中華民國第54屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040407

變形楊式矩陣的探討

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 林泓叡	李吉彬

關鍵詞：楊氏矩陣(Young tableau)、

歪斜矩陣(Skew tableau)

摘要

楊氏矩陣(Young tableau)是一個每列格子數遞減的表格，要把數字依照右大於左及下大於上填入，而歪斜矩陣(Skew tableau)是楊氏矩陣的變形，是將楊氏矩陣再以另一個楊氏矩陣的形狀挖空，但每列必須相接，填入規則也是一樣。但不同的是，楊氏矩陣的排列方法數公式已被解出，但歪斜矩陣多了許多的變數所以還沒有像勾值公式(Hook fomula)的通式出來。我舉了某些特殊形狀的歪斜矩陣做討論，歸納一些共通的性質，也推導可行的通式，讓這些形狀的歪斜矩陣計算上不需要再使用窮舉，讓計算時間更加縮短。

壹、 研究動機

一開始接觸到楊氏矩陣是在學排列組合的時候，有個題目是關於楊氏矩陣的，那時候解題方法是用分類討論來求的，但過程真的蠻麻煩的，後來上網查才知道其實楊氏矩陣直接有公式可以解，那時候就看到相關聯結寫著歪斜矩陣，就起了興趣，原來歪斜矩陣還沒有類似的公式，想說就算沒有對普遍狀況的通用公式，對於特定圖形應該會有公式可用，所以就開始研究起這份報告。

貳、 研究目的

(一)就一些基本的歪斜矩陣進行性質探討
(二)找出某些特定形狀的歪斜矩陣排列方法數的計算方法
(三)把原本的歪斜矩陣做延伸，找出計算方法的變化

參、 研究設備及器材

方格紙、筆、橡皮擦

肆、 研究過程或方法

(一)預備知識

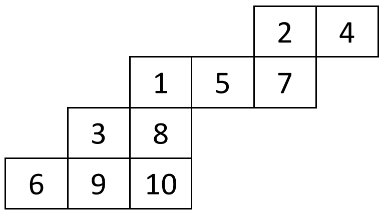
1. 楊氏矩陣(Young tableau)是一個每列格子數遞減的表格，並以第一列至最後一列每列的格子數轉換成數列表示法，例如下圖可表示為：(5,4,1)。數字的填入規則要自左上角開始且依右側數字大於左側數字及下面數字大於上面數字排列

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10				

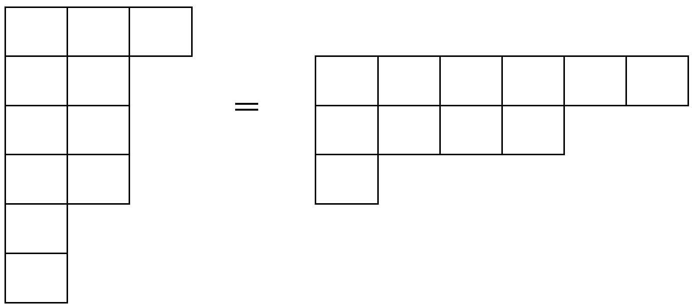
2. 勾值公式(Hook formula)是用來計算一個楊氏矩陣的總排列數，以$\dim \pi_\lambda$表示為總方法數(以下簡稱為 D)，hook(x)為每個格子右邊及下面的格子數(包括自身)，方程式為：

$$\dim \pi_\lambda = \frac{n!}{\prod hook(x)}$$

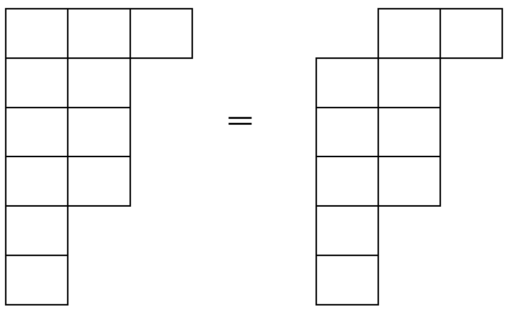
3. 歪斜矩陣(Skew tableau)是楊氏矩陣的變形,是將楊氏矩陣再以另一個楊氏矩陣的形狀挖空，但每列必須相接。表示法分兩部分，前部分為原楊氏矩陣，後部分為挖空的楊氏矩陣，例如下圖可表示為：(6,5,3,3)/(4,2,1)。數字的填入規則也要依右側數字大於左側數字及下面數字大於上面數字排列



4. 若一楊氏矩陣經過翻轉與對稱後，形成另一個楊氏矩陣，則這兩個矩陣的方法數相等，同理，歪斜矩陣亦是。

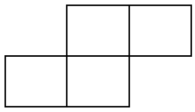


5. 一楊氏矩陣挖去最左上角所形成的歪斜矩陣，因為那格固定為 1，挖空不影響其方法數，所以此種歪斜矩陣的方法數與原本的楊氏矩陣相同。

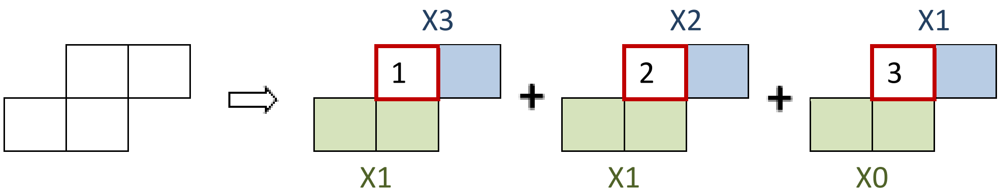


(二)觀察一些基本的歪斜矩陣

1. (3,2)/(1)的觀察



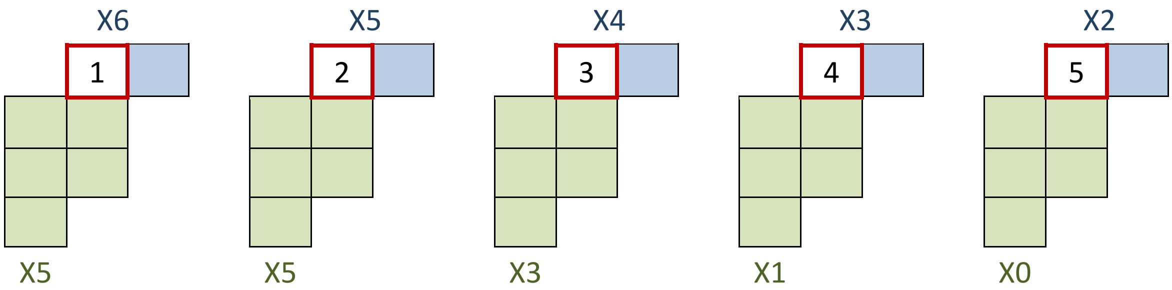
因為目前沒有可以直接計算的公式，所以我就將它分成兩個楊氏矩陣(藍色和綠色)，並指定連接處(紅色框框)的數字來進行計算，我先考慮藍色部分方法數(藍色數字)後，再乘上擺好藍色後綠色部分的方法數(綠色數字)，加總起來即可得整個歪斜矩陣的方法數



