中華民國第54屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳創意獎

040405

N 邊形內一定點與其頂點連線的神秘戀曲

學校名稱：國立鹿港高級中學

作者：	指導老師：
高二 莊閎宇	鄭仕豐
高二 莊祐鈞	張富強

關鍵詞：正 $2n$ 邊形、正 $2n$-1 邊形、n 線共點

N 邊形內一定點與其頂點連線的神秘戀曲

摘要

本篇文章主要討論平面上三角形一個幾何定性性質的推廣，我們考慮的原始問題如『引理一』所述，即『一個三角 ABC 內部有一定點 P，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，則 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 成立。』我們發現此結果在**正 $2n$ 邊形與正 $2n-1$（$n\geq 2$）邊形**中也有相對應的推論，只是定值不再是 1，而是會隨著邊數的不同而有所改變，我們可以表示出數個比值相加後之定值的一般化公式。此外，我們亦考慮非正多邊形的情形，但我們發現任意多邊形內的一點 P 並不再完全保有這個性質，僅有部分的 P 點可以維持這樣的性質。另外，我們亦將『引理一』推論到空間中的**『任意四面體』、『正六面體』與『正八面體』**，至於『正十二面體』與『正二十面體』上的推論尚在努力中，而任意多邊形內具有這些性質的所有 P 點所形成的軌跡也是我們接下來想要探討的問題。

壹、 研究動機

在一個課餘的機會裡，老師教我們使用數學繪圖軟體 Geogebra 繪製一些平面上的幾何圖形，透過實驗與觀察重新驗證一些平面幾何上的結果，我們做了許多數學實驗，發現這套軟體除了容易操作外，重要的是操作起來讓我們覺得很有趣，因為它可以快速實驗考慮多種變化的情形。在這個軟體操作的學習裡，我們除了重新品嚐了一些學過的平面幾何結論外，更對參考資料[1]中的一個三角形幾何定性性質產生興趣，問題的描述詳見『引理一』。

我們除了用軟體檢驗了一下這個幾何定性性質，也給出其嚴謹的證明（詳見引理一），接著我們就想說有沒有機會將它推廣到任意多邊形的情形，我們用了軟體先行檢驗一番，發現任意的凸四邊形內只有一些 P 點會保持這個性質成立，所以我們退而求其次，先考慮正多邊形的情形，從正方形、正五邊形、正六邊形、正七邊形與正八邊形，一直到一般化的正 $2n$（$n\geq 2$）邊形與正 $2n-1$（$n\geq 2$）邊形，一步一腳印, 邊數由小至大，探索過程之中，除了軟體作圖、紙筆計算外，並給予嚴謹的證明，慢慢地我們發現其中的奧妙與規則，最後，我們發現正多邊形內的任一點 P 都可以維持這樣的定性性質，只是數個比值相加後之定值不再是 1，而是會隨著邊數的不同而有所改變，幸運的是我們可以給出這個定值的一般化公式。

貳、 研究目的

一、將『引理一』中三角內的一**點 P 移至三角形外**，觀察驗證對應的定性性質。	五、『引理一』在**正八邊形**中的推論。
二、『引理一』在**正方形**中的推論。	六、『引理一』在**正 $2n$（$n\geq 2$）邊形**中的推論。
三、『引理一』在**正五邊形**中的推論。	七、『引理一』在**正 $2n-1$（$n\geq 2$）邊形**中的推論。
四、『引理一』在**正六邊形**中的推論。	八、『引理一』在**正六面體**中的推論。
	九、『引理一』在**正八面體**中的推論。

參、 研究設備及器材

頭腦、計算機、紙、筆、尺、電腦、電腦軟體（Microsoft Word,Geogebra4.2）

肆、 研究過程與方法

在參考資料[1]中，我發現了如下的結果，為驗證其正確性，我以 Geogebra 繪圖軟體驗證其正確性，並給出了嚴謹的證明如下。

引理一：

在平面上，已知點 P 在 ΔABC 內部，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，如下圖 I-1 所示，試證明：$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 。

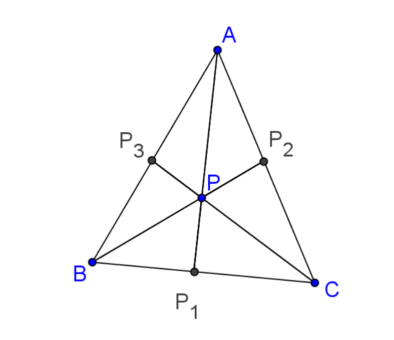

圖 I-1

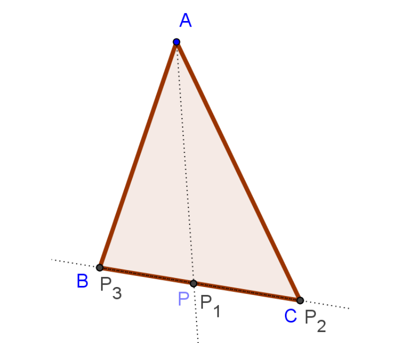

圖 R-1

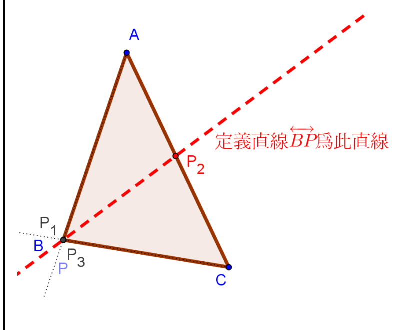

圖 R-2

證明：

(i) 由上圖 I-1 知，

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=\frac{\Delta BPC}{\Delta ABC}\ ,\ \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\frac{\Delta APC}{\Delta ABC}\ ,\ \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta APB}{\Delta ABC}\ 。$$

(ii) 利用上述(i)之結果得

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta BPC}{\Delta ABC}+\frac{\Delta APC}{\Delta ABC}+\frac{\Delta APB}{\Delta ABC}=\frac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$$ ，得證原題。 Q.E.D.

上述『引理一』中，若將點 P 移至 ΔABC 的邊上，但是點 P 不與 ΔABC 的三頂點重合，則結論依舊會成立，詳述如下。

Remark 1:

(1) 在平面上，若點 P 在 ΔABC 邊上，但是點 P 不與 ΔABC 的三頂點重合，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，如上圖 R-1，則 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 亦成立。

(2) 承(1)，若點 P 與 ΔABC 的某一頂點重合，則等式 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 可**視為不成立**或**視為成立**。

證明：

(1) $\because P$ 在 $\overline{BC}$ 上，$\therefore P_1=P, P_2=C, P_3=B$ ，從而 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{0}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PC}}{\overline{BC}}+\dfrac{\overline{PB}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=1$ ，故得證原命題成立。

(2)

觀點一：視為不成立的理由

假設點 P 與頂點 B 重合，則直線 $\overleftrightarrow{BP}$ 無定義，所以 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overline{AC}$ 之交點 P_2 不存在，故原等式無意義，或說原等式不成立。

觀點二：視為成立的理由

假設點 P 與頂點 B 重合，若我們定義直線 $\overleftrightarrow{BP}$ 為通過 B 點的任意直線，則此時 $\overleftrightarrow{BP}$

與 $\overleftrightarrow{AC}$ 會交於一點 P_2，如上圖 R-2 所示，

又 $P_1 = P, P_3 = P$，所以 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = \dfrac{0}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{0}{\overline{CP_3}} = 1$，即原等式成立。

上述的『觀點一』似乎比『觀點二』合理一些，但是其實『觀點二』可以視爲『引理一』的一種極端情形。

在參考資料[2]中，我發現了如下的『共邊定理』，在接下來的問題論證中，偶爾會用到這個結果，因此特別將其列出，詳述如下。

引理二：

若直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 相交於 M 點，則 $\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$。

證明：

直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 相交於 M 點，則可能的圖形有如下圖 II-1,II-2,II-3,II-4,II-5 等幾種，我們僅針對其中圖 II-1 之情形給出證明，詳述如下。

(1)先考慮圖 II-1 的情形

法一：過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PP_0}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於點 P_0，過 Q 點作直線 $\overleftrightarrow{QQ_0}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於點 Q_0，如下圖 II-1-1 所示，則 $\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\overline{PP_0}}{\overline{QQ_0}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$，故得證。

法二：在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上取一點 N，使得 $\overline{MN} = \overline{AB}$，如下圖 II-1-2 所示，則 $\Delta PAB = \Delta PMN$，$\Delta QAB = \Delta QMN$，所以 $\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\Delta PMN}{\Delta QMN} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$，故得證。

法三：如圖 II-1，$\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\Delta PAB}{\Delta PAM} \times \dfrac{\Delta PAM}{\Delta QAM} \times \dfrac{\Delta QAM}{\Delta QAB} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \times \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}} \times \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$，故得證。

