# 中華民國第54屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

---

高中組　數學科

040408

**團團圓圓**

學校名稱：國立基隆女子高級中學

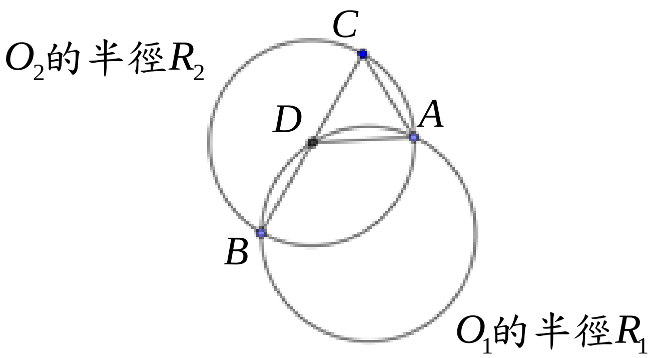
| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 高二 陳佳琳 | 郭俊雄 |
| 高二 郭佳燕 | 郭仲祐 |
| 高二 羅文婕 | |


關鍵詞：半徑比、軌跡

# 團團圓圓

## 摘要

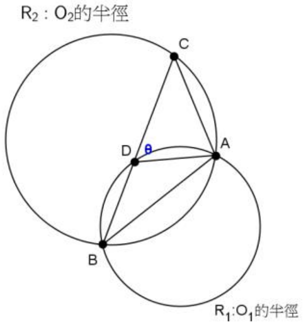

原本的題目(如下圖)，平面上兩圓相交於 $A,B$ 兩點，今在圓 $O_2$ 上取一點 $C$，作弦 $\overline{BC}$ 交圓 $O_1$ 於 $D$ 點。若 $\overline{AD}=\overline{CD}=3$ 且 $\overline{AC}=2$，則 $\frac{R_2}{R_1}=\frac{2}{3}$。




從這個題目開始延伸，首先改變不同的條件觀察兩圓的半徑比，由原本 $\overline{AD}=\overline{CD}$ 的等腰三角形改變成不同的特殊三角形觀察半徑比。若將圓 $O_1$ 固定，$D$ 為 $\overline{BC}$ 中點，$A,D,B$ 分別為圓 $O_1$ 上的動點時，觀察 $O_2$ 的圓心軌跡，發現圓心的軌跡是一直線，或是一圓。當圓心軌跡為一圓時，我們深入尋找它的半徑和圓 $O_1$ 半徑比，發現比值為 $O_1$ 半徑比 $\overline{AD}$ 長度；若 $C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點時，當圓心軌跡為圓，半徑和圓 $O_1$ 半徑比值為 $\frac{mR_1}{AD}$。


## 壹、研究動機

高三學測模考剛考完，老師給我們練習試題，剛好與最近教的圓有關，引起我們的興趣。原本的題目如下：如圖，平面上兩圓相交於 $A,B$ 兩點，今在圓 $O_2$ 上取一點 $C$，作弦 $\overline{BC}$ 交圓 $O_1$ 於 $D$ 點。若 $\overline{AD}=\overline{CD}=3$ 且 $\overline{AC}=2$，則 $\frac{R_2}{R_1}=\frac{2}{3}$。



我們發現利用正弦定理即可證明：連接 $\overline{AB}$ 且令 $\angle ABC=\theta_1$ ， $\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta_1}=2R_2$ ，

$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta_1}=2R_1 \Rightarrow \dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\dfrac{2}{3}$ 。從這個證明的過程中，可以知道兩圓的半徑比就是線段 $AC$ 與線段 $AD$ 的長度比，我們想找出，是否有其他因素影響兩圓半徑比；又當圖中三角形相對位置改變時，兩圓的相對位置又有何改變？帶著好奇心，我們開始研究之旅。

# 貳、研究目的

一、若保持等腰條件，但線段長度不限制，尋找半徑比值與三角形邊長關係

二、若 $D$ 為 $\overline{BC}$ 上的特殊點，尋找半徑比值與三角形邊長關係。

三、固定圓 $O_1$ ，當 $\Delta ABD$ 變動時，探討 $\Delta ABC$ 的外接圓圓心軌跡。

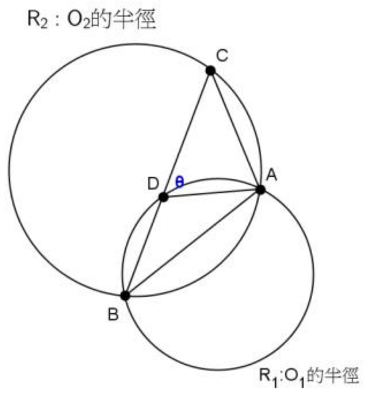
# 參、研究設備及器材

紙、筆、橡皮擦、黑板、粉筆、GeoGebra4、電腦。

# 肆、研究過程或方法

一、保持等腰條件，不限制線段長度：

如圖，平面上兩圓相交於 $A,B$ 兩點，今在圓 $O_2$ 上取一點 $C$，作弦 $\overline{BC}$ 交圓 $O_1$ 於 D 點。若 $\overline{AD}=\overline{CD}$ 且 $\angle CDA=\theta$ ，則 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ 。




證明：利用餘弦定理

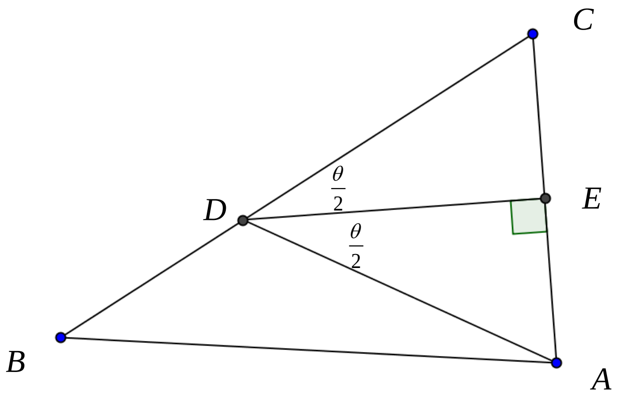
$$\cos\theta=\frac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AD}\times\overline{CD}}=\frac{\overline{AD}^2+\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AD}^2}=\frac{2\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AD}^2}$$

$$\Rightarrow 2\overline{AD}^2\cos\theta=2\overline{AD}^2-\overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2=2\overline{AD}^2(1-\cos\theta)=2\overline{AD}^2\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}=4\overline{AD}^2 sin^2\frac{\theta}{2}$$

故 $\overline{AC}=2\overline{AD}\ \sin\dfrac{\theta}{2}$

□

另證：做∠ADC 的角平分線交 $\overline{\text{AC}}$ 於 $E$，




$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{2\overline{AE}}{\overline{AD}}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

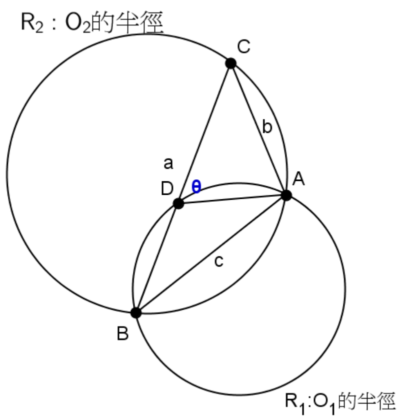
□

若 $\overline{AD}$ 未必等於 $\overline{CD}$ 時，兩圓半徑比值又是如何改變？我們從上學期三角函數之餘弦定理推得中線定理及角平分線定理應用在 $D$ 點上討論。

二、$D$ 為 $\overline{BC}$ 上的特殊點：

如圖，平面上兩圓相交於 $A,B$ 兩點，今在圓 $O_2$ 上取一點 $C$，作弦 $\overline{BC}$ 交圓 $O_1$ 於 D 點。

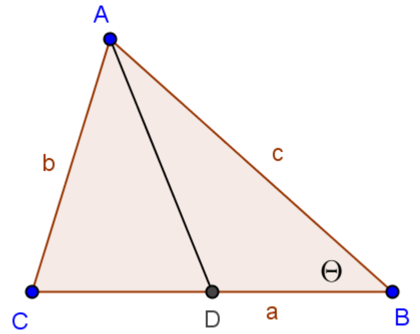
$\overline{AC}=b,\ \overline{BC}=a$ ，$\overline{AB}=c$ 。




(一) 若 $D$ 為 $\overline{BC}$ 之中點，則 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\dfrac{2b}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$ 。

證明： 利用餘弦定理，令 $\angle ABC=\theta$

$$cos\theta = \frac{\frac{a^2}{4} + C^2 - \overline{AD}^2}{2 \times \frac{1}{2} a \times c} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$



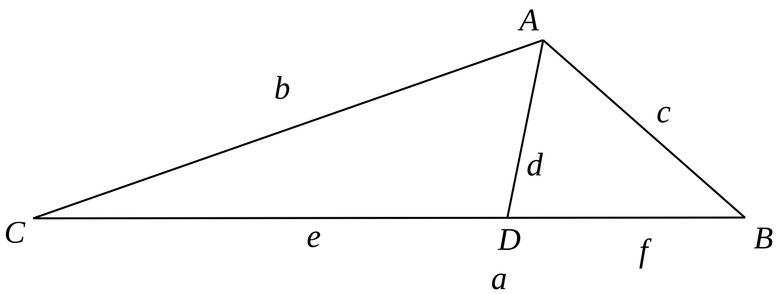

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + c^2 - \overline{AD}^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}b^2$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{2b}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$ 。

□

(二) 若 $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，且 $\overline{AD} = d$ ，$\overline{DC} = e$ ，$\overline{DB} = f$ ，則 $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{b}{\sqrt{bc - ef}}$ 。