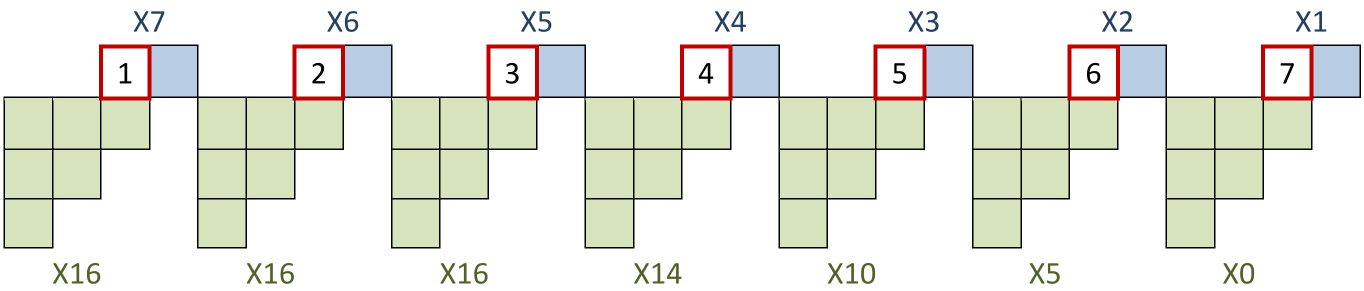
上面部分(藍色部分)方法數依次為 3、2、1，下面部分(綠色部分)方法數依次為 1、1、0，所以 D 為：3x1+2x1+1x0 = 5

2. 其他的歪斜矩陣

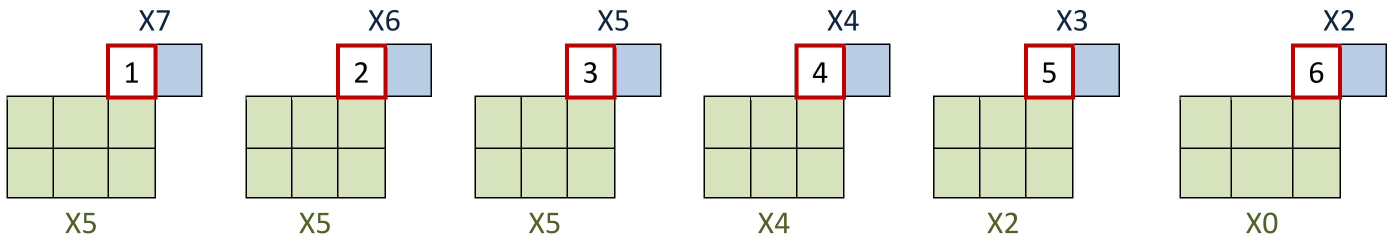
(3,2,2,1)/(1)　D=6x5+5x5+4x3+3x1+2x0=70



(4,3,2,1)/(2)　D=7x16+6x16+5x16+4x14+3x10+2x5+1x0=384



(4,3,3)/(2)　D=7x5+6x5+5x5+4x4+3x2+2x0=112

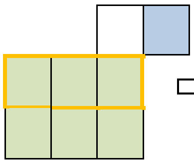


觀察藍色與綠色的數列，可以發現一些性質(證明請參見附錄)：

i. 綠色數列前面重複的項數等於綠色楊氏矩陣起始點至紅框的格子數
ii. 綠色數列第一項為綠色楊氏矩陣的方法數
iii. 重複項後的那項與第一項的差為去除第一列的綠色楊氏矩陣的方法數
iv. 藍色數列的末項值等於紅框下的綠色格子數
v. 綠色數列倒數第二項為去除最右行的綠色楊氏矩陣的方法數

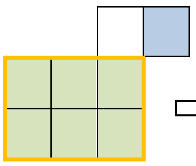
以上圖的(4,3,3)/(2)為例來說明上面的性質：

性質 i



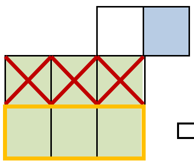
⇨ 橙框內方格數共三格　所以綠色數列 X5 有三項

性質 ii



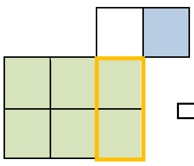
⇨ 排列方法數為 5　所以綠色數列第一項為 X5

性質 iii



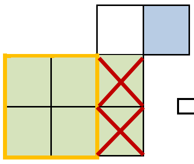
⇨ 橙框內的排列方法數為 1　所以綠色數列第四項為 5-1＝X4

性質 iv



⇨ 橙框內方格數共兩格　所以藍色數列末項為 X2

性質 v

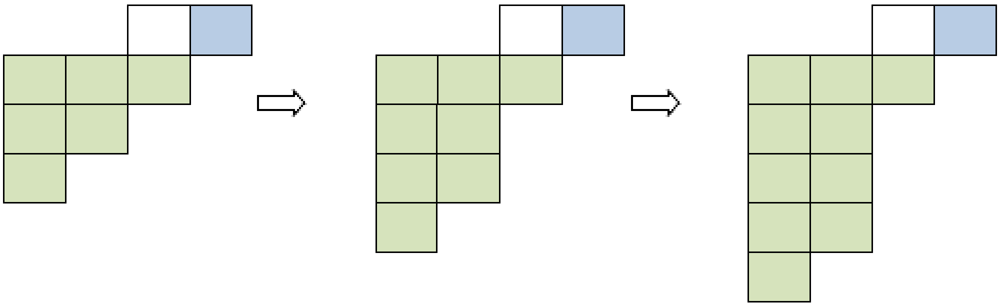


⇨ 橙框內排列方法數為 2　　所以綠色數列倒數第二項為 X2

(三)延伸基本的歪斜矩陣

我試著將一些楊氏矩陣做延伸，找出綠色矩陣的改變會如何影響綠色數列的變化，並歸納出計算的方法

1. (4,3,2,1)/(2)的下拉



因為之前觀察到的性質 i，所以第二、三項會跟第一項一樣，所以以下的表格把二、三項省略，綠色數列如下：

綠色格子數 n	a1~3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14
6	16	14	10	5								
8	70	65	55	42	28	14						
10	288	274	246	209	168	126	84	42				
12	1155	1113	1029	917	791	660	528	396	264	132		
14	4576	4444	4180	3826	3424	3002	2574	2145	1716	1287	858	429

表(一)

可以先觀察到一些明顯的規律：

(1.) 每一數列的最後一項 5,14,42,132,429 是卡特蘭數列(Catalan sequence)，跳過前三項從第四項開始

(2.) 這些數列的後幾項(綠色框框處)會與最後一項會成整倍數關係，且有此關係的項數隨著拉長而規律增加

(3.) 而相鄰綠色框框左邊的數字將會與循原本規律的數字差 1，舉上表第三列(綠色格子數＝10)為例：

a9=(a10)x2,　a8=(a10)x3,　a7=(a10)x4,　a6=(a10)x5-1

因為上面這樣的規律，讓我聯想到是否除了 a1 以外的所有項都與最後一樣有規律的關係，所以做出了下表，此表排除表(一)中一、二、三項與綠色框框內的項，只考慮其餘項與最後一項的關聯

