(4k-1)+(4k-2)+...+(1)=2k(4k-1)\ ,\ \forall\pi\in\prod_{4k}$$

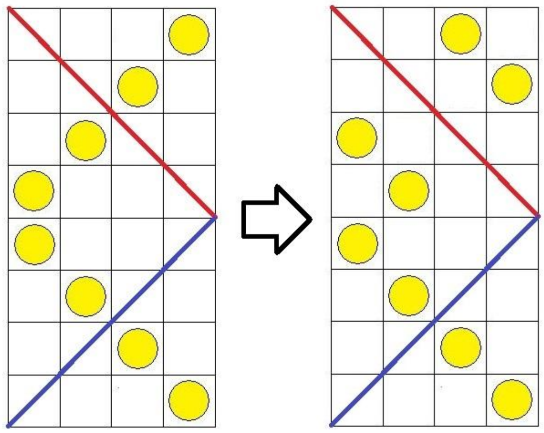
因此綜上，$\max\{\sum|\,f_{4k_1}(i,j)\times P_{ij}\,|\,|[P_{ij}]_{4k\times 4k}\,is\quad good\}=\sum\limits_{i=1}^{4k}f_{n_1}(i,n+1-i)=8k^2$

最後，因為 $S_{\sigma_{1.2}}\leq 2\times\sum|\sigma(i)-i|$，所以 $S_{\sigma_{1.2}}\leq 2\times 8k^2=16k^2$

$\Rightarrow B(n)\leq 2(\dfrac{\min\{S_{\sigma_{1.1}},S_{\sigma_{2.2}}\}+S_{\sigma_{1.2}}}{2})=\min\{S_{\sigma_{1.1}},S_{\sigma_{2.2}}\}+S_{\sigma_{1.2}}\leq 40k^2$

而為了達到上界，經過一些嘗試，我們發現必須做一點調整。

以下的圖即為我們調整的結果(見圖(十七))：



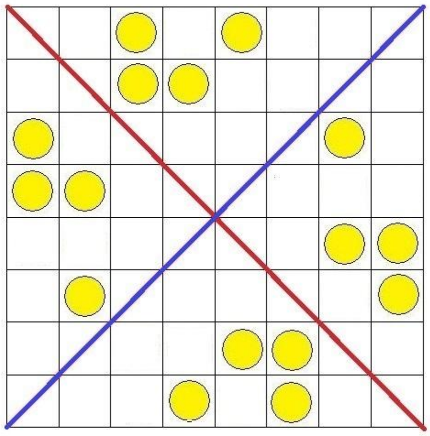
圖(十七)

因為現在任意兩個棋子之間，已經不會互相影響
所以只需要確認是否可以從 $32k^2$ 調整至 $40k^2$

幸運地，恰好能夠再不影響 $\min\{S_{\sigma_{1.1}},S_{\sigma_{2.2}}\}$ 或者 $S_{\sigma_{1.2}}$ 的值的情況下完成調整

下面我們給出一個 $B_\sigma(8k)=40k^2$ 的構造方式：

$i=1,3,...,4k-1,\sigma_1(i)=4k-i,\sigma_2(i)=4k+i$
$i=2,4,...,4k,\sigma_1(i)=4k+1-i,\sigma_2(i)=4k+2-i$
$i=4k+1,4k+3,...,8k-1,\sigma_1(i)=12k-i,\sigma_2(i)=12k+1-i$
$i=4k+2,4k+4,...,8k,\sigma_1(i)=i-4k,\sigma_2(i)=12k+2-i$



圖(十八)

而跟問題一的處理方式一樣，我們模仿 $8k$ 型的構造方式，然後利用「工具二」進行調整，希望能夠給出其它情形的構造法，不過這邊要先給出其它情形的上界。

而算法即是利用 $B(n)\le 2[\dfrac{\min\{S_{\sigma_{1.1}},S_{\sigma_{2.2}}\}+S_{\sigma_{1.2}}}{2}]=\min\{S_{\sigma_{1.1}},S_{\sigma_{2.2}}\}+S_{\sigma_{1.2}}$

