

# 中華民國第 54 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高中組 數學科

040406

無「鎖」不在一最少監視點

學校名稱：國立花蓮女子高級中學

作者： 高二 林亮妤 高二 陳柳君	指導老師： 吳仲奇
-------------------------	--------------

關鍵詞：點陣、監視點、控制集

## 摘要

我們設定一監視器能有限制的監視其周圍各兩點，稱為直線－距離－2之控制集。接著以座標方式將問題數學模型化，推得 $m \times n$ 點陣與 $m \times n \times k$ 點陣之最少監視點數的範圍；在 $m \times n$ 點陣中，我們以 $6 \times 6$ 點陣為一單位循環點陣，導出 $m \times n$ 點陣之監視點數位置與公式，再以數學程式檢驗監視點數之值是否符合我們所推導出之上、下界，最後在 $m \times n \times k$ 點陣中，以矩陣表示監視點設置之位置，並以 $M_{7 \times 7 \times 7}$ 為循環單位對應矩陣，導出使 $m \times n \times k$ 點陣監視點數足夠小之公式。

## 壹、 研究動機

我們在歷屆的科展參賽作品中，看到了四十三屆全國科展國中組作品—『密碼鎖』、四十八屆全國科展國中組作品—『超立方體  $Q_n$  之最小控制』，以及五十屆全國科展國中組作品—『密碼鎖—拉丁超立方體的完美控制情形』等作品，瑕疵密碼鎖只要轉到特定幾組密碼就能控制所有密碼組合。因此我們從監視器的應用做聯想，在有限制的情形下，將道路理想化成為方正的矩形，以最少的監視器監控到所有範圍，若我們對監視器所監視之範圍加以限制，使所選的監視點能夠有限制的控制其監視範圍，則我們需要至少在幾個監視點擺放監視器，便可成功監視所有範圍？

## 貳、 研究目的

- 一、在有限制的情形下，將道路理想化成為方正的矩形，如何以最少監視器監控到所有範圍，便可以降低成本。
- 二、設想有一透明立體展場，將此理想化為一正立方體，如何以最少監視器監控到所有範圍，便可以降低成本。
- 三、將監控範圍數學模型化，以座標方式、點陣與矩陣模式簡單呈現。
- 四、也可以將此概念運用於無線網路架設、紅外線感應式自動開關及大樓電視強波器。

## 參、 研究設備器材

紙、筆、電腦、Geogebra、CorelDRAW

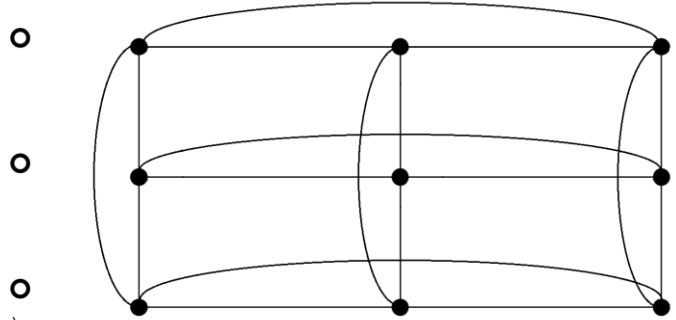
## 肆、符號定義

一、 $m \times n$ 點陣表  $m$  邊 $\times n$ 邊之棋盤式街道，其點為棋盤式街道之路口，兩點間有一街道。

例如， $3 \times 3$ 點陣如圖〈一-1〉表 $3$ 邊 $\times 3$ 邊之棋盤式街道如圖〈一-2〉



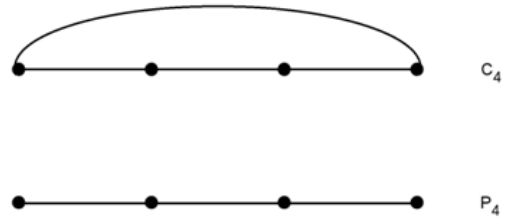
〈圖一-1〉



〈圖一-2〉

二、 $C_m$ 表  $m$  個點的環如圖〈二 $C_4$ 〉。

三、 $P_m$ 表  $m$  個點的路徑如圖〈二 $P_4$ 〉。



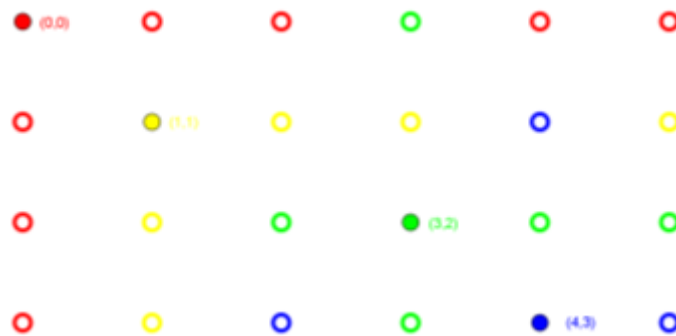
〈圖二〉

四、卡氏積(Cartesian product)

在 $m \times n$ 階點陣中，若 $a_i$ 表第 $i$ 列， $0 \leq i \leq m - 1$ ， $b_j$ 表第 $j$ 行， $0 \leq j \leq n - 1$ ，則將其作卡氏積可表出所有點之座標，即 $(a_i, b_j)$ 表第 $i$ 列第 $j$ 行之點。

五、 $C_m \times C_n$ 表  $m$  個點的環及  $n$  個點的環之卡氏積。

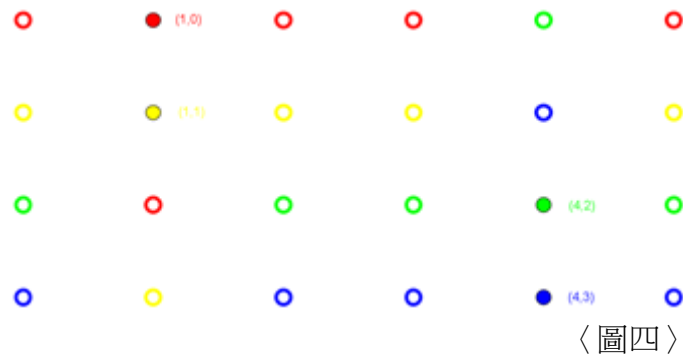
如圖〈三〉為 $C_4 \times C_6$ 之點陣，點 $(0,0)$ 可涵蓋的點為上下左右延伸可循環之兩點分別為 $(1,0)$ 、 $(2,0)$ 、 $(4,0)$ 、 $(5,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(0,2)$ 、 $(0,3)$ ，點 $(1,1)$ 、 $(3,2)$ 、 $(4,3)$ 亦之。



〈圖三〉

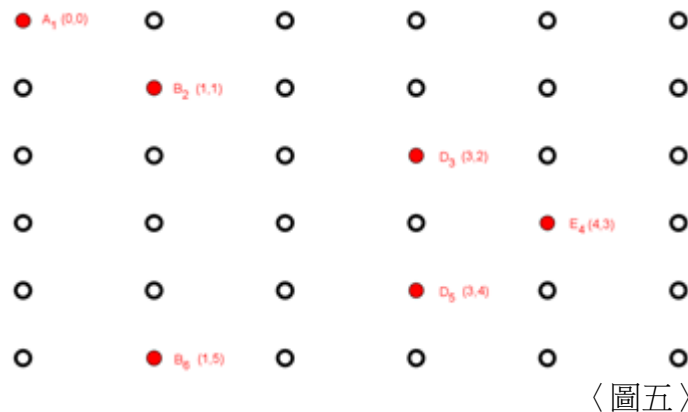
六、 $P_m \times C_n$  表  $m$  個點的路徑及  $n$  個點的環之卡氏積。

如圖〈四〉為  $P_4 \times C_6$  之點陣，點(1,0)可涵蓋的點為(0,0)、(2,0)、(3,0)、(5,0)以及其下方的兩點分別為(1,1)、(1,2)，點(1,1)亦之；點(4,2)可涵蓋的點為(0,2)、(2,2)、(3,2)、(5,2)以及其上方的兩點分別為(4,0)、(4,1)，點(4,3)亦之。



七、 $N_2^*(V)$  表該點  $V$  所能控制的點為直線方向距離 2 格內(含 2 格)的所有點。

如圖〈五〉， $N_2^*(A_1) = \{A_2, A_3, A_5, A_6, B_1, C_1, E_1, F_1\}$ 。



八、如果  $S^* = \{V_1, V_2 \dots V_k\}$ ，則

$$\bigcup_{V \in S} N_2^*(V) = N_2^*(V_1) \cup N_2^*(V_2) \cup \dots \cup N_2^*(V_n)$$

九、如果  $\bigcup_{V \in S} N_2^*(V)$  包含所有點，則稱  $S^*$  為直線 - 距離 - 2 之控制集。

十、 $\gamma_2^*$  表所有的直線 - 距離 - 2 之控制集中點數最少的集合之點數。

十一、 $S^*$  表所有監視點。

十二、 $A_m^*$  表第  $m$  列監視點。

如圖〈五〉， $A_2^* = \{B_2\}$ 。

十三、 $\mathbb{Z}^+$  表正整數。

十四、 $A'_n$  表第  $n$  行。

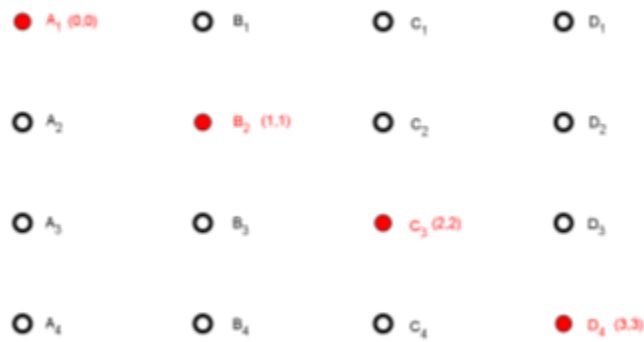
十五、 $a_i$  表在  $A'_i$  上的監視點數。

## 伍、 研究方法

### 一、模型化

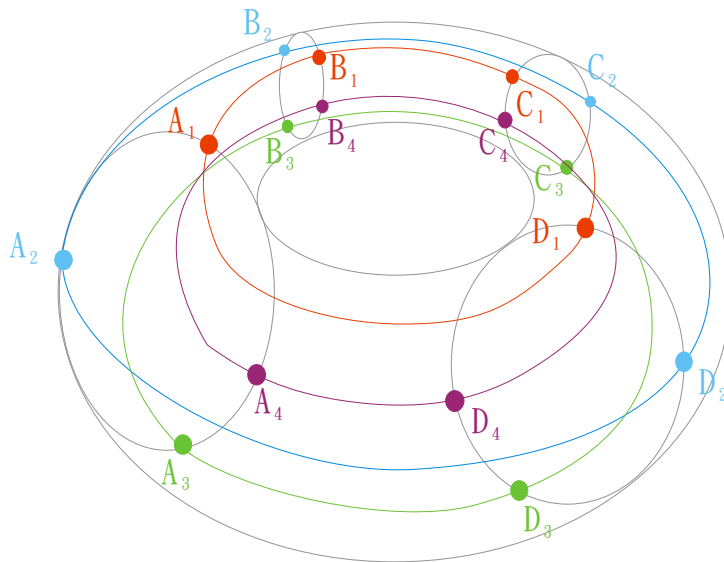
首先以座標方式將問題數學模型化，並以此推論如何以最少的監視點填滿所有可能之點座標。