綠色格子數 n	a4	a5	a6	a7	a8	a9
6	5x3-1					
8	14x5-5	14x4-1				
10	42x7-20	42x6-6	42x5-1			
12	132x9-75	132x8-27	132x7-7	132x6-1		
14	429x11-275	429x10-110	429x9-35	429x8-8	429x7-1	
16	1430x13-1001	1430x12-429	1430x11-154	1430x10-44	1430x9-9	1430x8-1

特別將塗上顏色的差值提出

									1
								1	1
							2	2	1
						5	5	3	1
					14	14	9	4	1
				42	42	28	14	5	1
			132	132	90	48	20	6	1
		429	429	297	165	75	27	7	1
	1430	1430	1001	572	275	110	35	8	1
4862	4862	3432	2002	1001	429	154	44	9	1

這是一連串的階差數列，每個數字都是右邊與上面數字的總和，而往左推可得一數列是 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862....，也就是卡特蘭數列，以卡特蘭數列為第一階，表格內的數列 1, 5, 20, 75, 275, 1001....為這些階差數列中第五階的數列，由 OEIS 網站得知，以 Ct 表示卡特蘭數列，以R_5表示第五階的數列，括號內則表示第 k 項則其通式為：

$$R_5(k) = Ct(k+4) - 3 \times Ct(k+3) + Ct(k+2)$$

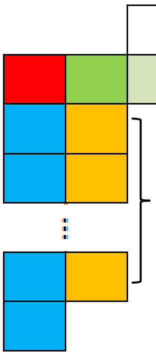
既然知道了其餘項與最後一項的關係，就可以求得總排列的方法數，求這歪斜矩陣的通式需要分成三部分來推算，第一部分為綠色框框處的項，第二部分為的第一至三項，第三部分為第四項到綠色框框前的項

(1.) 綠色框框的項

綠色框框內的項數隨著 n 的增加一次而規律增加一項，再加上藍色部分的方法數，可以知道這部分的方法數會等於：

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} Ct\left(\frac{n}{2}+1\right)\times i\times(i+1)=Ct(\frac{n}{2}+1)\times\frac{n(n^2-4)}{24}$$

(2.) 第一到三項



橙底共(n-4)/2 格

綠色楊氏矩陣的方法數(代入勾值公式)：

$$\frac{n!}{\underbrace{\left[\frac{n-4}{2}+4\right]}_{\text{紅底}}\underbrace{\left[\left(\frac{n-4}{2}+2\right)!\div 2\right]}_{\text{藍底}}\underbrace{\left(\frac{n-4}{2}\right)!}_{\text{橙底}}\underbrace{\left(\frac{n-4}{2}+2\right)}_{\text{綠底}}}$$

$$=\frac{n!\times 2}{\left(\frac{n}{2}+2\right)\frac{n}{2}!\left(\frac{n}{2}-2\right)!\frac{n}{2}}=\frac{n!\times 2\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\left(\frac{n}{2}+2\right)!\frac{n}{2}!}$$

$$=\frac{(n+2)!}{\left(\frac{n}{2}+2\right)!\frac{n}{2}!}\times\frac{n-2}{2(n+1)}=C_{n/2}^{n+2}\times\frac{n-2}{2(n+1)}$$

配上藍色部分：

$$(C_{n/2}^{n+2}\times\frac{n-2}{2(n+1)})\times 3n$$

(3.) 第四項到綠色框框前的項

照上面的表格可以推論，每項的三個數字都有各自的規律，舉綠色格子數為 16 的 a4~a9 為例

綠色格子數 n	a4	a5	a6	a7	a8	a9
14	429x11-275	429x10-110	429x9-35	429x8-8	429x7-1	
16	1430x13-1001	1430x12-429	1430x11-154	1430x10-44	1430x9-9	1430x8-1

觀察 a4 可以看到，第一個數字是卡特蘭數列中的第八項和第九項，相差一項，與對應的綠色格子數 n 各相差 6 和 7，第二個數字互相差 2，且都與對應的綠色格子數 n 差 3，第三個數字是第五階階差數列的第五項和第六項，與對應的綠色格子數 n 各相差 9 和 10，所以可以知道

$$a4=\left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\times(\mathrm{n}-3)-\left[R_5\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]$$

依照同樣的比較類推

$$a5=\left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\times(n-4)-\left[R_6\left(\frac{n}{2}-3\right)\right]$$

$$a6=\left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\times(n-5)-\left[R_7\left(\frac{n}{2}-4\right)\right]$$

一直到最後一項為

$$a_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}=\left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\times\left(\frac{n}{2}\right)-\left[R_{\left(\frac{n}{2}+2\right)}(1)\right]$$

而這些項的總和在加上藍色部分會等於

$$\sum_{i=4}^{\frac{n}{2}+1}[a_i\times(n-i+2)]=\sum_{i=4}^{\frac{n}{2}+1}\left\{\left\{\left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\times(n+1-i)-\left[R_{i+1}\left(\frac{n}{2}+2-i\right)\right]\right\}\right\}\times(n-i+2)$$

將上述三部分合併就可以求得這種形狀歪斜矩陣的總方法數

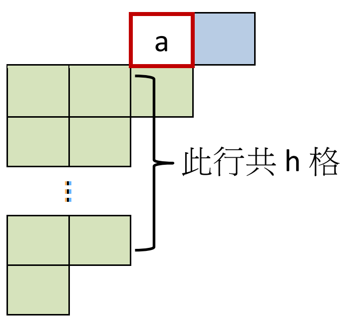
$$D_n=\sum_{i=4}^{\frac{n}{2}+1}\left\{\left\{\left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\times(n+1-i)-\left[R_{i+1}\left(\frac{n}{2}+2-i\right)\right]\right\}\right\}\times(n-i+2)$$

$$+(C_{n/2}^{n+2}\times\frac{n-2}{2(n+1)})\times 3n$$

$$+Ct(\frac{n}{2}+1)\times\frac{n(n^2-4)}{24}$$

藉由觀察可以看出總方法數的可能性，但還缺少合理的證明來確認在 n 逐漸變大後，這個公式是否還是可行，所以現在改由在一般狀況下，來探討規律地變化

(1.) 綠色框框的項



可以把綠色楊氏矩陣分成在紅框下的區塊和其餘的區塊兩個部分來討論。所有比 a 還大的數為 a+1~2h+4，共 2h-a+4 個，但先前說過綠色矩陣是在藍色矩陣已決定的情況下去討論，所以紅框下能填入的數字總共只有 2h-a+3 個。再考慮到左邊的矩陣，當比紅框下格大的數字扣除藍色部分的只有小於等於 h-1 個時，就不會受到左邊影響，所以這種情況下綠色矩陣的方法數就可以分成：(其餘部分的方法數)×(紅框下部分的方法數)，其餘部分的方法數就是綠色數列的末項，所以綠框內的數列會呈倍數關係，而會維持倍數關係的 a 的最小值會等於(2h+4)-[(h-1)+1+1]=h+3，又 n=2h+2，所以得 a 最小與綠框內項數為

$$a_{min} = \frac{n+4}{2}, \qquad \text{項數} = \mathrm{n} - \frac{n+4}{2} + 1 = \frac{n-2}{2}$$