(2)圖 II-2,II-3,II-4,II-5 等情形證法類似。故得證原題。

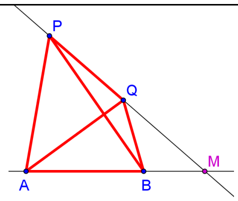

圖 II-1

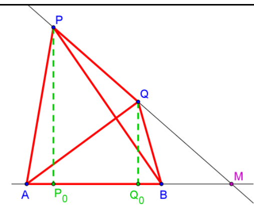

圖 II-1-1

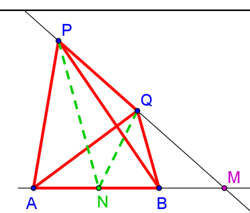

圖 II-1-2

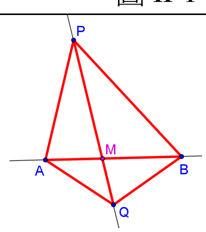

圖 II-2

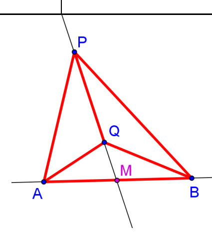

圖 II-3

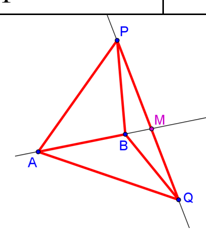

圖 II-4

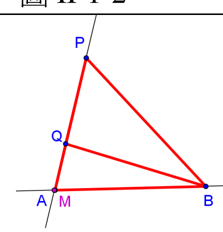

圖 II-5

上述『引理一』之結論，如果允許 P 點的位置在 ΔABC 的外部，則會有如下之結果。

問題一：

在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C，使得 L_B 與 L_C 交於點 A'、L_C 與 L_A 交於點 B' 及

L_A 與 L_B 交於點 C'，則

(1) 若 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部，如下圖 1-1 所示，試證明：$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$ 。

(2) 若 P 點落在 $\Delta AB'C$ 內部，如下圖 1-2 所示，試證明：$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$ 。

(3) 若 P 點落在 $\Delta ABC'$ 內部，如下圖 1-3 所示，試證明：$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 。

(4) 若 P 點不落在 $\Delta A'BC$ 、$\Delta AB'C$ 與 $\Delta ABC'$ 內部，如下圖 1-4、1-5 與 1-6 所示，試證明：

$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ ，$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ 且 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$ 。

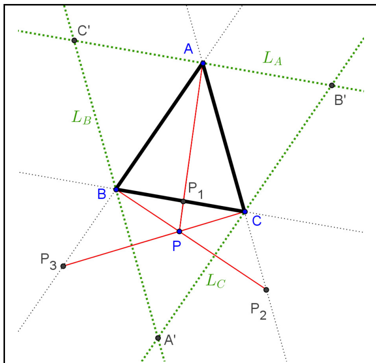

圖 1-1

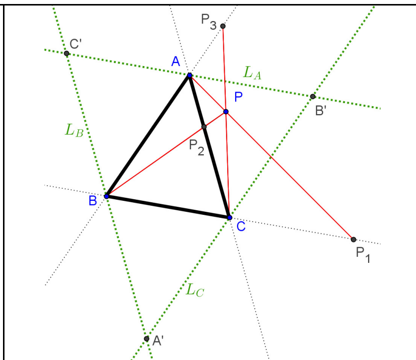

圖 1-2

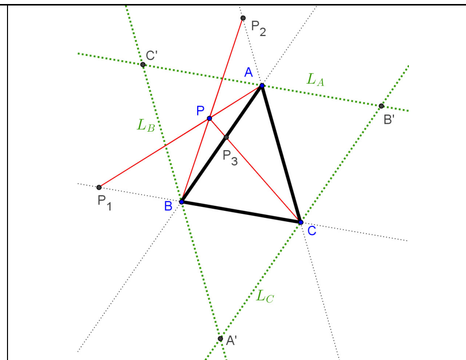

圖 1-3

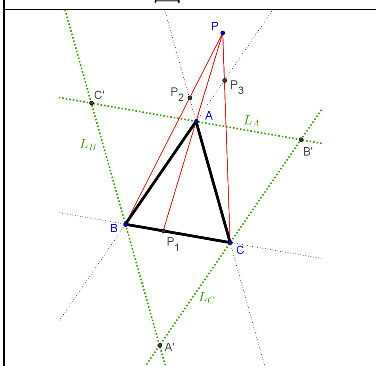

圖 1-4

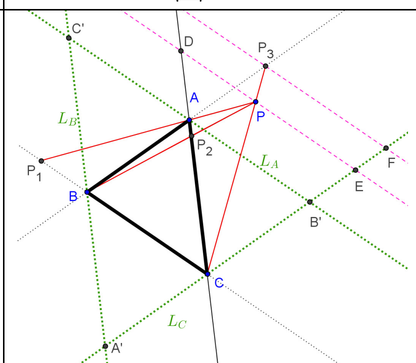

圖 1-5

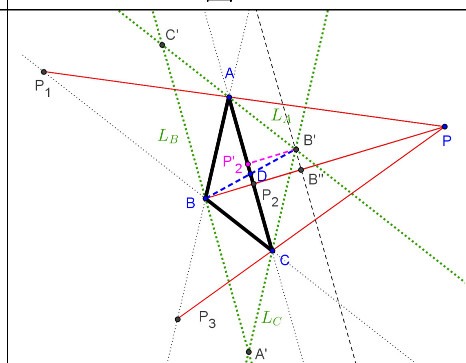

圖 1-6

證明：

(1) 當 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部時，如上圖 1-1 所示，

連接直線 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 與延長直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 交 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 於點 P''，如下圖 1-1-1 所示，則

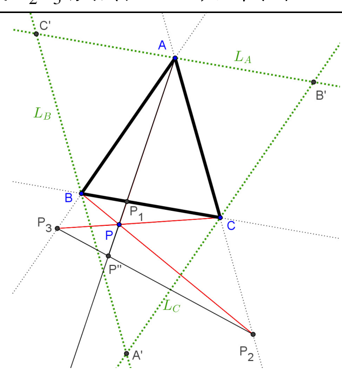

圖 1-1-1

(i) $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=\dfrac{\Delta BPC}{\Delta BAC}=\dfrac{\Delta BPC}{\Delta ACP}\times\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BAC}\underrightarrow{=\text{引理二}}\dfrac{\overline{BP_3}}{\overline{AP_3}}\times\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\dfrac{\Delta BP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}\times\dfrac{\Delta PP_2P_3}{\Delta BP_2P_3}=\dfrac{\Delta PP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}=\dfrac{\overline{PP''}}{\overline{AP''}}$ 。

(ii) 又 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}=\dfrac{\Delta APP_3}{\Delta AP_2P_3}$ 且 $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{\Delta APP_2}{\Delta AP_2P_3}$ ，

所以 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{\Delta PP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}+\dfrac{\Delta APP_3}{\Delta AP_2P_3}+\dfrac{\Delta APP_2}{\Delta AP_2P_3}=\dfrac{\Delta AP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}=1$，故得證原題。

(2) 仿上述(1)之證明方式，即得原題之結果。

(3) 仿上述(1)之證明方式，即得原題之結果。

(4)

(i) 先考慮圖 1-4 的情形

①$\because \overline{PP_1}>\overline{AP_1},\therefore \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

②$\because \overline{CP}>\overline{CP_3},\therefore \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

③$\because \overline{BP}>\overline{BP_2},\therefore \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

故此時原命題成立。

(ii) 次考慮圖 1-5 的情形

①$\because \overline{PP_1}>\overline{AP_1},\therefore \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

②過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PD}//\overleftrightarrow{BC}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{CB'}$ 於 D 與 E 兩點，再過 P_3 點作直線 $\overleftrightarrow{PF}//\overleftrightarrow{BC}$ 交 $\overleftrightarrow{CB'}$ 於 F 點，則由相似三角形性質知

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PD}}{\overline{BC}}+\dfrac{\overline{PE}}{\overline{P_3F}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\left(\dfrac{\overline{PD}}{\overline{BC}}+\dfrac{\overline{PE}}{\overline{BC}}\right)=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}>\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+1>1$，故得證此時原命題成立。

③$\because \overline{BP}>\overline{BP_2},\therefore \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

故此時原命題成立。

(iii) 再考慮圖 1-6 的情形

①$\because \overline{PP_1}>\overline{AP_1},\therefore \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

②$\because ABCB'$是一個平行四邊形，

過 B' 點作 $\overleftrightarrow{B'P_2'}//\overleftrightarrow{BP_2}$ 交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 P_2' 點，則 $\overline{B'P_2'}=\overline{BP_2}$ ，又 $\overline{PP_2}>\overline{B''P_2}=\overline{B'P_2'}$，所以 $\overline{PP_2}>\overline{BP_2}$ ，因此 $\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}>1$，從而得證 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

③$\because \overline{PP_3}>\overline{CP_3},\therefore \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$成立。

故此時原命題成立。

(iv) 由上述(i),(ii)與(iii)得證原命題成立。

Q.E.D.