證明： 令 $\angle CAB = \theta$

$$\frac{1}{2}\ b\ c\ sin\theta = \frac{1}{2}\ b\ d\ sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\ c\ d\ sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 2bc\cos\frac{\theta}{2} = b \times d + c \times d = d \times (b + c)$$

$$\Rightarrow d = \frac{2bc}{b+c}\ cos\frac{\theta}{2} = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}(1+cos\theta)}$$

$$= \sqrt{\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})} = \sqrt{\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2} \times \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right]} = \sqrt{bc - \frac{ab}{b+c} \times \frac{ac}{b+c}} = \sqrt{bc - ef}$$

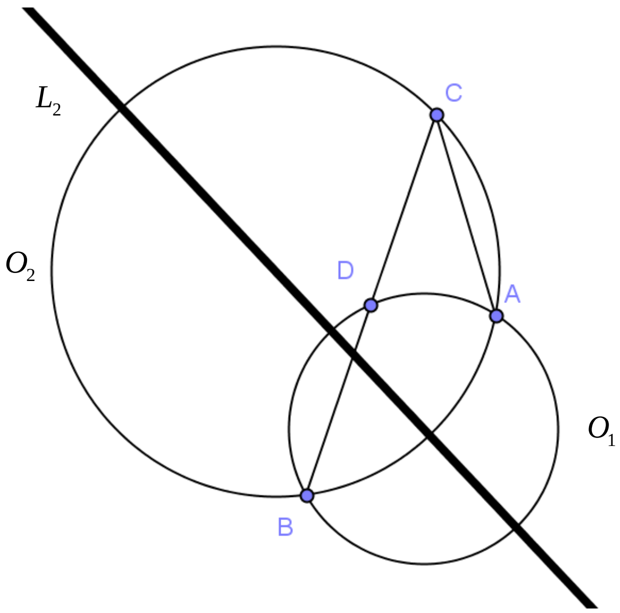
$$\therefore \overline{AD} = d = \sqrt{bc - ef}\ ,\ \frac{R_2}{R_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{b}{\sqrt{bc - ef}}$$

□

若固定圓$O_1$的大小，$A,B$為圓$O_1$上兩定點，則存在無限多個點$C$使得$\overline{BC}$交圓$O_1$於$D$點，過$A,B,C$三點的圓$O_2$與圓$O_1$的半徑比已不是定值，此時兩圓的相對位置會是什麼關係？

三、當$D$為$\overline{BC}$之中點，觀察圓心軌跡：

(一) 平面上有一定圓$O_1$及圓上兩定點$A,B$，$D$為圓$O_1$上一動點，$C$為以$D$為對稱中心，$B$的對稱點。若$O_2$為過$A,B,C$三點的圓，則$O_2$的圓心軌跡為一直線$L_2$，且$L_2$為$\overline{AB}$的中垂線。




證明：$O_2$的圓心必在$\overline{BC}$的中垂線與$\overline{AC}$的中垂線之交點，

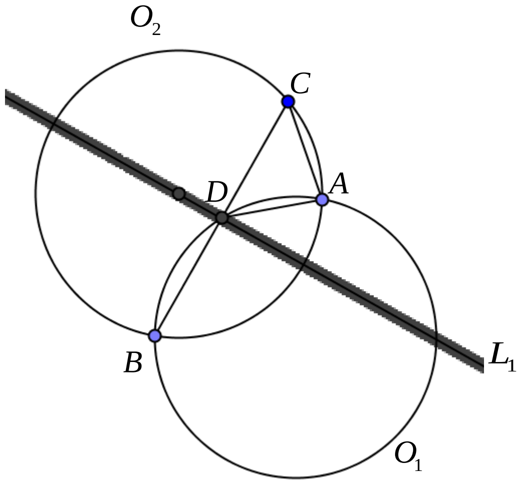
又$\overline{AB}$為定弦$\Rightarrow\overline{AB}$的中垂線定線$L_2$，

$\therefore O_2$的圓心軌跡會在$L_2$上且$L_2$為$\overline{AB}$的中垂線，

但當$A$，$B$，$C$三點共線時，圓$O_2$不存在。

□

(二) 平面上有一定圓$O_1$及圓上兩定點$B,D$，$A$為圓$O_1$上一動點，$C$為以$D$為對稱中心，$B$的對稱點。若$O_2$為過$A,B,C$三點的圓，則$O_2$的圓心軌跡為一直線$L_1$，且$L_1$為$\overline{BC}$的中垂線。




證明：$O_2$ 的圓心必在 $\overline{BC}$ 的中垂線與 $\overline{AC}$ 的中垂線之交點，

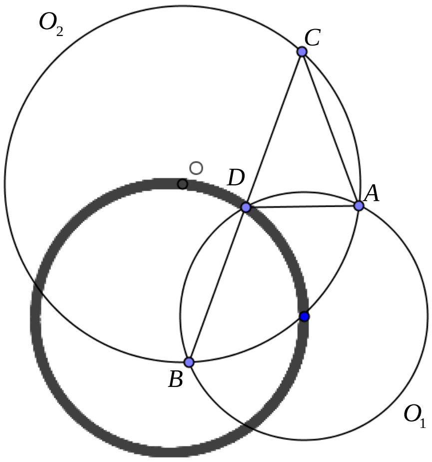
又 $\overline{BC}$ 為定弦 $\Rightarrow$ $\overline{BC}$ 的中垂線定線 $L_1$

$\therefore$ $O_2$ 的圓心軌跡會在 $L_1$ 上且 $L_1$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線

但當 $D$ 點與 $A$ 點重疊時，圓 $O_2$ 不存在。

$\square$

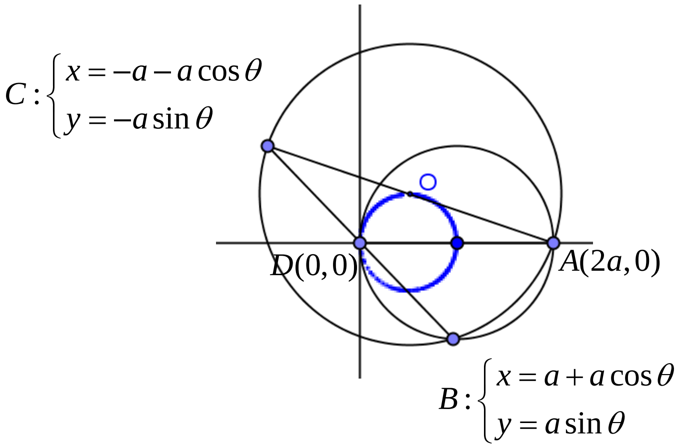
(三) 平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓。




若 $D$ 為 $\overline{BC}$ 之中點，利用 GGB 畫圖，發現 $O_2$ 的圓心軌跡為圓 $O$ ，而且，圓心軌跡圓的半徑與圓 $O_1$ 的半徑比值並不等於 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$。如何用嚴謹的數學語言證明是我們遇到的困境，不妨讓 $A,D$ 為圓上的特殊點，經過討論，逐步找到答案。

1. $A,D$ 為直徑的兩端點：

平面上有一定圓$O_1$及直徑上兩端點$A,D$，$B$為圓$O_1$上一動點，$C$為以$D$為對稱中心，$B$的對稱點。若$O_2$為過$A,B,C$三點的圓，則$O_2$的圓心軌跡為一圓$O$，且$\frac{R}{R_1}=\frac{1}{2}$，其中$R,R_1$分別為$O,O_1$的半徑。




證明：令$A(2a,0),D(0,0)$，並架坐標如上圖。

$\because O_2$為$\Delta ABC$ 之外接圓

令$O_1:(x-a)^2+y^2=a^2$， 取$B(a+acos\theta,a\sin\theta)$

$\because D(0,0)\therefore C(-a-\cos\theta,-a\sin\theta)$

求$\overline{BC}$之中垂線$L_1$：

$$m_{\overline{BC}}=\frac{-a\sin\theta-a\sin\theta}{-a-a\cos\theta-a-a\cos\theta}=\frac{2a\sin\theta}{2a+2a\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

令$L_1\perp\overline{BC}$ $\therefore m_{L_1}=-(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta})$

$\therefore$ $\overline{BC}$之中垂線$L_1:(1+\cos\theta)x+\sin\theta y=0$

求$\overline{AC}$之中垂線$L_2$：

$$m_{\overline{AC}}=\frac{a\sin\theta}{2a+a+a\cos\theta} \qquad m_{L_2}=\frac{-(3a+a\cos\theta)}{a\sin\theta}$$

$L_2:(3a+a\cos\theta)x+(a\sin\theta)y=t$

將$\overline{AC}$中點座標$\left(\frac{2a+(-a-\cos\theta)}{2},\frac{0+(-a\sin\theta)}{2}\right)$代入$L_2$求$t$，

$$t=(3a+a\cos\theta)\left(\frac{a-a\cos\theta}{2}\right)+(a\sin\theta)\left(\frac{-a}{2}\sin\theta\right)=$$

$$=a(3+\cos\theta)\left[\frac{a(1-\cos\theta)}{2}\right]-\frac{a^2}{2}(\sin^2\theta)$$

$$=\frac{a^2}{2}(3+\cos\theta)(1-\cos\theta)-\frac{a^2}{2}\sin^2\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}(3-2\cos\theta-\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=a^2\left(1-\cos\theta\right)$$

$$L_2: a\left(3+\cos\theta\right)x+a\sin\theta y=a^2\left(1-\cos\theta\right)\ \Rightarrow\left(3+\cos\theta\right)x+\sin\theta y=a\left(1-\cos\theta\right)$$

$\therefore \overline{AC}$ 之中垂線 $L_2$ ： $(3+\cos\theta)x+\sin\theta y=a(1-\cos\theta)$

解 $L_1$ 及 $L_2$ 的聯立方程式：

$$\Delta=\begin{vmatrix}(1+\cos\theta) & \sin\theta\\ (3+\cos\theta) & \sin\theta\end{vmatrix}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta\sin\theta-3\sin\theta-\cos\theta\sin\theta=-2\sin\theta$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & \sin\theta\\ a(1-\cos\theta) & \sin\theta\end{vmatrix}=-a(1-\cos\theta)\sin\theta$$