以  $4 \times 4$  之座標網格為例，點  $A_1(0,0)$  可以涵蓋的範圍為其週遭兩點，也就是  $A_2(0,1)$ 、 $A_3(0,2)$ 、 $B_1(1,0)$ 、 $C_1(2,0)$ ，以及其向上方延伸的兩點分別為  $A_4(0,3)$ 、 $A_3(0,2)$  和向左方延伸的兩點分別為  $C_1(3,0)$ 、 $D_1(2,0)$ 。 $B_2(1,1)$ 、 $C_3(2,2)$ 、 $D_4(3,3)$  亦之。



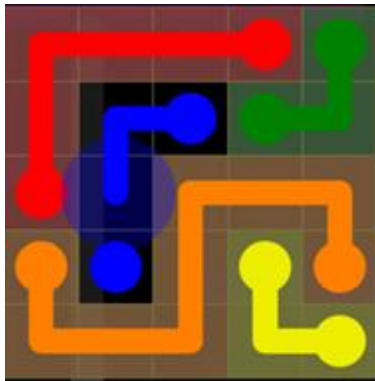
〈圖五-1〉

若  $4 \times 4$  的平面座標及其延伸可以覆蓋的範圍以立體方式表現，該圖會成為一個環狀如甜甜圈的圖形如圖〈五-2〉。



〈圖五-2〉

座標網格覆蓋方式如同手機遊戲「Flow Free」如圖〈五-3〉，以最少步數覆蓋整個座標網格為最佳；座標之循環方式如同電腦遊戲「小精靈」如圖〈五-4〉，循環方式可視為左進右出、右進左出、上進下出以及下進上出。



〈圖五-3〉

〈資料來源：幾米力的休閒娛樂站〉



〈圖五-4〉

〈資料來源：Google Play〉

## 二、歷史背景

在以往的科展作品中，以卡氏積去理解其關係，並得到其上下限。但因沒有把範圍逼近得很好，故無法列出公式。我們除了增加其控制範圍，並加入可循環之條件，使問題更加複雜。接著以卡氏積定義其座標，然後在平面上以點陣模式、在空間中以矩陣模式去發覺其循環單位，並導出通式，使其解足夠小。最後，利用除法原理與循環性，可以將問題縮小至適合利用電腦程式求值之範圍。

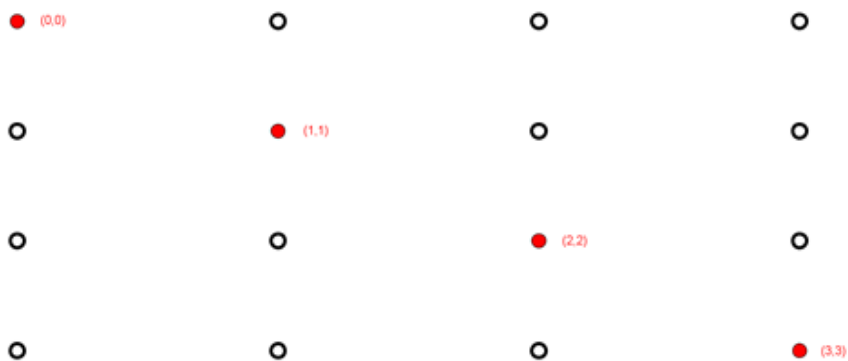
## 陸、 研究過程

### 一、二維平面空間〈平面圖形〉

#### (一) $4 \times n$

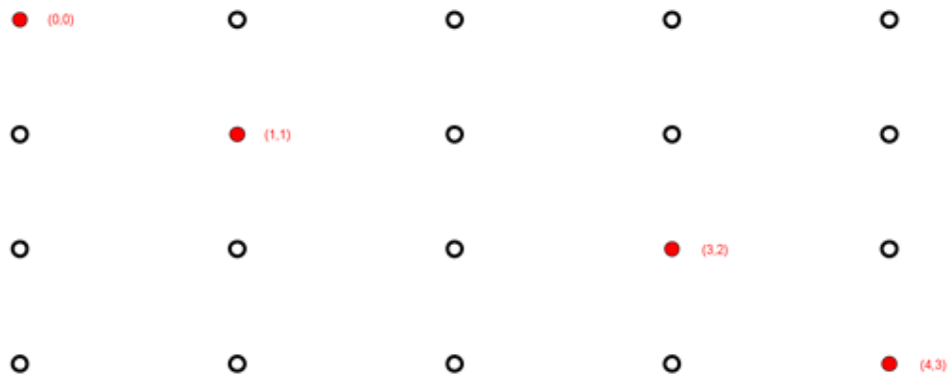
##### 1. 求點過程

(1)  $4 \times 4$ ：監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_4) = 4$ ，如圖〈六-1〉。



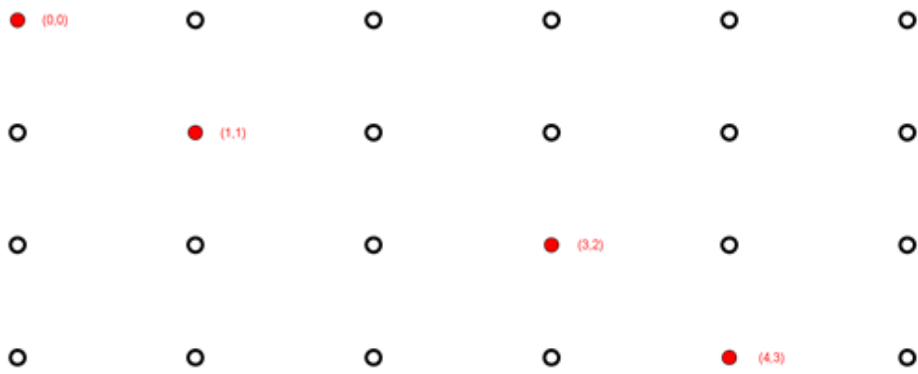
〈圖六-1〉

(2)  $4 \times 5$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_5) = 4$  , 如圖 〈六-2〉。



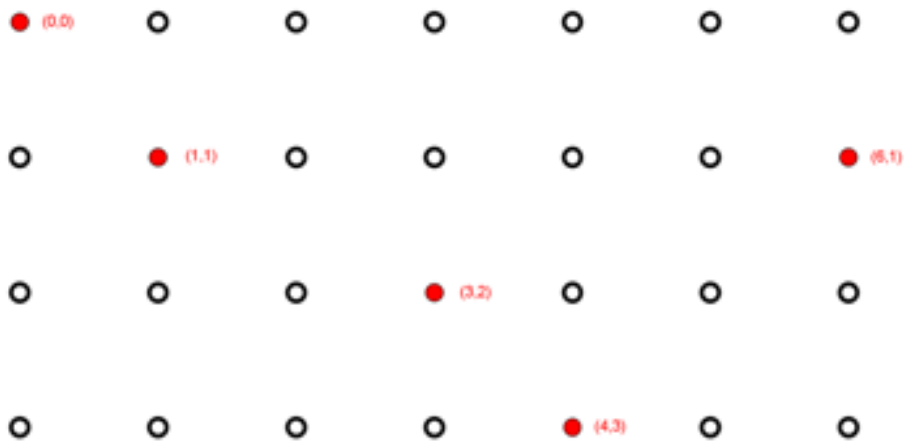
〈圖六-2〉

(3)  $4 \times 6$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_6) = 4$  , 如圖 〈六-3〉。



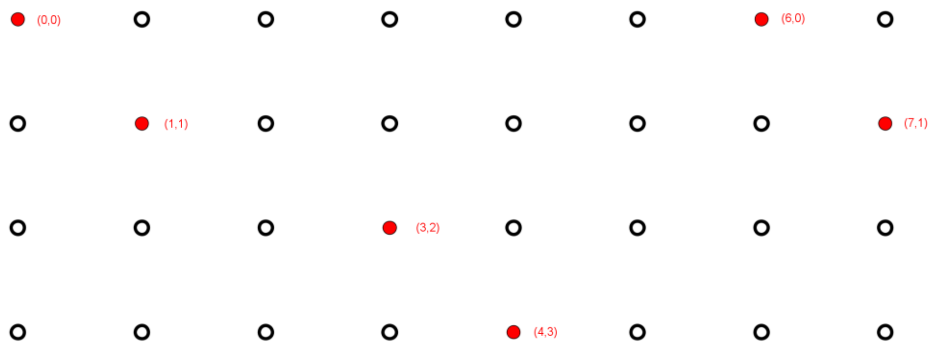
〈圖六-3〉

(4)  $4 \times 7$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_7) = 5$  , 如圖 〈六-4〉。



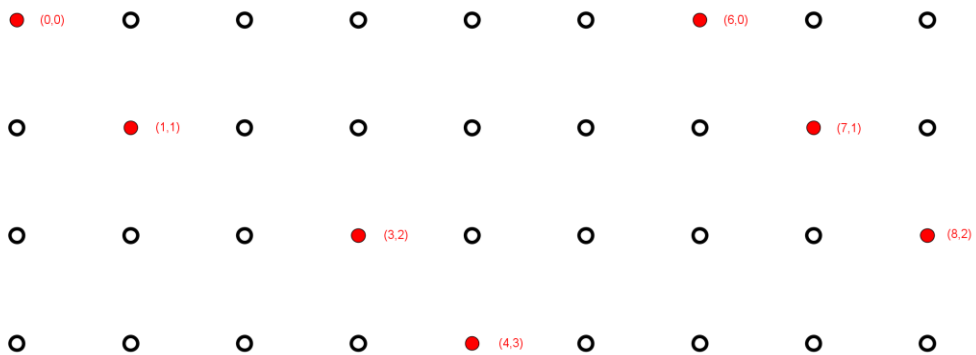
〈圖六-4〉

(5)  $4 \times 8$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_8) = 6$  , 如圖 〈六-5〉。