針對上述『問題一』中(4)之結果，我可以再將其細分成幾種情形，爲了方便起見，我們先定義如下幾個符號。

定義一：

我們將上圖 1-1 由直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},L_A,L_B$ 與 L_C 所圍成之各區域以下列符號定義之：

(1) 以 $I_{\Delta ABC}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CA}$ 所圍成之三角形 ABC 內部區域』。

(2) 以 $I_{\Delta A'BC}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{A'B},\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CA'}$ 所圍成之三角形 $A'BC$ 內部區域』。

(3) 以 $I_{\Delta AB'C}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{AB'},\overleftrightarrow{B'C}$ 與 $\overleftrightarrow{CA}$ 所圍成之三角形 $AB'C$ 內部區域』。

(4) 以 $I_{\Delta ABC'}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC'}$ 與 $\overleftrightarrow{C'A}$ 所圍成之三角形 ABC' 內部區域』。

(5) 定義 I_A 爲 $I_A := \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$ 其中 $x<0, y<0\}$ 。

(6) 定義 $I_{A'}$ 爲 $I_{A'} := \{P \mid \overrightarrow{A'P} = x\overrightarrow{A'B} + y\overrightarrow{A'C},$ 其中 $x<0, y<0\}$ 。

(7) 定義 I_B 爲 $I_B := \{P \mid \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BA},$ 其中 $x<0, y<0\}$ 。

(8) 定義 $I_{B'}$ 爲 $I_{B'} := \{P \mid \overrightarrow{B'P} = x\overrightarrow{B'C} + y\overrightarrow{B'A},$ 其中 $x<0, y<0\}$ 。

(9) 定義 I_C 爲 $I_C := \{P \mid \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB},$ 其中 $x<0, y<0\}$ 。

(10) 定義 $I_{C'}$ 爲 $I_{C'} := \{P \mid \overrightarrow{C'P} = x\overrightarrow{C'A} + y\overrightarrow{C'B},$ 其中 $x<0, y<0\}$ 。

(11) 定義 $I_{AB'}$ 爲 $I_{AB'} := \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB'},$ 其中 $x<0, 0<y<1\}$ 。

(12) 定義 $I_{AC'}$ 爲 $I_{AC'} := \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC'},$ 其中 $x<0, 0<y<1\}$ 。

(13) 定義 $I_{BC'}$ 爲 $I_{BC'} := \{P \mid \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BC'},$ 其中 $x<0, 0<y<1\}$ 。

(14) 定義 $I_{BA'}$ 爲 $I_{BA'} := \{P \mid \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BA'},$ 其中 $x<0, 0<y<1\}$ 。

(15) 定義 $I_{CA'}$ 爲 $I_{CA'} := \{P \mid \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CA'},$ 其中 $x<0, 0<y<1\}$ 。

(16) 定義 $I_{CB'}$ 爲 $I_{CB'} := \{P \mid \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CB'},$ 其中 $x<0, 0<y<1\}$ 。

各區域位置詳見下圖 D-1，

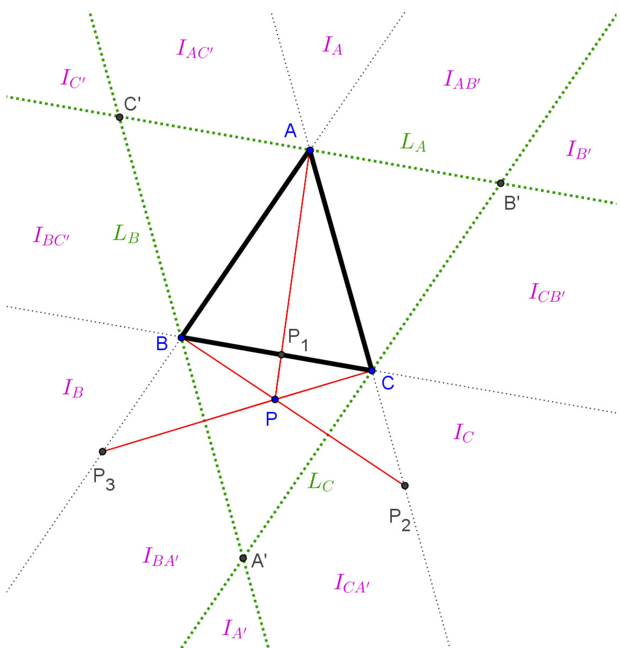

圖 D-1

將上述『問題一』中(4)之結果細分成幾種情形，經測試驗證得如下之結果。

問題二：

承『問題一』，在平面上，已知ΔABC外部有一點P，連接直線$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$與$\overleftrightarrow{CP}$分別交三邊所在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$於P_1、P_2與P_3三點，過A點作平行直線$\overleftrightarrow{BC}$的直線L_A、過B點作平行直線$\overleftrightarrow{CA}$的直線L_B及過C點作平行直線$\overleftrightarrow{AB}$的直線L_C，使得L_B與L_C交於點A'、L_C與L_A交於點B'及L_A與L_B交於點C'，承『定義一』中各符號之定義，於此又定義$R:=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}$，$R_A:=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}$，$R_B:=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}$，$R_C:=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}$，則

(1) 當$P\in I_A$或$P\in -\overrightarrow{AB}$或$P\in -\overrightarrow{AC}$時，$R=R_B=R_C>1$且$R_A=R+2$。

(2) 當$P\in I_{A'}$時，$R=R_B=R_C>1$且$R_A=R-2$。

(3) 當$P\in I_B$或$P\in -\overrightarrow{BC}$或$P\in -\overrightarrow{BA}$時，$R=R_A=R_C>1$且$R_B=R+2$。

(4) 當$P\in I_{B'}$時，$R=R_A=R_C>1$且$R_B=R-2$。

(5) 當$P\in I_C$或$P\in -\overrightarrow{CA}$或$P\in -\overrightarrow{CB}$時，$R=R_A=R_B>1$且$R_C=R+2$。

(6) 當$P\in I_{C'}$時，$R=R_A=R_B>1$且$R_C=R-2$。

(7) 當$P\in I_{AB'}$時，$R=R_C>1$且$R_A-R_B=2$。

(8) 當$P\in I_{AC'}$時，$R=R_B>1$且$R_A-R_C=2$。

(9) 當$P\in I_{BC'}$時，$R=R_A>1$且$R_B-R_C=2$。

(10) 當$P\in I_{BA'}$時，$R=R_C>1$且$R_B-R_A=2$。

(11) 當$P\in I_{CA'}$時，$R=R_B>1$且$R_C-R_A=2$。

(12) 當$P\in I_{CB'}$時，$R=R_A>1$且$R_C-R_B=2$。

證明：

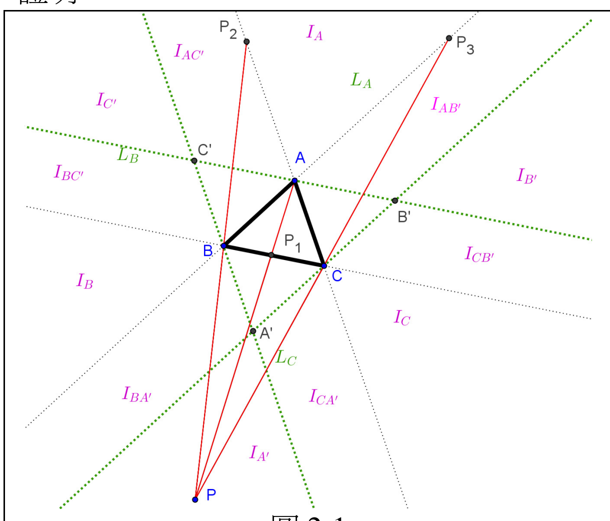

圖 2-1

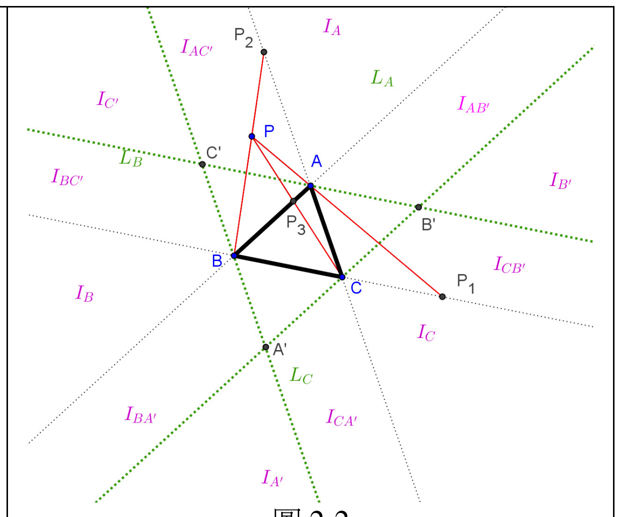

圖 2-2

(1) 當$P\in I_A$或$P\in -\overrightarrow{AB}$或$P\in -\overrightarrow{AC}$時，參閱圖 1-4，則

(i)

①當$P\in I_A$時， $R-R_B$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$	②當$P\in -\overrightarrow{AC}$時，$P_1=C,P_2=P,P_3=A,$則 $R-R_B$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$

$=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}+\left(-\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}\right)=1+(-1)=0$ 所以$R=R_B$。	$=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}\right)+\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}\right)=0$ 所以$R=R_B$。當$P\in-\overrightarrow{AB}$時，同理可證。

(ii) 同上述(i)之法可證$R=R_C$。

(iii)

①當$P\in I_A$時， R_A-R $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}\right)+\left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}=1+1=2$	②當$P\in-\overrightarrow{AC}$時，$P_1=C,P_2=P,P_3=A,$則 R_A-R $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}\right)+\left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP}}-\frac{\overline{PP}}{\overline{BP}}\right)+\left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}-\frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}\right)=1+\frac{\overline{CA}}{\overline{CA}}=2$ 所以$R=R_B$。當$P\in-\overrightarrow{AB}$時，同理可證。

