中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第二名

040409

tri to 唯一(三角形唯一性之探討)

學校名稱：國立臺中第二高級中學

作者：	指導老師：
高二 張修銘	林志穎
高二 陳昱辰	陳育慈
高二 翁偉倫	

關鍵詞：三角形五心、存在性、唯一性

摘要

我們知道$\triangle ABC$決定了唯一的重心、垂心、外心、內心，而且這些心到三頂點(或三邊)的距離x, y, z被唯一決定了。本篇主題為探討類似上述敘述的逆敘述，並用勘根定理將$\triangle ABC$的三邊長以x, y, z去描述。

我們分別以a,b,c表示$\triangle ABC$中$\angle A, \angle B, \angle C$之對邊長，且以$x, y, z$表示特殊給定的長度，其中$x \geq y \geq z \geq 0$。

經過研究，我們截取部分重要結果如下：

給定x,y,z對應的量	$\triangle ABC$存在的條件	$\triangle ABC$是否唯一
垂心到三頂點的距離	$x \geq y = z > 0$	是
	$x \geq y > z = 0$	是
	$x \geq y > z > 0$	否(兩種)
垂心到三邊的距離	$x = y \geq z > 0$	是
	$x > y \geq z > 0$	否(兩種)
	$x > y = z = 0$	否(無限多種)
三角平分線長	$x \geq y \geq z > 0$	是
內心到三頂點的距離	$x \geq y \geq z > 0$	是
內心到三邊的距離	$x = y = z > 0$	否(無限多種)
外心到三頂點的距離	$x = y = z > 0$	否(無限多種)
外心到三邊的距離	$x \geq y = z > 0$	是
	$x \geq y > z = 0$	是
	$x \geq y > z > 0$	否(兩種)
三頂點過外心到對邊的長度	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{3}{z}, \frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{3}{y}, \frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x}$	是
某旁心到三頂點的距離	$x > y \geq z > 0$	是
三旁心到對應頂點的距離	$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 構成銳角三角形	是
三旁心到對應邊的距離	$x \geq y \geq z > 0$	是

壹、研究動機

曾在第三冊第一章總複習的練習卷上，做過一道題目 : 已知三角形之三高分別為 $2,3,5$，是否可決定唯一的三角形？隨後，又在其他的練習卷上，遇到下列題目：設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\left|\overline{GA}\right|=2$，$\left|\overline{GB}\right|=3$，$\left|\overline{GC}\right|=5$，則 $\overline{GB}\cdot\overline{GC}+\overline{GC}\cdot\overline{GA}=$ ？老師說此題條件有誤，因為題幹所敘述的三角形是不存在的。

由這兩個楔子，致使我們小組的成員對這一類的問題產生了濃厚的興趣。

究竟在何種條件下三角形才存在 ? 在何種條件下可決定唯一的三角形 ? 又此三角形該如何描述它 ? 於是我們展開了下列的研究。

貳、研究目的

從研究動機的兩則題目中我們發現：五心(重心、垂心、內心、外心、旁心)與所給的條件，是決定三角形存在性與唯一性的關鍵。

本研究的目的主要是以重心、垂心、內心、外心、旁心為分類，討論在各種給定的條件下，三角形的存在性、唯一性，並試著去描述此三角形。以下是我們研究的問題：

一、重心

(一)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的三中線長？

(二)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的重心到三頂點之距離？

(三)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的重心到三邊之距離？

二、垂心

(一)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的三高？

(二)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的垂心到三頂點之距離？

(三)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的垂心到三邊之距離？

三、內心

(一)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的三角平分線長？

(二)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的內心到三頂點之距離？

(三)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的內心到三邊之距離？

四、外心

(一)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的外心到三頂點之距離？

(二)任意給定三長度 x,y,z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x,y,z 恰為 $\triangle ABC$ 的外心到三邊之

距離？

(三)任意給定三長度x, y, z，是否能找到銳角△ABC，使得x, y, z恰為△ABC的三頂點過外心到對邊的長度？

五、旁心

(一)任意給定三長度x, y, z，是否能找到△ABC，使得x, y, z恰為△ABC中某一個旁心到三頂點之距離？

(二)設J_A, J_B, J_C分別為$\angle A, \angle B, \angle C$對應的旁心。任意給定三長度$x, y, z$，是否能找到△$ABC$，使得$x, y, z$恰為△$ABC$的三旁心到對應頂點之距離？

(三)設J_A, J_B, J_C分別為$\angle A, \angle B, \angle C$對應的旁心。任意給定三長度$x, y, z$，是否能找到△$ABC$，使得$x, y, z$恰為△$ABC$的三旁心到對應邊之距離？

參、研究設備與器材

筆、紙、電腦、Geogebra

肆、研究過程與方法

我們知道當給定一個三角形時，三角形的邊角關係、五心以及一些特徵(例：中線長、角平分線長…等)會被唯一決定。

我們的研究目的即是探討在給定的條件下，是否能找到三角形滿足條件？如果能找到三角形的話，可找到幾個？以及該如何明確的去描述此三角形。

五心在三角形的領域內，占了舉足輕重的地位。所以，我們將依序以重心、垂心、內心、外心、旁心為分類，來討論三角形在各種條件下的存在性、唯一性，並試著去描述它。

※ 在本篇文章中，我們分別以a, b, c表示△ABC中$\angle A, \angle B, \angle C$之對邊長，且以$x, y, z$表示特殊給定的長度，其中$x \ge y \ge z \ge 0$

一、重心

(一)任意給定三長度x, y, z，是否能找到△ABC，使得x, y, z恰為△ABC的三中線長？

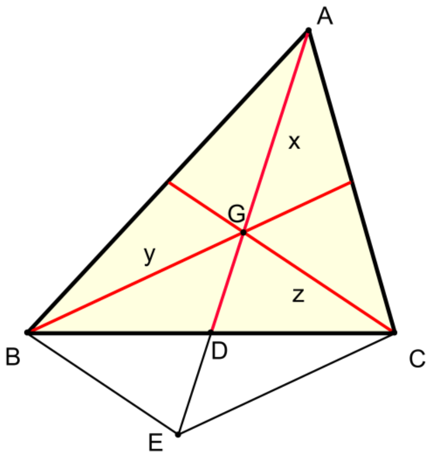
存在性

已知過A, B, C之中線長為x, y, z，

令D為$\overline{BC}$中點，G為△ABC的重心，

在$\overline{AD}$上取一點E，使得$\overline{DE} = \overline{DG}$，

連接$\overline{CE}, \overline{BE}$，則四邊形$BGCE$為一平行四邊形。



由重心性質可知$\triangle GCE$三邊長分別為$\frac{2}{3}x,\frac{2}{3}y,\frac{2}{3}z$

我們知道若$\frac{2}{3}x,\frac{2}{3}y,\frac{2}{3}z$可構成三角形三邊時，$\triangle GCE$會存在，且$\triangle ABC$會存在

即當x,y,z可構成三角形三邊時，$\triangle ABC$會存在

$\boxed{\text{唯一性}}$

若$\triangle ABC$存在，

由三角形中線定理可知：

$$b^2+c^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2\right] \Rightarrow x^2=-\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}\text{--------①}$$

同理可得$y^2=\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{2}$--------②，且$z^2=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$--------③

將 ② + ③$-\frac{1}{2}\times$① 可得 $-\frac{1}{2}x^2+y^2+z^2=\frac{9}{8}a^2 \Rightarrow a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{y^2+z^2-\frac{x^2}{2}}$

同理可得$b=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{z^2+x^2-\frac{y^2}{2}}$ ，$c=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^2+y^2-\frac{z^2}{2}}$

故當x,y,z滿足存在條件時，$\triangle ABC$會被唯一決定

當x,y,z可構成三角形三邊時，存在唯一的$\triangle ABC$使得x,y,z恰為$\triangle ABC$的三中線長。

(二)任意給定三長度x,y,z，是否能找到$\triangle ABC$，使得x,y,z恰為$\triangle ABC$的重心到三頂點之距離？

$\boxed{\text{存在性}}$

已知$\triangle ABC$的重心到三頂點之距離分別為x,y,z

因為重心到頂點的距離為中線長的三分之二，

所以$\triangle ABC$的三中線長分別為$\frac{3}{2}x,\frac{3}{2}y,\frac{3}{2}z$

由一、(一)可知 ：若$\frac{3}{2}x,\frac{3}{2}y,\frac{3}{2}z$滿足任兩數之和大於第三數時，$\triangle ABC$會存在

即當x,y,z可構成三角形三邊時，$\triangle ABC$會存在。

唯一性

若△ABC存在，則$\frac{3}{2}x,\frac{3}{2}y,\frac{3}{2}z$恰為△$ABC$的三中線長

由一、(一)可知此時△ABC的三邊長為：

$$a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{2}y\right)^2+\left(\frac{3}{2}z\right)^2-\frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2}}=\sqrt{2y^2+2z^2-x^2}$$

同理$b=\sqrt{2z^2+2x^2-y^2}$，$c=\sqrt{2x^2+2y^2-z^2}$

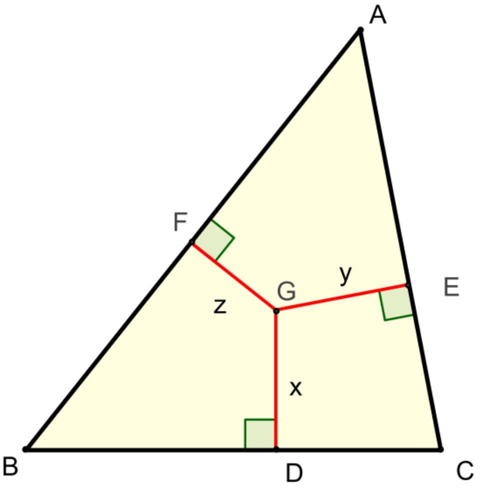
故當x,y,z滿足存在條件時，△ABC會被唯一決定

當x,y,z可構成三角形三邊時，存在唯一的△ABC使得x,y,z恰為△ABC的重心到三頂點之距離。

(三)任意給定三長度x,y,z，是否能找到△ABC，使得x,y,z恰為△ABC的重心到三邊之距離？

存在性

令$\overline{DG}=x,\overline{EG}=y,\overline{FG}=z$，



其中D,E,F為G在$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$上的投影點

又$\triangle AGB=\triangle BGC=\triangle CGA=\frac{1}{3}\triangle ABC$(面積)

令$\triangle ABC$面積$=\frac{3}{2}k,k>0$

因為 $\frac{1}{2}\cdot cz=\frac{1}{2}\cdot ax=\frac{1}{2}\cdot by=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}k$

所以 $a=\frac{k}{x},b=\frac{k}{y},c=\frac{k}{z}$

故當 $\frac{k}{x},\frac{k}{y},\frac{k}{z}$可構成三角形三邊時，△$ABC$會存在

即當 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$可構成三角形三邊時，△$ABC$會存在

唯一性

若△ABC存在，設△ABC的面積為$\frac{3}{2}k$, $k>0$，則可得$a=\frac{k}{x}$, $b=\frac{k}{y}$, $c=\frac{k}{z}$