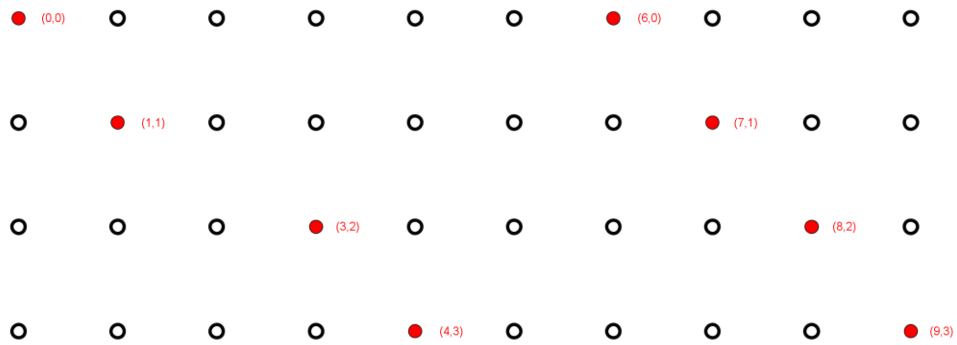
〈圖六-5〉

(6)  $4 \times 9$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_9) = 7$  , 如圖 〈六-6〉。



〈圖六-6〉

(7)  $4 \times 10$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_{10}) = 8$  , 如圖 〈六-7〉。



〈圖六-7〉



## 2. $4 \times n$ 監視點座標集通式

(1) 定義：

$S_0 = 4 \times 6t$  點陣之監視點集合。

$S_1 = 4 \times (6t + 1)$  點陣之監視點集合。

$S_2 = 4 \times (6t + 2)$  點陣之監視點集合。

$S_3 = 4 \times (6t + 3)$  點陣之監視點集合。

$S_4 = 4 \times (6t + 4)$  點陣之監視點集合。

$S_5 = 4 \times (6t + 5)$  點陣之監視點集合。

$$(2) S^* = \begin{cases} S_0 \\ S_1 = S_0 \cup \{(6t + 1, 1)\} \\ S_2 = S_0 \cup \{(6t + 1, 0), (6t + 2, 1)\} \\ S_3 = S_2 \cup \{(6t + 3, 2)\} \\ S_4 = S_3 \cup \{(6t + 4, 3)\} \\ S_5 = S_2 \cup \{(6t + 4, 2), (6t + 5, 3)\} \end{cases}$$

## 3. 監視點數範圍

(1) 上界值

在  $m \times n$  的點陣中，從第  $i$  行第  $j$  列位置起，每隔六點選一監視點，在第  $j+1$  列時，從第  $i+3$  行起，每隔六點選一監視點……重複此步驟，選出的點會是一個直線—距離—2 控制集（如圖六-8）。

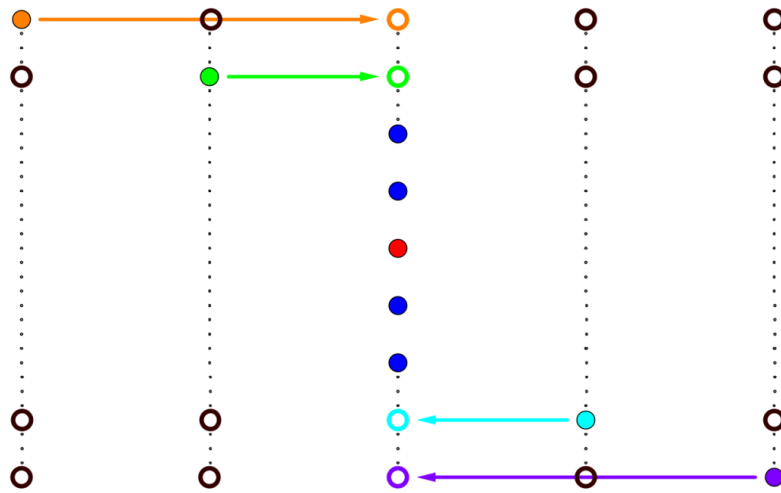


〈圖六-8〉

所以每六行需含有一個監視點才能涵蓋整個圖形，故該圖形的監視點數  $\leq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil m$ ；

同理可知，監視點數  $\leq \left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil n$ 。

(2) 下界值



〈圖六-9〉

$$a_1 + a_2 + 5a_3 + a_4 + a_5 \geq m \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_3 + 5a_4 + a_5 + a_6 \geq m \cdots \cdots \textcircled{2}$$

⋮  
⋮

$$a_{n-4} + a_{n-3} + 5a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \geq m \cdots \cdots \textcircled{n}$$

由①+②+⋯+②

$$9(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \geq mn$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \geq \frac{mn}{9}$$

(3) 結論：

$$\frac{mn}{9} \leq |S^*| \leq \min \left\{ \left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil n, \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor m \right\}$$

4. 推論

(1) 性質一

$$\begin{aligned} \text{第一列 } A_1^* &= \{(0,0), (6,0), (12,0), (18,0) \cdots \cdots (6k, 0)\} \\ &= \{(6k, 0) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第二列 } A_2^* &= \{(1,1), (7,1), (13,1), (19,1) \cdots \cdots (6k + 1, 1)\} \\ &= \{(6k + 1, 1) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

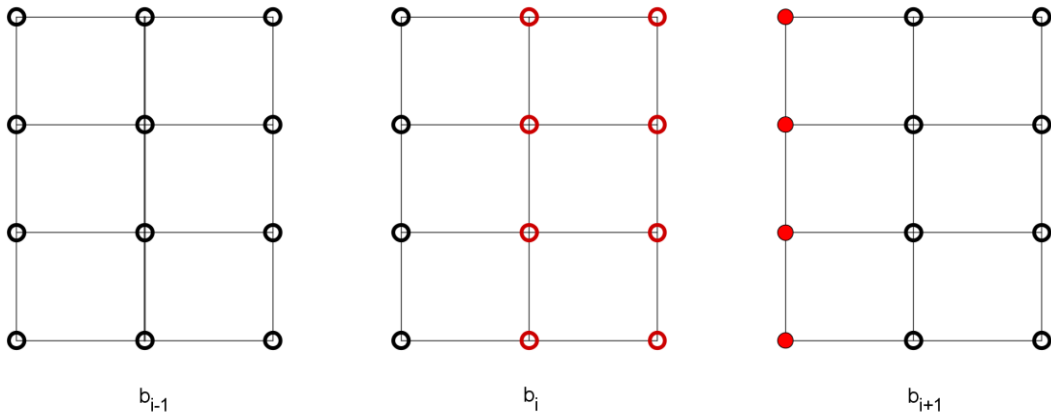
$$\begin{aligned} \text{第三列 } A_3^* &= \{(3,2), (9,2), (15,2), (21,2) \cdots \cdots (6k + 3, 2)\} \\ &= \{(6k + 3, 2) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第四列 } A_4^* &= \{(4,3), (10,3), (16,3), (22,3) \cdots \cdots (6k+4,3)\} \\ &= \{(6k+4,3) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\text{定理： } \gamma_2^*(C_4 \times C_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor, & \text{當 } n \equiv 0, 1, 2, 5 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1, & \text{當 } n \equiv 3, 4 \pmod{6} \end{cases}$$

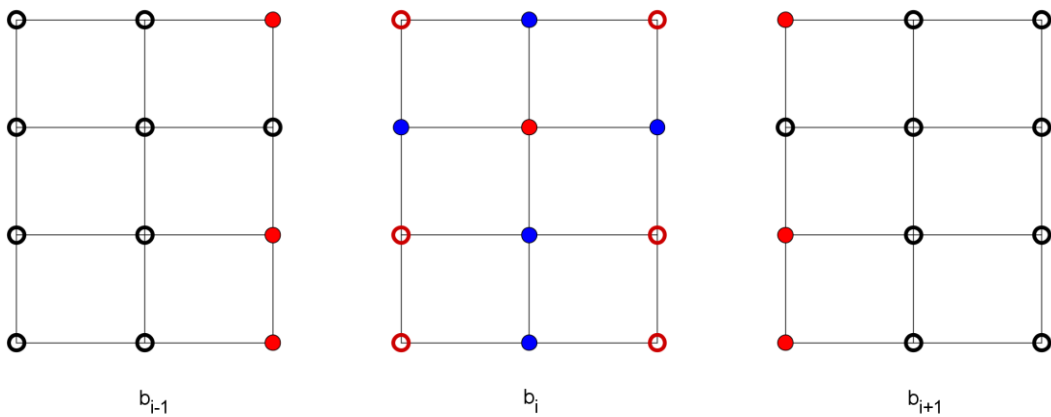
(2) 性質 2

- A. 令  $|A'_i| = a_i$ ,  $b_i = a_{3i} + a_{3i+1} + a_{3i+2}$   
 a. 若  $b_i = 0$ , 則  $b_{i+1} \geq 4$



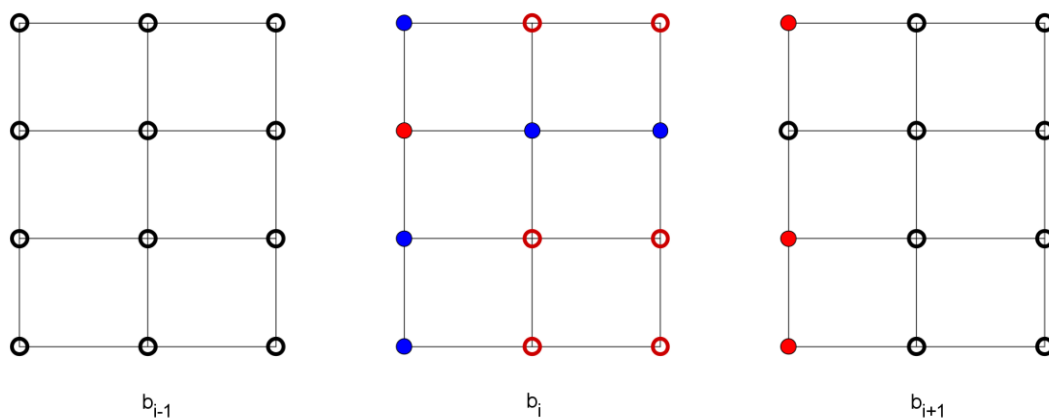
〈圖六-10〉

- b. 若  $b_i = 1$ , 則  $b_{i+1} \geq 3$  或  $b_{i-1} \geq 3$   
 I.  $a_{3i+1} = 1 \Rightarrow b_{i+1} \geq 3$  且  $b_{i-1} \geq 3$