綜上(i)至(iii)所述，得證(1)之結果成立。

(2) 當$P\in I_{A'}$或$P\in-\overrightarrow{A'B}$或$P\in-\overrightarrow{A'C}$時，參閱圖 2-1，則

(i) $R-R_B$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(-\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}\right)=(-1)+1=0$ ，所以$R=R_B$。 (ii) 同上述(i)之法可證$R=R_C$。	(iii) $R-R_A$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}$ $=1+1=2$。 綜上(i)至(iii)所述，得證(2)之結果成立。

(3) 同(1)之法可證(3)之結果。

(4) 同(2)之法可證(4)之結果。

(5) 同(1)之法可證(5)之結果。

(6) 同(2)之法可證(6)之結果。

(7) 當$P\in I_{AB'}$或$P\in\overline{AB'}\setminus\{A,B'\}$時，參閱圖 1-5，則

(i) $R-R_C$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}\right)$	(ii) R_A-R_B $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}\right)$

$=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}+\left(-\frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}}\right)=1+(-1)=0$ ，所以 $R=R_C$ 。	$=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}}=1+1=2$ 。 (iii) 綜上(i)與(ii)所述，得證(7)之結果成立。

(8) 當 $P\in I_{AC'}$ 或 $P\in \overline{AC'}\setminus\{A,C'\}$ 時，參閱圖 2-2，則

(i) $R-R_B$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(-\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}\right)=1+(-1)=0$ ， 所以 $R=R_B$ 。	(ii) R_A-R_C $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}=1+1=2$ 。 (iii) 綜上(i)與(ii)所述，得證(8)之結果成立。

同(7)之法可證(9)之結果。

(9) 同(8)之法可證(10)之結果。

(10) 同(7)之法可證(11)之結果。

(11) 同(8)之法可證(12)之結果。

綜上(1)至(12)所述，得證原命題成立。 Q.E.D.

Remark 2:

綜合上述『引理一』、『Remark 1』、『問題一』與『問題二』之結果，我們其實已經討論完平面上所有 P 點的情形。

在『問題一』與『問題二』中，針對任意三角形，我們討論了『引理一』裡的 P 點不在三角形內部的所有情形，我們發現『三組線段比值之和』有爲定值 1 的情形，但亦有大於等於 1 的時候。接下來，我們想將『引理一』的三角形換成『正方形』，看看是否也有類似的結果，詳述如下。

問題三：

已知 $ABCD$ 爲一正方形，點 P 在正方形 $ABCD$ 內部，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$ ，$\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、$\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、 $\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如下圖 3-1 所示，試證明：

(1) $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$ 。 (2) $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$ 。

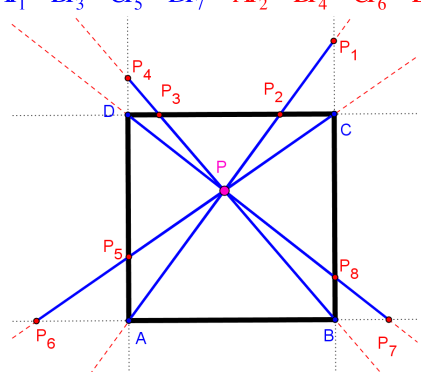

圖 3-1

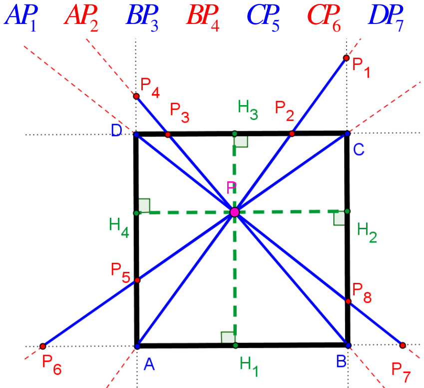

圖 3-2

證明：

(1)

過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H_1，作直線 $\overleftrightarrow{PH_2}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 H_2，作直線 $\overleftrightarrow{PH_3}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 H_3，作直線 $\overleftrightarrow{PH_4}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 交 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 H_4，如上圖 3-2 所示，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_3}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{CD}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{DA}}=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_3}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_4}\right)}{\overline{AB}}=$$

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}}=2 \quad \cdots\cdots(\alpha);$$

同理可得，

$$\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=\frac{\overline{PH_3}}{\overline{DA}}+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_2}}{\overline{CD}}=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_3}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_4}\right)}{\overline{AB}}=$$

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}}=2 \quad \cdots\cdots(\beta);$$

故得證原命題。

(2) 將上述(1)中之 (α) 與 (β) 兩式相加即得

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$$

，故得證原命題。 Q.E.D.

試著將『問題三』裡的『正方形』換成『正五邊形』，看看是不是會有類似的結果，詳述如下。

問題四：

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 爲一正五邊形，點 P 在正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 的內部，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4、P_5 與 P_6 三點，$\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7、P_8 與 P_9 三點，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 三點，$\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{13}、P_{14} 與 P_{15} 三點，如下圖 4-1 所示，試證明：

(1) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$ 。

(3) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 。

(4) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$ 。

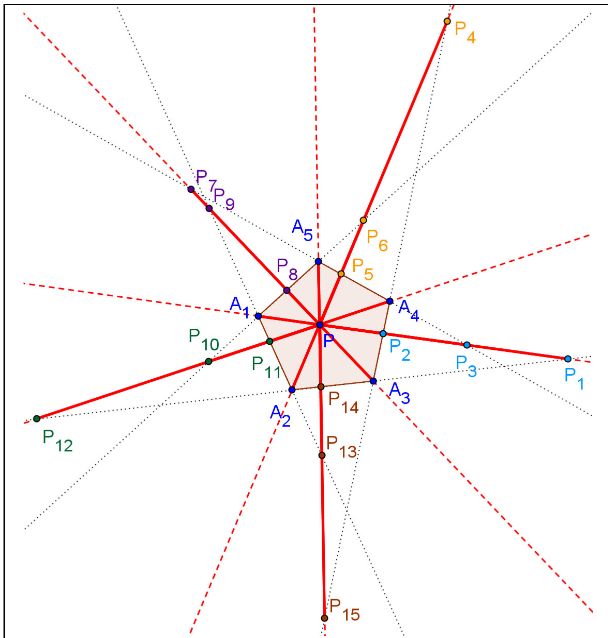

圖 4-1

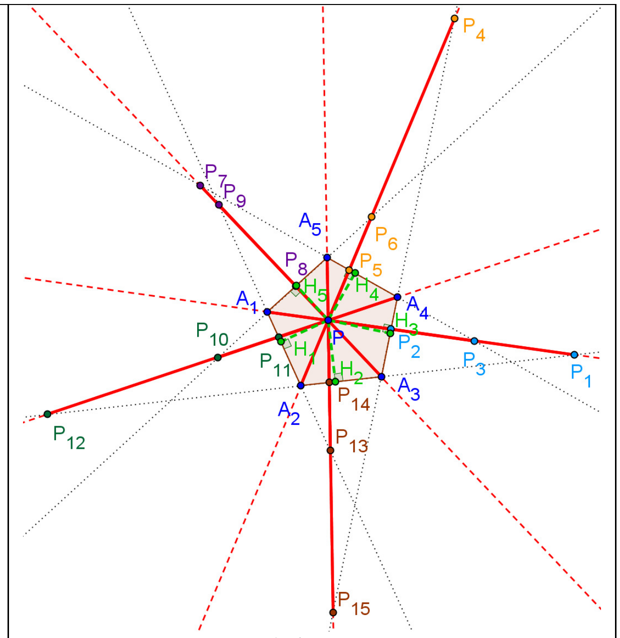

圖 4-2

證明：

(1)

(i) 對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i，如上圖 4-2 所示，假設正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之邊長爲 a，則對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$，$d\left(A_i,\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\right)=a\times\sin 72^\circ=a\times\cos 18^\circ$。

(ii) 以 $Area(\Gamma)$ 表示正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之面積，則

$$Area(\Gamma)=\sum_{i=1}^{5}\Delta PA_iA_{i+1}$$

$$\Rightarrow \frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_2}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_3}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_4}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_5}$$

$$\Rightarrow \frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=\frac{a}{2}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}\times\frac{2}{a}=\frac{5a\tan 54^\circ}{2}$$

(iii) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)$

$$=\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}$$

$$=\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{\cos 18^\circ}\times\frac{\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ}\right)=\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{\cos 18^\circ}\times\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}\right)=\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{\cos 18^\circ}\times\frac{\cos 36^\circ}{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\times\left(\frac{\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ}\right)=\frac{5}{4}\times\left(\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$ ，故得證原命題。