接著利用海龍公式

$$\Delta ABC=\frac{1}{4}\sqrt{(\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z})(\frac{k}{x}+\frac{k}{y}-\frac{k}{z})(\frac{k}{x}-\frac{k}{y}+\frac{k}{z})(-\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z})}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot k^2\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}k=\frac{1}{4}\cdot k^2\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$$

$$\Rightarrow k=\frac{6}{\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}}$$

令$\lambda=\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$，則$k=\frac{6}{\lambda}$

又$a=\frac{k}{x}$, $b=\frac{k}{y}$, $c=\frac{k}{z}$，故當x,y,z滿足存在條件時，△ABC會被唯一決定。

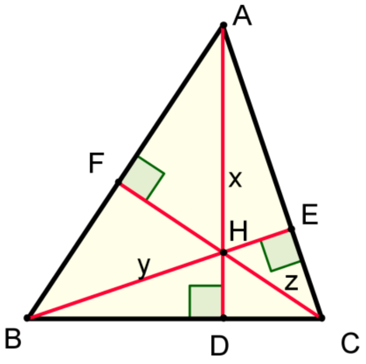
此時△ABC的三邊長為：

$a=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$ ， $b=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}$ ， $c=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}$，其中$\lambda=\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$

當 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 可構成三角形三邊時，存在唯一的△ABC使得x,y,z恰為△ABC的重心到三邊之距離。

二、垂心

(一)任意給定三長度x,y,z，是否能找到△ ABC，使得x,y,z恰為△ ABC的三高？



存在性

已知過A,B,C之高為x,y,z

若△ABC存在，設△ABC的面積為$\frac{1}{2}k$, $k>0$

因為 $\frac{1}{2}\cdot ax=\frac{1}{2}\cdot by=\frac{1}{2}\cdot cz=\frac{1}{2}k$

所以 $a=\frac{k}{x}$, $b=\frac{k}{y}$, $c=\frac{k}{z}$

故當 $\frac{k}{x},\frac{k}{y},\frac{k}{z}$ 可構成三角形三邊時，△ABC會存在

即當 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 可構成三角形三邊時，△ABC會存在

$\boxed{\text{唯一性}}$

若△ABC存在

承上可知 $a=\frac{k}{x}$, $b=\frac{k}{y}$, $c=\frac{k}{z}$

利用海龍公式

$$\Delta ABC=\frac{1}{4}\sqrt{(\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z})(\frac{k}{x}+\frac{k}{y}-\frac{k}{z})(\frac{k}{x}-\frac{k}{y}+\frac{k}{z})(-\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z})}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot k^2\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}k=\frac{1}{4}\cdot k^2\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$$

$$\Rightarrow k=\frac{2}{\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}}$$

令 $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$ ，則 $k=\frac{2}{\lambda}$

又 $a=\frac{k}{x}$, $b=\frac{k}{y}$, $c=\frac{k}{z}$

故當 x,y,z 滿足存在條件時，△ABC會被唯一決定

此時△ABC的三邊長分別為：

$a=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$ ， $b=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}$ ， $c=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}$ ，

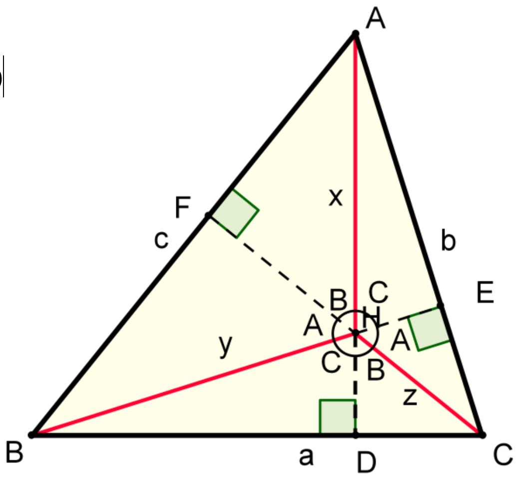
其中 $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$

當 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 可構成三角形三邊時，存在唯一的△ABC使得 x,y,z 恰為△ ABC的三高。

(二)任意給定三長度x, y, z，是否能找到△ABC，使得x, y, z恰為△ABC的垂心到三頂點之距離？

已知$\overline{AH}=x, \overline{BH}=y, \overline{CH}=z$，其中$H$為垂心

分成：1.△ABC為銳角三角形(H在三角形內)
2.△ABC為鈍角三角形(H在三角形外)
3.△ABC為直角三角形(H在三角形邊上)，來討論



1.如圖，當H在三角形內(△ABC為銳角三角形)

此時$x \ge y \ge z > 0$

因為$\overline{AH}\sin B = b\cos A$，

所以$\overline{AH}=\dfrac{b}{\sin B}\cdot\cos A = 2R\cos A$，

同理$\overline{BH}=2R\cos B$，且$\overline{CH}=2R\cos C$，

其中R為ΔABC外接圓半徑。

又$\overline{AH}=2R\cos A=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\cos A \Rightarrow a=\overline{AH}\cdot\tan A = x\cdot\tan A \Rightarrow a = x\tan A$--------①

接著由餘弦定理可知 $a^2=y^2+z^2-2yz\cos\angle CHB = y^2+z^2+2yz\cos A$---------②

由①、②可知 $x^2\tan^2 A = y^2+z^2+2yz\cos A$

$\Rightarrow x^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}-1\right)=y^2+z^2+2yz\cos A \Rightarrow 2yz\cos^3 A+(x^2+y^2+z^2)\cos^2 A - x^2=0$

令$t=\cos A$， $f_1(t)=2yzt^3+(x^2+y^2+z^2)t^2-x^2$

利用勘根定理

t	$-\infty$	-1	0	1
$f_1(t)$	負	正 （當$y\ne z$） 0 （當$y=z$）	負	正

由勘根定理配合三次函數的圖形可知$f_1(t)=0$在$(-\infty,0)$有兩實根，在$(0,1)$有一實根

因為$\angle A$為銳角，故$\cos A$為$f_1(t)=0$的正實根

同理， $f_2(t)=2xzt^3+(x^2+y^2+z^2)t^2-y^2=0$，其中$\cos B$為$f_2(t)=0$的正實根

$f_3(t)=2xyt^3+(x^2+y^2+z^2)t^2-z^2=0$，其中$\cos C$為$f_3(t)=0$的正實根

故△ ABC 三邊長可表為：

$$a = x\tan A = x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A} - 1} \text{，} b = y\tan B = y\sqrt{\frac{1}{\cos^2 B} - 1} \text{，} c = z\tan C = z\sqrt{\frac{1}{\cos^2 C} - 1}$$

由解的情形可知，當 $x \ge y \ge z > 0$ 時，$f_1(t)=0, f_2(t)=0, f_3(t)=0$ 必有介在 $(0,1)$ 之間的正根，其根恰為 $\cos A, \cos B, \cos C$，故 $\angle A, \angle B, \angle C$ 被唯一決定。也就是說，一定可以找到△ ABC 為銳角三角形且滿足給定的 x, y, z 恰為△ ABC 的垂心到三頂點之距離。

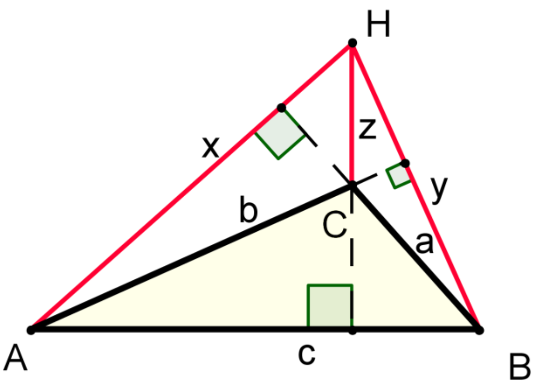
2.如圖，當 H 在三角形外(△ ABC 為鈍角三角形) ，此時 $x \ge y \ge z > 0$

由圖可知 $\angle C$ 為鈍角，且

$x = a\tan\angle HBA = a\tan(90^\circ - \angle A) = a \cdot \cot A \Rightarrow a = x \cdot \tan A$

$y = b\tan\angle HAB = b\tan(90^\circ - \angle B) = b \cdot \cot B \Rightarrow b = y\tan B$

$c = z\tan\angle AHB = z\tan(180^\circ - \angle C) \Rightarrow c = -z\tan C$



由餘弦定理可知 $a^2 = z^2 + y^2 - 2yz\cos A$

$\Rightarrow (x\tan A)^2 = z^2 + y^2 - 2yz\cos A$

$\Rightarrow x^2(\frac{1}{\cos^2 A} - 1) = z^2 + y^2 - 2yz\cos A$

$\Rightarrow 2yz\cos^3 A - (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 A + x^2 = 0$

令 $t = \cos A$，$g_1(t) = 2yzt^3 - (x^2 + y^2 + z^2)t^2 + x^2$

利用勘根定理

<table>
<tr><td>t</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>∞</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$g_1(t)$</td><td rowspan="2">負</td><td rowspan="2">正</td><td>負 (當 $y \ne z$)</td><td rowspan="2">正</td></tr>
<tr><td>0 (當 $y = z$)</td></tr>
</table>

由勘根定理配合三次函數圖形可知：

(1) $g_1(t) = 0$ 在 $(-1,0)$ 間有一實根。

(2) $g_1(t) = 0$ 在 $(0,\infty)$ 間有兩實根：

①當 $y \ne z$ 時，$g_1(t) = 0$ 在 $(0,1),(1,\infty)$ 各有一實根

②當 $y = z$ 時，$g_1(1) = 0$，又 $g_1'(t) = 6yzt^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)t \Rightarrow g_1'(1) = 2y^2 - 2x^2 < 0$

故 $g_1(t) = 0$ 除了有一根為1之外，在 $(1,\infty)$ 之間還有另一根。

因為 $\angle A$ 為銳角，故 $\cos A$ 為 $g_1(t) = 0$ 介在 $(0,1)$ 之間的實根

同理，$g_2(t) = 2xzt^3 - (x^2 + y^2 + z^2)t^2 + y^2 = 0$，其中 $\cos B$ 為 $g_2(t) = 0$ 在 $(0,1)$ 間的正實根

$g_3(t) = 2xyt^3 + (x^2 + y^2 + z^2)t^2 - z^2 = 0$，其中 $\cos C$ 為 $g_3(t) = 0$ 的負實根

由於 g_3 與 g_1, g_2 形式不同，我們利用勘根定理分析

<table>
<tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$g_3(t)$</td><td rowspan="2">負</td><td>正　(當 $x \neq y$)</td><td rowspan="2">負</td><td rowspan="2">正</td></tr>
<tr><td>0　(當 $x = y$)</td></tr>
</table>

由勘根定理配合三次函數圖形可知：

(1)當 $x \neq y$ 時， $g_3(t)=0$ 在 $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ 間各有一實根，