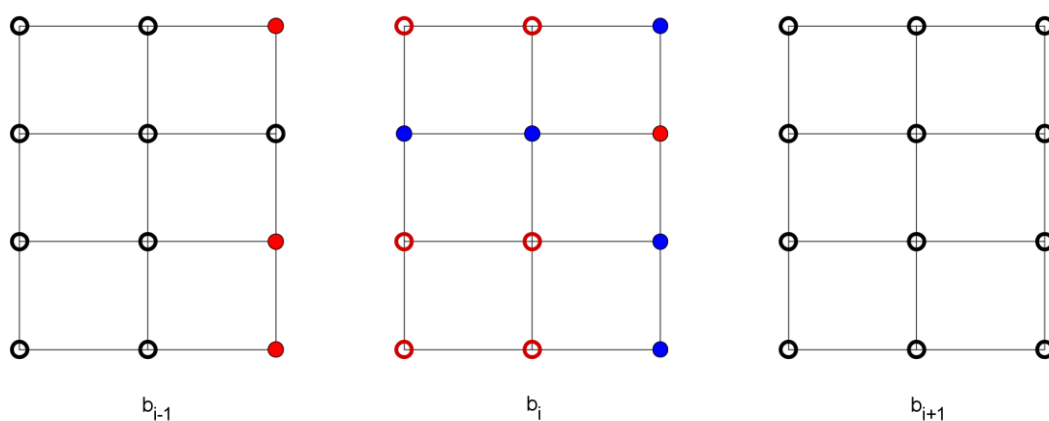
〈圖六-11〉

II.  $a_{3i} = 1 \Rightarrow b_{i+1} \geq 3$



〈圖六-12〉

III.  $a_{3i+2} = 1 \Rightarrow b_{i-1} \geq 3$



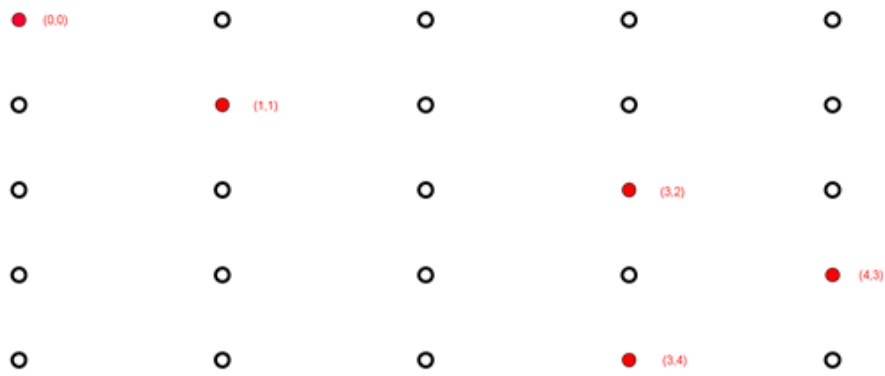
〈圖六-13〉

B. 一般而言， $\gamma_2^*(C_4 \times C_n) \leq \gamma_2^*(P_4 \times C_n)$   
 所以，若  $a \leq \gamma_2^*(C_4 \times C_n)$  且  $\gamma_2^*(P_4 \times C_n) \leq a$   
 則  $\gamma_2^*(C_4 \times C_n) = \gamma_2^*(P_4 \times C_n) = a$

(二)  $5 \times n$

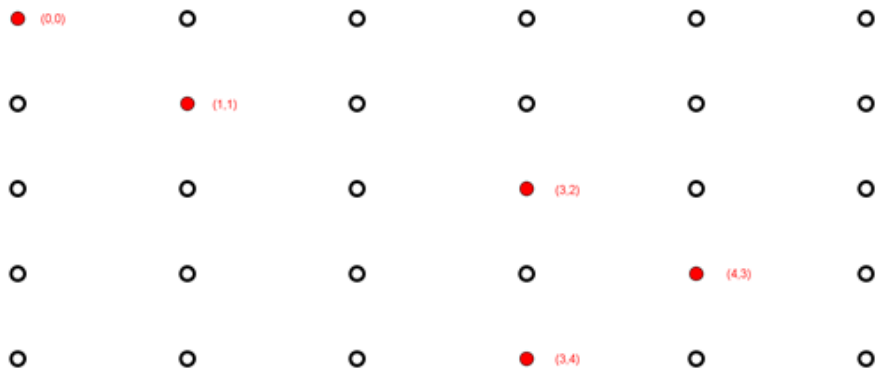
1. 求點過程

(1)  $5 \times 5$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_5) = 5$  , 如圖 〈七-1〉。



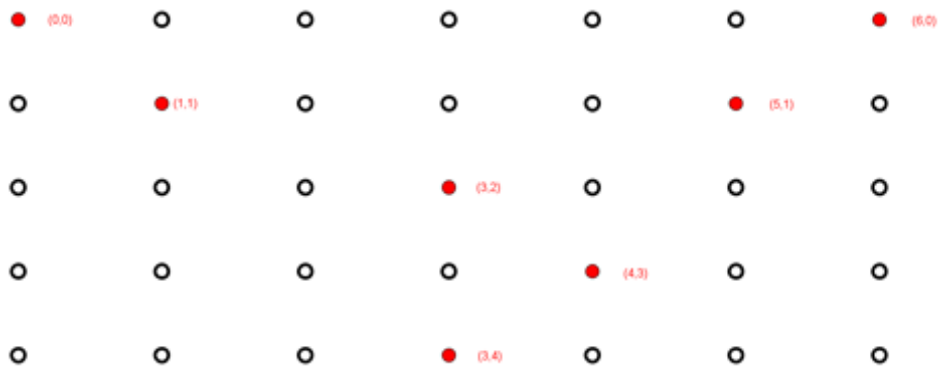
〈圖七-1〉

(2)  $5 \times 6$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_6) = 5$  , 如圖 〈七-2〉。



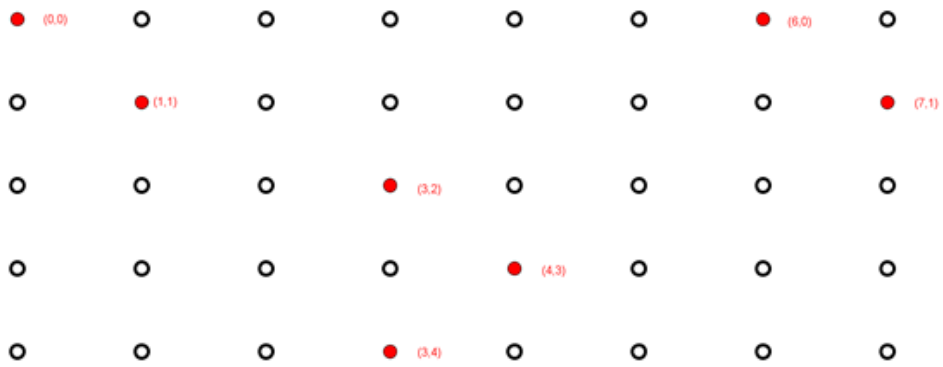
〈圖七-2〉

(3)  $5 \times 7$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_7) = 7$  , 如圖 〈七-3〉。



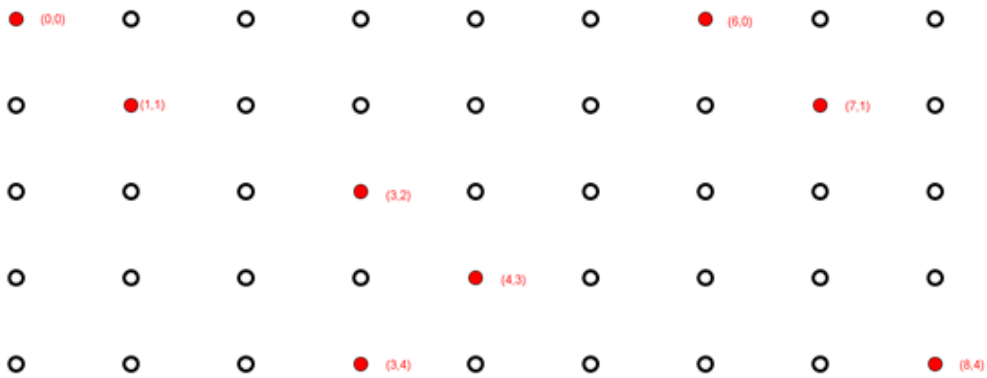
〈圖七-3〉

(4)  $5 \times 8$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_8) = 7$  , 如圖 〈七-4〉。



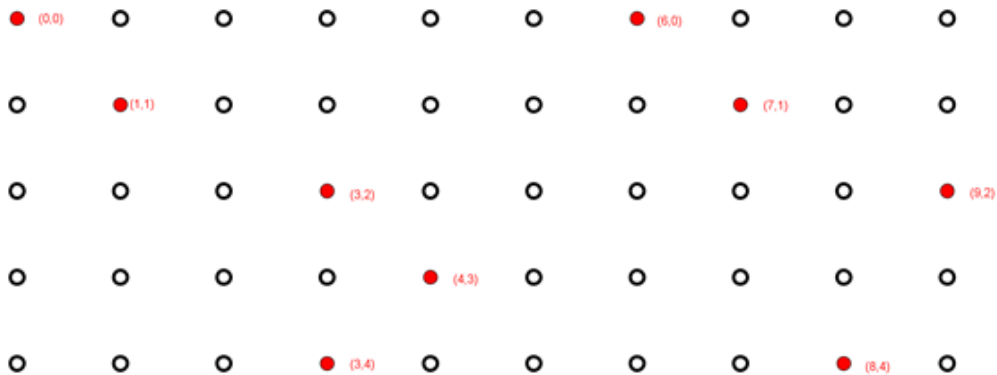
〈圖七-4〉

(5)  $5 \times 9$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_9) = 8$  , 如圖 〈七-5〉。