綠色框框內的項數隨著 n 的增加一次而規律增加一項，所以綠色框框的項這部分的方法數會等於：

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} Ct\left(\frac{n}{2}+1\right) \times i \times (i+1) = Ct(\frac{n}{2}+1) \times \frac{n(n^2-4)}{24}$$

(2.) 第一到第三項

因為第一到第三項是普通的(3,2,2,2…2,2,1)的楊氏矩陣，將這個楊氏矩陣代入勾值公式即可得知方法數，所以就不加以證明了。

(3.) 第四項到綠框前的項

綠色格子數 n	a4	a5	a6	a7	a8	a9
6	5x3-1					
8	14x5-5	14x4-1				
10	42x7-20	42x6-6	42x5-1			
12	132x9-75	132x8-27	132x7-7	132x6-1		
14	429x11-275	429x10-110	429x9-35	429x8-8	429x7-1	
16	1430x13-1001	1430x12-429	1430x11-154	1430x10-44	1430x9-9	1430x8-1

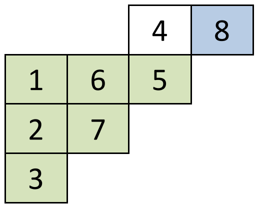
由 OEIS 得知各階的卡特蘭都會對應到相應的楊氏矩陣：

$R_5: (l+2, l-2)$ $R_6: (l+3, l-2)$ $R_7: (l+3, l-3)$ $R_8: (l+4, l-3)$ ⋯

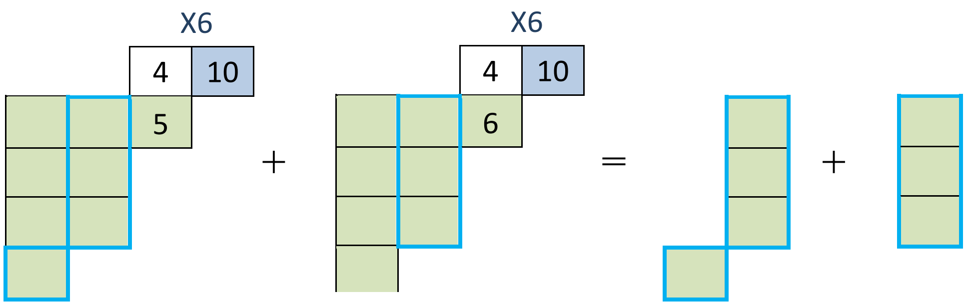
先以 a4 這行做觀察，照之前的想法也是把綠色矩陣分兩塊討論。

n=6, a=4 時，紅框下的數字可填入 n-a+1=3 個，但不受影響的 a 最小是

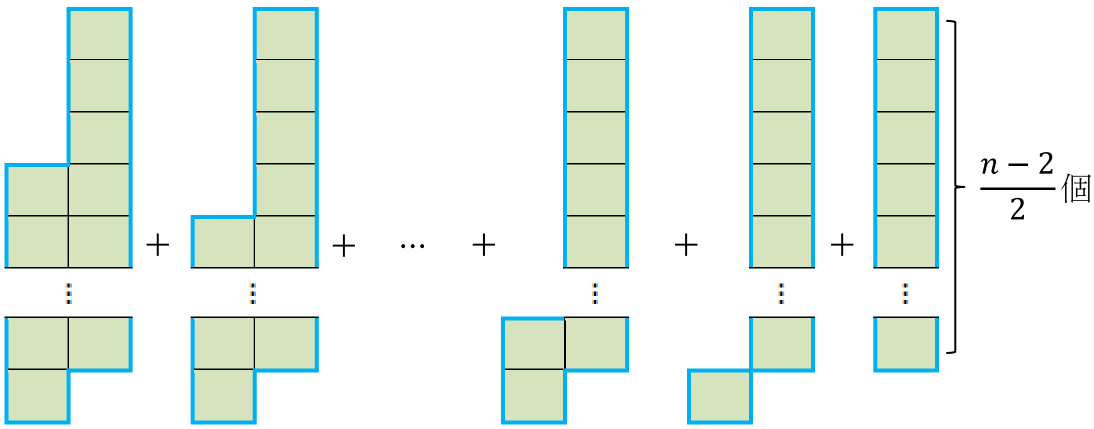
(n+4)/2=5，所以要加以修正，發現只有一個狀況會違例：當紅框下格的數字選的是 3 個中的最小一個，左邊的矩陣就會出現問題，舉藍色部分是 8 為例，以下這狀況就不行：



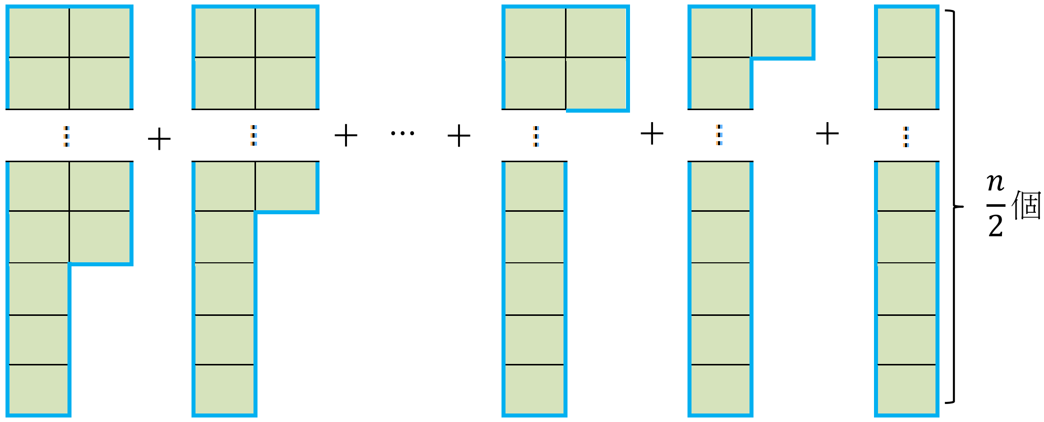
之前在第一部分證明有提到:「當比紅框下格大的數字扣除藍色部分的只有小於等於 h-1 個時，就不會受到左邊影響」，還有如果要製造出不符合的情況，比紅框下大的數字必須先填滿第二列，再拿來填入第一列，只要排好了比紅框下格大的數字，剩餘數字的方法數就會唯一(因為直條型的排列方法數是 1)，所以不符規定的方法數會等於比紅框下格大的數字排列的方法數。以 n=8, a=4 來說，可填入 5 個數字而 a 最小是 6，所以紅框下格填入 5 個中最小的 2 個會受到影響，舉藍色矩陣填入 10 為例，將不合狀況分兩種：