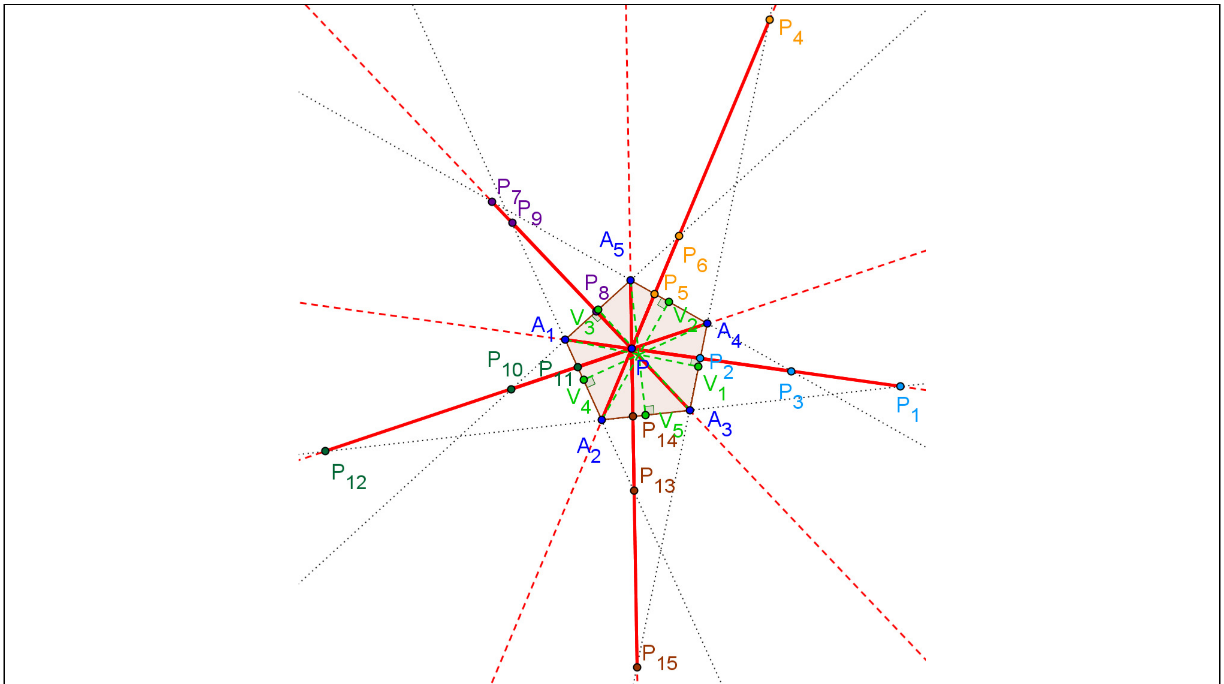

圖 4-3

(2) 對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$ ，我們均過頂點 A_i 點作直線 $\overleftrightarrow{A_iV_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 於 V_i ，如上圖 4-3 所示。

(i) 對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$ ，令 $d\left(A_i,\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}\right)=\overline{A_iV_i}$ ，則

$$d\left(A_i,\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}\right)=\overline{A_iV_i}=\overline{A_1V_1}=\overline{A_1A_4}\times\cos 18^\circ=\left(2a\cos 36^\circ\right)\times\cos 18^\circ$$ 。

(ii) $$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)$$

$$=\frac{\overline{PH_3}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_2}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\tan 54^\circ=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 18^\circ\sin 36^\circ}=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 18^\circ\left(2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\right)}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{\sin 18^\circ\cos^2 18^\circ}$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}=\sqrt{5}$$ ，故得證原命題。

(3) 仿(1)之證明方法，可得證原命題成立，詳述如下。

$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$ ，故得證原命題。

(4) 將上述(1),(2)與(3)所得之三個等式相加即得

$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5}+\frac{5+\sqrt{5}}{2}=5+2\sqrt{5}$$ ，

亦即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=5+2\sqrt{5}$ ，故得證原命題。

Q.E.D.

試著將『問題四』裡的『正五邊形』換成『正六邊形』，看看是不是會有類似的結果，詳述如下。

問題五：

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 為一正六邊形，點 P 在正六邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的內部，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6P}$ ，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 於 P_1、P_2、P_3 與 P_4 四點，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 於 P_5、P_6、P_7 與 P_8 四點，$\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_9、P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 四點，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{13}、P_{14}、P_{15} 與 P_{16} 四點，$\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{17}、P_{18}、P_{19} 與 P_{20} 四點，$\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_{21}、P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 四點如下圖 5-1 所示，試證明：

(1) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_4P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_5P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_6P_{21}}}=6$ 。

(2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_3P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_4P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_5P_{18}}}+\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_6P_{22}}}=3$ 。

(3) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_3P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_4P_{15}}}+\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_5P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_6P_{23}}}=3$ 。

(4) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_3P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_4P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_5P_{20}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_6P_{24}}}=6$ 。

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{i+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=18$ 。

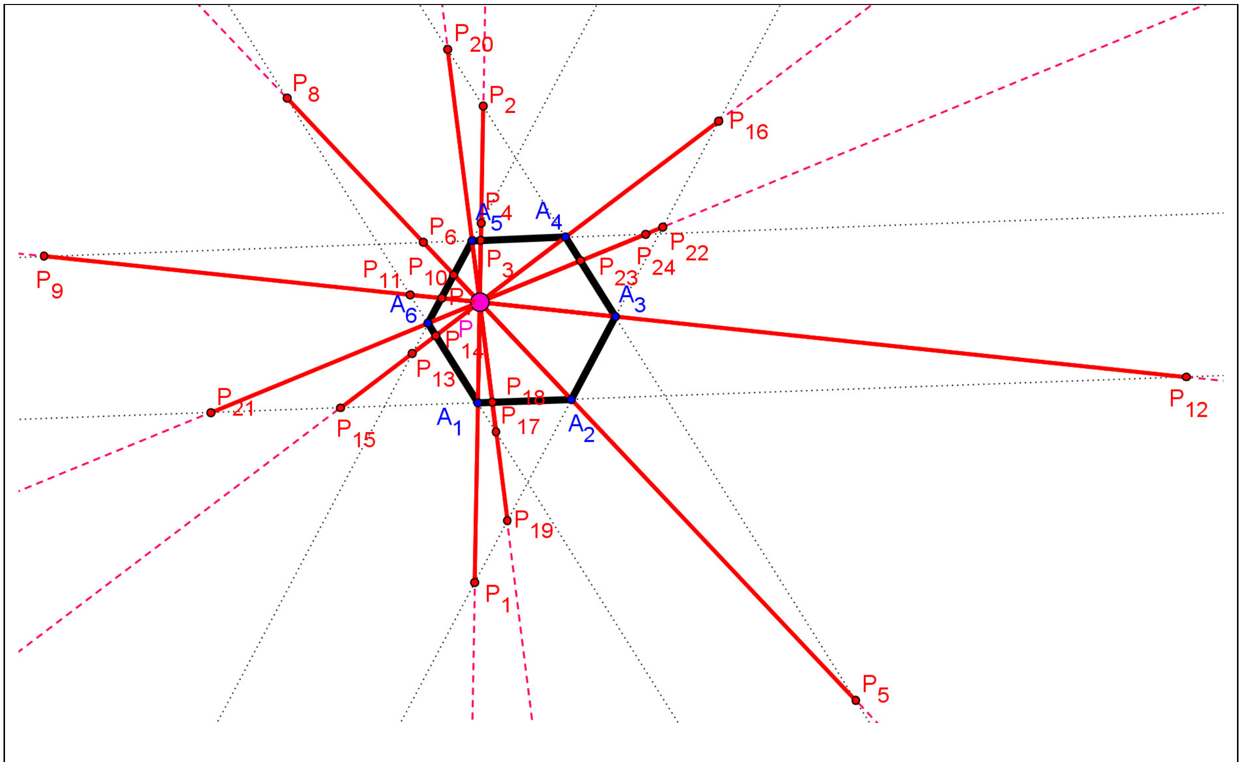

圖 5-1

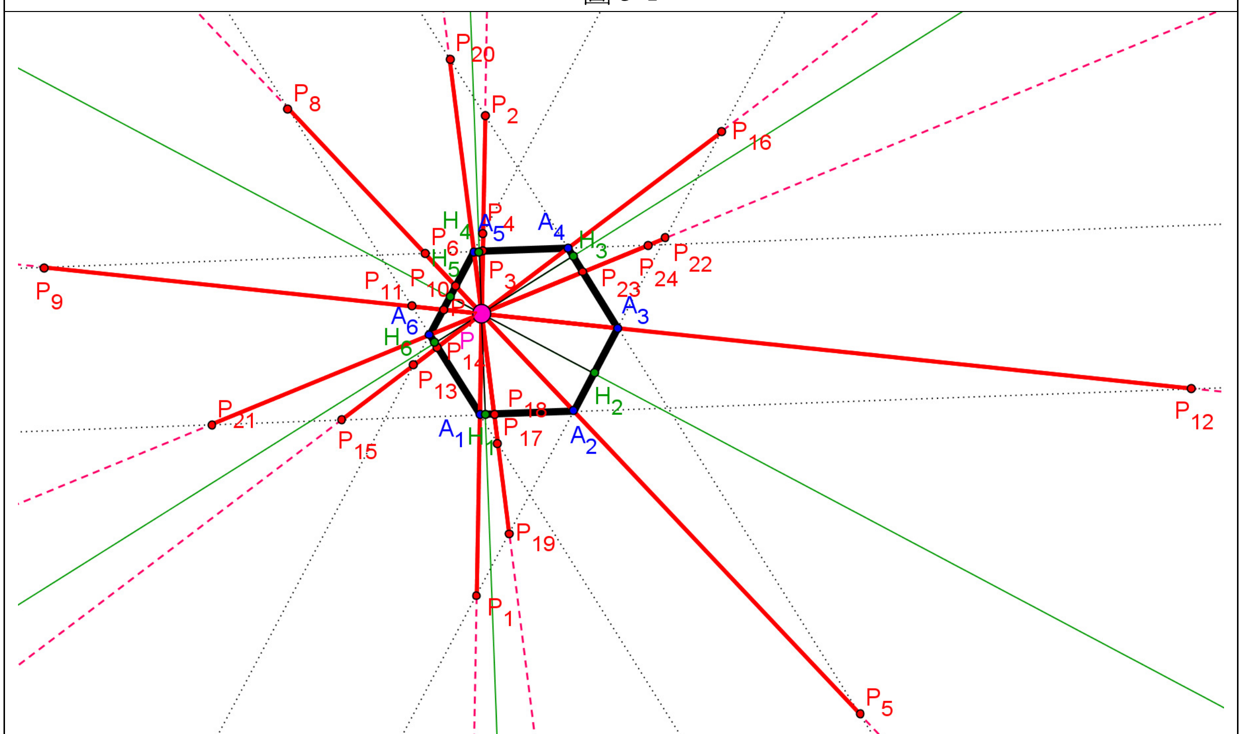

圖 5-2

證明：

對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,6\}$，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i，如上圖 5-2 所示，假設正六邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 之邊長爲 a ，則