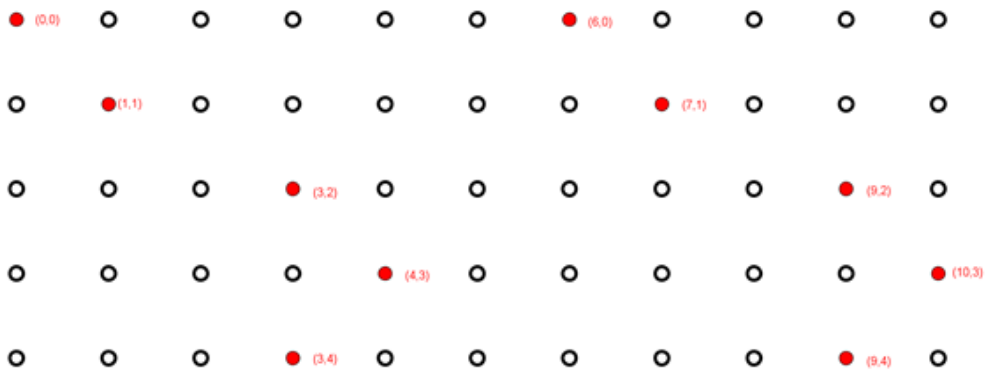
〈圖七-5〉

(6)  $5 \times 10$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_{10}) = 9$  , 如圖 〈七-6〉。



〈圖七-6〉

(7)  $5 \times 11$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_{11}) = 10$  , 如圖 〈七-7〉。



〈圖七-7〉

## 2. 推論

### (1) 性質 1

$$\begin{aligned} \text{第一列 } A_1^* &= \{(0,0), (6,0), (12,0), (18,0) \cdots (6k, 0)\} \\ &= \{(6k, 0) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第二列 } A_2^* &= \{(1,1), (7,1), (13,1), (19,1) \cdots (6k + 1, 1)\} \\ &= \{(6k + 1, 1) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第三列 } A_3^* &= \{(3,2), (9,2), (15,2), (21,2) \cdots (6k + 3, 2)\} \\ &= \{(6k + 3, 2) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第四列 } A_4^* &= \{(4,3), (10,3), (16,3), (22,3) \cdots (6k + 4, 3)\} \\ &= \{(6k + 4, 3) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

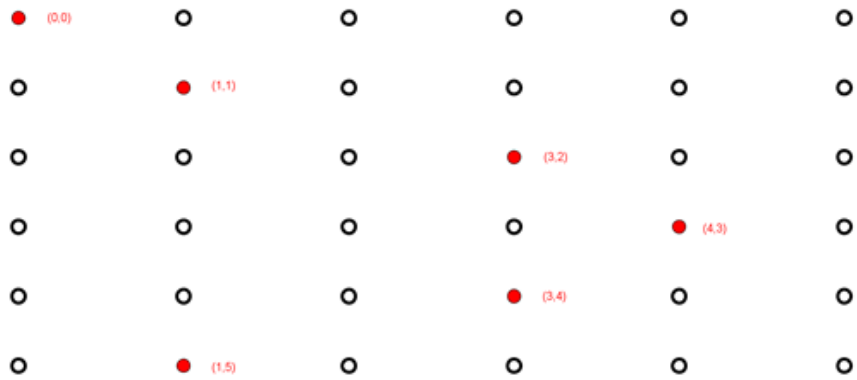
$$\begin{aligned} \text{第五列 } A_5^* &= \{(3,4), (9,4), (15,4), (21,4) \cdots (6k + 3, 4)\} \\ &= \{(6k + 3, 4) | k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\text{定理 : } \gamma_2^*(C_5 \times C_n) \leq \left\lceil \frac{5n}{6} \right\rceil, \text{ 當 } n \in \mathbb{Z}^+$$

### (三) $6 \times n$

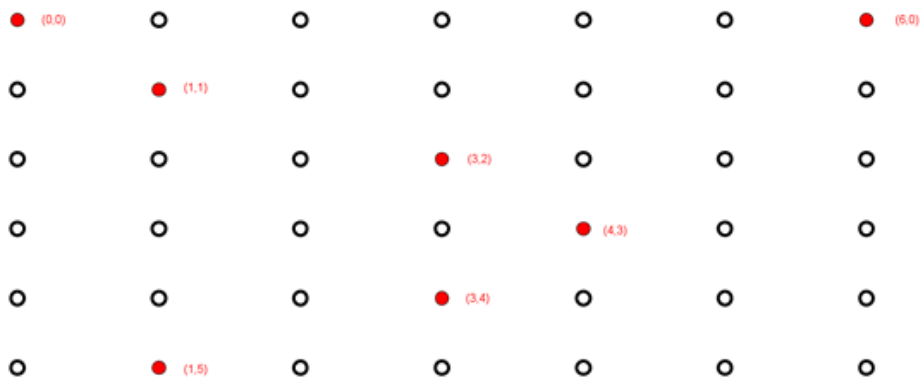
#### 1. 求點過程

(1)  $6 \times 6$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_6 \times C_6) = 6$  , 如圖 〈八-1〉。



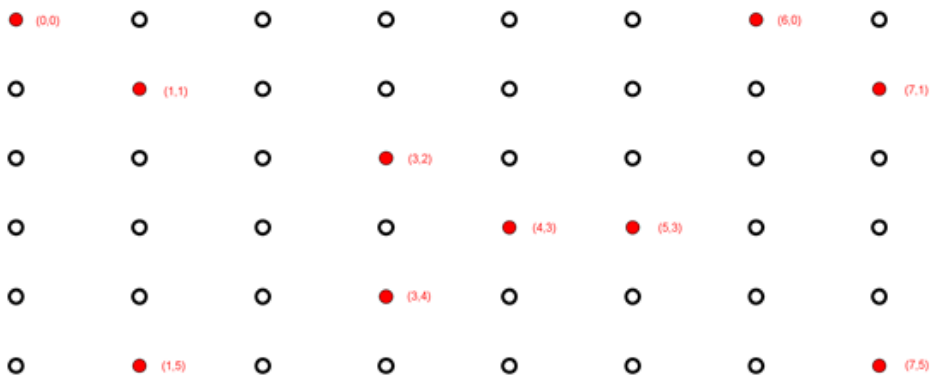
〈圖八-1〉

(2)  $6 \times 7$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_6 \times C_7) = 7$  , 如圖 〈八-2〉。



〈圖八-2〉

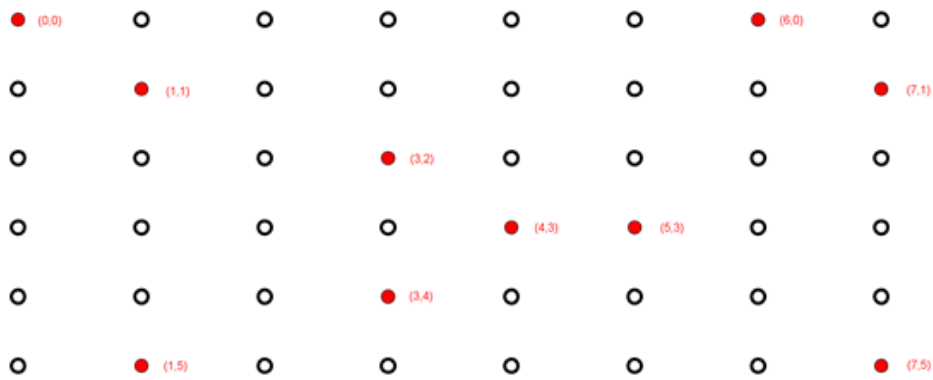
(3)  $6 \times 8$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_6 \times C_8) = 10$  , 如圖 〈八-3〉。



〈圖八-3〉

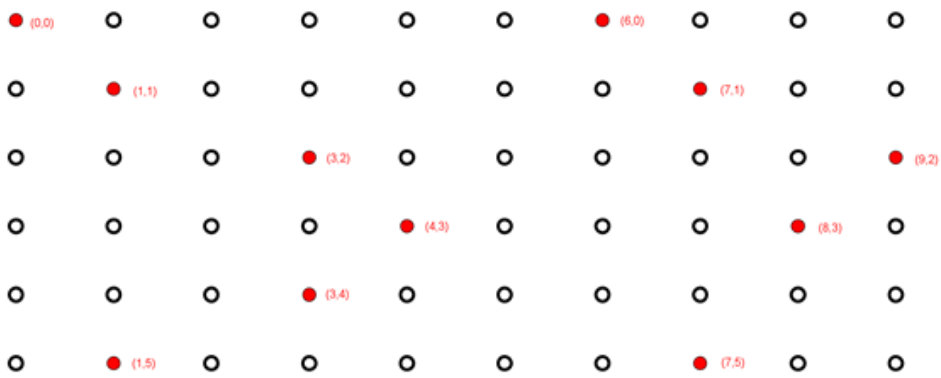


(4)  $6 \times 9$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_6 \times C_9) = 10$  , 如圖 〈八-4〉。



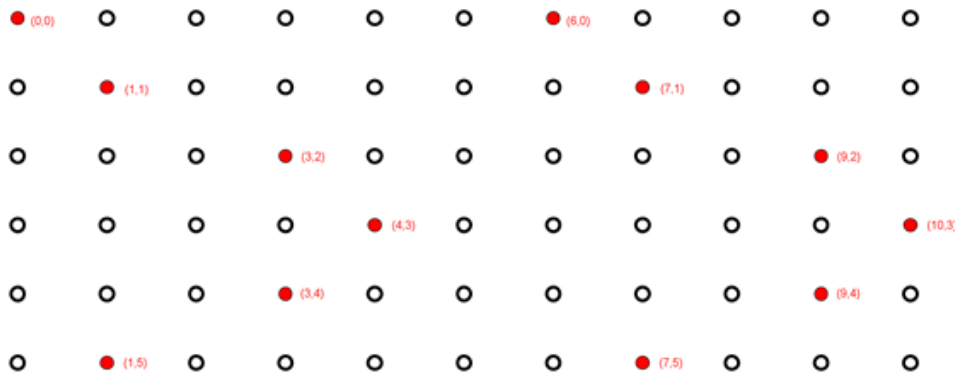
〈圖八-4〉

(5)  $6 \times 10$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_6 \times C_{10}) = 11$  , 如圖 〈八-5〉。