定理三(2)： $B(n)\le 40k^2+20k$ ， $n=8k+2$

證明：

※1. $\min\{S_{\sigma_{1.1}},S_{\sigma_{2.2}}\}\le A(n)=24k^2+12k$

※2. $S_{\sigma_{1.2}}\le 2\times[2\times\sum_{i=1}^{2k}(2i)]=8\sum_{i=1}^{2k}i=8k(2k+1)=16k^2+8k$

$\Rightarrow B(n)\le 40k^2+20k$

定理三(3)：$B(n) \le 40k^2 + 40k + 8$ ，$n = 8k + 4$

證明：

※1. $\min\{S_{\sigma_{1.1}}, S_{\sigma_{2.2}}\} \le A(n) = 24k^2 + 24k + 6$

※2. $S_{\sigma_{1.2}} \le 2 \times [2 \times \sum_{i=1}^{2k+1}(i)] = 4(2k+1)^2 = 16k^2 + 16k + 4$

$\Rightarrow B(n) \le 40k^2 + 40k + 8$

定理三(4)：$B(n) \le 40k^2 + 60k + 20$ ，$n = 8k + 6$

證明：

※1. $\min\{S_{\sigma_{1.1}}, S_{\sigma_{2.2}}\} \le A(n) = 24k^2 + 36k + 12$

※2. $S_{\sigma_{1.2}} \le 2 \times [2 \times \sum_{i=1}^{2k+1}(2i) + 4] = (8k)(2k+3) + 8 = 16k^2 + 24k + 8$

$\Rightarrow B(n) \le 40k^2 + 60k + 20$

步驟二：(構造)

以下是其他 $n \ne 0 \pmod 8$ 的情況討論

1. $8k + 4$ 型：

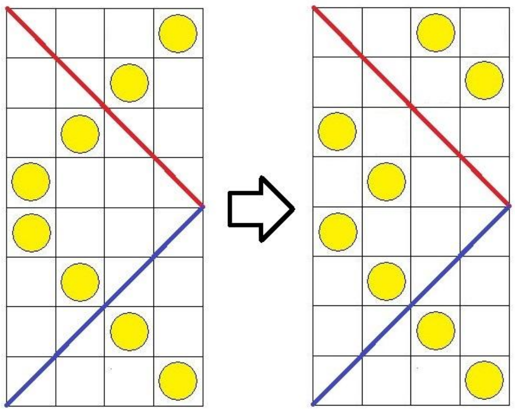
模仿 $8k$ 型的構造方式，一樣先把棋子擺成如 $8k$ 型的初始狀態一般，亦即：

$i = 1 \sim 4k+2, \sigma_1(i) = 4k + 3 - i, \sigma_2(i) = 4k + 2 + i$

$i = 4k+3 \sim 8k+4, \sigma_1(i) = i - 4k - 2, \sigma_2(i) = 12k + 7 - i$

接著進行調整，但要注意到不能 $\min\{S_{\sigma_{1.1}}, S_{\sigma_{2.2}}\} < 24k^2 + 24k + 6$ 或

$S_{\sigma_{1.2}} < 16k^2 + 16k + 4$，否則上界無法達到！以下是調整結果(見圖(十九))：



圖(十九)

因為現在任意兩個棋子之間，已經不會互相影響

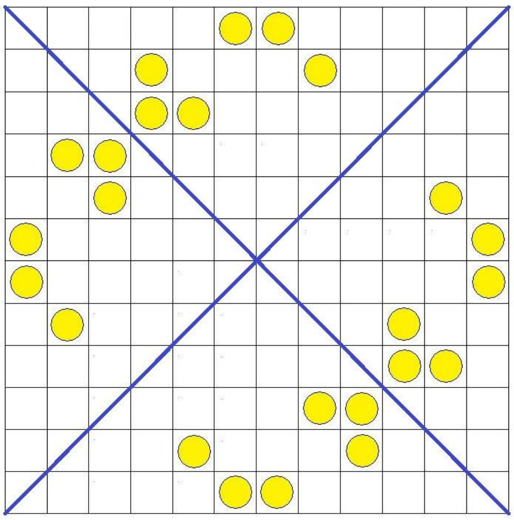
所以只需要確認是否可以從 $32k^2+32k+8$ 調整至 $40k^2+40k+8$