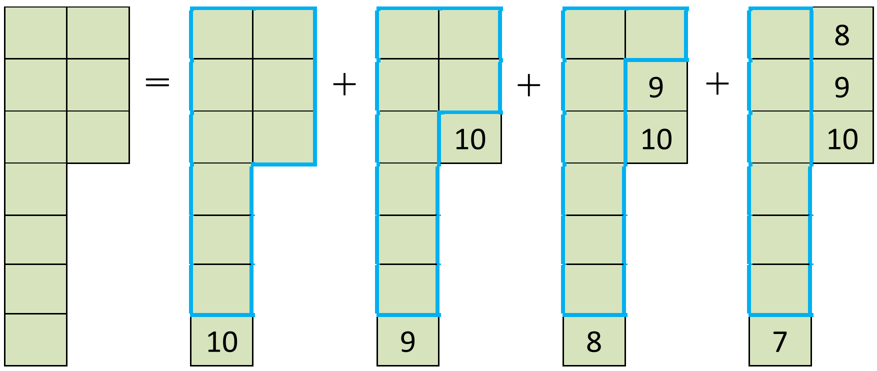
n 每增加 2，被影響的個數就會增加一個。不合狀況的方法數為：



因為之前提到的預備知識，把原本的右下角補上再旋轉至左上角，這些方法數會等價於：

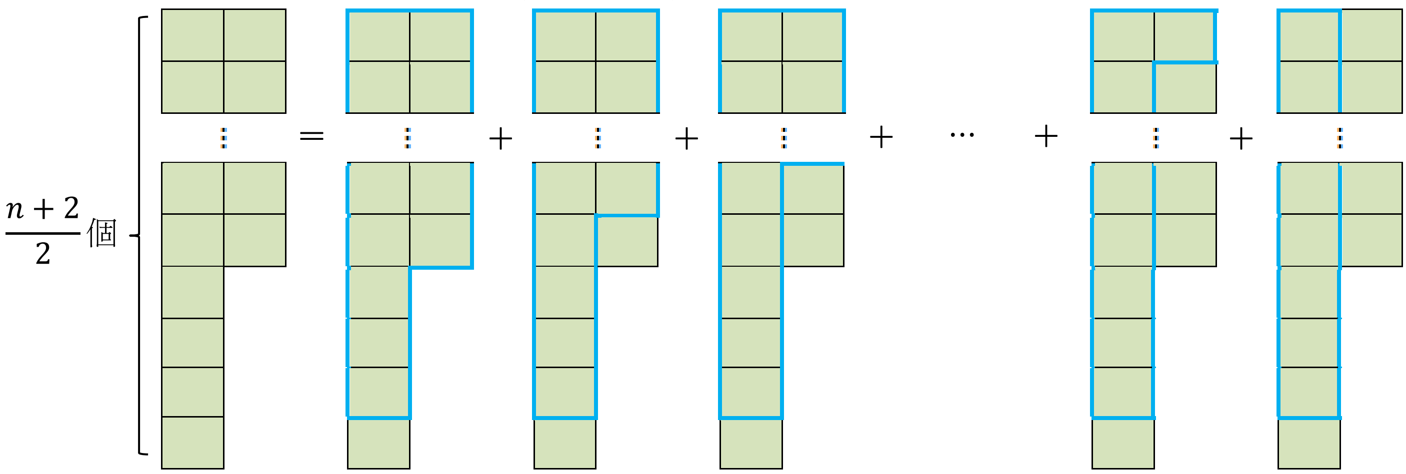


由 OEIS 提供的資訊得知，R_5的楊氏矩陣是$(l+2, l-2)$，如果依觀察到的推論，則$(l+2, l-2)$也會與上面的分類等價。與$(l+2, l-2)$的矩陣比較，從左至右的矩陣與$(l+2, l-2)$的格子數相差 1、2~ $l+1$個，所以推論這可能是把$(l+2, l-2)$用指定數字位置分類後的結果，先觀察$l = 5$時的狀況，把$(l+2, l-2)$先旋轉成與上面的方向一樣，從最大開始指定它們在第一行最下面的格子：



因為填入的數字在第一行的最下面，所以比填入數字大的數字必須被動填在第二行，使每一項的方法數就會等於是藍色框框的楊氏矩陣。

進入一般狀況，等號右邊第一項到最後一項分別是代表最下面填入 n-4(最大)~(n+2)/2，一樣可以把$(l+2, l-2)$分成若干項，直到第二行被填滿為止，所以可以看出$(l+2, l-2)$的方法數是與不符狀況的方法數相等的



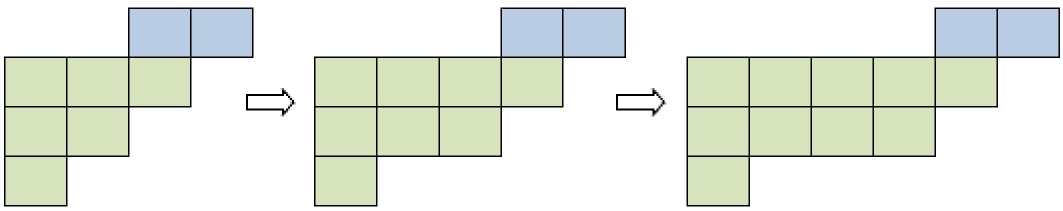
觀察及證明完 a4 了，那麼只要再找出 a5、a6 以上與 a4 差異的點在哪，以相同的辦法證明之即可。因為每階的卡特蘭數對應到的楊氏矩陣有兩個特點，一個是它的格子數差會是相關連藍色矩陣的最大格子數差加一，第二個是換下一階楊氏矩陣兩行的格子數差會逐一增加，所以只要知道藍色矩陣的最大格子數差如果也會因為升階而加一即可。而藍色矩陣的最大格子數差是小於紅框內數字的數量，所以可以知道藍色矩陣的最大格子數差會逐一增加，而推得不符合規定的方法數會等於各階的卡特蘭數。

藉由以上的證明，可以知道這個通式可以套用在 n (n 為大於等於六的偶數)為任何情況時。

$$D_n = \sum_{i=4}^{\frac{n}{2}+1} \left\{ \left\{ \left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right) \right] \times (n+1-i) - \left[R_{i+1}\left(\frac{n}{2}+2-i\right) \right] \right\} \right\} \times (n-i+2)$$
$$+ (C_{n/2}^{n+2} \times \frac{n-2}{2(n+1)}) \times 3n$$
$$+ Ct(\frac{n}{2}+1) \times \frac{n(n^2-4)}{24}$$

雖然公式非常冗長，手寫代此公式也還是很繁複，但是自此可以知道，(4,3,2,1,)/(2)的往下延伸使用公式還是可以不靠電腦窮舉來算出總方法數，電腦不需要使用窮舉，也可以讓演算上可以快速許多。