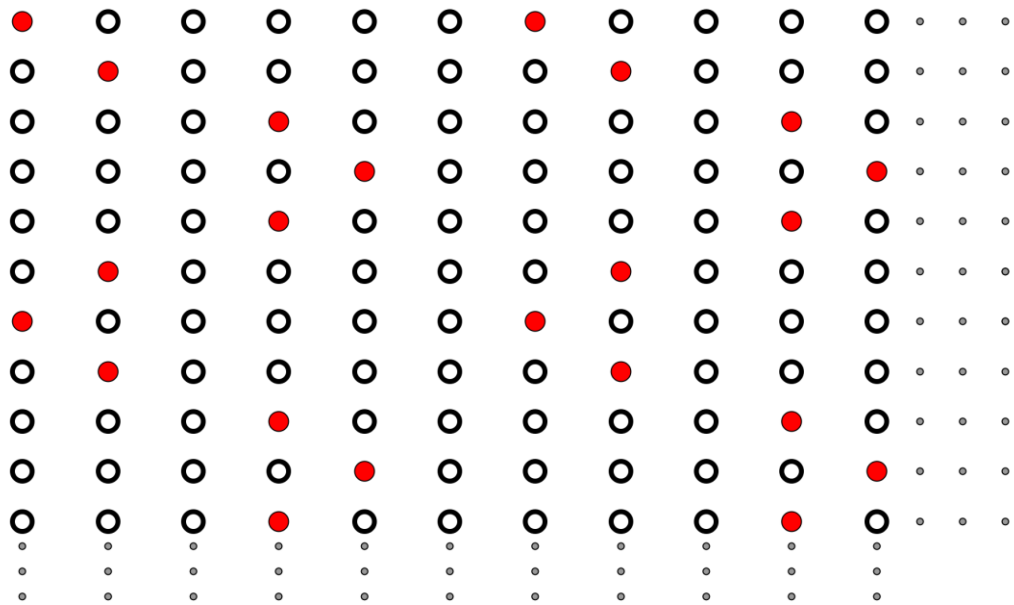
〈圖八-5〉

(6)  $6 \times 11$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_6 \times C_{11}) = 12$  , 如圖 〈八-6〉。



〈圖八-6〉

(四) 平面作圖規律：



〈圖九〉

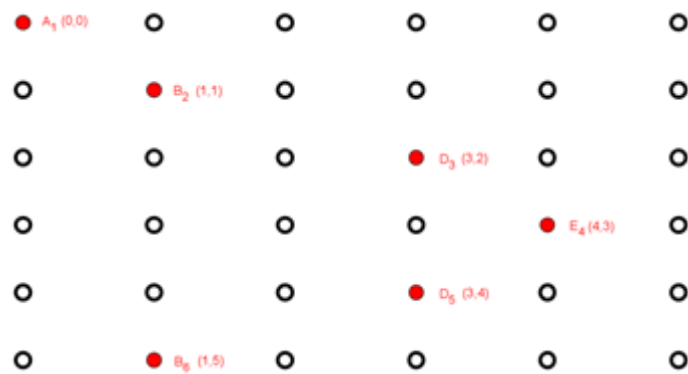
我們求得 $C_6 \times C_6$ 點陣為一單位循環點陣。

(五) 監視點數公式推導

由上列圖形可觀察出  $m \times n$  點陣之規律，以此規律，可以 $C_6 \times C_6$ 點陣作分割如下：

1. 定義：

(1)  $I_{6 \times 6}$ 表  $6 \times 6$  階循環單位點陣，如下圖

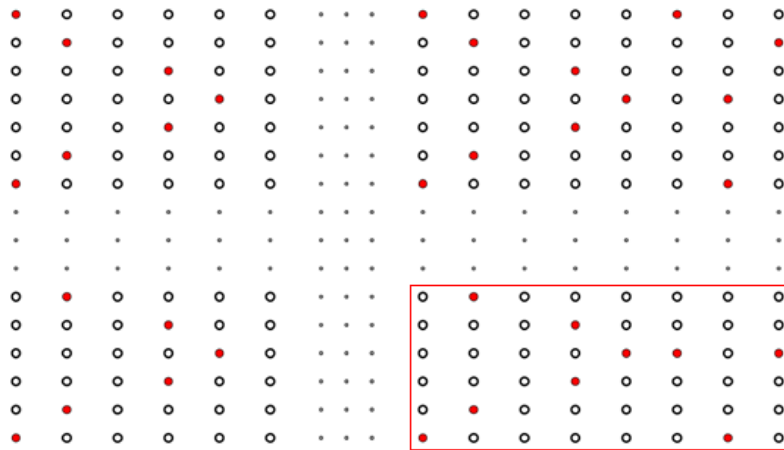


〈圖十-1〉

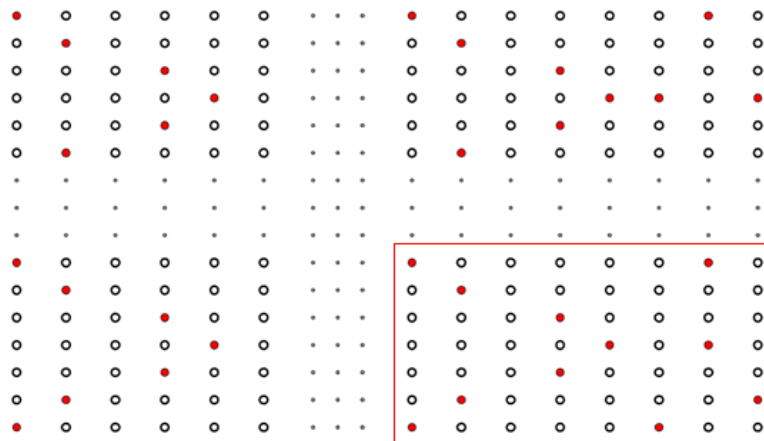
$|I_{6 \times 6}| = 6$ ，此確定為 $6 \times 6$ 階點陣之最小值：

- A. 當 $|I_{6 \times 6}| = \lfloor \frac{6 \times 6}{9} \rfloor$ 為最理想狀態，但利用窮舉法 $|I_{6 \times 6}| = 4$ 或 $5$ 均無法監視全部路口，所以可知 $|I_{6 \times 6}| = 6$ 為最小值。
- B. 以電腦程式驗證，亦得 $|I_{6 \times 6}| = 6$

(2)  $I_{h \times k}$ 表接續循環單位點陣後之剩餘點陣，如下圖紅框內點陣分別為 $I_{6 \times 8}$ 如圖〈十-2〉、 $I_{7 \times 8}$ 如圖〈十-3〉

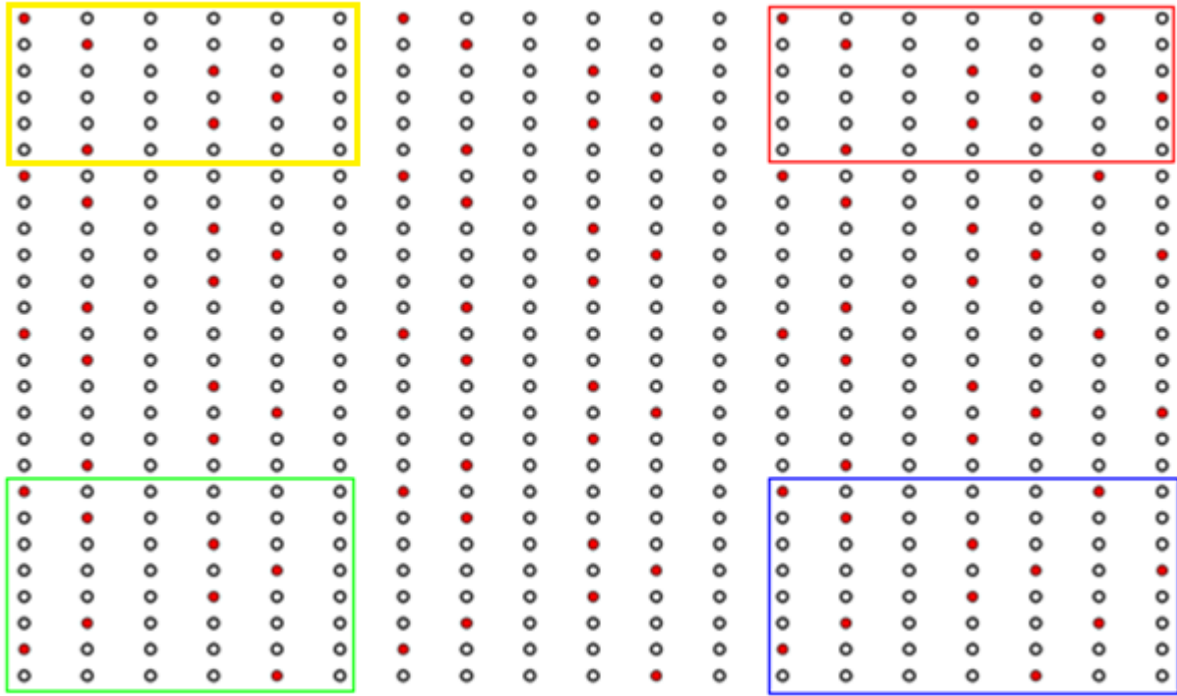


〈圖十-2〉



〈圖十-3〉

(3)  $A_{m \times n}$ 表以 $I_{6 \times 6}$ 為基底之 $m \times n$ 階點陣，如下圖表 $A_{26 \times 19}$ 之點陣，其中左上角黃框內表 $I_{6 \times 6}$ 點陣、右上角紅框內表 $I_{6 \times 7}$ 點陣、左下角綠框內表 $I_{8 \times 6}$ 點陣、右下角藍框內表 $I_{8 \times 7}$ 點陣。



〈圖十-4〉

2. 若 $A_{m \times n}$ 中， $m = 6h + r_1, 6 \leq r_1 \leq 12$

$$n = 6k + r_2, 6 \leq r_2 \leq 12,$$

$$\text{則 } |A_{m \times n}| = h \times k \times |I_{6 \times 6}| + k \times |I_{r_1 \times 6}| + h \times |I_{6 \times r_2}| + |I_{r_1 \times r_2}|$$

因點陣具旋轉性，所以

$$|A_{m \times n}| = \min\{|A_{m \times n}|, |A_{n \times m}|\}$$

下表為 $I_{h \times k}$ 監視點數對照表

〈表一〉

h \ k	6	7	8	9	10	11	12
6	6	8	9	10	11	12	12
7	7	9	11	12	13	14	14
8	8	11	12	14	15	16	16
9	9	12	15	15	16	18	18
10	10	14	15	17	18	20	20
11	11	15	17	18	20	22	22
12	12	16	18	20	22	24	24