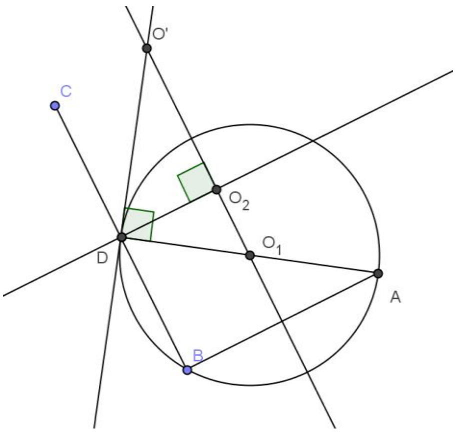
$$\Delta_y=\begin{vmatrix}(1+\cos\theta) & 0\\ (3+\cos\theta) & a(1-\cos\theta)\end{vmatrix}=(1+\cos\theta)\times a(1-\cos\theta)=a(1-\cos^2\theta)=a\sin^2\theta$$

交點 $O$: $\begin{cases}x=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\cos\theta\\ y=-\frac{a}{2}\sin\theta\end{cases}$ $\Rightarrow$ 圓 $O$: $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$， 得 $\frac{R}{R_1}=\frac{1}{2}$

□

另證(利用反演變換)：

過 $D$ 點作 $\overline{AD}$ 的垂線 $L$ ，與 $\overline{AB}$ 中垂線交於 $O'$ ，並令 $O_2$ 為 $\Delta ABC$ 外接圓圓心。根據直角三角形子母相似性質，$\overline{O_1O_2}\times\overline{O_1O'}=\overline{O_1D}^2=R_1^2$ ，即 $O'$ 為 $O_2$ 以圓 $O_1$ 為反演圓的反演點，因 $O'$ 的軌跡為直線 $L$ ，所以 $O_2$ 的軌跡為以 $\overline{O_1D}$ 為直徑的圓，且 $\frac{R}{R_1}=\frac{1}{2}$



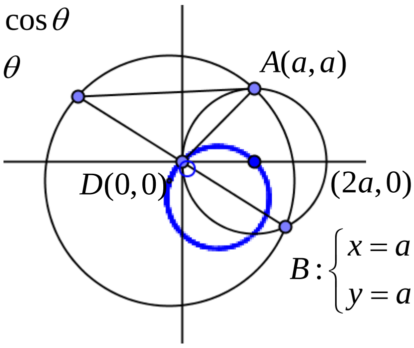

□

2. $\overline{AD}$ 為圓心角為 90°的弦：

平面上有一定圓 $O_1$ ， $\overline{AD}$ 為圓 $O_1$ 的弦，其圓心角為 90°。$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓 $O$，且

$\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，其中 $R$ , $R_1$ 分別為 $O$ , $O_1$ 的半徑。

$C:\begin{cases} x=-a-a\cos\theta \\ y=-a\sin\theta \end{cases}$




$B:\begin{cases} x=a+a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$

證明：令 $A(a,a)$, $D(0,0)$，並架坐標如上圖。

$\overline{BC}$ 之中垂線 $L_1$ ： $(1+\cos\theta)x+\sin\theta y=0$

$\overline{AC}$ 之中垂線 $L_2$ ： $(2+\cos\theta)x+(1+\sin\theta)y=-a\cos\theta$

解 $L_1$ 及 $L_2$ 的聯立方程式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ 2+\cos\theta & 1+\sin\theta \end{vmatrix}=1+\cos\theta-\sin\theta$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & \sin\theta \\ -a\cos\theta & 1+\sin\theta \end{vmatrix}=a\cos\theta\sin\theta$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1+\cos\theta & 0 \\ 2+\cos\theta & -a\cos\theta \end{vmatrix}=-a(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$x=\frac{a\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}=\frac{a}{2}(1-\cos\theta+\sin\theta)=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{2}a}{2}\cos(\theta+45°)$$

$$y=\frac{-a(1+\cos\theta)\cos\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}=\frac{-a(1+\cos\theta)(1-\cos\theta+\sin\theta)}{2\sin\theta}$$

$$=(-\frac{a}{2})(\frac{(1-\cos^2\theta+(1+\cos\theta)\sin\theta)}{\sin\theta}$$

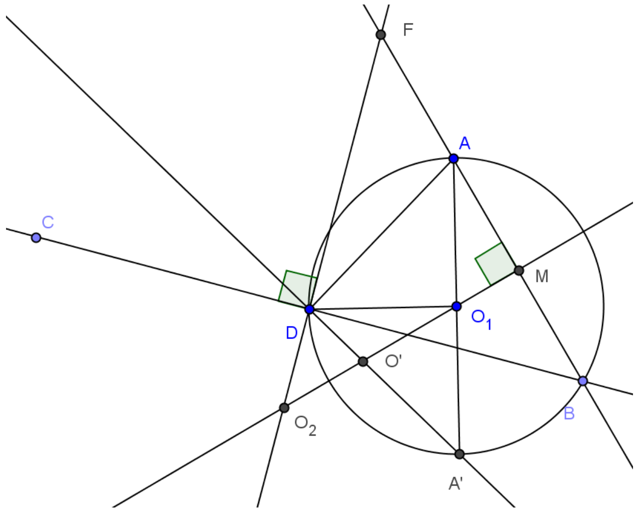
$$=(-\frac{a}{2})(1+\cos\theta+\sin\theta)=-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{2}a}{2}\sin(\theta+45°)$$

$L_1$ 及 $L_2$ 的交點為 $O:\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\cos(\theta+45°) \\ y=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\sin(\theta+45°) \end{cases}$，即 $O$ 的軌跡為一圓，

且 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

□

另證(利用反演變換)：




過 $D$ 點作 $\overline{AD}$ 的垂線 $L$ ，與 $\overline{AB}$ 中垂線交於 $O'$ ，並令 $O_2$ 為 $\Delta ABC$ 外接圓圓心。

$F$ 為直線 $AB$ 與 $\overline{BC}$ 中垂線的交點， $A'$ 為 $A$ 對 $O_1$ 的對稱點， $M$ 為 $\overline{AB}$ 中點。

考慮 $B$ 在優弧 $AD$ 及在劣弧 $AD$ 兩種情形。

( $B$ 在優弧 $AD$ )

$\Delta FDB \sim \Delta FMO_2 \Rightarrow 45^o = \angle FBD = \angle FO_2M$

考慮 $\Delta O_1DO'$ 與 $\Delta O_1O_2D$ ，

因為 $\angle O_1DA' = \angle AA'D = 45^o$ ，即 $\angle O_1DO' = \angle O_1O_2D$ ，

所以 $\Delta O_1DO' \sim \Delta O_1O_2D$ ，因此 $\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1O'} = \overline{O_1D}^2 = R_1^2$

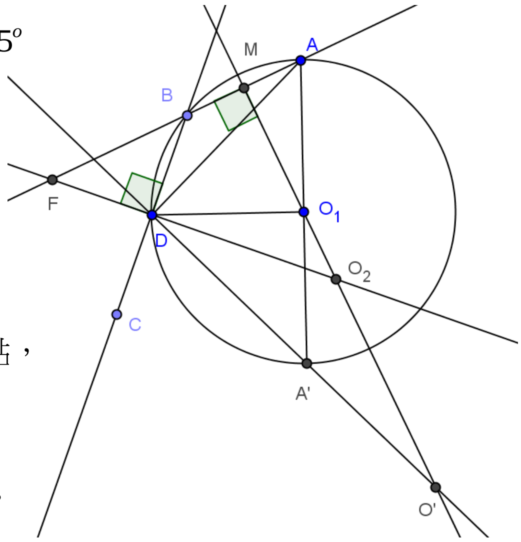
( $B$ 在劣弧 $AD$ ，如右圖)

$\Delta FDB \sim \Delta FMO_2 \Rightarrow \angle FO_2M = \angle FBD = 180^o - \angle ABD = 45^o$

考慮 $\Delta O_1DO'$ 與 $\Delta O_1O_2D$ ，

因為 $\angle O_1DA' = \angle O_1A'D = 45^o$ ，即 $\angle O_1DO' = \angle O_1O_2D$ ，

所以 $\Delta O_1DO' \sim \Delta O_1O_2D$ ，因此 $\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1O'} = \overline{O_1D}^2 = R_1^2$

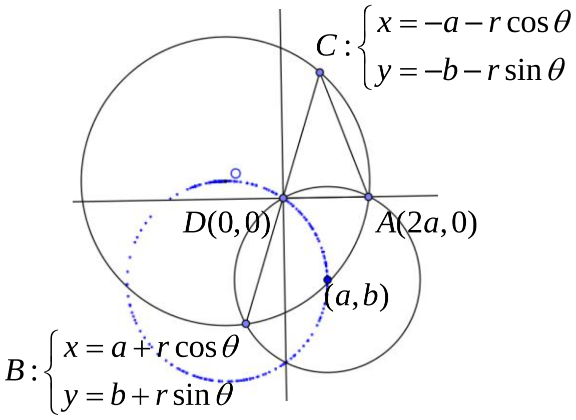



綜合以上兩種情形， $O'$ 為 $O_2$ 以圓 $O_1$ 為反演圓的反演點，
因 $O'$ 的軌跡為直線 $L$ ，所以 $O_2$ 的軌跡為一圓。

當 $\overline{BD}$ 為圓 $O_1$ 的直徑時， $R = \overline{O_1O'} = \dfrac{R_1}{\sqrt{2}}$ ，即 $\dfrac{R}{R_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。

□

3. $A,D$ 為圓上任意點：
平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓 $O$ ，且 $\dfrac{R}{R_1} = \dfrac{R_1}{\overline{AD}}$ ，其中 $R$ , $R_1$ 分別為 $O$ , $O_1$ 的半徑。




證明：令 $A(2a,0)$ , $D(0,0)$ ,圓 $O_1$ 的圓心座標為 $(a,b)$ ,半徑為 $r$，並架坐標如上圖。

$\overline{BC}$ 之中垂線： $(a+r\cos\theta)x+(b+r\sin\theta)y=0$

$\overline{AC}$ 之中垂線： $(3a+r\cos\theta)x+(b+r\sin\theta)y=a^2-b^2-ar\cos\theta-br\sin\theta$