2. (4,3,2,1)/(2)的左拉



因為性質 i，這次跟第一項一樣的項數會增加，所以這次都以 n 表示第幾項，同樣的，前面重複的項也會省略，綠色數列如下：

n	a1~a(n/2)	a(n+2/2)	a(n+4/2)	a(n+6/2)	a(n+8/2)
6	16	14	10	5	
8	70	67	58	42	21
10	288	284	268	231	168
12	1155	1150	1125	1054	906

14	4576	4570	4534	4413	4116
16	18018	18011	17962	17772	17237
18	70720	70712	70648	70367	69476
20	277134	277125	277044	276647	275249

a(n+10/2)	a(n+12)/2	a(n+14/2)	a(n+16/2)	a(n+18/2)	a(n+20/2)
84					
660	330				
3531	2574	1287			
16027	13728	10010	5005		
67210	62348	53339	38896	19448	
271310	261937	242554	207298	151164	75582

跟之前一樣，先對這些數列做觀察：

(1.) 倒數第二項會是最後一項的兩倍(綠框內)，與上一個不同的是，綠框固定是兩格

(2.) 綠框左邊與最後一項三倍的差不再是 1，而排出的數列是：1,5,21,84,330,1287,5005,19448，剛好與最後一項相符合。

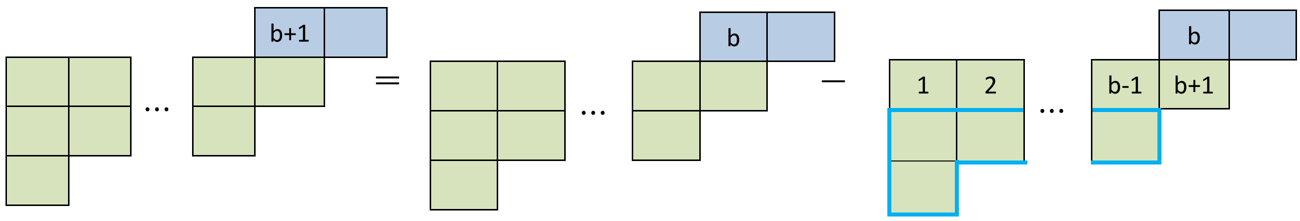
(3.) 第一次數字減少時，減少的數字剛好是 $\frac{n-2}{2}$

(4.) 第二次數字減少時，減少的數字剛好是$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$

目前還沒找到類似像上個圖形一樣的以特殊關係來求方法數的公式，只能嘗試用兩項間的差來以首項慢慢推出所有的項，以下令$b=\frac{n}{2}$使計算上方便一些。

(1.) a(n/2)→a(n+2/2)

從 b 到 b+1 可以視為在 b 所有方法數中的 b+1 與 b 交換，所以從 b 中扣除交換後不合的情況即可，而交換情況就是在 b+1 與 b 剛好相鄰的時候，不合的狀況如下：

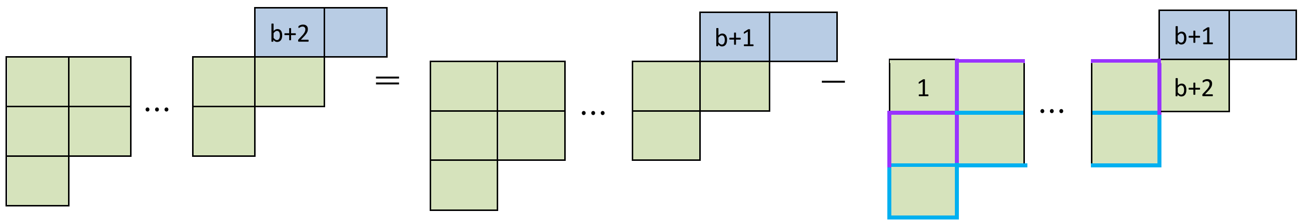


不合的方法數，即為藍色框框的方法數：

$$\frac{(b)!}{(b)\times(b-2)!} = b-1 = \frac{n-2}{2}$$

(2.) a(n+2/2)→a(n+4/2)

同樣的方法，也是在 b+1 與 b+2 相鄰的時候，但這次不同的是 1~b+2 間的一個數字會排到第二列，所以就要分成 1~b+2 間的數字(紫色框框)與 b+2 以上的數字(藍色框框)：

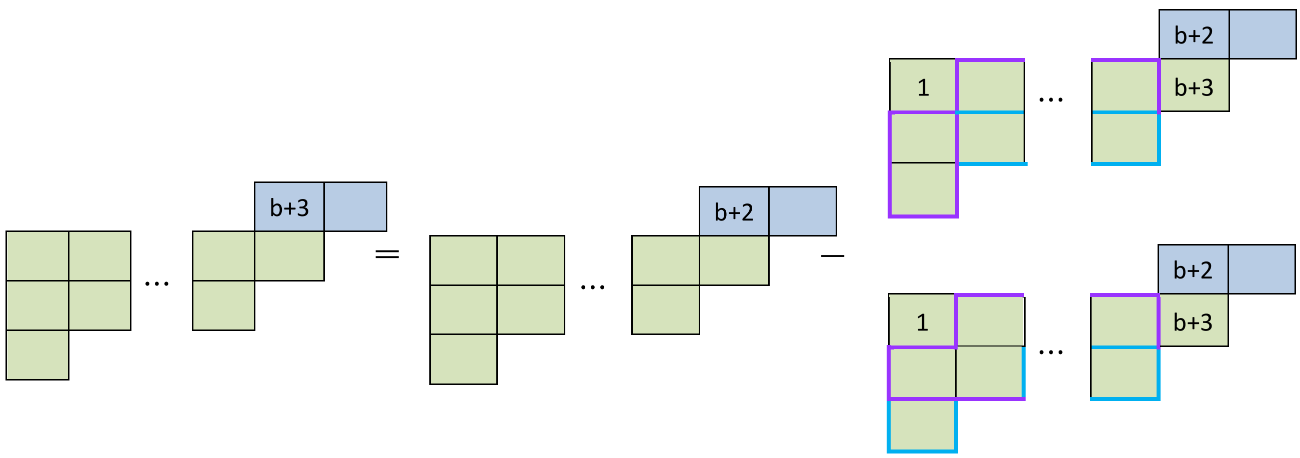


不合的方法數會等於紫色框框乘上藍色框框：

$$\frac{(b)!}{(b)\times(b-2)!}\times\frac{(b)!}{(b)\times(b-2)!} = (b-1)^2 = (\frac{n-2}{2})^2$$

(3.) a(n+4/2)→a(n+6/2)