(1) $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\dfrac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\dfrac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\dfrac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_4P_{13}}}+\dfrac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_5P_{17}}}+\dfrac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_6P_{21}}}=\dfrac{\overline{PH_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

$$=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=6$$ ，故得證原命題。

(2) $$\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_3P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_4P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_5P_{18}}}+\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_6P_{22}}}=\frac{\overline{PH_3}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_4}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_5}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_6}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_1}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_2}}{\sqrt{3}a}$$

$$=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\sqrt{3}a}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a}=3$$ ，故得證原命題。

(3) $$\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_3P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_4P_{15}}}+\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_5P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_6P_{23}}}=\frac{\overline{PH_4}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_5}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_6}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_1}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_2}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_3}}{\sqrt{3}a}$$

$$=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\sqrt{3}a}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a}=3$$ ，故得證原命題。

(4) $$\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_3P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_4P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_5P_{20}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_6P_{24}}}=\frac{\overline{PH_5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=6$$ ，故得證原命題。

(5) 將上述(1),(2),(3)與(4)中所得四個等式相加即得

$$\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=6+3+3+6=18$$ ，故得證原命題。

Q.E.D.

試著將『問題五』裡的『正六邊形』換成『正八邊形』，則得如下『問題六』之結論。

問題六：

已知$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$爲一正八邊形，點$P$在正六邊形$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$的內部，連接直線$\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 、$\overleftrightarrow{A_6P}$ 、$\overleftrightarrow{A_7P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_8P}$ ，又

$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 與 $\overleftrightarrow{A_7A_8}$於$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 與 P_6六點，

$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 與 $\overleftrightarrow{A_8A_1}$於$P_7$、$P_8$、$P_9$、$P_{10}$、$P_{11}$ 與 P_{12}六點，

$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$於$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$、$P_{16}$、$P_{17}$ 與 P_{18}六點，

$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$於$P_{19}$、$P_{20}$、$P_{21}$、$P_{22}$、$P_{23}$ 與 P_{24}六點，

$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$於$P_{25}$、$P_{26}$、$P_{27}$、$P_{28}$、$P_{29}$ 與 P_{30}六點，

$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$於$P_{31}$、$P_{32}$、$P_{33}$、$P_{34}$、$P_{35}$ 與 P_{36}六點，

$\overleftrightarrow{A_7P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 於 P_{37}、P_{38}、P_{39}、P_{40}、P_{41} 與 P_{42} 六點
$\overleftrightarrow{A_8P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 於 P_{43}、P_{44}、P_{45}、P_{46}、P_{47} 與 P_{48} 六點，
如下圖 7-1 所示，試證明：

(1) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{1+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_3P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_4P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{25}}}{\overline{A_5P_{25}}}+\frac{\overline{PP_{31}}}{\overline{A_6P_{31}}}+\frac{\overline{PP_{37}}}{\overline{A_7P_{37}}}+\frac{\overline{PP_{43}}}{\overline{A_8P_{43}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$ 。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{2+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_3P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_4P_{20}}}+\frac{\overline{PP_{26}}}{\overline{A_5P_{26}}}+\frac{\overline{PP_{32}}}{\overline{A_6P_{32}}}+\frac{\overline{PP_{38}}}{\overline{A_7P_{38}}}+\frac{\overline{PP_{44}}}{\overline{A_8P_{44}}}=4\sqrt{2}$ 。

(3) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{3+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_2P_9}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_3P_{15}}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_4P_{21}}}+\frac{\overline{PP_{27}}}{\overline{A_5P_{27}}}+\frac{\overline{PP_{33}}}{\overline{A_6P_{33}}}+\frac{\overline{PP_{39}}}{\overline{A_7P_{39}}}+\frac{\overline{PP_{45}}}{\overline{A_8P_{45}}}=4$ 。

(4) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{4+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_2P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_3P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_4P_{22}}}+\frac{\overline{PP_{28}}}{\overline{A_5P_{28}}}+\frac{\overline{PP_{34}}}{\overline{A_6P_{34}}}+\frac{\overline{PP_{40}}}{\overline{A_7P_{40}}}+\frac{\overline{PP_{46}}}{\overline{A_8P_{46}}}=4$ 。

(5) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{5+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{5+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_1P_5}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_2P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_3P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_4P_{23}}}+\frac{\overline{PP_{29}}}{\overline{A_5P_{29}}}+\frac{\overline{PP_{35}}}{\overline{A_6P_{35}}}+\frac{\overline{PP_{41}}}{\overline{A_7P_{41}}}+\frac{\overline{PP_{47}}}{\overline{A_8P_{47}}}=4\sqrt{2}$ 。

(6) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{6+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{6+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_1P_6}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_2P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_3P_{18}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_4P_{24}}}+\frac{\overline{PP_{30}}}{\overline{A_5P_{30}}}+\frac{\overline{PP_{36}}}{\overline{A_6P_{36}}}+\frac{\overline{PP_{42}}}{\overline{A_7P_{42}}}+\frac{\overline{PP_{48}}}{\overline{A_8P_{48}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$ 。

(7) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{i+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+6(k-1)}}}=24+16\sqrt{2}$ 。