解兩中垂線交點：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & b+r\sin\theta \\ 3a+r\cos\theta & b+r\sin\theta \end{vmatrix}=(b+r\sin\theta)(-2a)$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & b+r\sin\theta \\ a^2-b^2-ar\cos\theta-br\sin\theta & b+r\sin\theta \end{vmatrix}=-(b+r\sin\theta)(a^2-b^2-ar\cos\theta-br\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_y&=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & 0 \\ 3a+r\cos\theta & a^2-b^2-ar\cos\theta-br\sin\theta \end{vmatrix} \\
&=(a+r\cos\theta)(a^2-b^2-ar\cos\theta-br\sin\theta) \\
&=(a+r\cos\theta)(a(a-r\cos\theta)-b(b+r\sin\theta)) \\
&=a(a^2-r^2\cos^2\theta)-(a+r\cos\theta)b(b+r\sin\theta) \\
&=a(r^2\sin^2\theta-b^2)-(a+r\cos\theta)b(b+r\sin\theta) \\
&=a(r\sin\theta-b)(r\sin\theta+b)-(a+r\cos\theta)b(b+r\sin\theta) \\
&=-(b+r\sin\theta)(2ab+br\cos\theta-ar\sin\theta)
\end{aligned}$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a}-\frac{r}{2a}\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\phi)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2a}-\frac{a^2+b^2}{2a}\cos(\theta-\phi)\text{ ,其中}\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

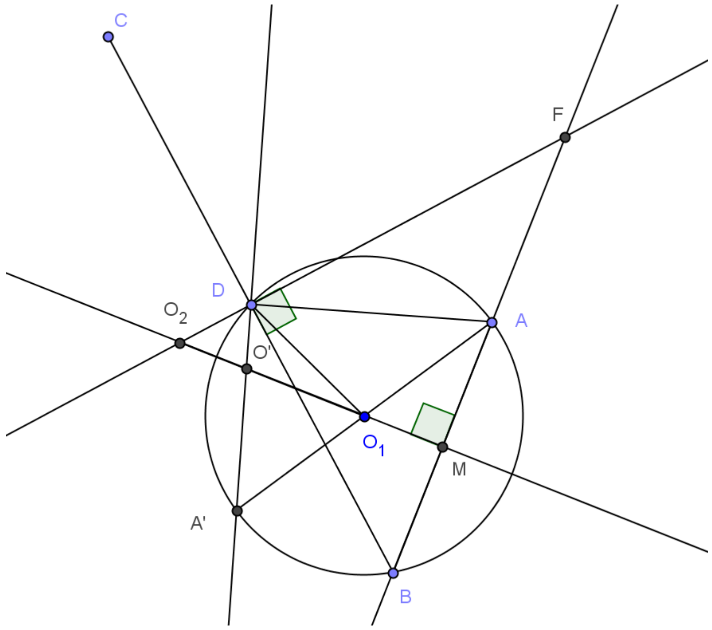
$$y=b-\frac{r}{2a}(a\sin\theta-b\cos\theta)=b-\frac{r}{2a}\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta-\phi)$$

$$=b-\frac{a^2+b^2}{2a}\sin(\theta-\phi)\text{ ,其中}\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\therefore$圓 $O$ 之為圓心 $(\frac{a^2-b^2}{2a},b)$ ， 半徑為 $\frac{a^2+b^2}{2a}$ ， 得 $\frac{R}{R_1}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}=\frac{R_1}{AD}$

□

另證(利用反演變換)：




過 $D$ 點作 $\overline{AD}$ 的垂線 $L$ ，與 $\overline{AB}$ 中垂線交於 $O'$ ，並令 $O_2$ 為 $\Delta ABC$ 外接圓圓心。

$F$ 為直線 $AB$ 與 $\overline{BC}$ 中垂線的交點，$A'$ 為 $A$ 對 $O_1$ 的對稱點， $M$ 為 $\overline{AB}$ 中點。

考慮 $B$ 在優弧 $AD$ 及在劣弧 $AD$ 兩種情形。

( $B$ 在優弧 $AD$ )

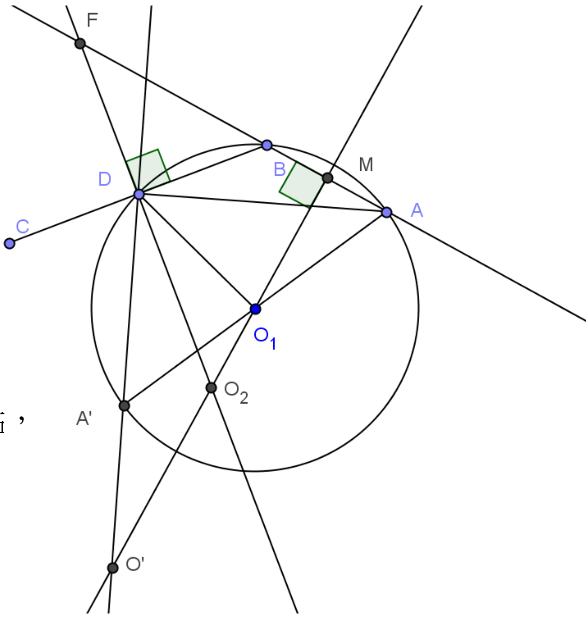
$\Delta FDB \sim \Delta FMO_2 \Rightarrow \angle FBD = \angle FO_2M$

考慮 $\Delta O_1DO'$ 與 $\Delta O_1O_2D$ ，

因為 $\angle O_1DA' = \angle O_1A'D = \angle ABD = \angle O_1O_2F$ ，即 $\angle O_1DO' = \angle O_1O_2D$ ，

所以 $\Delta O_1DO' \sim \Delta O_1O_2D$ ，因此 $\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1O'} = \overline{O_1D}^2 = R_1^2$

( $B$ 在劣弧 $AD$ ，如右圖)




$\Delta FDB \sim \Delta FMO_2 \Rightarrow \angle FBD = \angle FO_2M$

考慮 $\Delta O_1DO'$ 與 $\Delta O_1O_2D$ ，

因為 $\angle O_1DA' = \angle O_1A'D$ ，

$\angle O_1A'D = \angle FBD$ ( $ABDA'$ 為圓內接四邊形)，

$\angle FBD = \angle FO_2M$ ，即 $\angle O_1DO' = \angle O_1O_2D$ ，

所以 $\Delta O_1DO' \sim \Delta O_1O_2D$ ，因此 $\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1O'} = \overline{O_1D}^2 = R_1^2$

綜合以上兩種情形， $O'$ 為 $O_2$ 以圓 $O_1$ 為反演圓的反演點，因 $O'$ 的軌跡為直線 $L$ ，所以 $O_2$ 的軌跡為一圓。

當 $\overline{BD}$ 為圓 $O_1$ 的直徑時，$\overline{O_1O'} = \dfrac{1}{2}\overline{AD}$ ，

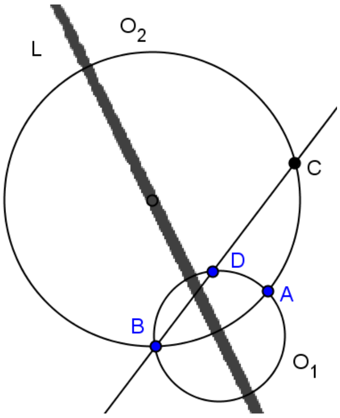
因此 $\overline{O_1O_2} = \dfrac{R_1^2}{\overline{O_1O'}} = \dfrac{2R_1^2}{\overline{AD}}$ ，即 $\dfrac{R}{R_1} = \dfrac{\dfrac{R_1^2}{\overline{AD}}}{R_1} = \dfrac{R_1}{\overline{AD}}$

□

四、當 $D$ 不是 $\overline{BC}$ 中點，觀察圓心軌跡：

(一) 平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,B$，$D$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的

$m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一直線 $L$，且 $L$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線。




證明：$O_2$ 的圓心必在 $\overline{BC}$ 的中垂線與 $\overline{AC}$ 的中垂線之交點，

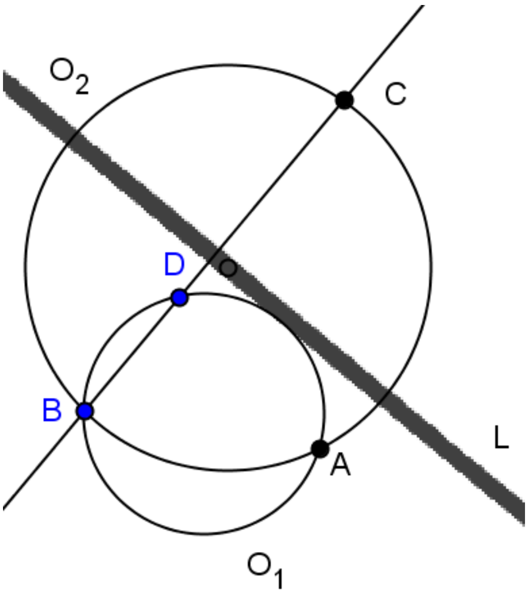
又 $\overline{AB}$ 為定弦 $\Rightarrow$ $\overline{AB}$ 的中垂線定線 $L$，

$\therefore O_2$ 的圓心軌跡會在 $L$ 上且 $L$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，

但當 $A$，$B$，$C$ 三點共線時，圓 $O_2$ 不存在。

□

(二) 平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $B,D$，$A$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一直線 $L$，且 $L$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線。