(2)當 $x = y$ 時， $g_3(-1)=0$ ，又 $g_3'(t)=6xyt^2+2(x^2+y^2+z^2)t \Rightarrow g_3'(-1)=2x^2-2z^2>0$

故 $g_3(t)=0$ 除了有一根為 -1 之外，在 $(-1,0)$, $(0,1)$ 之間還有另一根。

所以，不論 $x \neq y$ 或 $x = y$ 時， $g_3(t)=0$ 在 $(-1,0)$ 都會有一負實根 $\cos C$ 。

由解的情形可知：

①當 $x \geq y = z > 0$ 時， $g_1(t)=0$ 在 $(0,1)$ 沒有實根，即不可能找到鈍角△ ABC 滿足條件。

②當 $x \geq y > z > 0$ 時，可找到鈍角△ ABC 滿足條件，

此時三邊長為： $a = x\tan A$, $b = y\tan B$, $c = -z\tan C$

先將 1. (H 在三角形內)與 2. (H 在三角形外)的結果整理如下：

①當 $x \geq y \geq z > 0$ 時，由上述分析知，只要 x, y, z 給定，解 $f_1(t)=0$, $f_2(t)=0$, $f_3(t)=0$ 或 $g_1(t)=0$, $g_2(t)=0$, $g_3(t)=0$ 必能求出 $\cos A, \cos B, \cos C$ ，故△ ABC 必定存在。

②當 $x \geq y > z > 0$ 時，可決定兩種三角形(鈍角三角形和銳角三角形)，故不唯一。
(可參考後面 <u>伍、討論、二</u>裡的 example)

③當 $x \geq y = z > 0$ 時，鈍角三角形不存在，只能找到銳角三角形滿足條件，故唯一。

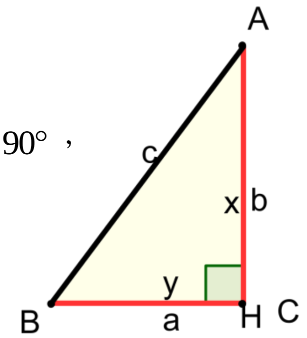
3.當 H 在三角形邊上(△ ABC 為直角三角形時)，

此時 $x \geq y \geq z = 0$ 時(即 x, y, z 中至少一數為 0 時)

(1)顯然當 $y > z = 0$ 時，△ ABC 為直角三角形，此時 $\angle C = 90°$ ，

此時三邊長為　$a = y$,$b = x$,$c = \sqrt{x^2+y^2}$

(2)當 $y = z = 0$ 時，△ ABC 不可能存在



由 1.、2.、3.之討論可進一步得到以下結論：

存在性

當 $x \geq y \geq z > 0$ 或 $x \geq y > z = 0$ 時，△ ABC 存在

$\boxed{\text{唯一性}}$

(1)當 $x \ge y = z > 0$ 時，$\triangle ABC$ 唯一，此時 $a = x\tan A, b = y\tan B, c = z\tan C$

(2)當 $x \ge y > z = 0$ 時，$\triangle ABC$ 唯一，此時 $a = y, b = x, c = \sqrt{x^2+y^2}$，是直角三角形

(3)當 $x \ge y > z > 0$ 時，$\triangle ABC$ 有兩種，並不唯一：

①若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，則 $a = x\tan A, b = y\tan B, c = z\tan C$

②若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，則 $a = x\tan A, b = y\tan B, c = -z\tan C$

(銳角和鈍角三角形之 $\cos A, \cos B, \cos C$ 滿足的方程式並不相同)

當 $x \ge y = z > 0$ 或 $x \ge y > z = 0$ 時，存在唯一的 $\triangle ABC$ 使得 x, y, z 恰為 $\triangle ABC$ 的垂心到三頂點之距離

(三)任意給定三長度 x, y, z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x, y, z 恰為 $\triangle ABC$ 的垂心到三邊之距離？

分成： 1.$\triangle ABC$ 為銳角三角形(H 在三角形內)，

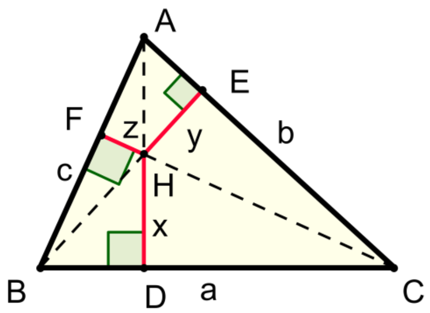
2.$\triangle ABC$ 為鈍角三角形(H 在三角形外)，

3.$\triangle ABC$ 為直角三角形(H 在三角形邊上)，來討論

1.如圖，當 H 在三角形內($\triangle ABC$ 為銳角三角形)，此時 $x \ge y \ge z > 0$

令 $d\left(\mathrm{H},\overline{BC}\right)=x, d\left(\mathrm{H},\overline{AC}\right)=y$, $\mathrm{d}\left(\mathrm{H},\overline{AB}\right)=z$

由圖可知 $\angle CHE=\angle A$, $\angle CHD=\angle B$, $\angle BHD=\angle C$



因為 $\overline{CH}=\dfrac{x}{\cos B}=\dfrac{y}{\cos A}$, $\overline{AH}=\dfrac{y}{\cos C}=\dfrac{z}{\cos B}$

所以 $x\cos A = \mathrm{y}\cos B = z\cos C \Rightarrow \cos A : \cos\mathrm{B} : \cos\mathrm{C} = \dfrac{1}{\mathrm{x}} : \dfrac{1}{\mathrm{y}} : \dfrac{1}{\mathrm{z}}$

令 $\cos A = \dfrac{t}{x}$, $\cos B = \dfrac{t}{y}$, $\cos C = \dfrac{t}{z}$ ，其中 $x \ge y \ge z > t > 0$

因為 $\cos C = -\cos(A+B)$ ，所以 $\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B$

$$\Rightarrow \frac{t}{z} = -\frac{t}{x}\cdot\frac{t}{y} + \sqrt{1-(\frac{t}{x})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{t}{y})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{z} + \frac{t^2}{xy} = \sqrt{1-(\frac{t}{x})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{t}{y})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{z^2}+2\frac{t^3}{xyz}+\frac{t^4}{x^2y^2}=1-\frac{t^2}{x^2}-\frac{t^2}{y^2}+\frac{t^4}{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{xyz}t^3+(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2})t^2-1=0$$

令 $f(t)=\frac{2}{xyz}t^3+(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2})t^2-1$

t	$-\infty$	$-z$	0	z
f(t)	負	非負實數	-1	正

由勘根定理可知， $f(t)=0$ 在 $(0,z)$ 之間恰有一實根 α ，

可依序解出 $\cos A=\frac{\alpha}{x}$ ，$\cos B=\frac{\alpha}{y}$ ，$\cos C=\frac{\alpha}{z}$ 之值。

故當 $x\geq y\geq z>0$ 時，一定可以找到銳角 ΔABC 滿足 x,y,z 恰為△ ABC 的垂心到三邊之距離。

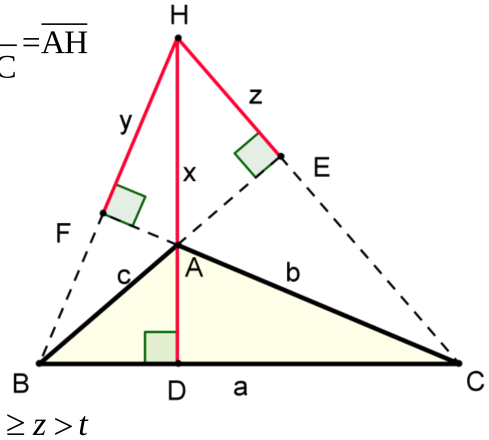
此時，三邊長可表為：

$$a=\overline{AH}\tan A=\frac{y}{\cos C}\cdot\tan A=x\cdot\frac{\cos A}{\cos B}\cdot\frac{1}{\cos C}\cdot\tan A=x\cdot\frac{\sin A}{\cos B\cos C}$$

同理 $b=y\cdot\frac{\sin B}{\cos A\cos C}$, $c=z\cdot\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$

2.如圖，當 H 在三角形外(△ ABC 為鈍角三角形) ，此時 $x\geq y\geq z>0$

令 $d\left(\mathrm{H},\overline{BC}\right)=x, d\left(\mathrm{H},\overline{AC}\right)=y$, $\mathrm{d}\left(\mathrm{H},\overline{AB}\right)=z$



因為 $\overline{\mathrm{AH}}\cos\mathrm{B}=\mathrm{z}$, $\overline{\mathrm{AH}}\cos\mathrm{C}=\mathrm{y}$ ，所以 $\frac{z}{\cos\mathrm{B}}=\frac{y}{\cos\mathrm{C}}=\overline{\mathrm{AH}}$

又 $x=\overline{\mathrm{BH}}\cos\mathrm{C}=\frac{z}{\cos(\mathrm{B+C})}\cdot\cos\mathrm{C}=\frac{y}{\cos(\mathrm{B+C})}\cdot\cos\mathrm{B}$

所以 $x\cdot\cos(\mathrm{B+C})=\mathrm{y}\cos\mathrm{B}=\mathrm{z}\cos\mathrm{C}$

$$\Rightarrow \cos(\mathrm{B+C}):\cos\mathrm{C}:\cos\mathrm{B}=\frac{1}{\mathrm{x}}:\frac{1}{\mathrm{y}}:\frac{1}{\mathrm{z}}$$

令 $\cos(\mathrm{B+C})=\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}}$, $\cos\mathrm{B}=\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{y}}$, $\cos\mathrm{C}=\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{z}}$, $\mathrm{t}>0$,且 $x\geq y\geq z>t$

因為 $\cos(\mathrm{B+C})=\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}-\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$ ，所以 $\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{y}}\cdot\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{z}}-\sqrt{1-(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{y}})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{z}})^2}$

$$\Rightarrow (\frac{\mathrm{t}^2}{\mathrm{yz}}-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}})^2=\left(\sqrt{1-(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{y}})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{z}})^2}\right)^2\Rightarrow\frac{\mathrm{t}^4}{\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2}-\frac{2\mathrm{t}^3}{\mathrm{xyz}}+\frac{\mathrm{t}^2}{\mathrm{x}^2}=1-\frac{\mathrm{t}^2}{\mathrm{y}^2}-\frac{\mathrm{t}^2}{\mathrm{z}^2}+$$

$$\Rightarrow \frac{2}{xyz}t^3-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)t^2+1=0$$

由於平方可能增根的原因，t的範圍還需多滿足

$$\frac{t}{y}\cdot\frac{t}{z}-\frac{t}{x}=\sqrt{1-(\frac{t}{y})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{t}{z})^2}>0\Rightarrow\frac{t}{y}\cdot\frac{t}{z}-\frac{t}{x}>0\Rightarrow t>\frac{yz}{x}$$，故$\frac{yz}{x}<t<z$

令 $f(t)=\frac{2}{xyz}t^3-(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2})t^2+1$，

t	$-\infty$	0	$\frac{yz}{x}$	z	∞
$f(t)$	負	1	0 (當 $x=y\geq z$)	0 (當 $x=y\geq z$)	正
			正 (當 $x>y\geq z$)	負 (當 $x>y\geq z$)	