證明：

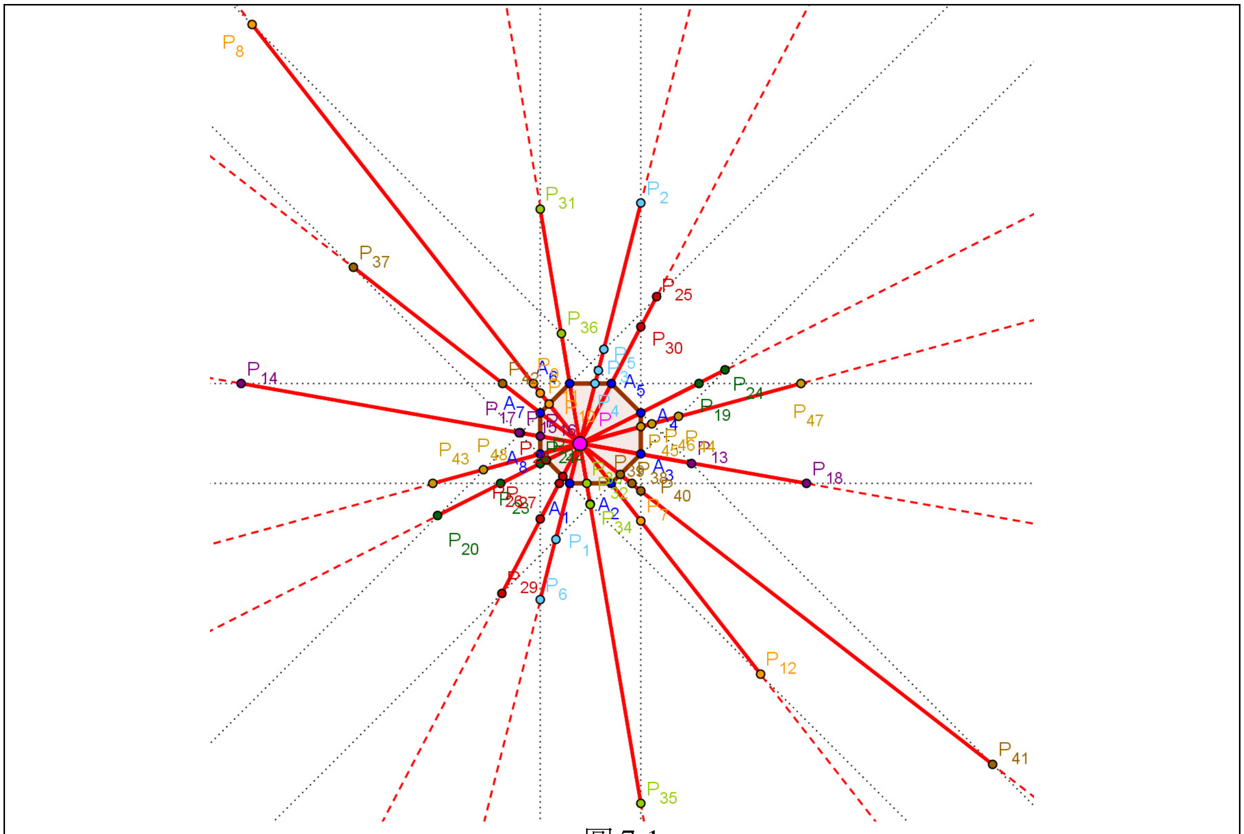

圖 7-1

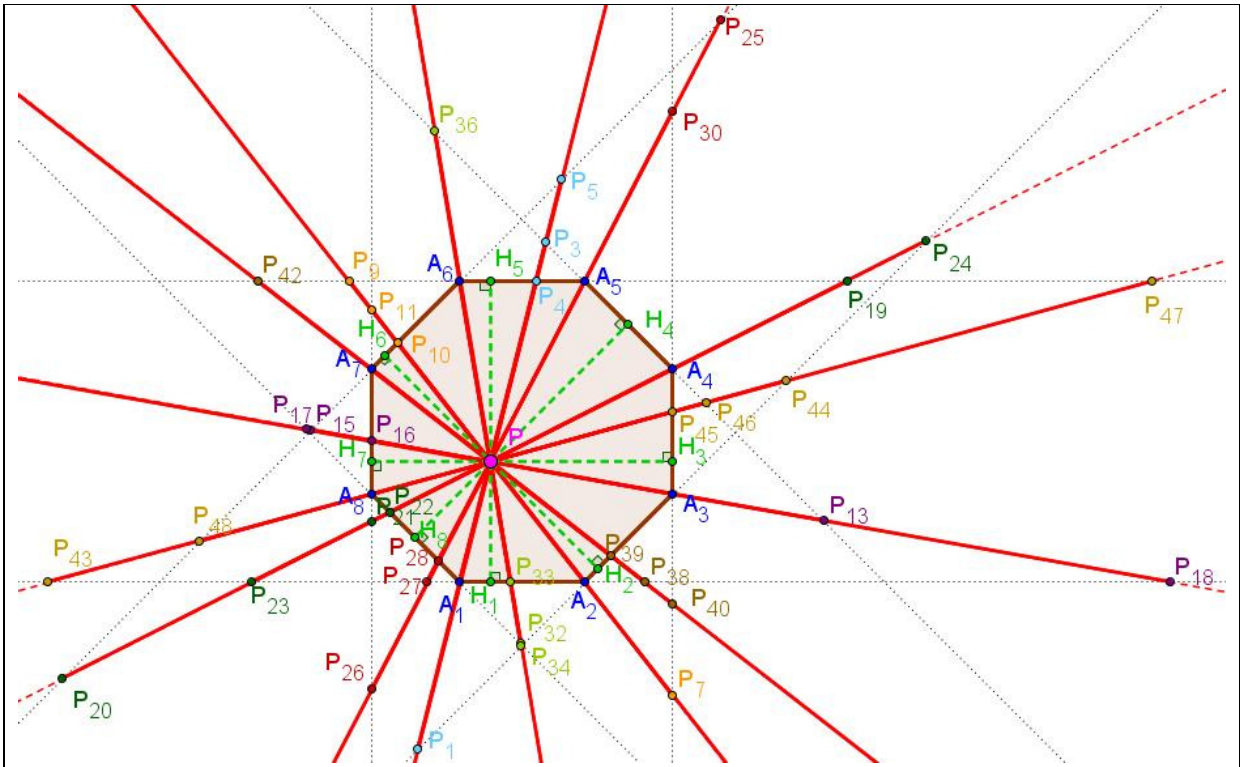

圖 7-2 (將圖 7-1 放大一些)

對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,8\}$，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i，如上圖 7-2 所示。

(1)

(i) 假設正八邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 之邊長爲 a，又以 $Area(\Gamma)$ 表示正八邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 之面積，則

$$Area(\Gamma)=\sum_{i=1}^{8}\Delta PA_iA_{i+1}$$

$$\Rightarrow\left(a+\sqrt{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\times 4=\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_2}+\cdots+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_8}$$

$$\Rightarrow\left(2+2\sqrt{2}\right)a^2=\frac{a}{2}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)=\left(4+4\sqrt{2}\right)a$$

(ii)

$$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{1+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PH_2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{\overline{PH_3}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}+\cdots+\frac{\overline{PH_7}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{\overline{PH_8}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{\overline{PH_1}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{a}\times\left(4+4\sqrt{2}\right)a$$

$=\left(8+4\sqrt{2}\right)$，故得證原命題。　(註：$\left(8+4\sqrt{2}\right)\approx 13.656$)

(2)

$$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{2+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PH_3}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{\overline{PH_4}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}+\cdots+\frac{\overline{PH_8}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{\overline{PH_1}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}+\frac{\overline{PH_2}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)a}\times\left(4+4\sqrt{2}\right)a=4\sqrt{2}$$ ，故得證原命題。 （ 註： $4\sqrt{2}\approx 5.656$ ）

(3) $$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{3+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PH_4}}{a+\sqrt{2}a}+\frac{\overline{PH_5}}{a+\sqrt{2}a}+\cdots+\frac{\overline{PH_8}}{a+\sqrt{2}a}+\frac{\overline{PH_1}}{a+\sqrt{2}a}+\frac{\overline{PH_2}}{a+\sqrt{2}a}+\frac{\overline{PH_3}}{a+\sqrt{2}a}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)a}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)a}\times\left(4+4\sqrt{2}\right)a=4$$ ，故得證原命題。

(4) 根據對稱性，再由(3)之結果得 $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{4+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+6(k-1)}}}\right)=4$ 成立。

(5) 根據對稱性，再由(2)之結果得 $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{5+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{5+6(k-1)}}}\right)=4\sqrt{2}$ 成立。

(6) 根據對稱性，再由(1)之結果得 $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{6+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{6+6(k-1)}}}\right)=\left(8+4\sqrt{2}\right)$ 成立。

(7) 將(1)至(6)所得之六個等式相加即得 $\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{i+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+6(k-1)}}}=\left[\left(8+4\sqrt{2}\right)+4\sqrt{2}+4\right]\times 2=24+16\sqrt{2}$

，故得證原命題。 （ 註： $\left(24+16\sqrt{2}\right)\approx 46.624$ ）

綜合上述(1)至(7)所述，得證原命題成立。

Q.E.D.

由上述『問題三』、『問題五』與『問題六』，我們推測在『正 $2n$ 邊形』中應該也有類似的結果，驗證其結論如下：

定理一：

已知 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n}$ 爲一正 $2n$ 邊形，點 P 在正 $2n$ 邊形 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的內部，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n\}$ ，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$ 、…、 $\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-2)}$ 、 $P_{2+(i-1)(2n-2)}$ 、 $P_{3+(i-1)(2n-2)}$ 、…、 $P_{(2n-3)+(i-1)(2n-2)}$ 與 $P_{i(2n-2)}$ 等 $(2n-2)$ 個點，則

(1) $$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_{1+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{1+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{1+2(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{1+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{1+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{1+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$ 。

(2) $$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{2+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{2+2(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{2+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{2+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{2+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}$$ 。

(3) ①當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-2)}}}{\overline{A_3P_{i+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{i+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}$$ 。

②當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-2)}}}{\overline{A_3P_{i+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{i+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$$ 。

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}=\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$ 。