幸運地，恰好能夠再不影響 $\min\{S_{\sigma_{1,1}},S_{\sigma_{2,2}}\}$ 或者 $S_{\sigma_{1,2}}$ 的值的情況下完成調整

下面我們給出一個 $B_\sigma(8k+4)=40k^2+40k+8$ 的構造方式：

$i=1,\sigma_1(i)=4k+3-i,\sigma_2(i)=4k+2+i$
$i=2,4,...,2k,\sigma_1(i)=4k+2-i,\sigma_2(i)=4k+2+i$
$i=3,5,...,2k+1,\sigma_1(i)=4k+3-i,\sigma_2(i)=4k+4-i$
$i=2k+2,2k+4,...,4k,\sigma_1(i)=4k+3-i,\sigma_2(i)=4k+2-i$
$i=2k+3,2k+5,...,4k+1,\sigma_1(i)=4k+4-i,\sigma_2(i)=4k+2+i$
$i=4k+2,\sigma_1(i)=4k+5-i,\sigma_2(i)=4k+i$
$i=4k+3,\sigma_1(i)=4k+6-i,\sigma_2(i)=4k-1+i$
$i=4k+4,4k+8,...,6k+2,\sigma_1(i)=i-4k-2,\sigma_2(i)=12k+6+i$
$i=4k+5,4k+7,...,6k+3,\sigma_1(i)=12k+7-i,\sigma_2(i)=12k+8-i$
$i=6k+4,6k+6,...,8k+4,\sigma_1(i)=12k+7-i,\sigma_2(i)=12k+8-i$
$i=6k+5,6k+7,...,8k+3,\sigma_1(i)=i-4k-2,\sigma_2(i)=12k+6-i$
$i=8k+4,\sigma_1(i)=4k+3,\sigma_2(i)=4k+4$

以下的圖即結果(見圖(二十))：



圖(二十)

2. $8k+2$ 型：

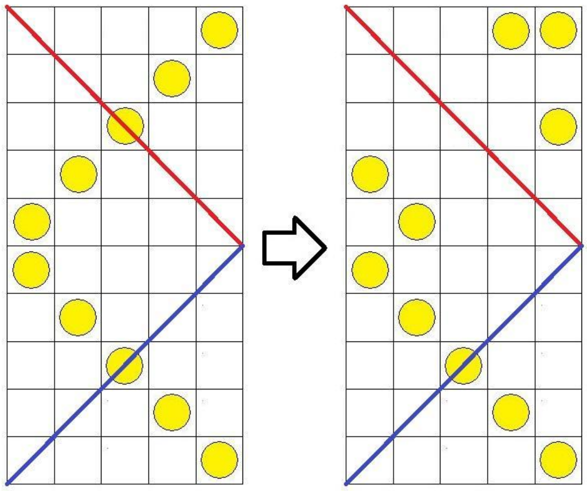
模仿 $8k$ 型的構造方式，一樣先把棋子擺成如右圖般，亦即：

$i=1\sim 4k+1,\sigma_1(i)=4k+2-i,\sigma_2(i)=4k+1+i$
$i=4k+2\sim 8k+2,\sigma_1(i)=i-4k-1,\sigma_2(i)=12k+4-i$