(1)當 $x>y\geq z$時，由勘根定理可知，當 $f(t)=0$在$(\frac{yz}{x},z)$之間恰有一實根α

可依序解出$\cos A=-\frac{\alpha}{x}$, $\cos B=\frac{\alpha}{y}$, $\cos C=\frac{\alpha}{z}$之值，故鈍角三角形存在。

此時，三邊長為： $a=x\tan B+x\tan C$, $b=(x-y\sec C)\csc C$, $c=(x-z\sec B)\csc B$

(2)當 $x=y\geq z$時，因為 $f'(z)=2z\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{z^2}\right)\leq 0$， $f(t)=0$在$(-\infty,0)$之間有一實根，

在$\left[\frac{yz}{x}=z,\infty\right)$有兩實根，此時找不到正實根$\alpha$滿足$\cos C=\frac{\alpha}{z}<1$，故鈍角△$ABC$不存在。

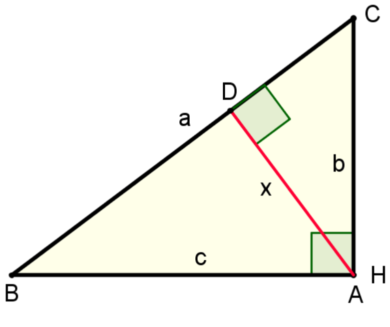
先將 1. (H在三角形內)與 2. (H在三角形外)的結果整理如下：

①當$x\geq y\geq z>0$時，由上述之分析可知，只要x,y,z給定，解 $f(t)=0$必能求出對應的$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$，故△ABC必定存在。

②當$x>y\geq z>0$時，可決定兩種三角形(鈍角三角形和銳角三角形)，故不唯一。
(可參考後面 伍、討論、三裡的 example)

③當$x=y\geq z>0$時，鈍角三角形不可能存在，只能找到銳角三角形滿足條件，故唯一。

3.當H在三角形邊上(△ABC為直角三角形時)，
此時$x\geq y\geq z=0$時(即x,y,z中至少一數為0時)



(1)顯然當 $y>z=0$時，△ABC不存在

(2)當 $x>y=z=0$時， $\angle A=90^\circ$，
故△ABC為直角三角形且三邊長不唯一。
(三邊長要滿足$ax=bc$)

由 1.、2.、3.之討論可進一步得到以下結論：

存在性

當 $x \ge y \ge z > 0$ 或 $x > y = z = 0$ 時，$\triangle ABC$ 存在

唯一性

(1)當 $x = y \ge z > 0$ 時，$\triangle ABC$ 唯一，此時 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，

且三邊長為 $a = x \cdot \dfrac{\sin A}{\cos B \cos C}, b = y \cdot \dfrac{\sin B}{\cos A \cos C}, c = z \cdot \dfrac{\sin C}{\cos A \cos B}$

(2)當 $x > y \ge z > 0$ 時，$\triangle ABC$ 有兩種，並不唯一：

①若為銳角三角形，則 $a = x \cdot \dfrac{\sin A}{\cos B \cos C}, b = y \cdot \dfrac{\sin B}{\cos A \cos C}, c = z \cdot \dfrac{\sin C}{\cos A \cos B}$

②若為鈍角三角形，則 $a = x\tan B + xtanC , b = (x - y\sec C)\csc C , c = (x - z\sec B)\csc B$

(3)當 $x > y = z = 0$ 時，$\triangle ABC$ 有無限多解，且直角三角形三邊長要滿足 $ax = bc$。

當 $x = y \ge z > 0$ 時，存在唯一的 $\triangle ABC$ 使得 x, y, z 恰為 $\triangle ABC$ 的垂心到三邊之距離。

三、內心

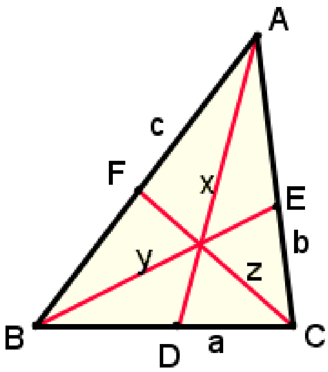
(一)任意給定三長度 x, y, z，是否能找到 $\triangle ABC$，使得 x, y, z 恰為 $\triangle ABC$ 的三條角平分線長？

令 $\overline{AD} = x , \overline{BE} = y , \overline{CF} = z$

由角平分線長公式得知

$x^2 = bc[1-(\frac{a}{b+c})^2]$, $y^2 = ac[1-(\frac{b}{a+c})^2]$, $z^2 = ab[1-(\frac{c}{a+b}$

關於非線性方程組，我們無法利用克拉瑪的方法去解決存在性與唯一性的問題，於是我們尋求另外的證明方式。



首先，我們先證明：**愈短的邊，其所對應的角平分線愈長**

【證明】:

若 $a \le b \le c$，則 $bc \ge ac$ 且 $\dfrac{a}{b+c} \le \dfrac{b}{a+c}$，故 $x^2 = bc[1-(\dfrac{a}{b+c})^2] \ge ac[1-(\dfrac{b}{a+c})^2] = y^2$

同理 $y^2 \ge z^2$，故 $x \ge y \ge z$。因此，愈短的邊，其所對應的角平分線愈長。

存在性：

由角平分線的性質可知：$\overline{AI} = \dfrac{b+c}{a+b+c}x , \overline{BI} = \dfrac{a+c}{a+b+c}y , \overline{CI} = \dfrac{a+b}{a+b+c}z$

根據三、(一)的結果，我們知道當 $\overline{AI} , \overline{BI} , \overline{CI}$ 是任意正數時，$\triangle ABC$ 會存在

即 $\frac{b+c}{a+b+c}x>0$, $\frac{a+c}{a+b+c}y>0$, $\frac{a+b}{a+b+c}z>0 \Rightarrow x>0$, $y>0$, $z>0$

故當 x , y , z 是任意正數時，可以找到△ ABC 滿足 x , y , z 是△ ABC 的三條角平分線長

唯一性 ：

假設若有兩組不全等的△ $A_1B_1C_1$ ，△ $A_2B_2C_2$ 對應相同的角平分線長 x,y,z

(對邊長分別假設為 a_1,b_1,c_1 與 a_2,b_2,c_2)

顯然至少要有二組對邊長度不相同(可由公式得知)，

且由之前的證明可知 $a_1 \le b_1 \le c_1$ ， $a_2 \le b_2 \le c_2$

依照各種可能的情形分類討論：

1.當 $a_1 = a_2 = a$, $b_1 \ne b_2$ 且 $c_1 \ne c_2$ 時，

(1)當 $b_1 > b_2$ 且 $c_1 > c_2$ 時， $x^2 = b_1c_1[1-(\frac{a}{b_1+c_1})^2] > b_2c_2[1-(\frac{a}{b_2+c_2})^2] = x^2$ (矛盾)

(2)當 $b_1 > b_2$ 且 $c_1 < c_2$ 時， $z^2 = ab_1[1-(\frac{c_1}{a+b_1})^2] > ab_2[1-(\frac{c_2}{a+b_2})^2] = z^2$ (矛盾)

(3)當 $b_1 < b_2$ 且 $c_1 < c_2$ 時，因為 b_1,b_2 與 c_1,c_2 皆可互換，故方法同(1) (矛盾)

(4)當 $b_1 < b_2$ 且 $c_1 > c_2$ 時，因為 b_1,b_2 與 c_1,c_2 皆可互換，故方法同(2) (矛盾)

2.當 $a_1 > a_2$ 時，

(1)當 $b_1 = b_2 = b$ 且 $c_1 > c_2$ 時， $y^2 = a_1c_1[1-(\frac{b}{a_1+c_1})^2] > a_2c_2[1-(\frac{b}{a_2+c_2})^2] = y^2$ (矛盾)

(2)當 $b_1 = b_2 = b$ 且 $c_1 < c_2$ 時，方法同 2.(1) (矛盾)

(3)當 $b_1 > b_2$ 且 $c_1 = c_2 = c$ 時， $z^2 = a_1b_1[1-(\frac{c}{a_1+b_1})^2] > a_2b_2[1-(\frac{c}{a_2+b_2})^2] = z^2$ (矛盾)

(4)當 $b_1 < b_2$ 且 $c_1 = c_2 = c$ 時，方法同 2.(3) (矛盾)

(5)當 $b_1 > b_2$ 且 $c_1 > c_2$ 時，

$$x^2 = b_1c_1[1-(\frac{a_1}{b_1+c_1})^2] = b_2c_2[1-(\frac{a_2}{b_2+c_2})^2]$$

$$y^2 = a_1c_1[1-(\frac{b_1}{a_1+c_1})^2] = a_2c_2[1-(\frac{b_2}{a_2+c_2})^2]$$

$$z^2=a_1b_1[1-(\frac{c_1}{a_1+b_1})^2]=a_2b_2[1-(\frac{c_2}{a_2+b_2})^2]$$

因為 $b_1c_1>b_2c_2$, $a_1c_1>a_2c_2$, $a_1b_1>a_2b_2$

所以 $\frac{a_1}{b_1+c_1}>\frac{a_2}{b_2+c_2}$, $\frac{b_1}{a_1+c_1}>\frac{b_2}{a_2+c_2}$, $\frac{c_1}{a_1+b_1}>\frac{c_2}{a_2+b_2}$

$\Rightarrow a_1(b_2+c_2)>a_2(b_1+c_1)$-----① ， $b_1(a_2+c_2)>b_2(a_1+c_1)$-----②

$c_1(a_2+b_2)>c_2(a_1+$ -----③

①+②+③得

$a_1b_2+a_1c_2+b_1a_2+b_1c_2+c_1a_2+c_1b_2>a_2b_1+a_2c_1+b_2a_1+b_2c_1+c_2a_1+c_2b_1$ (矛盾)

(6)當 $b_1>b_2$ 且 $c_1<c_2$ 時， $z^2=a_1b_1[1-(\frac{c_1}{a_1+b_1})^2]>a_2b_2[1-(\frac{c_2}{a_2+b_2})^2]=z^2$ (矛盾)

(7)當 $b_1<b_2$ 且 $c_1<c_2$ 時，方法同(5) (矛盾)

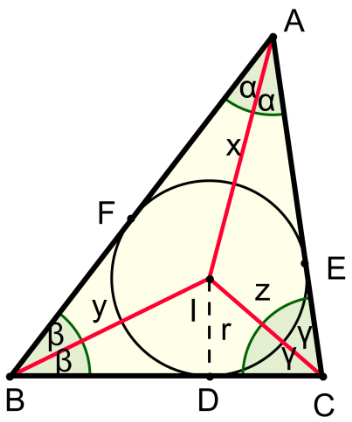
(8)當 $b_1<b_2$ 且 $c_1>c_2$ 時，方法同(6) (矛盾)