證明：$O_2$ 的圓心必在 $\overline{BC}$ 的中垂線與 $\overline{AC}$ 的中垂線之交點，

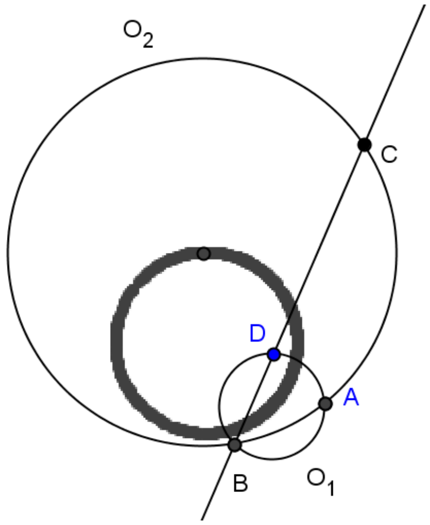
又 $\overline{BD}$ 為定弦 $\Rightarrow$ 交點構成 $\overline{BC}$ 的中垂線定線 $L$

$\therefore O_2$ 的圓心軌跡會在 $L$ 上且 $L$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線

但當 $A$，$B$，$C$ 三點共線時，圓 $O_2$ 不存在。

□

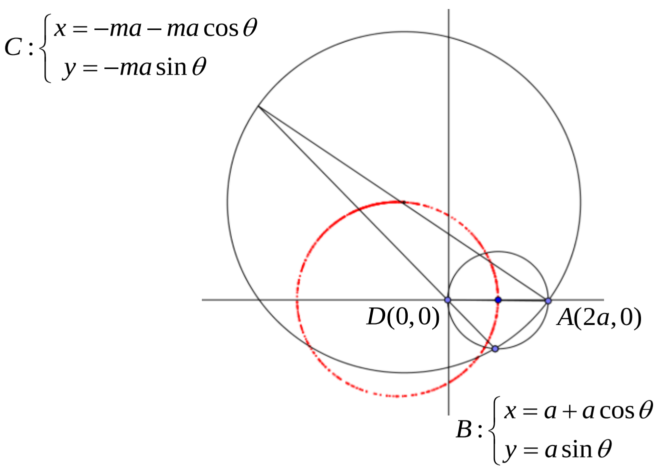
(三) 平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓。




利用 GGB 畫圖，發現 $O_2$ 的圓心軌跡仍為圓，我們利用特殊點及特殊比例逐步討論結果。

1. $A,D$ 為直徑的兩端點，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=m$：

平面上有一定圓 $O_1$ 及直徑上兩端點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓 $O$，且 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{m}{2}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。




證明：令 $A(2a,0)$, $D(0,0)$，並架坐標如上圖。

令 $O_1:(x-a)^2+y^2=a^2$， 取 $B(a+acos\theta, a\sin\theta)$

$\because D(0,0)$ ， $\overline{BD}:\overline{DC}=1:m$

$\therefore C(x,y)=(-ma-ma\cos\theta,-ma\sin\theta)$

求 $\overline{BC}$ 之中垂線 $L_1$ ：

$\because m_{\overline{BC}}=\dfrac{-ma\sin\theta-a\sin\theta}{-ma-ma\cos\theta-a-a\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

且 $\overline{BC}$ 中點為 $\left(\dfrac{-ma-ma\cos\theta+a+a\cos\theta}{2},\dfrac{-ma\sin\theta+a\sin\theta}{2}\right)$

$$=\left(\frac{-ma(1+\cos\theta)+a(1+\cos\theta)}{2},\frac{a\sin\theta(1-m)}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{(a-ma)(1+\cos\theta)}{2},\frac{a\sin\theta(1-m)}{2}\right)$$

$\therefore \overline{BC}$ 之中垂線 $L_1$ 為 $y-\dfrac{a\sin\theta(1-m)}{2}=-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\left(x-\dfrac{(a-ma)(1+\cos\theta)}{2}\right)$

$\Rightarrow L_1$ ： $\sin\theta y-\dfrac{a\sin^2\theta(1-m)}{2}=-(1+\cos\theta)x+\dfrac{(a-ma)(1+\cos\theta)^2}{2}$

$\Rightarrow L_1$ ： $(1+\cos\theta)x+\sin\theta y=\dfrac{a(1-m)(\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta)}{2}$

$\Rightarrow L_1$ ： $(1+\cos\theta)x+\sin\theta y=\dfrac{(1-m)a(2+2\cos\theta)}{2}$

$\Rightarrow \overline{BC}$ 之中垂線 $L_1$ 為 $(1+\cos\theta)x+\sin\theta y=(1-m)a(1+\cos\theta)$

求 $\overline{AC}$ 中垂線 $L_2$ ：

又 $m_{\overline{AC}}=\dfrac{ma\sin\theta}{2a+ma+ma\cos\theta}=\dfrac{m\sin\theta}{2+m+m\cos\theta}\Rightarrow m_{L_2}=-\dfrac{2+m+m\cos\theta}{m\sin\theta}$

且 $\overline{AC}$ 之中點為 $\left(\dfrac{2a-ma-ma\cos\theta}{2},\dfrac{0-ma\sin\theta}{2}\right)$

$\therefore L_2$ ： $y-\left(-\dfrac{ma\sin\theta}{2}\right)=-\dfrac{2+m+m\cos\theta}{m\sin\theta}\left(x-\dfrac{2a-ma-ma\cos\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow m\sin\theta y+\dfrac{m^2a\sin^2\theta}{2}=-(2+m+m\cos\theta)\left(x-\dfrac{2a-ma-ma\cos\theta}{2}\right)$

$\therefore \overline{AC}$ 之中垂線 $L_2$ ： $(m+2+m\cos\theta)x+m\sin\theta y=a(2-m^2-m^2\cos\theta)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}(1+\cos\theta) & \sin\theta\\ (2+m+m\cos\theta) & m\sin\theta\end{vmatrix}=(1+\cos\theta)(m\sin\theta)-(\sin\theta)(2+m+m\cos\theta)=-2\sin\theta$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}(1-m)a(1+\cos\theta) & \sin\theta\\ a(2-m^2-m^2\cos\theta) & m\sin\theta\end{vmatrix}=(1-m)a(1+\cos\theta)(m\sin\theta)-(\sin\theta)a\left(2-m^2-m^2\cos\theta\right)$$

$$=(ma+ma\cos\theta-2a)\sin\theta$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}(1+\cos\theta) & (1-m)a(1+\cos\theta)\\ (2+m+m\cos\theta) & a(2-m^2-m^2\cos\theta)\end{vmatrix}$$

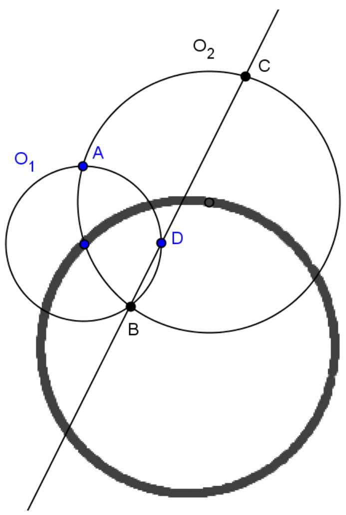
$$=(1+\cos\theta)\left(a\left(2-m^2-m^2\cos\theta\right)-(2+m+m\cos\theta)(1-m)a(1+\cos\theta)\right)=ma\sin^2\theta$$

$L_1$與$L_2$交點為$O$：$\begin{cases}x=-\dfrac{(m-2)a}{2}-\dfrac{ma}{2}\cos\theta\\ y=-\dfrac{ma}{2}\sin\theta\end{cases}$，即$O$的軌跡為一圓，且$\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{m}{2}$。

□

2. $\overline{AD}$為圓心角為 $90^\circ$的弦，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=m$：

平面上有一定圓$O_1$，$\overline{AD}$為圓$O_1$的弦，其圓心角為 $90^\circ$。$B$ 為圓$O_1$上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點。若$O_2$為過 $A,B,C$ 三點的圓，則$O_2$的圓心軌跡為一圓 $O$，且$\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{\sqrt{2}m}{2}$，其中$R$, $R_1$分別為$O$, $O_1$的半徑。




證明：令 $A(a,a), D(0,0)$，並架坐標如上圖。

$\overline{BC}$之中垂線$L_1$：$(1+\cos\theta)x+\sin\theta y=a(1-m)(1+\cos\theta)$

$\overline{AC}$ 之中垂線 $L_2$ ： $(1+m+m\cos\theta)x+(1+m\sin\theta)y=a[1-m^2(1+\cos\theta)]$

解 $L_1$ 及 $L_2$ 的聯立方程式：

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+\cos\theta & \sin\theta\\ 1+m+m\cos\theta & 1+m\sin\theta\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(1+\cos\theta) & \sin\theta\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=1+\cos\theta-\sin\theta$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}a(1-m)(1+\cos\theta) & \sin\theta\\ a\left[1-m^2(1+\cos\theta)\right] & (1+m\sin\theta)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a(1-m)(1+\cos\theta) & \sin\theta\\ a(1-m-m\cos\theta) & 1\end{vmatrix}$$

$$=a\left[(1-m)(1+\cos\theta)-\sin\theta(1-m-m\cos\theta)\right]$$

$$=a(1+\cos\theta-m-m\cos\theta-\sin\theta+m\sin\theta+m\sin\theta\cos\theta)$$

$$=a\left[(1-m)(1+\cos\theta-\sin\theta)+m\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1+\cos\theta & (1-m)a(1+\cos\theta)\\ 1+m+m\cos\theta & a[1-m^2(1+\cos\theta)]\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}1+\cos\theta & (1-m)(1+\cos\theta)\\ 1 & 1-m(1+\cos\theta)\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}1+\cos\theta & -m(1+\cos\theta)\\ 1 & -m(1+\cos\theta)\end{vmatrix}$$

$$=-am(1+\cos\theta)\begin{vmatrix}1+\cos\theta & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-am(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$x=\frac{a[(1-m)(1+\cos\theta-\sin\theta)+m\sin\theta\cos\theta]}{1+\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=a(1-m)+\frac{am\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta}$$

$$=a(1-m)+\frac{am}{2}(1-\cos\theta+\sin\theta)$$

$$=a(1-m)+\frac{am}{2}-\frac{\sqrt{2}am}{2}\cos(\theta+45^\circ)$$

$$=a(1-\frac{m}{2})-\frac{\sqrt{2}am}{2}\cos(\theta+45^\circ)$$

$$y=\frac{-am(1+\cos\theta)\cos\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}=\frac{-am(1+\cos\theta)(1-\cos\theta+\sin\theta)}{2\sin\theta}$$

$$=(-\frac{am}{2})(\frac{(1-\cos^2\theta+(1+\cos\theta)\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$=(-\frac{am}{2})(1+\cos\theta+\sin\theta)=-\frac{am}{2}-\frac{\sqrt{2}am}{2}\sin(\theta+45^\circ)$$