例如：

(1)

$$|A_{48 \times 46}| = 7 \times 6 \times 6 + 6 \times 6 + 7 \times 11 + 11$$

$$= 376$$

$$|A_{46 \times 48}| = 6 \times 7 \times 6 + 7 \times 10 + 6 \times 6 + 10$$

$$= 368$$

$$\Rightarrow |A_{48 \times 46}| = \min\{|A_{48 \times 46}|, |A_{46 \times 48}|\} = 368$$

(2)

$$|A_{60 \times 60}| = 9 \times 9 \times 6 + 9 \times 6 + 9 \times 6 + 6$$

$$= 600$$

以程式檢驗  $\Rightarrow$  共 600 個

## 二、三維立體空間〈立體圖形〉

平面的座標系統是用於道路系統，而我們也想到可以用立體的座標系統去解釋無線網路架設、紅外線感應式自動開關及大樓電視強波器。

在立體圖形中，很顯然的每層點數可由上下層覆蓋之，所以其單層監視點數會較平面佳。即同邊長的平面與立體圖形中，立體點陣中任意層的監視點數都比單獨討論平面所需的監視點數還少。所以可知：

$$\gamma_2^*(C_m \times C_n \times C_k) \leq k \times \gamma_2^*(C_m \times C_n), \quad m, n, k \in \mathbb{Z}^+$$

(一)  $4 \times 4 \times 4$ ：監視點數  $\gamma_2^*(C_4 \times C_4 \times C_4) \leq 12$ ，每層監視點數  $\leq 3$ 。

〈表二〉

第一層	第二層

第三層	第四層

(二)  $5 \times 5 \times 5$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_5 \times C_5 \times C_5) \leq 15$  , 每層監視點數  $\leq 3$  。

〈表三〉

第一層	第二層
第三層	第四層
第五層	

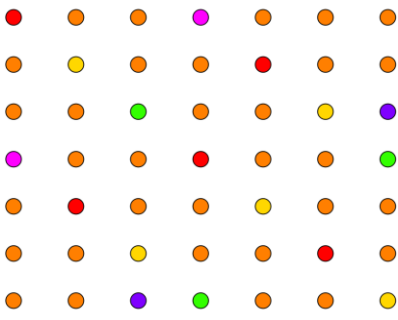
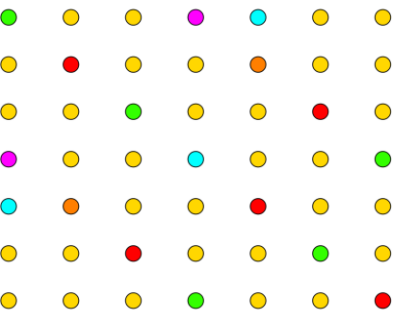
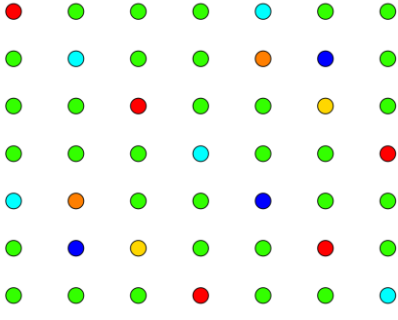
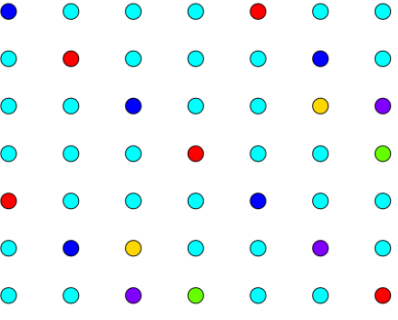
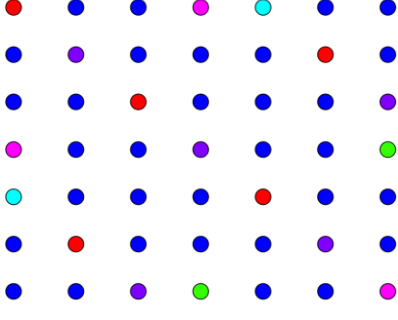
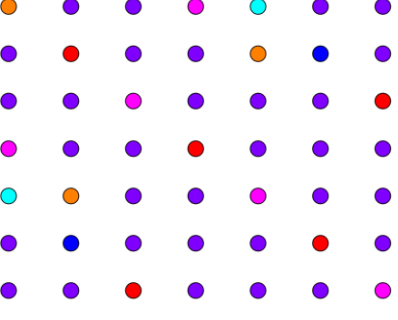
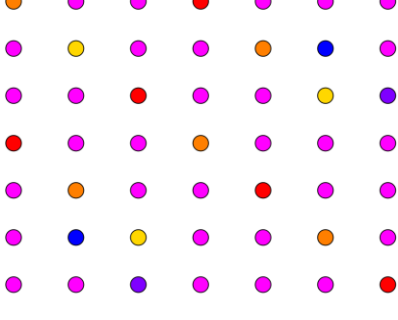
(三)  $6 \times 6 \times 6$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_6 \times C_6 \times C_6) \leq 24$  , 每層監視點數  $\leq 4$  。

〈表四〉

第一層	第二層
第三層	第四層
第五層	第六層

(四)  $7 \times 7 \times 7$  : 監視點數  $\gamma_2^*(C_7 \times C_7 \times C_7) \leq 35$  , 每層監視點數  $\leq 5$  。

〈表五〉

第一層	第二層
	
第三層	第四層
	
第五層	第六層
	
第七層	
	



(五) 立體監視點：

立體監視點的確立，使其儘可能接近最少值，我們採用了「矩陣對角線設點法」，依此方法我們可以使監視點夠小，介紹如下：

1. 定義：

$M_n$ 表  $n$  階對應矩陣

$M_n = [a_{ij}] \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ，其中

(1)  $a_{ij}$ 表第  $i$  層第  $j$  行監視點所在列數

(2) 若第  $i$  層第  $j$  行無監視點，則  $a_{ij} = \infty$

2. 每一個立體監視點位置可以一矩陣對應之，例如：

表〈二〉  $4 \times 4 \times 4$  之監視點位置可以  $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \infty & 3 \\ 4 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \infty & 2 & 4 \end{bmatrix}$  表之。

表〈三〉  $5 \times 5 \times 5$  之監視點位置可以  $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 4 & \infty & 3 & 1 & \infty \\ \infty & 5 & \infty & 4 & 2 \\ 3 & \infty & 1 & \infty & 5 \end{bmatrix}$  表之。

表〈四〉  $6 \times 6 \times 6$  之監視點位置可以  $M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \infty & 5 & 2 & \infty \\ \infty & 2 & 5 & \infty & 6 & 3 \\ 4 & \infty & 3 & 6 & \infty & 1 \\ 2 & 5 & \infty & 4 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & 6 & \infty & 5 & 2 \\ 3 & \infty & 4 & 1 & \infty & 6 \end{bmatrix}$  表之。

3. 以「矩陣對角線設點法」確立  $M_n$ ：

原因如下：

(1) 重疊性最低，以  $6 \times 6 \times 6$  為例

監視點(0,0,0)所監視之 13 個點分別為

(0,0,0),(0,1,0),(0,2,0),(0,5,0),(0,4,0),(1,0,0),(2,0,0),(5,0,0),  
(4,0,0),(0,0,2),(0,0,5),(0,0,4)

監視點(1,1,1)所監視之 13 個點分別為

(1,1,1),(1,2,1),(1,3,1),(1,0,1),(1,5,1),(2,1,1),(3,1,1),(0,1,1)  
(5,1,1),(1,1,0),(1,1,5),(1,1,2),(1,1,3)

以上之 26 個監視點均不重複。

(2) 密接性最高，以  $6 \times 6 \times 6$  為例

(0,0,0),(0,1,0),(0,2,0),(0,5,0),(0,4,0),(1,0,0),(2,0,0),(5,0,0),  
(4,0,0),(0,0,2),(0,0,5),(0,0,4)

(1,1,1),(1,2,1),(1,3,1),(1,0,1),(1,5,1),(2,1,1),(3,1,1),(0,1,1)  
(5,1,1),(1,1,0),(1,1,5),(1,1,2),(1,1,3)

以上 26 個監視點均緊鄰著。

矩陣對角線設點法步驟如下:

- (1) 若  $i = j$ ，則  $a_{ij} = i$ 。
- (2)  $a_{ih} \neq a_{ik}$ ， $h \neq k$ 。
- (3) 對角線關係：
  - A. 若  $a_{ij} = \infty$ ，則  $a_{(i+1)(j+1)} = \infty$
  - B. 若  $a_{ij} = X$ ，則  $a_{(i+1)(j+1)} = X + 1$
  - C. 若  $a_{ij} = n$ ，則  $a_{(i+1)(j+1)} = 1$
  - D. 若  $a_{in} = y$ ，則  $a_{(i+1)1} = y + 1$
  - E. 若  $a_{in} = n$ ，則  $a_{(i+1)1} = 1$
  - F. 若  $a_{in} = \infty$ ，則  $a_{(i+1)1} = \infty$
- (4) 當  $|h - k| \leq 2$ 時，以  $a_{hj} \neq a_{kj}$  優先考量。
- (5)  $1 \sim n$  個數出現次數相等。

以此規律，我們嘗試  $M_7$ ，得  $M_7$  之一解為 = 
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & \infty & 4 & 2 & 6 & \infty \\ \infty & 2 & 6 & \infty & 5 & 3 & 7 \\ 1 & \infty & 3 & 7 & \infty & 6 & 4 \\ 5 & 2 & \infty & 4 & 1 & \infty & 7 \\ 1 & 6 & 3 & \infty & 5 & 2 & \infty \\ \infty & 2 & 7 & 4 & \infty & 6 & 3 \\ 4 & \infty & 3 & 1 & 5 & \infty & 7 \end{bmatrix},$$

經驗證發現可以覆蓋全部。

若要減少監視點數，則可以在得出  $M_n$  之一解後做適切的挪動監視點或增加  $\infty$  個數。

因挪動監視點數較無規律可尋，於是我們設法增加  $\infty$  的個數。

#### 4. 立體監視點數公式

(1) 定義：

- A.  $I^* = M_7$  = 循環單位對應矩陣
- B.  $|I^*|$  表循環單位對應矩陣之監視點數
- C.  $|M_{n \times m \times k}|$  表  $n \times m \times k$  階對應矩陣之監視點數

我們分別以  $M_5$ 、 $M_6$ 、 $M_7$  為單位循環對應矩陣計算出  $210 \times 210 \times 210$

的監視點數分別為 1111320、1029000、945000，以  $M_7$  為循環單位對應矩陣有較小值，所以選擇以  $M_7$  為矩陣對角線設點法之循環單位對應矩陣。