由上述討論可知，所有的情形均矛盾，故給定三角平分線長只能決定唯一的三角形

此時三角形的三邊長為方程組 $\begin{cases} x^2=bc[1-(\frac{a}{b+c})^2] \\ y^2=ac[1-(\frac{b}{a+c})^2] \\ z^2=ab[1-(\frac{c}{a+b})^2] \end{cases}$ 的唯一解

當 $x\ge y\ge z>0$ 時，存在唯一的△ ABC 使得 x , y , z 恰為△ ABC 的三條角平分線長。

(二)任意給定三長度 x , y , z ，是否能找到△ ABC ，使得 x , y , z 恰為△ ABC 的內心到三頂點之距離？



已知 $\overline{AI}=x$, $\overline{BI}=y$, $\overline{CI}=z$ ，其中 $x\ge y\ge z>0$

令 $\alpha=\frac{1}{2}\angle A,\beta=\frac{1}{2}\angle B,\gamma=\frac{1}{2}\angle C$ ，可知 $\alpha+\beta+\gamma=90°$

$x\sin\alpha=y\sin\beta=z\sin\gamma=r$ (內切圓半徑)

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{r}{x}>0$, $\sin\beta=\frac{r}{y}>0$, $\sin\gamma=\frac{r}{z}>0$

存在性

由圖可知 $a=y\cos\beta+z\cos\gamma, b=z\cos\gamma+x\cos\alpha, c=x\cos\alpha+y\cos\beta$

$a+b=(y\cos\beta+z\cos\gamma)+(z\cos\gamma+x\cos\alpha)>x\cos\alpha+y\cos\beta=c$

同理 $b+c>a$，且 $c+a>b$

可知任意給定內心到三頂點之距離 x,y,z，其中 $x,y,z>0$，則三角形必定存在

唯一性

《方法一》

假設有另一個與△ABC 不全等的△$A'B'C'$ 且滿足內心到三頂點的距離為 x,y,z

因為此兩三角形不全等，所以至少有一組角度不相等

令 $\angle A>\angle A'$，則 $\alpha>\alpha'$

再由 $r=x\sin\alpha=y\sin\beta=z\sin\gamma$ 與 $r'=x\sin\alpha'=y\sin\beta'=z\sin\gamma'$

可得 $r>r', \beta>\beta', \gamma>\gamma'$

則 $\alpha'+\beta'+\gamma'<\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$(矛盾)

故不可能有兩組不全等的三角形使內心到三頂點的距離相等。

即當 x, y, z 滿足存在條件時，則此△ABC 是唯一的。

《方法二》

由 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$，得

$$\sin\gamma=\sin(90^o-\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{1-(\frac{r}{x})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{r}{y})^2}-\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}$$

$$\Rightarrow\frac{r}{z}=\sqrt{1-(\frac{r}{x})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{r}{y})^2}-\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}\quad\Rightarrow\frac{r}{z}+\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}=\sqrt{1-(\frac{r}{x})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{r}{y})^2}$$

$$\Rightarrow(\frac{r}{z}+\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y})^2=\left[1-(\frac{r}{x})^2\right]\cdot\left[1-(\frac{r}{y})^2\right]\quad\Rightarrow\frac{r^4}{x^2y^2}+2\frac{r^3}{xyz}+\frac{r^2}{z^2}=1-\frac{r^2}{x^2}-\frac{r^2}{y^2}+\frac{r^4}{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow 2\frac{r^3}{xyz}+\frac{r^2}{z^2}+\frac{r^2}{x^2}+\frac{r^2}{y^2}-1=0\quad\Rightarrow 2xyzr^3+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)r^2-x^2y^2z^2$$

令 $f(r)=2xyzr^3+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)r^2-x^2y^2z^2$

利用勘根定理

r	$-\infty$	$-z$	0	z
$f(r)$	負	非負實數	負	正

由勘根定理及虛根成對定理可知 r 在 $(0,z)$ 間恰有一正實根

因為 $\sin\alpha=\frac{r}{x}, \sin\beta=\frac{r}{y}, \sin\gamma=\frac{r}{z}, r>0$

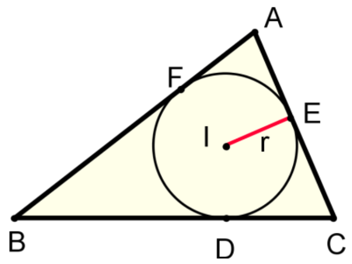
所以 $a=y\cos\beta+z\cos\gamma=y\cdot\sqrt{1-\frac{r^2}{y^2}}+z\cdot\sqrt{1-\frac{r^2}{z^2}}=\sqrt{y^2-r^2}+\sqrt{z^2-r^2}$

同理可推得△ABC的三邊長為$\begin{cases} a=\sqrt{y^2-r^2}+\sqrt{z^2-r^2} \\ b=\sqrt{z^2-r^2}+\sqrt{x^2-r^2} \\ c=\sqrt{x^2-r^2}+\sqrt{y^2-r^2} \end{cases}$，

故當$x \ge y \ge z > 0$時，△ABC會被唯一決定。

當$x \ge y \ge z > 0$時，存在唯一的△ABC使得x, y, z恰為△ABC的內心到三頂點之距離。

(三)任意給定三長度x, y, z，是否能找到△ ABC，使得x, y, z恰為△ ABC的內心到三邊之距離？



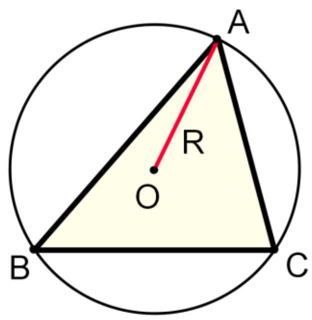
已知內心到三邊等距，令此距離為r，
則可做一半徑為r之圓。
在此圓上適當的取三點，並過此三點對圓作三切線，
使得兩兩不平行，設此三切線之兩兩交點分別為A,B,C，
則△ABC即為所求。
又在圓上取三點作兩兩不平行之三切線的取法有無限多種，
故所得之三角形有無限多種。

$\boxed{\text{存在性}}$：在$x=y=z>0$的條件下，才存在△ABC

$\boxed{\text{唯一性}}$：無限多解

四、外心

(一)任意給定三長度x, y, z，是否能找到△ABC，使得x, y, z恰為△ABC的外心到三頂點之距離？



已知外心到三頂點等距，令此距離為R，
則可做一半徑為R之圓。
在此圓上適當的取相異三點，
設此三點分別為A,B,C，則△ABC即為所求。
又在圓上取相異三點的取法有無限多種，
故所得之三角形有無限多種。

$\boxed{\text{存在性}}$：在$x=y=z>0$的條件下，△ABC才存在

$\boxed{\text{唯一性}}$：無限多解

(二)任意給定三長度x, y, z，是否能找到△ABC，使得x, y, z恰為△ABC的外心到三邊之距離？

由垂心性質知：三角形任一頂點到垂心的距離，等於外心到對邊的距離的2倍
所以△ABC的垂心到三頂點距離分別為$2x, 2y, 2z$
再由二、(二)之討論可知存在性與唯一性的條件。

存在性

由二、(二)之討論知：當$2x \ge 2y \ge 2z > 0$或$2x \ge 2y > 2z = 0$時，△ABC存在。
即當$x \ge y \ge z > 0$或$x \ge y > z = 0$時，△ABC會存在。

唯一性

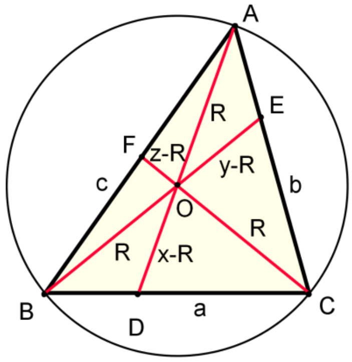
由二、(二)之討論知：
(1)當$2x \ge 2y = 2z > 0$時，△ABC唯一，
即當$x \ge y = z > 0$時，△ABC唯一，此時$a = 2x\tan A, b = 2y\tan B, c = 2z\tan C$
(2)當$2x \ge 2y > 2z = 0$時，△ABC唯一，
即當$x \ge y > z = 0$時，△ABC唯一，此時$a = 2y, b = 2x, c = 2\sqrt{x^2 + y^2}$是直角三角形
(3)當$2x \ge 2y > 2z > 0$時，△ABC有兩種，
即當$x \ge y > z > 0$時，△ABC有兩種，並不唯一：
①若△ABC為銳角三角形，則$a = 2x\tan A, b = 2y\tan B, c = 2z\tan C$
②若△ABC為鈍角三角形，則$a = 2x\tan A, b = 2y\tan B, c = -2z\tan C$
(銳角和鈍角三角形之$\cos A, \cos B, \cos C$滿足的方程式並不相同)

當$x \ge y = z > 0$或$x \ge y > z = 0$時，存在唯一的△ABC使得x, y, z恰為△ABC的外心到三邊之距離。

(三)任意給定三長度x, y, z，是否能找到銳角△ABC，使得x, y, z恰為△ABC的三頂點過外心到對邊的長度？

設O為ΔABC外心，R為ΔABC外接圓半徑
設$\angle OBC = \angle OCB = \alpha, \angle OAC = \angle OCA = \beta$
$\angle OAB = \angle OBA = \gamma$
利用面積的關係，可知

$$\frac{\Delta BOC}{\Delta ABC} + \frac{\Delta AOB}{\Delta ABC} + \frac{\Delta AOC}{\Delta ABC} = 1 \Rightarrow \frac{x-R}{x} + \frac{y-R}{y} + \frac{z-R}{z} = 1$$



整理可得 $R=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

又 $\Delta BOC=\Delta COD+\Delta BOD$

$\Rightarrow \frac{1}{2}R^2\sin\angle BOC=\frac{1}{2}R(x-R)\sin\angle COD+\frac{1}{2}R(x-R)\sin\angle BOD$

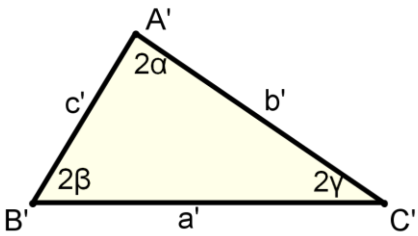
由於 $\angle BOC=180^\circ-2\alpha$, $\angle COD=2\beta$, $\angle BOD=2\gamma$

所以 $R^2\sin 2\alpha=R(x-R)(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$ $\Rightarrow \dfrac{R\sin 2\alpha}{x-R}=\sin 2\beta+\sin 2\gamma$ ______①

同理可知 $\dfrac{R\sin 2\beta}{y-R}=\sin 2\gamma+\sin 2\alpha$ ______②，且 $\dfrac{R\sin 2\gamma}{z-R}=\sin 2\alpha+\sin 2\beta$ ______③

由①$-$②可得 $\dfrac{R\sin 2\alpha}{x-R}-\dfrac{R\sin 2\beta}{y-R}=\sin 2\beta-\sin 2\alpha$ $\Rightarrow \dfrac{x\sin 2\alpha}{x-R}=\dfrac{y\sin 2\beta}{y-R}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha:\sin 2\beta=\dfrac{x-R}{x}:\dfrac{y-R}{y}$