接著開始進行調整，但要注意到不能 $\min\{S_{\sigma_{1,1}},S_{\sigma_{2,2}}\}<24k^2+12k$ 或

$S_{\sigma_{1,2}} < 16k^2 + 8k$，否則上界就無法達到了！

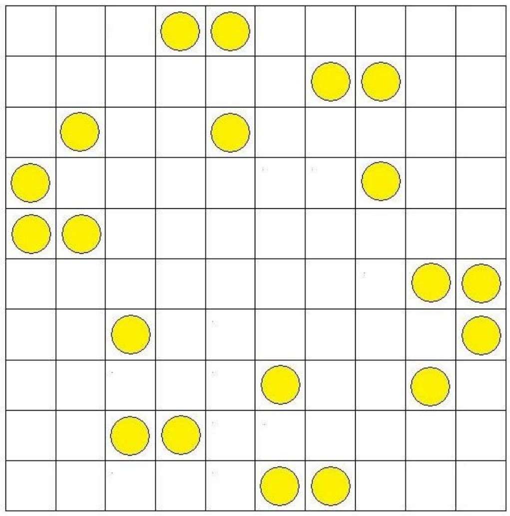
以下是調整的結果(見圖(二十一))：



圖(二十一)

因為現在任意兩個棋子之間，已經不會互相影響
所以只需要確認是否可以從 $32k^2 + 16k$ 調整至 $40k^2 + 20k$

下面我們給出一個 $B_\sigma(8k+2) = 40k^2 + 20k$ 的構造方式：



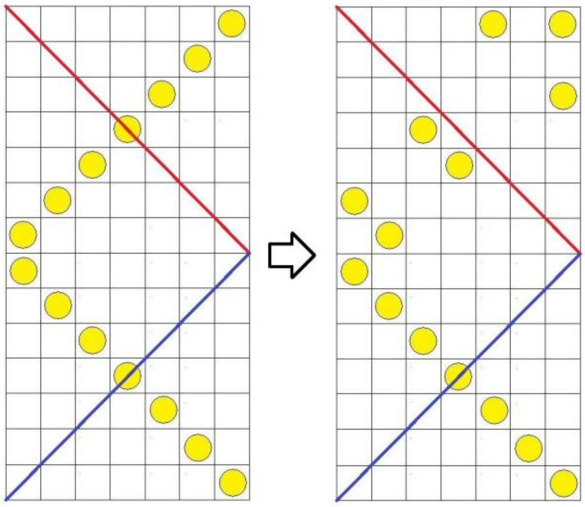
圖(二十二)

3. $8k+6$ 型：
模仿 $8k$ 型的構造方式，一樣先把棋子擺成如 $8k$ 型一般，亦即：
$i = 1 \sim 4k+3, \sigma_1(i) = 4k+4-i, \sigma_2(i) = 4k+3+i$
$i = 4k+4 \sim 8k+6, \sigma_1(i) = i-4k-3, \sigma_2(i) = 12k+10-i$

接著開始進行調整，但要注意到不能 $\min\{S_{\sigma_{1,1}}, S_{\sigma_{2,2}}\} < 24k^2 + 36k + 12$ 或

$S_{\sigma_{1,2}} < 16k^2 + 24k + 8$，否則上界就無法達到了！

以下是調整的結果(見圖(二十二))：

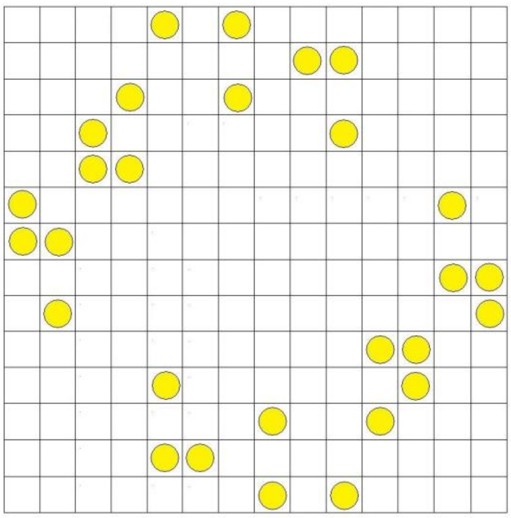


圖(二十二)

因為現在任意兩個棋子之間，已經不會互相影響

所以只需要確認是否可以從 $32k^2+48k+16$ 調整至 $40k^2+60k+20$

下面我們給出一個 $B_\sigma(8k+6)=40k^2+60k+20$ 的構造方式：



圖(二十三)

定理四： $B(n)=4\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{5}{8}n^2\right\rfloor}{4}\right\rfloor$，$\forall n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$