(2) 公式：

A.  $|M_{7n \times 7m \times 7k}| = nmk |I^*| = 35nmk$

B. 若  $n = 7q_1 + r_1 \quad 7 \leq r_1 \leq 14$   
 $m = 7q_2 + r_2 \quad 7 \leq r_2 \leq 14$   
 $k = 7q_3 + r_3 \quad 7 \leq r_3 \leq 14$

$$\begin{aligned} \text{則 } |M_{n \times m \times k}| &= q_1 q_2 q_3 |I^*| + q_1 q_3 |M_{7 \times r_2 \times 7}| + q_2 q_3 |M_{r_1 \times 7 \times 7}| \\ &\quad + q_3 |M_{r_1 \times r_2 \times 7}| + q_1 |M_{7 \times r_2 \times r_3}| + q_2 |M_{r_1 \times 7 \times r_3}| \\ &\quad + |M_{r_1 \times r_2 \times r_3}| \end{aligned}$$

因立體點陣具旋轉性與翻轉性，所以，以  $M_7$  為循環單位對應矩陣之最佳解為

$$\min\{|M_{m \times n \times k}|, |M_{m \times k \times n}|, |M_{n \times m \times k}|, |M_{n \times k \times m}|, |M_{k \times m \times n}|, |M_{k \times n \times m}|\}$$

然而上述之公式，在求剩餘對應矩陣監視點數方面難度較高，所以我們改以「補點法則」來處理，所得之監視點數雖不如上述佳，但仍夠小：

若  $n = 7q_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 \leq 7$   
 $m = 7q_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 \leq 7$   
 $k = 7q_3 + r_3 \quad 0 \leq r_3 \leq 7$

$$\begin{aligned} \text{則 } |M_{n \times m \times k}| &= q_1 q_2 q_3 |I^*| + q_1 q_3 |M_{7 \times r_2 \times 7}| + q_2 q_3 |M_{r_1 \times 7 \times 7}| \\ &\quad + q_3 |M_{r_1 \times r_2 \times 7}| + q_1 |M_{7 \times r_2 \times r_3}| + q_2 |M_{r_1 \times 7 \times r_3}| \\ &\quad + |M_{r_1 \times r_2 \times r_3}| \end{aligned}$$

我們以下列例子說明「補點法則」，例如：

$$\begin{aligned} &|M_{23 \times 31 \times 18}| \\ &= 24 |I^*| + 6 |M_{7 \times 3 \times 7}| + 8 |M_{2 \times 7 \times 7}| + 3 |M_{7 \times 3 \times 4}| + 4 |M_{2 \times 7 \times 4}| \\ &\quad + 2 |M_{2 \times 3 \times 7}| + |M_{2 \times 3 \times 4}| \end{aligned}$$

其中欲求  $|M_{7 \times 3 \times 7}|$  之值，步驟如下：

步驟一、 依循  $|I^*|$  之規律完成  $7 \times 10$  階對應矩陣：

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & \infty & 4 & 2 & 6 & \infty & 1 & 5 & \infty \\ \infty & 2 & 6 & \infty & 5 & 3 & 7 & \infty & 2 & 6 \\ 1 & \infty & 3 & 7 & \infty & 6 & 4 & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 2 & \infty & 4 & 1 & \infty & 7 & 5 & 2 & \infty \\ 1 & 6 & 3 & \infty & 5 & 2 & \infty & 1 & 6 & 3 \\ \infty & 2 & 7 & 4 & \infty & 6 & 3 & \infty & 2 & 7 \\ 4 & \infty & 3 & 1 & 5 & \infty & 7 & 4 & \infty & 3 \end{bmatrix}$$

步驟二、依上述對應矩陣完成 $7 \times 3 \times 7$ 階立體點陣，須補上  
 $(0,1,6), (1,10,4), (2,10,1), (3,1,2), (3,1,6), (4,1,3),$   
 $(4,10,4), (7,1,7), (7,10,3)$ 九個點，如表〈六〉。

所以， $|M_{7 \times 3 \times 7}| = 15 + 9 = 24$ 。

(六)  $7 \times 10 \times 7$ ：橘色點表 $7 \times 3 \times 7$ 部分的監視點，綠色點表補點。

〈表六〉

第一層	
第二層	
第三層	

第四層	
第五層	
第六層	
第七層	

## 柒、 研究結果與結論

我們設定一監視器能有限制的監視其周圍各兩點，稱為直線－距離－2之控制集。  
經由反覆驗證與推導，我們得到：

一、 $4 \times n$  監視點：

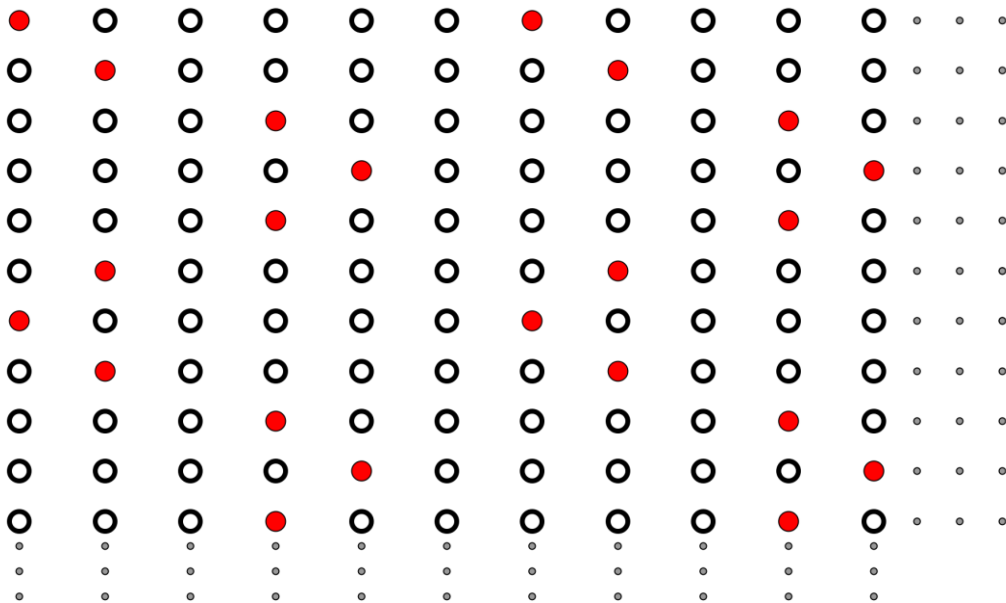
$$(一) \quad S^* = \begin{cases} S_0 \\ S_1 = S_0 \cup \{(6t + 1, 1)\} \\ S_2 = S_0 \cup \{(6t + 1, 0), (6t + 2, 1)\} \\ S_3 = S_2 \cup \{(6t + 3, 2)\} \\ S_4 = S_3 \cup \{(6t + 4, 3)\} \\ S_5 = S_2 \cup \{(6t + 4, 2), (6t + 5, 3)\} \end{cases}$$

$$(二) \quad \text{定理：} \gamma_2^*(C_4 \times C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil, \text{當 } n \equiv 0, 1, 2, 5 \pmod{6} \\ \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1, \text{當 } n \equiv 3, 4 \pmod{6} \end{cases}$$

二、 $5 \times n$  監視點

$$\text{定理：} \gamma_2^*(C_5 \times C_n) \leq \left\lceil \frac{5n}{6} \right\rceil, \text{當 } n \in \mathbb{Z}^+$$

三、平面作圖規律：



#### 四、平面監視點點數：

(一) 範圍：

$$\frac{mn}{9} \leq |S^*| \leq \min \left\{ \left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil n, \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil m \right\}$$

(二) 若 $A_{m \times n}$ 中， $m = 6h + r_1, 6 \leq r_1 \leq 12$

$$n = 6k + r_2, 6 \leq r_2 \leq 12,$$

$$\text{則 } |A_{m \times n}| = h \times k \times |I_{6 \times 6}| + k \times |I_{r_1 \times 6}| + h \times |I_{6 \times r_2}| + |I_{r_1 \times r_2}|$$

因點陣具旋轉性，所以

$$|A_{m \times n}| = \min\{|A_{m \times n}|, |A_{n \times m}|\}$$

#### 五、立體監視點數公式

$$\text{若 } n = 7q_1 + r_1 \quad 7 \leq r_1 \leq 14$$

$$m = 7q_2 + r_2 \quad 7 \leq r_2 \leq 14$$

$$k = 7q_3 + r_3 \quad 7 \leq r_3 \leq 14$$

$$\text{則 } |M_{n \times m \times k}| = q_1 q_2 q_3 |I^*| + q_1 q_3 |M_{7 \times r_2 \times 7}| + q_2 q_3 |M_{r_1 \times 7 \times 7}| + \\ q_3 |M_{r_1 \times r_2 \times 7}| + q_1 |M_{7 \times r_2 \times r_3}| + q_2 |M_{r_1 \times 7 \times r_3}| + |M_{r_1 \times r_2 \times r_3}|$$

因立體點陣具旋轉性與翻轉性，所以，以 $M_7$ 為循環單位對應矩陣之最佳解為

$$\min\{|M_{m \times n \times k}|, |M_{m \times k \times n}|, |M_{n \times m \times k}|, |M_{n \times k \times m}|, |M_{k \times m \times n}|, |M_{k \times n \times m}|\}$$

### 捌、參考資料及其他

- 一、Sandi Klaviar/Dominating Cartesian products of cycles
- 二、尤怡方、余珍華、李敏辰、陳佑瑄/密碼鎖-拉丁超立方體的完美控制情形(Lucky Locks) / 第五十屆全國中小學科學展覽
- 三、李佳晉、藍唯倫、徐書強、鄭博升/超立方體 $Q_n$ 之最小控制/第四十八屆全國中小學科學展覽
- 四、陳冠儒、翁翠微、伍蕙萱、陳冠霖/密碼鎖/第四十三屆全國中小學科學展覽

## 【評語】 040406

從  $4 \times n$  的監視點選取方式，找出  $m \times n$  監視點數的上界，再利用不等式的方法找出下界，如何得到更好的上下界是未來努力的方向。立體監視點數得到一些初步的結果，但是和平面的情形一樣，應該對推理的方式，給予足夠的說明，不然結果的式子都難以驗證其正確性。另外，定義中提到路徑  $P_m$  相關的定義，報告中並未研究，應該予以刪除。