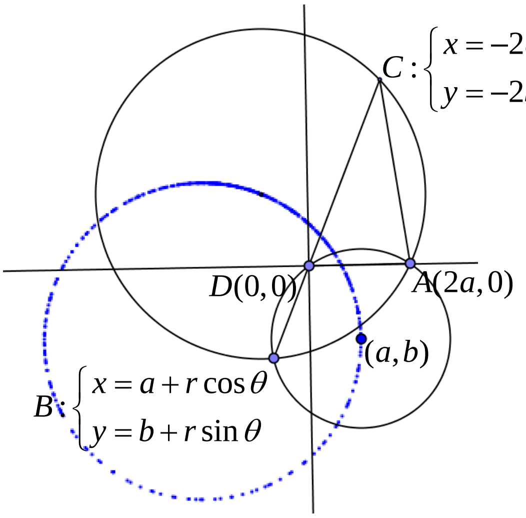
$L_1$ 及 $L_2$ 的交點為 $O:\begin{cases} x=a(1-\frac{m}{2})-\frac{\sqrt{2}am}{2}\cos(\theta+45^\circ) \\ y=-\frac{am}{2}-\frac{\sqrt{2}am}{2}\sin(\theta+45^\circ) \end{cases}$ ,

即 $O$ 的軌跡為一圓，且 $\frac{R}{R_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}m$

□

3. $A,D$ 為圓上任意點，$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=2$ ：

平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 2 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓 $O$，且 $\frac{R}{R_1}=\frac{2R_1}{\overline{AD}}$，其中 $R$ , $R_1$ 分別為 $O$ , $O_1$ 的半徑。




證明：$\overline{BC}$ 之中點 $M(\frac{-a-r\cos\theta}{2},\frac{-b-r\sin\theta}{2})$

$\overline{AC}$ 之中點 $N(\frac{-2r\cos\theta}{2},\frac{-2b-2r\sin\theta}{2})=(-r\cos\theta,-br\sin\theta)$

$\overline{BC}$ 之中垂線：$y+\frac{b+r\sin\theta}{2}=(-\frac{a+r\cos\theta}{b+r\sin\theta})(x+\frac{a+r\cos\theta}{2})$

$\Rightarrow (a+r\cos\theta)x+(b+r\sin\theta)y$

$$=-(\frac{a+r\cos\theta}{2})(a+r\cos\theta)-(\frac{b+r\cos\theta}{2})(b+r\cos\theta)$$

$$=-\frac{1}{2}((a+r\cos\theta)^2-(b+r\cos\theta)^2)$$

$$=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+r^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta)=-(a^2+b^2+ar\cos\theta+br\sin\theta)$$

$\overline{AC}$ 之中垂線： $y+b+r\sin\theta=(-\dfrac{2a+r\cos\theta}{b+r\sin\theta})(x+r\cos\theta)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (2a+r\cos\theta)x+(b+r\sin\theta)y\\
&\quad=-r\cos\theta(2a+r\cos\theta)-(b+r\sin\theta)^2\\
&\quad=-(b^2+r^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta)\\
&\quad=-(a^2+2b^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta)
\end{aligned}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & b+r\sin\theta \\ 2a+r\cos\theta & b+r\sin\theta \end{vmatrix}=(-a)\,(b+r\sin\theta)$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -(a^2+b^2+ar\cos\theta+br\sin\theta) & b+r\sin\theta \\ -(a^2+2b^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta) & b+r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$=-(b+r\sin\theta)(-b^2-ar\cos\theta-br\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}
x&=\frac{-b^2}{a}-\frac{r}{a}(a\cos\theta+b\sin\theta)\\
&=\frac{-b^2}{a}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}(a\cos\theta+b\sin\theta)\\
&=\frac{-b^2}{a}-\frac{a^2+b^2}{a}\cos(\theta-\phi)\text{ ,其中}\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & -(a^2+b^2+ar\cos\theta+br\sin\theta) \\ 2a+r\cos\theta & -(a^2+2b^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & -(a(a+r\cos\theta)+b(b+r\sin\theta)) \\ 2a+r\cos\theta & -(a(a+2r\cos\theta)+2b(b+r\sin\theta)) \end{vmatrix}\\
&=-\{a(a+r\cos\theta)\cdot(a+2r\cos\theta)+(a+r\cos\theta)\cdot 2b(b+r\sin\theta)-(2a+r\cos\theta)\cdot a(a+r\cos\theta)\\
&\quad-(2a+r\cos\theta)\cdot b(b+r\sin\theta)\}\\
&=-(a(a+r\cos\theta)(-a+r\cos\theta)+b(b+r\sin\theta)r\cos\theta\\
&=-(a(r^2\cos^2\theta-a^2))+b(b+r\sin\theta)r\cos\theta)\\
&=-(a(b^2-r^2\sin^2\theta))+b(b+r\sin\theta)r\cos\theta)\\
&=-(b+r\sin\theta)(a(b-r\sin\theta)+br\cos\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y&=\frac{a(b-r\sin\theta)+br\cos\theta}{a}=b-\frac{r}{a}(a\sin\theta-b\cos\theta)\\
&=b-\frac{a^2+b^2}{a}\sin(\theta-\phi)\text{ ,其中}\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

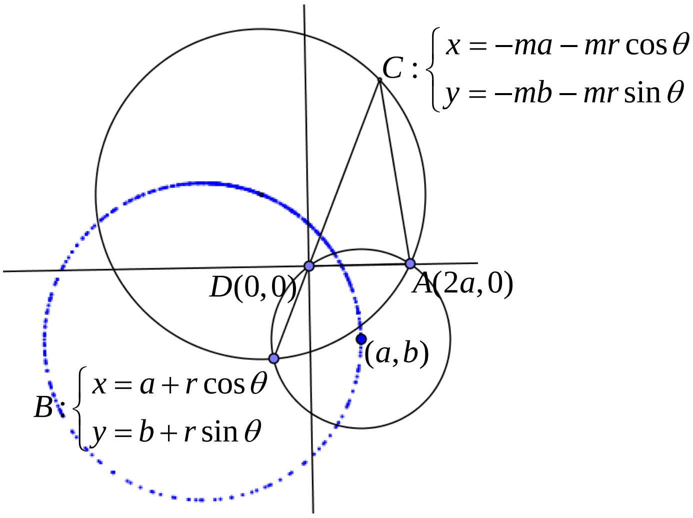
$\therefore$圓 $O$ 之圓心為 $(-\dfrac{b^2}{a},b)$，半徑為 $\dfrac{a^2+b^2}{a}$，得 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\dfrac{2R_1}{\overline{AD}}$

$\square$

4. $A,D$ 為圓上任意點，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=m$ ：

平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$

的 $m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓 $O$，且 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{mR_1}{AD}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。




證明：$\overline{BC}$ 之中點 $M(\dfrac{(1-m)a+(1-m)r\cos\theta}{2},\dfrac{(1-m)b+(1-m)r\sin\theta}{2})$

$\overline{AC}$ 之中點 $N(\dfrac{(2-m)a-mr\cos\theta}{2},\dfrac{-mb-mr\sin\theta}{2})$

$\overline{BC}$ 之中垂線：

$$y-\frac{(1-m)b+(1-m)r\sin\theta}{2}=(-\frac{a+r\cos\theta}{b+r\sin\theta})(x-\frac{(1-m)a+(1-m)r\cos\theta}{2})$$

$$\Rightarrow(a+r\cos\theta)x+(b+r\sin\theta)y$$

$$=\frac{1}{2}\{(1-m)a+(1-m)r\cos\theta)(a+r\cos\theta)+(1-m)b+(1-m)r\sin\theta)(b+r\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(1-m)((a+r\cos\theta)^2+(b+r\sin\theta)^2)$$

$$=\frac{1}{2}(1-m)(a^2+b^2+r^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta)$$

$$=(1-m)(r^2+ar\cos\theta+br\sin\theta)$$

$\overline{AC}$ 之中垂線：$y+\dfrac{mb+mr\sin\theta}{2}=(-\dfrac{(2+m)a+mr\cos\theta}{mb+mr\sin\theta})(x-\dfrac{(2-m)a-mr\cos\theta}{2})$

$$\Rightarrow((2+m)a+mr\cos\theta)x+m(b+r\sin\theta)y$$

$$=\frac{1}{2}(((2-m)a-mr\cos\theta)((2+m)a+mr\cos\theta)-(mb+mr\sin\theta)^2)$$

$$=\frac{1}{2}((4-m^2)a^2+(2-m)amr\cos\theta-mr\cos\theta(2+m)a-m^2r^2\cos^2\theta$$

$$-m^2b^2-m^2r^2\sin^2\theta-2m^2br\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(4a^2-m^2a^2-2m\cdot mar\cos\theta-m^2r^2-m^2b^2-2m^2br\sin\theta))$$

$$=\frac{1}{2}(4a^2-m^2(a^2+2ar\cos\theta+r^2+b^2+2br\sin\theta))$$

$$=\frac{1}{2}(4a^2-m^2(2r^2+2ar\cos\theta+2br\sin\theta))$$

$$=2a^2-m^2(r^2+ar\cos\theta+br\sin\theta)$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & b+r\sin\theta \\ (2+m)a+mr\cos\theta & m(b+r\sin\theta)\end{vmatrix}=(-2a)\,(b+r\sin\theta)$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} (1-m)(r^2+ar\cos\theta+br\sin\theta) & b+r\sin\theta \\ 2a^2-m^2(r^2+ar\cos\theta+br\sin\theta) & m(b+r\sin\theta)\end{vmatrix}$$