同理可推得 $\sin 2\alpha:\sin 2\beta:\sin 2\gamma=\dfrac{x-R}{x}:\dfrac{y-R}{y}:\dfrac{z-R}{z}$

作以 $1-\dfrac{R}{x}=a'$, $1-\dfrac{R}{y}=b'$, $1-\dfrac{R}{z}=c'$ 為三邊長的三角形

由正弦定理可知此三邊所對應的三內角分別為 $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$

利用尺規作圖取 α , β , γ ，可作出△ $A'B'C'$ ，

再利用相似形的概念，即可作出△ ABC 。

$\boxed{\text{存在性}}$

當 $1-\dfrac{R}{x}$, $1-\dfrac{R}{y}$, $1-\dfrac{R}{z}$ 可構成三角形時，△ ABC 存在

即 $\begin{cases}\left(1-\dfrac{R}{x}\right)+\left(1-\dfrac{R}{y}\right)>1-\dfrac{R}{z}\\ \left(1-\dfrac{R}{y}\right)+\left(1-\dfrac{R}{z}\right)>1-\dfrac{R}{x}\\ \left(1-\dfrac{R}{x}\right)+\left(1-\dfrac{R}{z}\right)>1-\dfrac{R}{y}\end{cases}$ ， 其中 $R=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ ，經計算整理可得 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{3}{z}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{3}{y}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{3}{x}\end{cases}$

$\boxed{\text{唯一性}}$

①在△ BCO 中， $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a}{\sin(\beta+\gamma)}=\dfrac{a}{\cos\alpha}=2R\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{a}{2R}$

$\Rightarrow \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{a^2}{2R^2}-1$

②在△$A'B'C'$中利用餘弦定理得 $\cos 2\alpha = \dfrac{(\frac{y-R}{y})^2+(\frac{z-R}{z})^2-(\frac{x-R}{x})^2}{2\cdot\frac{y-R}{y}\cdot\frac{z-R}{z}}$

由①、②可得 $\dfrac{(\frac{y-R}{y})^2+(\frac{z-R}{z})^2-(\frac{x-R}{x})^2}{2\cdot\frac{y-R}{y}\cdot\frac{z-R}{z}}=\dfrac{a^2}{2R^2}-1$，其中 $R=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2R^2}=\frac{(\frac{y-R}{y})^2+(\frac{z-R}{z})^2-(\frac{x-R}{x})^2+2\cdot\frac{y-R}{y}\cdot\frac{z-R}{z}}{2\cdot\frac{y-R}{y}\cdot\frac{z-R}{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2R^2}=\frac{\left[(\frac{y-R}{y})+(\frac{z-R}{z})\right]^2-(\frac{x-R}{x})^2}{2\cdot\frac{y-R}{y}\cdot\frac{z-R}{z}}=\frac{(\frac{y-R}{y})+(\frac{z-R}{z})-(\frac{x-R}{x})}{2\cdot\frac{y-R}{y}\cdot\frac{z-R}{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2R^2}=\frac{2\left(1-\frac{R}{y}\right)+2\left(1-\frac{R}{z}\right)-1}{2\left(1-\frac{R}{y}\right)\left(1-\frac{R}{z}\right)} \quad \Rightarrow \frac{a^2}{R^2}=\frac{3-2\frac{R}{y}-2\frac{R}{z}}{\left(1-\frac{R}{y}\right)\left(1-\frac{R}{z}\right)}$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{3-\frac{4xz}{xy+yz+xz}-\frac{4xy}{xy+yz+xz}}{\left(1-\frac{2xz}{xy+yz+xz}\right)\left(1-\frac{2xy}{xy+yz+xz}\right)}\times\left(\frac{2xyz}{xy+yz+xz}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{3yz-xz-xy}{(xy+yz-xz)(yz+xz-xy)}\times(xy+yz+xz)\times\left(\frac{2xyz}{xy+yz+xz}\right)^2$$

$$\Rightarrow a=2xyz\sqrt{\frac{3yz-xz-xy}{(xy+yz-xz)(yz+xz-xy)(xy+yz+xz)}}$$

同理 $b=2xyz\sqrt{\dfrac{3xz-yz-xy}{(xy+xz-yz)(yz+xz-xy)(xy+yz+xz)}}$ ，

$$c=2xyz\sqrt{\frac{3xy-xz-yz}{(xy+yz-xz)(xy+xz-yz)(xy+yz+xz)}}$$

故當 x,y,z 滿足存在條件時，銳角△ABC會被唯一決定

當 x,y,z 滿足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{3}{z}$ ，$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{3}{y}$ ，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x}$ 時，存在唯一的銳角△ABC使得 x, y, z 恰為△ABC的三頂點過外心到對邊的長度。

五、旁心

(一)任意給定三長度 x, y, z，是否能找到△ABC，使得 x, y, z 恰為△ABC 中某一個旁心到三頂點之距離？

已知 $x \geq y \geq z$，

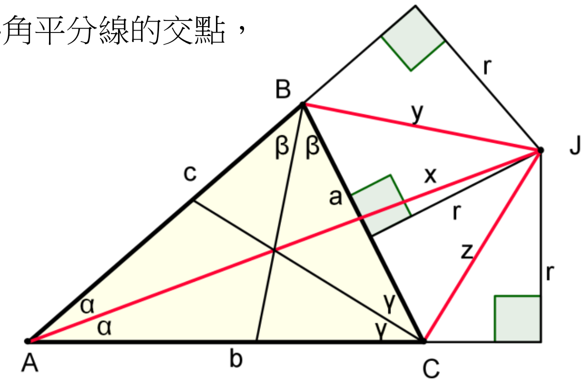
因為旁心 J 是△ABC 一內角平分線與兩外角平分線的交點，

可知 $\angle ABJ$ 與 $\angle ACJ$ 必均為鈍角，

所以 $\overline{AJ} > \overline{BJ}$, $\overline{AJ} > \overline{CJ}$，

故 $\overline{AJ} = x$ 必為內角平分線所對應的長度，

且 $x > y \geq z > 0$



存在性

在 $x > y \geq z > 0$ 的條件下，△ABC 才存在

唯一性

設 $\angle A$ 所對的旁切圓的半徑為 r，其中 $r > 0$

且 $\alpha = \frac{1}{2}\angle A, \beta = \frac{1}{2}\angle B, \gamma = \frac{1}{2}\angle C$, $\alpha + \beta + \gamma = 90^o$

$\Rightarrow r = x\sin\alpha = y\sin(\alpha+\gamma) = z\sin(\alpha+\beta)$ $\Rightarrow r = x\cos(\beta+\gamma) = y\cos\beta = z\cos\gamma > 0$

$\Rightarrow \cos(\beta+\gamma) = \frac{r}{x}, \cos\beta = \frac{r}{y}, \cos\gamma = \frac{r}{z}$，其中 $0 < r < z$

因為 $\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$ $\Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z} - \sqrt{1-(\frac{r}{y})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{r}{z})^2}$

整理後得到 $2xyzr^3 - (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)r^2 + x^2y^2z^2 = 0$

令 $f(t) = 2xyzt^3 - (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)t^2 + x^2y^2z^2$

利用勘根定理

r	$-\infty$	0	z	∞
$f(r)$	負	正	負	正

由勘根定理可知 $f(t) = 0$ 在 $(0, z)$ 之間恰有一實根 r

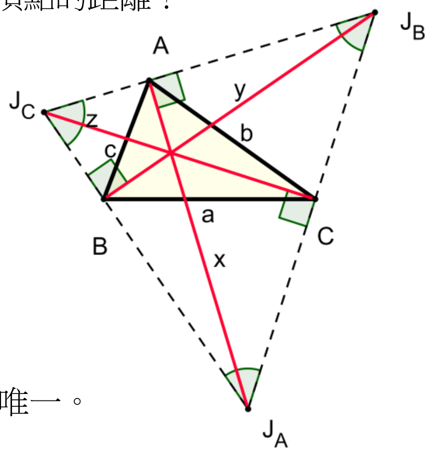
由圖形可知三邊長為：

$a = \sqrt{y^2 - r^2} + \sqrt{z^2 - r^2}$ ，$b = \sqrt{x^2 - r^2} - \sqrt{z^2 - r^2}$ ，$c = \sqrt{x^2 - r^2} - \sqrt{y^2 - r^2}$

故當 x, y, z 滿足存在條件時，△ABC 會被唯一決定

當 $x > y \geq z > 0$ 時，存在唯一的△ABC 使得 x, y, z 恰為△ABC 中某一個旁心到三頂點之距離

(二)設 J_A , J_B , J_C 分別為 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 對應的旁心。任意給定三長度 x , y , z ，是否能找到 $\triangle\ ABC$ ，使得 x , y , z 恰為為 $\triangle\ ABC$ 的三旁心到對應頂點的距離？



如圖 $\overline{AJ_A}=x$, $\overline{BJ_B}=y$, $\overline{CJ_C}=z$

由垂心性質：三角形的內心是它旁心三角形的垂心

因為 $\overline{AJ_A}$, $\overline{BJ_B}$, $\overline{CJ_C}$ 為 $\triangle J_A J_B J_C$ 的三高

可由二、(一)的討論知：

當 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ 滿足三角不等式時，$\triangle J_A J_B J_C$ 會存在且唯一。

存在性

因為 $\angle J_B J_A J_C=\frac{\angle B+\angle C}{2}<\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2}=90^\circ \quad \Rightarrow \angle J_B J_A J_C<90^\circ$

同理 $\angle J_B J_C J_A<90^\circ$, $\angle J_A J_B J_C<90^\circ$

再加上二、(一)中的討論中可知：當 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ 構成銳角三角形時，$\triangle ABC$ 會存在。

唯一性

設 $\overline{J_A J_B}=w$, $\overline{J_B J_C}=u$, $\overline{J_C J_A}=v$ ，由二、(一)可知 $u=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$, $v=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}$, $w=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}$ ，

其中 $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$

又 $\cos J_A=\frac{v^2+w^2-u^2}{2vw}=\frac{(w\cos J_A)^2+(v\cos J_A)^2-a^2}{2(w\cos J_A)(v\cos J_A)}$

故 $a^2=(v\cos J_A)^2+(w\cos J_A)^2-\cos^2 J_A(v^2+w^2-u^2)=u^2\cos^2 J_A$

$$\Rightarrow a=u\cos J_A \Rightarrow a=u\cdot\frac{v^2+w^2-u^2}{2vw}=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}\right)^2}{2\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}\right)\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}\right)}$$