1~b+3 兩個數字會排到第二列，這樣那兩個數字會有兩種排列方法，一個是直向相鄰，另一個是橫向相鄰



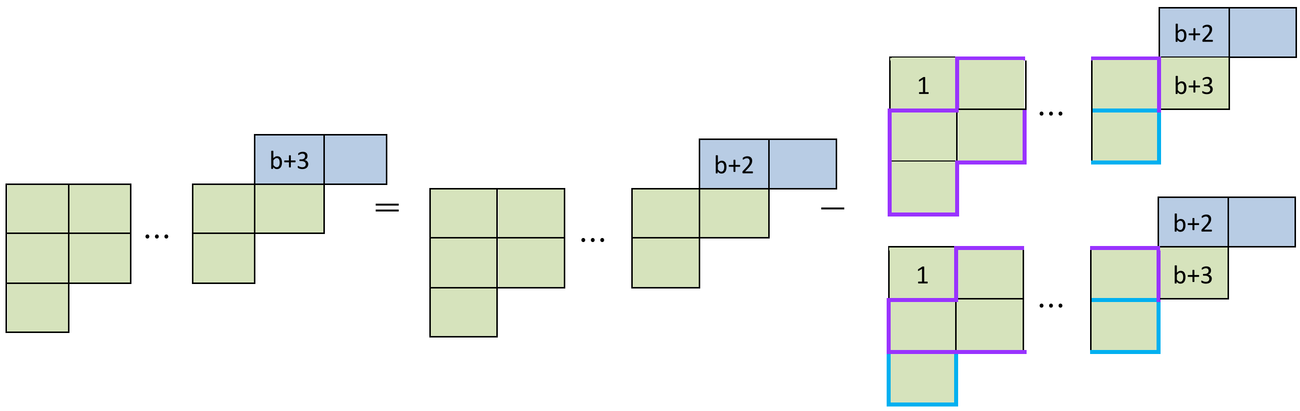
直向相鄰：

$$\frac{(b+1)!}{(b+1)\times(b-2)!\times 2}\times 1=\frac{b(b-1)}{2}=\frac{n(n-2)}{8}$$

橫向相鄰：

$$\frac{(b+1)!}{b(b-1)\times(b-3)!\times 2}\times(b-2)=\frac{(b+1)(b-2)^2}{2}=\frac{(n+2)(n-4)^2}{16}$$

(4.) a(n+6/2)→a(n+8/2)



上圖：

$$\frac{(b+2)!}{(b+1)(b-1)\times(b-3)!\times 3}=\frac{(b+2)(b)(b-2)}{3}=\frac{(n+4)(n)(n-4)}{24}$$

下圖：

$$\frac{(b+2)!}{(b)(b-1)(b-2)\times(b-4)!\times 3\times 2}\times(b-3)=\frac{(b+2)(b+1)(b-3)^2}{6}$$

$$=\frac{(n+4)(n+2)(n-6)^2}{96}$$

可以知道除了第一次與第二次減少以外，求前項與後項的差會需要分成兩種情況去討論，當是 a(n+t/2)→a(n+(t+2/2))，(t ∈ 偶數, t ≠ 0, 2)時：

第一種情況：

$$\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!}{(b+1)\times\frac{(b-1)!}{\left(b-\frac{t-2}{2}\right)}\times\frac{\left(\frac{t}{2}\right)!}{\frac{t-2}{2}}}=\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!\left(b-\frac{t-2}{2}\right)\left(\frac{t-2}{2}\right)}{(b+1)(b-1)!\left(\frac{t}{2}\right)!}$$

第二種情況：

$$\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!}{\frac{(b)!}{\left(b-\frac{t}{2}\right)}\times\left(\frac{t}{2}\right)!}\times\left(b-\frac{t}{2}\right)=\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!\,(b-\frac{t}{2})^2}{(b)!\left(\frac{t}{2}\right)!}$$

雖然這次不像上次可以直接算出來的公式，但是只要以勾值公式算出第一項，之後的每一項再藉由上面的公式算出每一項的值：

(1.) 第一項到第 $\frac{n}{2}$ 項

同上一個圖形：

$$a(1)\sim a\left(\frac{n}{2}\right)=C_{n/2}^{n+2}\times\frac{n-2}{2(n+1)}$$

(2.) 第 $\frac{n+2}{2}$ 項

$$a\left(\frac{n+2}{2}\right)=\mathrm{a}(1)-\frac{n-2}{2}$$

(3.) 第 $\frac{n+4}{2}$ 項

$$\mathrm{a}\left(\frac{n+4}{2}\right)=a(\frac{n+2}{2})-(\frac{n-2}{2})^2$$

(4.) 第 $\frac{n+6}{2}$ 項到最後一項

$$\mathrm{a}\left(\frac{n+t+2}{2}\right)=\mathrm{a}\left(\frac{n+t}{2}\right)-\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!\left(b-\frac{t-2}{2}\right)\left(\frac{t-2}{2}\right)}{(b+1)(b-1)!\left(\frac{t}{2}\right)!}-\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!\,(b-\frac{t}{2})^2}{(b)!\left(\frac{t}{2}\right)!}$$

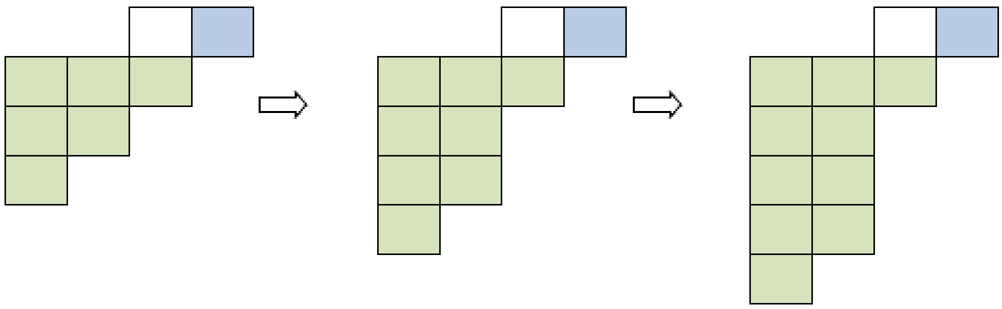
伍、 結論

(一)觀察到的性質

經過舉例可以先看到，就上面部分的楊氏矩陣為兩格的歪斜矩陣而言，會有共同符合的性質：

ii. 綠色數列前面重複的項數等於綠色楊氏矩陣起始點至紅框的格子數
iii. 綠色數列第一項為綠色楊氏矩陣的方法數
iv. 重複項後的那項與第一項的差為去除第一列的綠色楊氏矩陣的方法數
v. 藍色數列的末項值等於紅框下的綠色格子數
vi. 綠色數列倒數第二項為去除最右行的綠色楊氏矩陣的方法數

(二)(4,3,2,1)/(2)的下拉



綠色數列：

綠色格子數	a1~3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14
6	16	14	10	5								
8	70	65	55	42	28	14						
10	288	274	246	209	168	126	84	42				
12	1155	1113	1029	917	791	660	528	396	264	132		
14	4576	4444	4180	3826	3424	3002	2574	2145	1716	1287	858	429

⋮

(1.) 每一數列的最後一項 5,14,42,132,429 是卡特蘭數列(Catalan sequence)，跳過前三項從第四項開始
(2.) 這些數列的後幾項(綠色框框處)會與最後一項會成整倍數關係，且有此關係的項數隨著拉長而規律增加