$$=(b+r\sin\theta)(m(r^2+a\cos\theta+b\sin\theta)-2a^2)$$

$$=(b+r\sin\theta)(mr^2-2a^2+mr(a\cos\theta+b\sin\theta))$$

$$x=\frac{2a^2-mr^2}{2a}-\frac{m(a^2+b^2)}{2a}\cos(\theta-\phi),\text{其中}\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & (1-m)(r^2+ar\cos\theta+br\sin\theta) \\ (2+m)a+mr\cos\theta & 2a^2-m^2(r^2+ar\cos\theta+br\sin\theta)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+r\cos\theta & (1-m)(a(a+r\cos\theta)+b(b+r\sin\theta)) \\ 2a+m(a+r\cos\theta) & 2a^2-m^2(a(a+r\cos\theta)+b(b+r\sin\theta))\end{vmatrix}$$

$$=m2a^2(a+r\cos\theta)-ma(a+r\cos\theta)^2-2a(1-m)b(b+r\sin\theta)$$
$$-mb(a+r\cos\theta)(b+r\sin\theta)$$

$$=ma(a+r\cos\theta)(a-r\cos\theta)-2a(1-m)b(b+r\sin\theta)-mb(a+r\cos\theta)(b+r\sin\theta)$$

$$=-ma(b+r\sin\theta)(b-r\sin\theta)-2a(1-m)b(b+r\sin\theta)-mb(a+r\cos\theta)(b+r\sin\theta)$$

$$=-ma(b+r\sin\theta)(b-r\sin\theta)-2a(1-m)b(b+r\sin\theta)-mb(a+r\cos\theta)(b+r\sin\theta)$$

$$=-(b+r\sin\theta)(ma(b-r\sin\theta)+2a(1-m)b+mb(a+r\cos\theta))$$

$$=-(b+r\sin\theta)(2ab-mr(a\sin\theta-b\cos\theta))$$

$$y=\frac{2ab}{2a}-\frac{m(a^2+b^2)}{2a}\sin(\theta-\phi)=b-\frac{m(a^2+b^2)}{2a}\sin(\theta-\phi)\,,$$

其中$\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$圓$O$之為圓心$(\frac{2a^2-mr^2}{2a},b)=(\frac{(2-m)a^2-mb^2}{2a},b)$， 半徑為$\frac{m(a^2+b^2)}{2a}$，

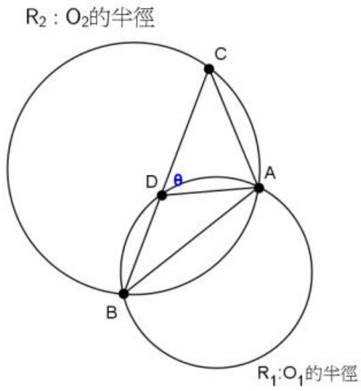
得$\frac{R}{R_1}=\frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{mR_1}{\overline{AD}}$ 。

□

# 伍、研究結果

一、保持等腰條件，不限制線段長度：

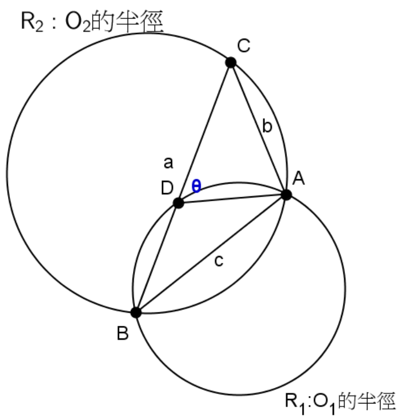
如圖，平面上兩圓相交於 $A,B$ 兩點，今在圓 $O_2$ 上取一點 $C$，作弦 $\overline{BC}$ 交圓 $O_1$ 於 D 點。若 $\overline{AD}=\overline{CD}$ 且 $\angle CDA=\theta$，則 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ 。




二、$D$ 為 $\overline{BC}$ 上的特殊點：

如圖，平面上兩圓相交於 $A,B$ 兩點，今在圓 $O_2$ 上取一點 $C$，作弦 $\overline{BC}$ 交圓 $O_1$ 於 D 點。

$\overline{AC}=b,\ \overline{BC}=a$ ，$\overline{AB}=c$ 。




(一) 若 $D$ 為 $\overline{BC}$ 之中點，則 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\dfrac{2b}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$ 。

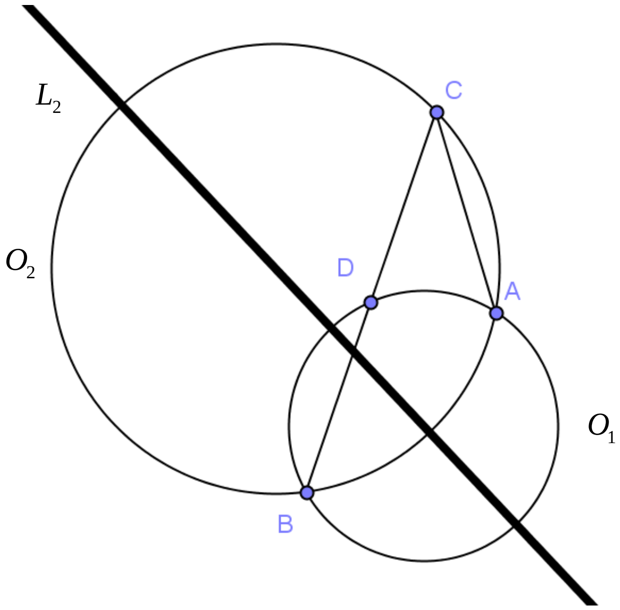
(二) 若 $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，且 $\overline{AD}=d$ ，$\overline{DC}=e$ ，$\overline{DB}=f$ ，則 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\dfrac{b}{\sqrt{bc-ef}}$ 。

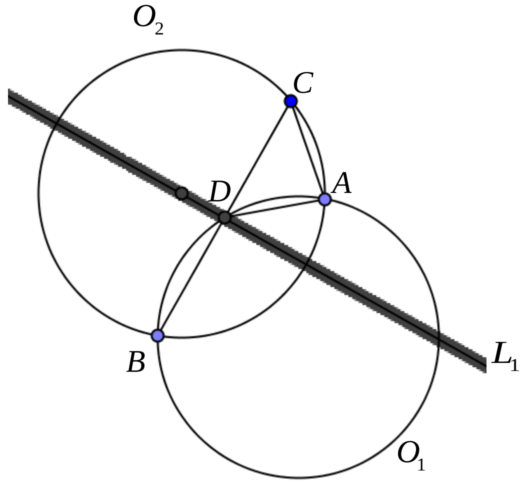
三、當 $D$ 為 $\overline{BC}$ 之中點，觀察圓心軌跡：

(一) 如下圖左，平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,B$，$D$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一直線 $L_2$ ，且 $L_2$

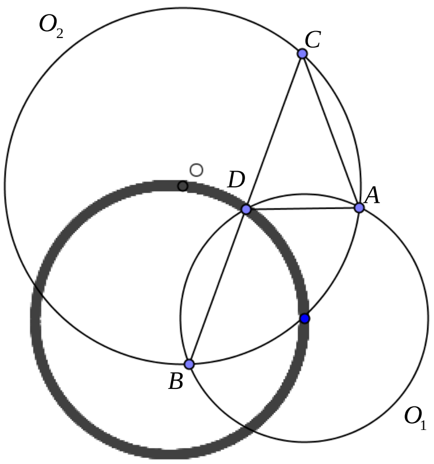
為 $\overline{AB}$ 的中垂線。

(二) 如下圖右，平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $B,D$，$A$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一直線 $L_1$，且 $L_1$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線。




(三) 如下圖，平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓 $O$，特別地：




1. 當 $A,D$ 為直徑的兩端點，則 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{1}{2}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。

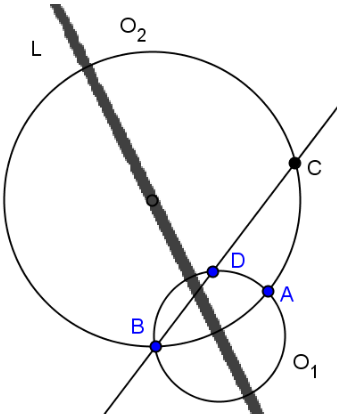
2. 當 $\overline{AD}$ 為圓心角為 $90^\circ$ 的弦，則 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。

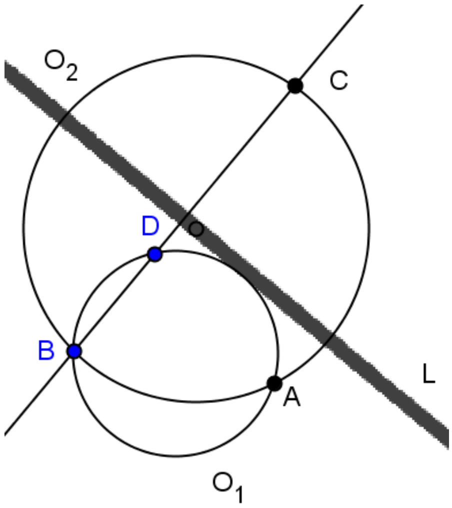
3. 當 $A,D$ 為圓上任意點，則 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{R_1}{\overline{AD}}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。

四、當 $D$ 不是 $\overline{BC}$ 中點，觀察圓心軌跡：

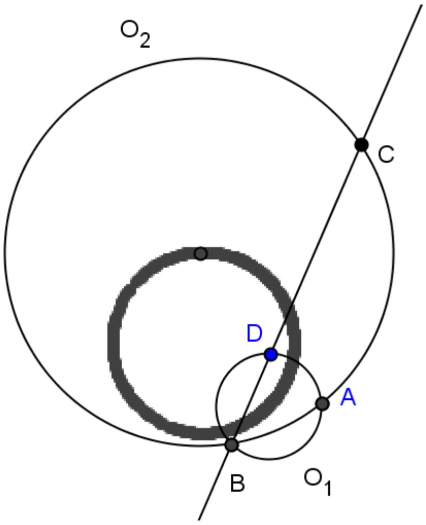
(一) 如下圖左，平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,B$，$D$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一直線 $L$，且 $L$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線。