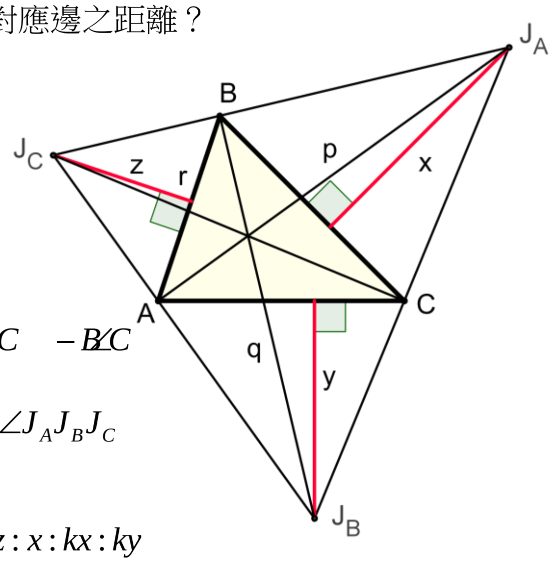
$$=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{yz}{x}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

同理 $b=v\cos J_B=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{xz}{y}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{y^2}\right)$ ，$c=w\cos J_C=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{xy}{z}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)$

故當 x,y,z 滿足存在條件時，$\triangle ABC$ 會被唯一決定

當 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ 構成銳角三角形時，存在唯一的 $\triangle ABC$ 使得 x , y , z 恰為 $\triangle ABC$ 中三旁心到對應頂點的距離。

(三)設 J_A , J_B , J_C 分別為 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 對應的旁心。任意給定三長度 x , y , z ，是否能找到 $\triangle ABC$ ，使得 x , y , z 恰為 $\triangle ABC$ 的三旁心到對應邊之距離？



如圖 $d(J_A,\overline{BC})=x, d(J_B,\overline{CA})=y, d(J_C,\overline{AB})=z$

令 $\overline{J_AA}=p, \overline{J_BB}=q, \overline{J_CC}=r$ ，

易知 $\overline{J_AC}:\overline{J_BC}=\Delta J_ABC:\Delta J_BBC=x:y$

同理 $\overline{J_CB}:\overline{J_AB}=z:x$ 且 $\overline{J_BA}:\overline{J_CA}=y:z$

$\because \angle J_ABC=90^\circ-\angle J_BBC=90^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC-\angle BCA)$

$$=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)=\angle J_AJ_BJ_C$$

又 $\angle BJ_AC=\angle J_BJ_AC$ ，故 $\Delta J_ABC \sim \Delta J_AJ_BJ_C$

令 $\overline{J_AB}:\overline{J_AC}=1:k$ ，則 $\overline{J_CB}:\overline{J_AB}:\overline{J_AC}:\overline{J_BC}=z:x:kx:ky$

即 $1:k=\overline{J_AB}:\overline{J_AC}=\overline{J_AJ_B}:\overline{J_AJ_C}=k(x+y):(x+z) \quad \Rightarrow k=\sqrt{\frac{x+z}{x+y}}$

又 $\Delta J_ABC \sim \Delta J_AJ_BJ_C$ ，所以 $x:p=\overline{J_AB}:\overline{J_AJ_B}=x:k(x+y)$

故 $p=k(x+y)=\sqrt{(x+y)(x+z)}$ ，同理 $q=\sqrt{(x+y)(y+z)}$ ， $r=\sqrt{(x+z)(y+z)}$

其中 $p\ge q\ge r(\because x\ge y\ge z)$

存在性

由五、(二)的討論可知：當 $\frac{1}{p},\frac{1}{q},\frac{1}{r}$ 構成銳角三角形時，$\triangle ABC$ 會存在

即當 $\sqrt{x+y},\sqrt{y+z},\sqrt{z+x}$ 構成銳角三角形時，$\triangle ABC$ 會存在

又任意給定 $x\ge y\ge z>0$ ，均能使得 $\sqrt{x+y},\sqrt{y+z},\sqrt{z+x}$ 構成銳角三角形

故當 $x\ge y\ge z>0$ 時，$\triangle ABC$ 必存在。

唯一性

由五,(二)的討論可知 ：

令 $\overline{J_AJ_B}=w, \overline{J_BJ_C}=u, \overline{J_CJ_A}=v$ ，則 $u=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{p}, v=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{q}, w=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{r}$

其中 $p=\sqrt{(x+y)(x+z)}$ ， $q=\sqrt{(x+y)(y+z)}$ ， $r=\sqrt{(x+z)(y+z)}$

其中 $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r})(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{r})(-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})}=\frac{2\sqrt{xy+yz+zx}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ ，

則 $a=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{qr}{p}\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{x}{(x+y)(x+z)}=\frac{x(y+z)}{\sqrt{xy+yz+zx}}$ ，

同理 $b=\frac{y(x+z)}{\sqrt{xy+yz+zx}}$ ， $c=\frac{z(x+y)}{\sqrt{xy+yz+zx}}$

故當 x,y,z 滿足存在條件時，$\triangle ABC$ 會被唯一決定

當 $x\ge y\ge z>0$ 時，存在唯一的 $\triangle ABC$ 使得 x , y , z 恰為 $\triangle ABC$ 中三旁心到對應邊的距離。

伍、討論

一、回憶一下肆、二、(二)的問題：任意給定三長度x, y, z，是否能找到△ABC，使得x, y, z恰為△ABC的垂心到三頂點之距離？

在此問題中，有幾個特殊的情況：

1.當$x=y=z>0$時，可利用二、(二)、1.中的所得的方程式：

$2yz\cos^3 A+(x^2+y^2+z^2)\cos^2 A-x^2=0$

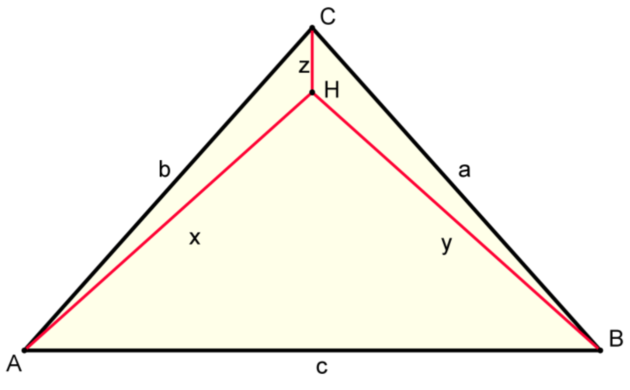
將$x=y=z$代入，得$2x^2\cos^3 A+3x^2\cos^2 A-x^2=0$

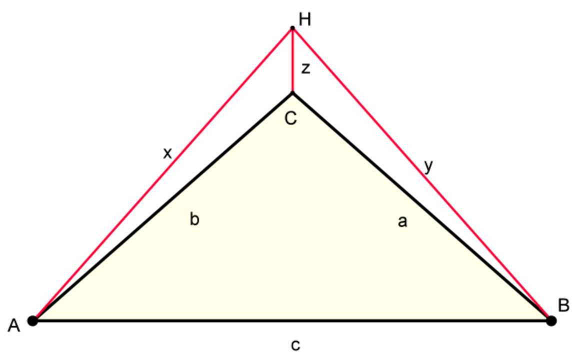
$\Rightarrow 2\cos^3 A+3\cos^2 A-1=0 \Rightarrow (\cos A+1)^2(2\cos A-1)=0 \Rightarrow \cos A=\dfrac{1}{2},-1$(不合)

$\Rightarrow \angle A=60^o$，同理可得$\angle B=60^o, \angle C=60^o$

故$a=b=c=x\tan 60^o=\sqrt{3}x$，即當$x=y=z>0$時，△$ABC$為正三角形。

2.當$x=y>z>0$時，





可利用肆、二、(二)、1.中所得的方程式求出$\cos A, \cos B, \cos C$，
故等腰銳角△ABC必定存在(如上左圖)
可利用參、二、(二)、2.中所得的方程式求出$\cos A, \cos B, \cos C$，
故等腰鈍角△ABC必定存在(如上右圖)

二、在肆、二、(二)的討論中，我們知道當 $x \ge y > z > 0$ 時，$\triangle ABC$ 有兩種，並不唯一。以下舉實例來驗證：

$\boxed{實例}$若 $x=4, y=3, z=2\ (x>y>z)$，可找到兩個三角形使得 x, y, z 分別為垂心到三頂點的距離，且此兩個三角形其中一個是銳角三角形，另一個是鈍角三角形。

說明：由肆、二、(二)、1.中 1.的推導，銳角$\triangle ABC$ 滿足

$$\begin{cases} 2xy(\cos C)^3+(x^2+y^2+z^2)(\cos C)^2-z^2=0\,,\,0<\cos C<1 \\ 2xz(\cos B)^3+(x^2+y^2+z^2)(\cos B)^2-y^2=0\,,\,0<\cos B<1 \\ 2yz(\cos A)^3+(x^2+y^2+z^2)(\cos A)^2-x^2=0\,,\,0<\cos A<1 \end{cases}$$

用 $x=4, y=3, z=2$ 代入，再利用勘根定理去逼近到小數點第二位，

可得 $\cos C \approx 0.33$, $\cos B \approx 0.49$, $\cos A \approx 0.66$

再利用電算器的反三角函數功能鍵，可得 $\angle C \approx 70.64°$, $\angle B \approx 60.66°$, $\angle A \approx 48.7°$

故 $\angle A+\angle B+\angle C \approx 180°$ (會有一些小誤差是因為取近似值)

又由肆、二、(二)、2.中的推導，對鈍角$\triangle ABC$ 滿足

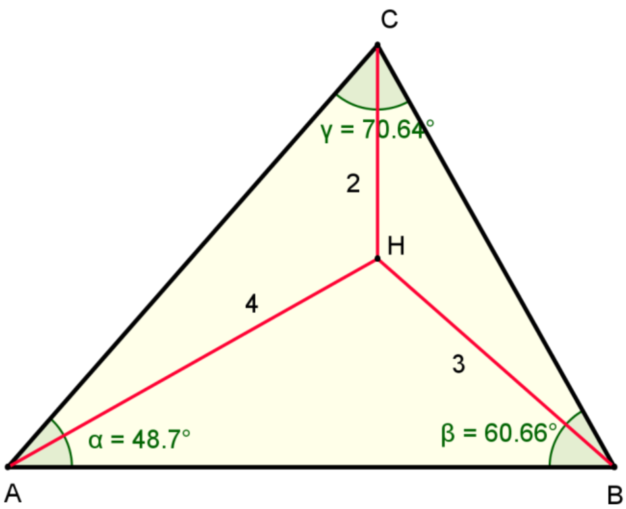
$$\begin{cases} 2xy(\cos C)^3+(x^2+y^2+z^2)(\cos C)^2-z^2=0\,,\,-1<\cos C<0 \\ 2xz(\cos B)^3-(x^2+y^2+z^2)(\cos B)^2+y^2=0\,,\,0<\cos B<1 \\ 2yz(\cos A)^3-(x^2+y^2+z^2)(\cos A)^2+x^2=0\,,\,0<\cos A<1 \end{cases}$$