證明：

$$B(8k)=4\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{5}{8}(8k)^2\right\rfloor}{4}\right\rfloor,\quad B(8k+2)=4\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{5}{8}(8k+2)^2\right\rfloor}{4}\right\rfloor$$

$$B(8k+4)=4\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{5}{8}(8k+4)^2\right\rfloor}{4}\right\rfloor,\quad B(8k+6)=4\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{5}{8}(8k+6)^2\right\rfloor}{4}\right\rfloor$$

因為以上四種分類為所有正偶數的一種分割方式

所以我們便得到，$B(n)=4\left\lfloor\dfrac{\left\lfloor\frac{5}{8}n^2\right\rfloor}{4}\right\rfloor$，$\forall n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$

陸、研究結果與結論

1. n 是一個正整數，在一個邊長為 n 的棋盤上面，我們把 n 個棋子放置於上，使得每一行、每一列恰好有一個棋子。把一個棋子移動水平或垂直方向至相鄰的方格之中，稱為一次操作。數個棋子在移動的過程中允許位於同一方格，而我們的目標是把所有的棋子移至其中一條對角線，並且該對角線上之每一個方格都恰好有一個棋子。

則我們至多只須要 $2\left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{3}{8}n^2 \right\rfloor}{2} \right\rceil$ 次操作便能夠完成目標。

2. n 是一個正偶數，在一個邊長為 n 的棋盤上面，我們把 $2n$ 個棋子放置於上，使得每一行、每一列恰好有兩個棋子。把一個棋子移動水平或垂直方向至相鄰的方格之中，稱為一次操作。數個棋子在移動的過程中允許位於同一方格，而我們的目標是把所有的棋子移至成兩條完整的對角線，也就是這兩條對角線上之每一個方格都恰好有一個棋子。

則我們至多只須要 $4\left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{5}{8}n^2 \right\rfloor}{4} \right\rceil$ 次操作便能夠完成目標。

柒、應用及未來展望

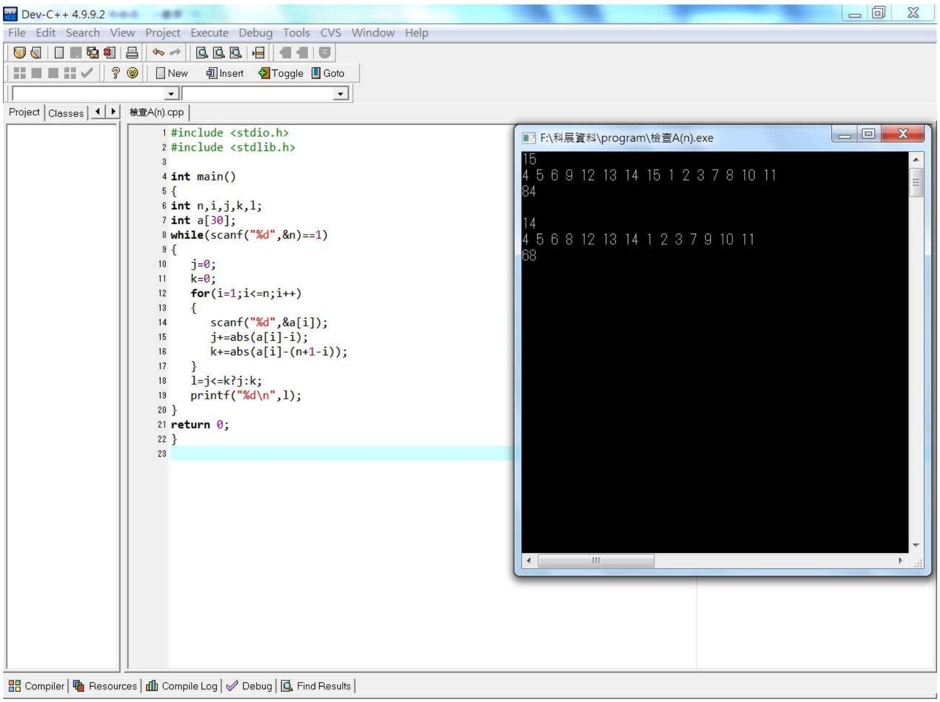
希望之後能夠做出更一般性的結果，而比較有希望的是：一行一列的棋子數目增加，因為在處理這次研究所探討的兩個問題之中，可以發現到一行一列 m 個棋子會和一行一列 $m-1$ 個棋子有所關連，故也許我可以藉由數學歸納法，結合其他的數學工具，以推倒出其結果。當然，還有其他的部份能夠進行推廣，舉例來說：增加棋盤之維度，不要拘限在平面，往空間發展；還有棋子之移動方式，不單以城堡這種較好討論的來做，其他種類的棋子也進行討論。