特別將第四項開始到綠框前的項提出與最後一項作關係討論：

綠色格子數 n	a4	a5	a6	a7	a8	a9
6	5x3-1					
8	14x5-5	14x4-1				
10	42x7-20	42x6-6	42x5-1			
12	132x9-75	132x8-27	132x7-7	132x6-1		
14	429x11-275	429x10-110	429x9-35	429x8-8	429x7-1	
16	1430x13-1001	1430x12-429	1430x11-154	1430x10-44	1430x9-9	1430x8-1

單看塗色部分

(1.) 這是一階差數列，往前推得卡特蘭數列

(2.) 以卡特蘭數列為第一階，表格的數列是從第五階開始，且階數因往右而加一

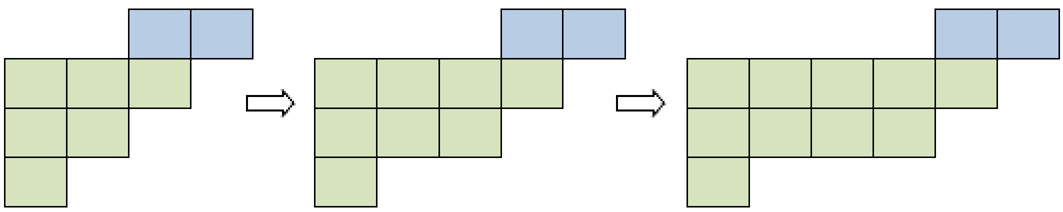
總方法數：

$$D_n = \sum_{i=4}^{\frac{n}{2}+1} \left\{ \left\{ \left[Ct\left(\frac{n}{2}+1\right) \right] \times (n+1-i) - \left[R_{i+1}\left(\frac{n}{2}+2-i\right) \right] \right\} \right\} \times (n-i+2)$$

$$+(C_{n/2}^{n+2} \times \frac{n-2}{2(n+1)}) \times 3n$$

$$+Ct(\frac{n}{2}+1) \times \frac{n(n^2-4)}{24}$$

(三)(4,3,2,1)/(2)的左拉



綠色數列：

n	a1~a(n/2)	a(n+2/2)	a(n+4/2)	a(n+6/2)	a(n+8/2)
6	16	14	10	5	
8	70	67	58	42	21
10	288	284	268	231	168
12	1155	1150	1125	1054	906
14	4576	4570	4534	4413	4116

16	18018	18011	17962	17772	17237
18	70720	70712	70648	70367	69476
20	277134	277125	277044	276647	275249

a(n+10/2)	a(n+12)/2	a(n+14/2)	a(n+16/2)	a(n+18/2)	a(n+20/2)
84					
660	330				
3531	2574	1287			
16027	13728	10010	5005		
67210	62348	53339	38896	19448	
271310	261937	242554	207298	151164	75582

(1.) 倒數第二項會是最後一項的兩倍(綠框內)，與上一個不同的是，綠框固定是兩格

(2.) 綠框左邊與最後一項三倍的差不再是 1，而排出的數列是：1,5,21,84,330,1287,5005,19448，剛好與最後一項相符合。

討論其綠色數列各項間的關係：

(1.) 第一項到第 $\frac{n}{2}$ 項

$$a(1) \sim a\left(\frac{n}{2}\right) = C^{n+2}_{n/2} \times \frac{n-2}{2(n+1)}$$

(2.) 第 $\frac{n+2}{2}$ 項

$$a\left(\frac{n+2}{2}\right) = \mathrm{a}(1) - \frac{n-2}{2}$$

(3.) 第 $\frac{n+4}{2}$ 項

$$\mathrm{a}\left(\frac{n+4}{2}\right) = a\left(\frac{n+2}{2}\right) - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$$

(4.) 第 $\frac{n+6}{2}$ 項到最後一項

$$a\left(\frac{n+t+2}{2}\right)=a\left(\frac{n+t}{2}\right)-\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!\left(b-\frac{t-2}{2}\right)\left(\frac{t-2}{2}\right)}{(b+1)(b-1)!\left(\frac{t}{2}\right)!}$$

$$-\frac{\left(b+\frac{t-2}{2}\right)!\,(b-\frac{t}{2})^2}{(b)!\left(\frac{t}{2}\right)!}$$

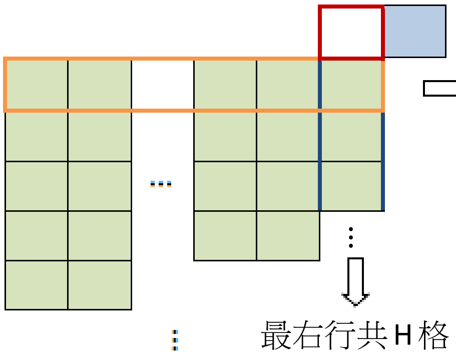
陸、 未來展望與研究

(一)找出(4,3,2,1)/(2)的左拉比較好的通式
(二)找出其他形狀綠色矩陣的通式
(三)找出改變藍色矩陣後的影響
(四)考慮分割後為三個甚至多個楊氏矩陣的歪斜矩陣

柒、 參考文獻

(一)Wikipedia Young tableau
http://en.wikipedia.org/wiki/Young_tableau
(二)OEIS http://oeis.org/

附錄



令綠色格子共 m 格
紅框內的數為 p (p ∈ ℕ)

(一)性質 i、性質 ii 的證明

當 K≧p 時

紅框下的數字最小為 K+1(第一列從左到右跳過 p 逐一填入 1~p+1)

∵ 紅框下的數字恆大於 p

∴ 上方矩陣不影響下方矩陣

⇨ a1~aK 的值等於綠色矩陣的方法數

(二)性質 iii 的證明

當 p＝K+1 時

紅框下的數字最小為 K

∵ 紅框下的數字要大於 p

∴ $a(K+1)$的值等於 綠色矩陣方法數 − 紅框下為 K 的方法數

再 ∵ 第一列指定最右格數字為 K 的方法唯一(從 1 填到 K)

∴ $a(K+1)$的值僅需考慮第一列下的矩陣方法數

(三)性質 iv 的證明

∵ 在紅框右邊與下邊格子必大於 p

∴ 有符合解 p 的最大值為

總方格數(m+2)減掉大於 p 的方格數(K+1)＝m-K+1

⇨ 當 p≧(m-K+1)+1 時　aP＝0

藍色末項值會等於　(m+2)-1-(m+1-K)＝K

(四)性質 v 的證明

當 p＝m-K+1 時

只要填入藍色格子的數字，紅框下的綠色格子即被動決定

∴ $a(m-K+1)$僅需考慮最右行以外的綠色矩陣

【評語】040407

本作品研究歪斜楊氏矩陣的一個特例。基本上，歪斜楊氏矩陣的問題都相當難，自從被介紹以來，進展相當緩慢。本作品主要研究特殊歪斜楊氏矩陣(4,3,2,1)/(2)的下拉與左拉的方法數。得到其各自的通式。左拉的方法數通式還有改進的空間，而且下拉與左拉還有他種情況可探討。