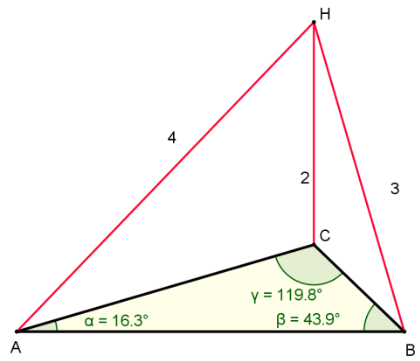
用 $x=4, y=3, z=2$ 代入，再利用勘根定理去逼近到小數點第二位，

可得 $\cos C \approx -0.48$, $\cos B \approx 0.72$, $\cos A \approx 0.96$

再利用電算器的反三角函數功能鍵，可得 $\angle C \approx 119.8°$, $\angle B \approx 43.9°$, $\angle A \approx 16.3°$

故 $\angle A+\angle B+\angle C \approx 180°$ (會有一些小誤差是因為取近似值)





我們的方程式確實說明了：

當給定 $x, y, z\ (x>y>z)$ 分別為垂心到三頂點的距離時，的確有兩個三角形會滿足所給條件，此兩個三角形其中一個是銳角三角形，另一個是鈍角三角形。

三、回憶肆、二、(三)的問題：任意給定三長度 x , y , z，是否能找到△ ABC，使得 x , y , z 恰為△ ABC 的垂心到三邊之距離？

在肆、二、(三)的討論中，我們知道當 $x > y \geq z > 0$ 時，△ ABC 有兩種，並不唯一。以下舉實例來驗證：

$\boxed{\text{實例}}$若 $x = 10 , y = 2 , z = 1 \,(x > y > z)$ ，可找到兩個三角形使得 x, y, z 分別為垂心到三邊的距離，且此兩個三角形其中一個是銳角三角形，另一個是鈍角三角形。

說明：由肆、二、(三)、1.中的推導，

銳角△ ABC 滿足 $\cos A = \dfrac{t}{10} , \cos B = \dfrac{t}{2} , \cos C = t$

用 $x = 10 , y = 2 , z = 1$ 代入 $\dfrac{2}{xyz}t^3 + (\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2})t^2 - 1 = 0$

則 t 即為 $\dfrac{2}{20}t^3 + \dfrac{126}{100}t^2 - 1 = 0$ 的正根

再利用勘根定理去逼近到小數點第二位，可得 $t \approx 0.86$，

經過計算可得 $a \approx 26.94 , b \approx 24.41 , c \approx 13.80$

又由肆、二、(三)、2.中的推導，

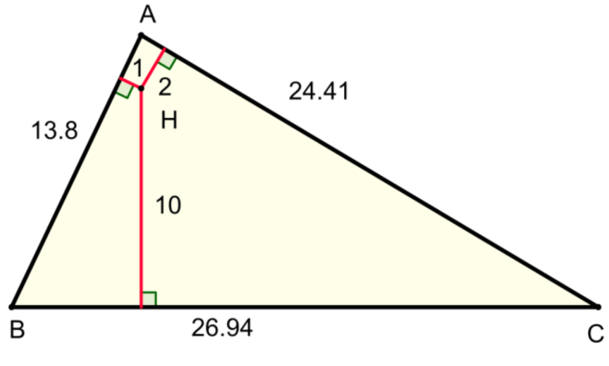
鈍角△ ABC 滿足 $\cos A = -\dfrac{s}{10} , \cos B = \dfrac{s}{2} , \cos C = s$

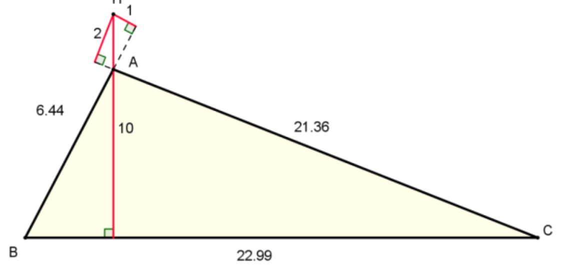
用 $x = 10 , y = 2 , z = 1$ 代入 $\dfrac{2}{\mathrm{xyz}}\mathrm{t}^3 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{x}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{y}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{z}^2}\right)\mathrm{t}^2 + 1 = 0$

則 s 即為 $\dfrac{2}{20}t^3 - \dfrac{126}{100}t^2 + 1 = 0$ 在 $(\dfrac{1}{5}, 1)$ 的根

再利用勘根定理去逼近到小數點第二位，可得 $s \approx 0.93$，

經過計算可得 $a \approx 22.99 , b \approx 21.36 , c \approx 6.44$





我們的方程式確實說明了：

當給定 $x, y, z \; (x > y > z)$ 分別為垂心到三邊的距離時，的確有兩個三角形會滿足所給條件，此兩個三角形其中一個是銳角三角形，另一個是鈍角三角形。

陸、結論

一、重心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述（三邊長)
三中線長	x,y,z 滿足三角不等式	是	$a=\sqrt{(8y^2+8z^2-4x^2)/9}$，$b=\sqrt{(8x^2+8z^2-4y^2)/9}$ $c=\sqrt{(8x^2+8y^2-4z^2)/9}$
重心到三頂點的距離	x,y,z 滿足三角不等式	是	$a=\sqrt{2y^2+2z^2-x^2}$，$b=\sqrt{2z^2+2x^2-y^2}$ $c=\sqrt{2x^2+2y^2-z^2}$
重心到三邊的距離	$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 滿足三角不等式	是	$a=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$, $b=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}$, $c=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}$ (註)

二、垂心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述（三邊長)
三高	$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 滿足三角不等式	是	$a=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$, $b=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}$, $c=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}$ (註)
垂心到三頂點的距離	$x\ge y=z>0$	是	$a=x\tan A, b=y\tan B, c=z\tan C$
	$x\ge y>z=0$	是	$a=y, b=x, c=\sqrt{x^2+y^2}$ (是直角三角形)
	$x\ge y>z>0$	否	銳角三角形時：$a=x\tan A, b=y\tan B, c=z\tan C$
			鈍角三角形時：$a=x\tan A, b=y\tan B, c=-z\tan C$
垂心到三邊的距離	$x=y\ge z>0$	是	$a=x\cdot\frac{\sin A}{\cos B\cos C}, b=y\cdot\frac{\sin B}{\cos A\cos C}, c=z\cdot\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$
	$x>y\ge z>0$	否	銳角△：$a=x\cdot\frac{\sin A}{\cos B\cos C}, b=y\cdot\frac{\sin B}{\cos A\cos C}, c=z\cdot\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$
			鈍角△：$a=x\tan B+xtanC, b=(x-y\sec C)\csc C$ $c=(x-z\sec B)\csc B$
	$x>y=z=0$	否	$\triangle ABC$ 有無限多解，但三邊長要滿足 $ax=bc$

(註) $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$

三、內心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述（三邊長)
三角平分線長	$x \ge y \ge z > 0$	是	a,b,c 為滿足 $x^2 = bc[1-(\frac{a}{b+c})^2]$ ，$y^2 = ac[1-(\frac{b}{a+c})^2]$ $z^2 = ab[1-(\frac{c}{a+b})^2]$ 的唯一解
內心到三頂點的距離	$x \ge y \ge z > 0$	是	$a = \sqrt{y^2 - r^2} + \sqrt{z^2 - r^2}$ ，$b = \sqrt{z^2 - r^2} + \sqrt{x^2 - r^2}$ $c = \sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{y^2 - r^2}$ ，其中 r 為內切圓半徑
內心到三邊的距離	$x = y = z > 0$	否	無限多解

四、外心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述（三邊長)
外心到三頂點的距離	$x = y = z > 0$	否	無限多解
外心到三邊的距離	$x \ge y = z > 0$	是	$a = 2x\tan A$, $b = 2y\tan B$, $c = 2z\tan C$
	$x \ge y > z = 0$	是	$a = 2y$, $b = 2x$, $c = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ （是直角三角形)
	$x \ge y > z > 0$	否	銳角三角形時：$a = 2x\tan A$, $b = 2y\tan B$, $c = 2z\tan C$ 鈍角三角形時：$a = 2x\tan A$, $b = 2y\tan B$, $c = -2z\tan C$
三頂點過外心到對邊的長度	銳角$\triangle ABC$ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{3}{z} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{3}{y} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x} \end{cases}$	是	$a = 2xyz\sqrt{\frac{3yz - xz - xy}{(xy+yz-xz)(yz+xz-xy)(xy+yz+xz)}}$ $b = 2xyz\sqrt{\frac{3xz - yz - xy}{(xy+xz-yz)(yz+xz-xy)(xy+yz+xz)}}$ $c = 2xyz\sqrt{\frac{3xy - xz - yz}{(xy+yz-xz)(xy+xz-yz)(xy+yz+xz)}}$

五、旁心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述 (三邊長)
某旁心到三頂點的距離	$x>y\geq z>0$	是	$a=\sqrt{y^2-r^2}+\sqrt{z^2-r^2}$ ，$b=\sqrt{x^2-r^2}-\sqrt{z^2-r^2}$ $c=\sqrt{x^2-r^2}-\sqrt{y^2-r^2}$ ，r 為 $\angle A$ 所對旁切圓半徑
三旁心到對應頂點的距離	$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 構成銳角三角形	是	$a=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{yz}{x}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)$，$b=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{xz}{y}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{y^2}\right)$ $c=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{xy}{z}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)$ (註)
三旁心到對應邊的距離	$x\geq y\geq z>0$	是	$a=\frac{x(y+z)}{\sqrt{xy+yz+zx}}, b=\frac{y(x+z)}{\sqrt{xy+yz+zx}}, c=\frac{z(x+y)}{\sqrt{xy+yz+zx}}$

(註) $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$

柒、參考資料及其他

李虎雄、陳昭地、黃登源、李政貴、儲啟政、朱亮儒、林礽堂、柯明忠、陳嘯虎、張敏雪(2012)。*高中數學選修數學(甲版)下冊*。新北市。康熹出版社。

游森棚(主編)(2013)。*高中數學第三冊*。臺南市。翰林出版社。

游森棚(主編)(2013)。*高中數學第三冊教師手冊*。臺南市。翰林出版社。

楊王孝(2012)。*高中數學第一冊*。新北市。全華出版社。

【評語】040409

本件作品從一道高中試題出發，推廣研究一序列的問題：給定三角形重心、垂心、外心或內心到三頂點或三邊的距離 x、y、z，討論三角形存在的條件，以及存在時是否唯一。整體來說，這是一篇做得還算完整的作品。對於唯一決定的三角形邊常接可以找出 x、y、z 的函數型態，對於三角形不唯一的情形也都有舉例說明。但是，有很多地方的論證，只證明唯一性，並未證明存在性。以下舉出三處作為參考。

第 8-10 頁中，證明給定垂心到三頂點的距離三角形唯一存在，觀其證明，只證明三角形的三個角可以用 x、y、z 決定，這是證明唯一性，但是並未證明這三個角確實是三角形的三內角，也就是，並未說明其和為 180 度，所以實際上並未完整證明三角形的。

第 11-14 頁中，證明給定垂心到邊的距離三角形唯一存在，也有同樣的問題。

第 14 頁中，證明給定三條角平分線長度十三角型存在，也有同樣問題。首先，所列出來的公式為隱函數型態，其存在性並未保證，其次，解出來的 a、b、c 是否滿足三角不等式，也未證明。