捌、參考文獻

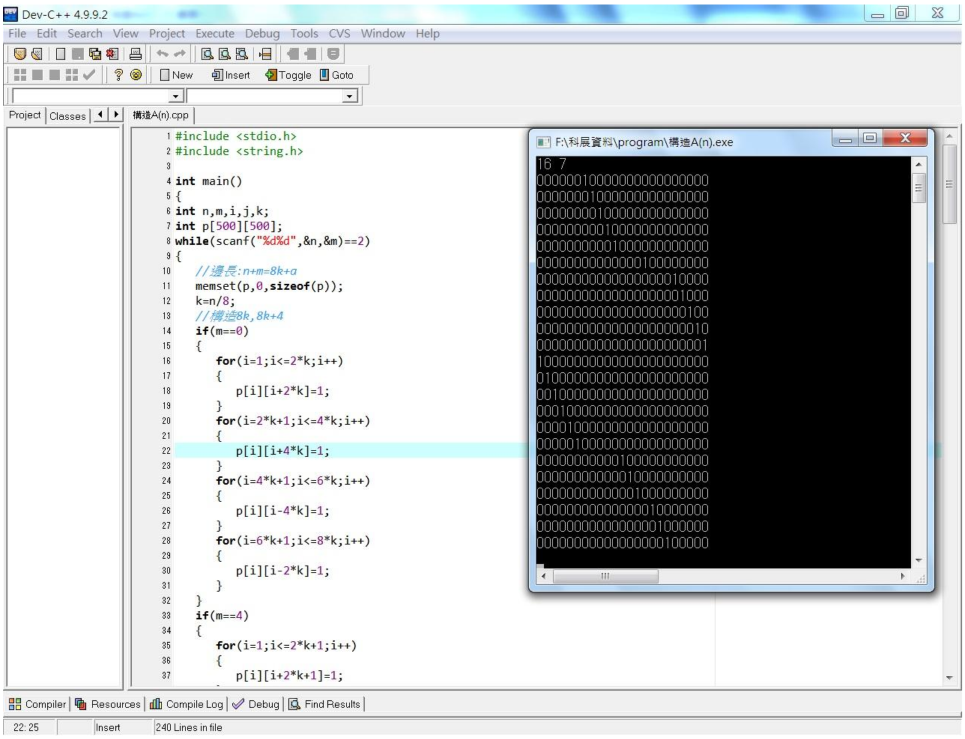
1. 單墫 組合幾何 上海科技教育出版社
2. 數學奧林匹亞小叢書高中卷13-數學競賽中的組合問題 九章出版社
3. 數學奧林匹亞小叢書高中卷14-組合幾何 九章出版社

玖、附件

為了避免人工計算的錯誤，所以寫了以下的程式檢查 $A(n)$：



再者，以方便起見，又寫了一個程式構造 $A(n)$ 的一組解：



【評語】040410

本作品研究巴斯卡三角形的性質及其所產生的碎形，是一個相當有趣而且被廣泛研究的課題。在本作品中有關巴斯卡三角形的基本性質，已廣為人知，不需要再多著墨。至於碎形的研究，由於碎形本來就是局部類似於全貌，因此用遞迴關係研究可說是固定的技巧和方法。碎形面積的通式相當漂亮，但為何該對應矩陣的跡(trace)即為其面積，卻完全沒有著墨。事實上，這部分應該是本作品最困難也最可觀的部分，卻被避開了，相當可惜。