(二) 如下圖右，平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $B,D$，$A$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一直線 $L$，且 $L$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線。




(三) 如下圖，平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為縮放中心，$B$ 的 $m$ 倍縮放點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則 $O_2$ 的圓心軌跡為一圓。特別地：




1. 當 $A,D$ 為直徑的兩端點，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=m$，則 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{m}{2}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。

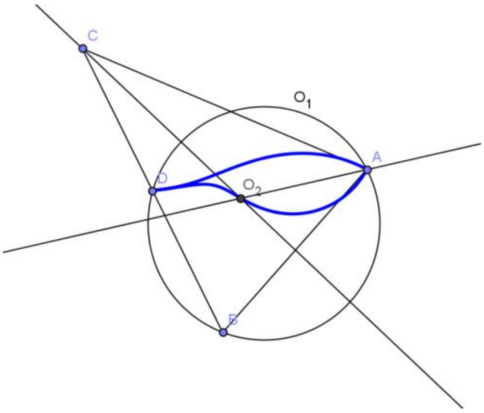
2. 當 $\overline{AD}$ 為圓心角為 $90^\circ$ 的弦，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=m$，則 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{\sqrt{2}m}{2}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。

3. 當 $A,D$ 為圓上任意點，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=2$，則 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{2R_1}{AD}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。

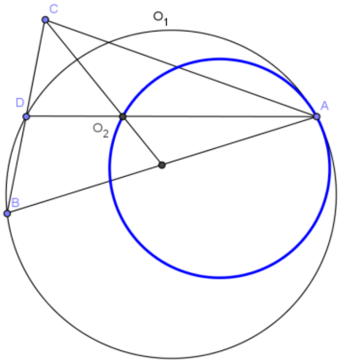
4. 當 $A,D$ 為圓上任意點，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=m$，則 $\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{mR_1}{AD}$，其中 $R,R_1$ 分別為 $O,O_1$ 的半徑。

# 陸、討論

一、平面上有一定圓 $O_1$ 及圓上兩定點 $A,D$，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為 $\Delta ABC$ 的內心，則其軌跡如圖(一)，只能得知非二次曲線，且曲線形狀與 $A$ 、 $D$ 相對位置有關。若以 $A,D$ 為定點，$B$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$O_2$ 為 $\Delta ABC$ 的重心，則 $O_2$ 固定不動。若以 $A,B$ 為定點，$D$ 為圓 $O_1$ 上一動點，$O_2$ 為 $\Delta ABC$ 的重心，則軌跡為一圓，如圖(二)。

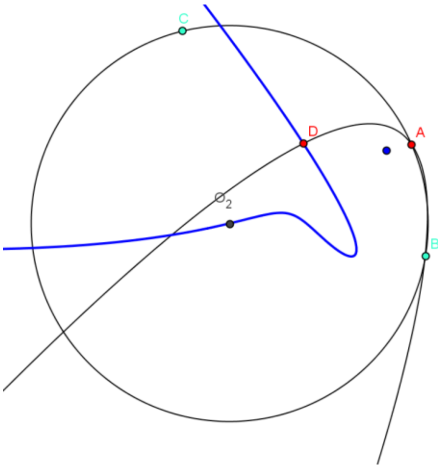



圖(一)

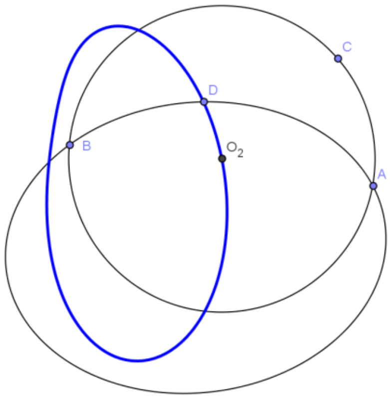



圖(二)

二、平面上有一拋物線 $\Gamma$ 及 $\Gamma$ 兩定點 $A,D$，$B$ 為 $\Gamma$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則其圓心軌跡如圖(三)，且軌跡形狀與 $A$ 、 $D$ 相對位置有關。




圖(三)

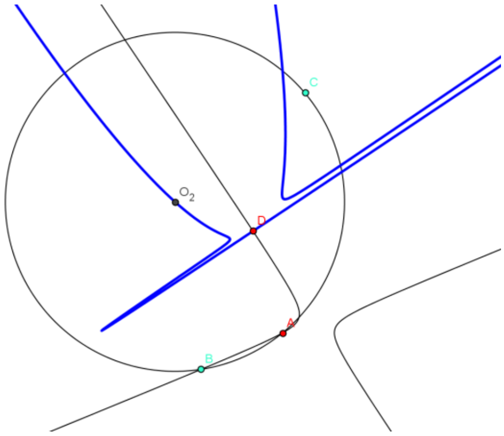



圖(四)

三、平面上有一橢圓 $\Gamma$ 及 $\Gamma$ 兩定點 $A,D$，$B$ 為 $\Gamma$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱點。若 $O_2$ 為過 $A,B,C$ 三點的圓，則其圓心軌跡如圖(四)，且軌跡並非橢圓，其形狀與 $A$ 、$D$ 相對位置有關。

四、平面上有一雙曲線 $\Gamma$ 及 $\Gamma$ 兩定點 $A,D$，$B$ 為 $\Gamma$ 上一動點，$C$ 為以 $D$ 為對稱中心，$B$ 的對稱

點。若$O_2$為過$A,B,C$三點的圓，則其圓心軌跡如圖(五)，且軌跡形狀與$A$、$D$相對位置有關。

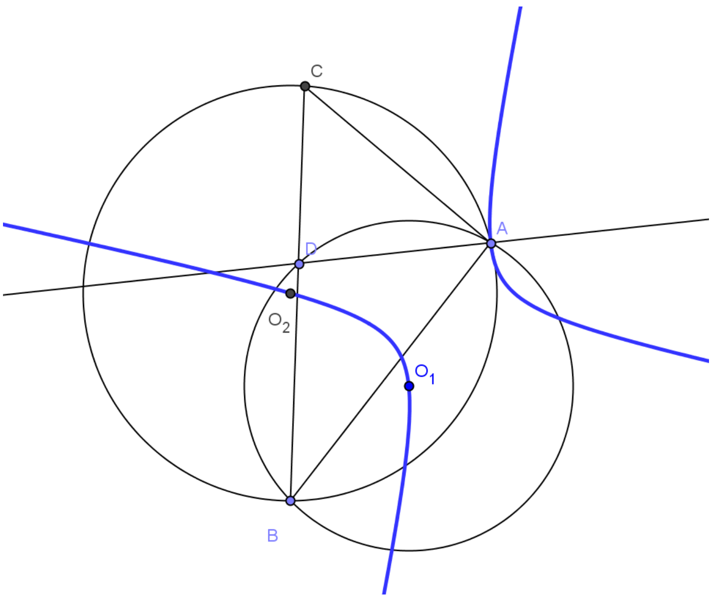



圖(五)

五、空間中有一定球$O_1$及球上兩定點$A,D$，$B$為球$O_1$上一動點，$C$為以$D$為對稱中心，$B$的對稱點。若球$O_2$為包含$\Delta ABC$的最小球，則其球心軌跡為何？

六、當$D$為$\overline{BC}$之中點，$B$為動點時，已可用反演變換證得軌跡為一圓。當$D$不是$\overline{BC}$中點，$B$為動點時的軌跡，是否有類似證明方法將軌跡作一更深刻的了解？反演變換可否利用在第五點的軌跡觀察？

七、平面上有一定圓$O_1$及圓上兩定點$A,D$，$B$為圓$O_1$上一動點，$\overline{AD}$為$\angle BAC$的角平分線。若$O_2$為$\Delta ABC$的外接圓，其圓心軌跡猜測為雙曲線，附圖如下。



# 柒、結論

一、若保持等腰條件，但線段長度不限制，則半徑比值為頂角半角正弦值的兩倍。

二、已知$\Delta ABC$長，若 D 為$\overline{BC}$中點或為角平分線與底邊交點，則半徑比和三角形邊長有關。

三、當$D$為$\overline{BC}$中點，選定$ABD$其中一點為動點，則$\Delta ABC$的外接圓圓心軌跡為中垂線或一圓，其中當圓心軌跡為圓形時，其與定圓半徑比為定圓半徑與$\overline{AD}$長度比。

四、當$D$不為$\overline{BC}$中點時，且$\overline{CD}$長度為$\overline{BD}$長度的$m$倍，則$\Delta ABC$的外接圓圓心軌跡為中垂線或一圓，即改變比例並不影響軌跡圖形。其中當圓心軌跡為圓形時，其與定圓半徑比為$m$倍的定圓半徑與$\overline{AD}$長度比，即$m$倍前項結果。

# 捌、參考資料及其他


嚴鎮軍（2002）。反射與反演（一版）。臺北市：九章。

許志農等（2011）。普通高級中學數學第三冊。臺北市：龍騰。

許志農等（2011）。普通高級中學數學第四冊。臺北市：龍騰。

許志農等（2011）。普通高級中學選修數學甲(上)。臺北市：龍騰。

## 【評語】040408

這個作品基本上是從 GeoGebra 的作圖觀察中，找到一些幾何性質加以數學證明。題目是兩圓相交於兩點，然後從一個圓上的動點去找出另外一個圓相對應點，求出兩圓的半徑比。建議可以將比值的所有可能加以蒐集並一起做觀察。相同的，從一已知圓上的 3 點，找出圓外的第四個點，這時可以形成的第二個圓不只有一個，圓心軌跡是二射線聯集，被扣除的一點是奇異點，這些都是作者需要加以探討的部分。