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$ 。

證明：

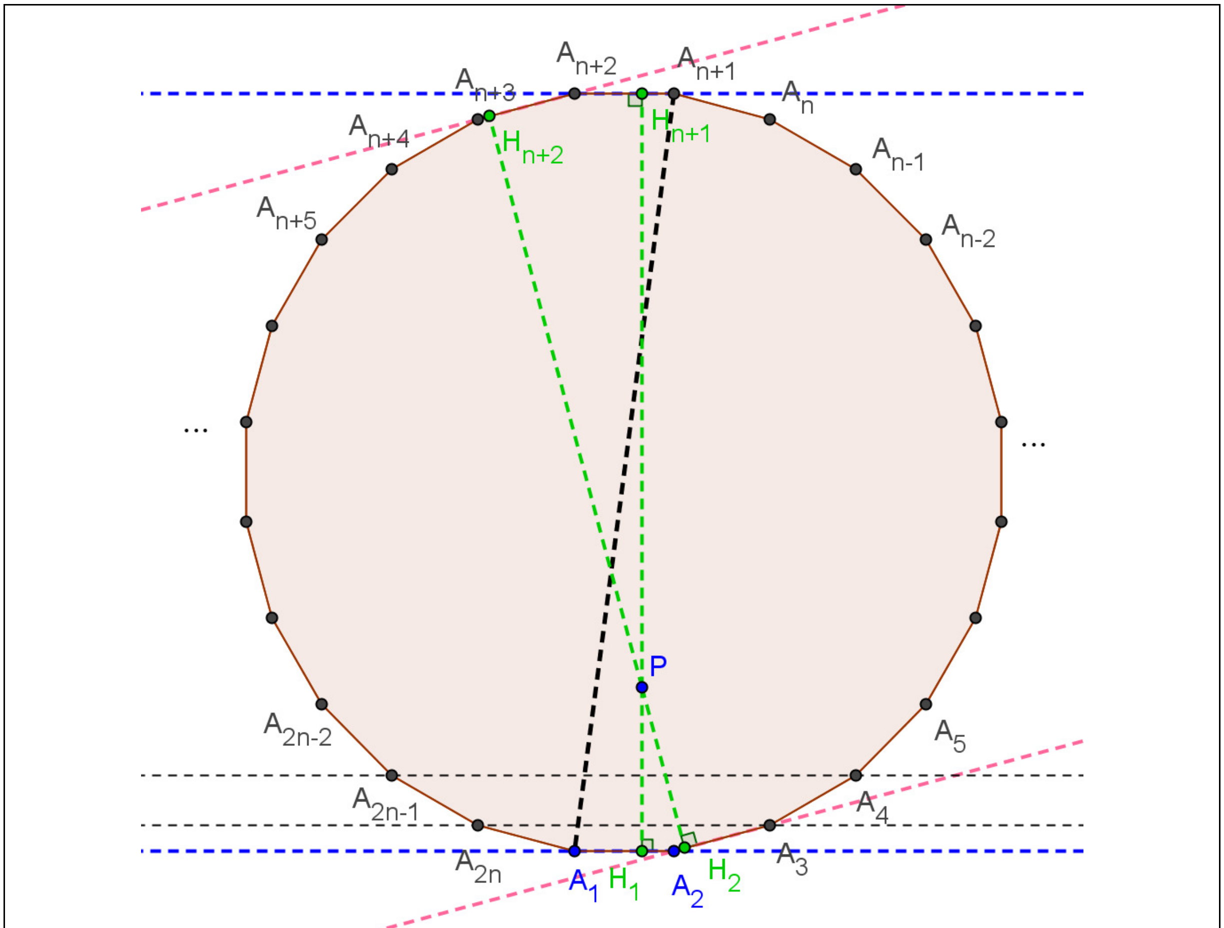

圖 T1-1

對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,2n\}$ ，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i ，如上圖 T1-1 所示。

(1)

(i)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\cdots+\frac{\overline{PH_{2n-1}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_{2n}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)+\cdots+\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)+\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)\right]$$

再由正 2n 邊形的對稱性得知

$$\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)=\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)=\cdots=\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)=\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)$$

所以

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)\times n\right]$$

(ii) 觀點一：

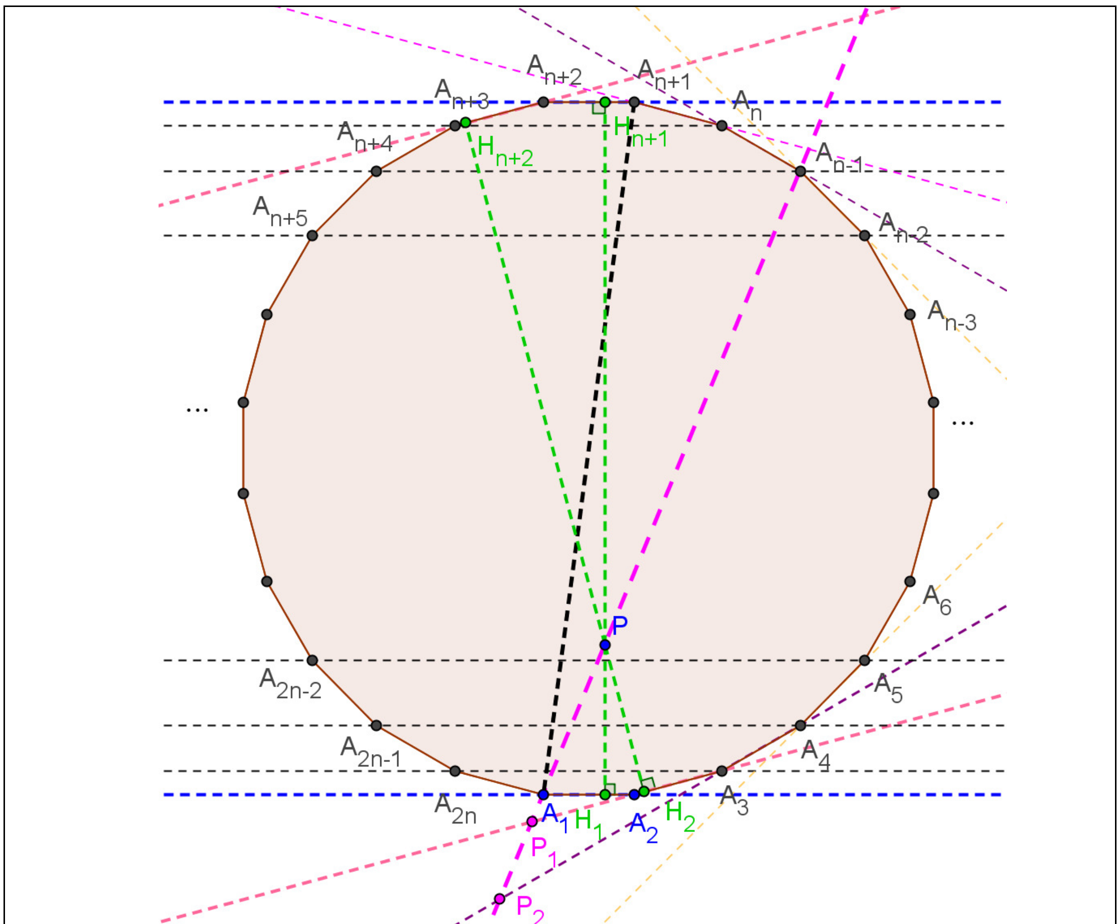

圖 T1-2

由上圖 T1-2 知，

$$\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}=a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}+a\sin\frac{1080^\circ}{2n}+\cdots+a\sin\frac{(n-1)\times360^\circ}{2n}$$

$$=a\left(\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{360^\circ}{n}+\sin\frac{540^\circ}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\times180^\circ}{n}\right)$$

$$=a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\times 180^\circ}{n}\right)=a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}\right)$$ 。

觀點二：

將正 2n 邊形切成等大的 2n 個三角形，則其面積爲 $2n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right]$，

又正 2n 邊形面積 $=n\times\left(\Delta PA_1A_2+\Delta PA_{n+1}A_{n+2}\right)=n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_{n+1}}\right]$，

所以由用兩種方來計算正 2n 邊形的面積得，

$$n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_{n+1}}\right]=2n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)\right]=2n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)=a\times\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$$ 。

在下面的論述中，我們可以將 $\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)$ 之值以 $a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$ 來取代，亦可以將 $\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)$ 之值以 $a\times\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$ 來取代。

(iii) 承上述(ii)，我們依 n 的奇偶性分兩類情形來討論 $\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\times 180^\circ}{n}\right)$ 之和，詳述如下，

①若 n 是奇數，則

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\times 180^\circ}{n}&=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}=\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\\&=\left(\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\right)+\left(\sin\tfrac{2\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-2)\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\sin\tfrac{(\frac{n-1}{2})\pi}{n}+\sin\tfrac{(\frac{n+1}{2})\pi}{n}\right)\\&=2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{1}{2n})\pi\\&=2\sin\tfrac{\pi}{2}\left[\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+\cos(\tfrac{\pi}{2n})\right]\\&=2\left[\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+\cos(\tfrac{\pi}{2n})\right]\end{aligned}$$

②若 n 是偶數，則

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\times 180^\circ}{n}&=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}=\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\\&=\left(\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\right)+\left(\sin\tfrac{2\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-2)\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\sin\tfrac{(\frac{n}{2}-1)\pi}{n}+\sin\tfrac{(\frac{n}{2}+1)\pi}{n}\right)+\sin\tfrac{(\frac{n}{2})\pi}{n}\\&=2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{2}{2n})\pi+\sin\tfrac{\pi}{2}\\&=2\left[\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+\cos(\tfrac{2}{2n})\pi\right]+1\end{aligned}$$

(iv) 結合上述(i)與(ii)之結果得知

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)\times n\right]=\frac{1}{a\sin\frac{\pi}{n}}\left[a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}\right)\times n\right]$$

$$=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$ ，故得證原命題。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)$

$$=\left(\begin{array}{l}\frac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_4}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\cdots\\+\frac{\overline{PH_{2n-1}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_{2n}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}\times\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}+\overline{PH_2}\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{360^\circ}{n}\right)}\times\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)+\cdots+\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)+\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\right)}\times\left[a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\times n\right]=\frac{n}{\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\right)}\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}$$

，故得證原命題。

(3) 爲了方便起見，對於每一個$i\in\{1,2,\cdots,2n-2\}$，我們定義$R_{2n,i}=\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)$。

①當$i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}+\cdots+a\sin\frac{i\times360^\circ}{2n}}\times\left(\overline{PH_{i+1}}+\overline{PH_{i+2}}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}+\cdots+\overline{PH_i}\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{i\pi}{n}\right)}\times\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)+\cdots+\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)+\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a\left(\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)}\times\left[a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\times n\right]$$

$$=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}$$

，故得證原命題。

②當$i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$時，

由正 2n 邊形的對稱性知，對於每一個$i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$，$R_{2n,i}=R_{2n,(2n-2)-(i-1)}$，即此時$R_{2n,i}=R_{2n,(2n-2)-(i-1)}=\dfrac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$，故得證原命題。

(4) 將(3)所得之$(2n-2)$個等式相加即得

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}=2\times\left(\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}+\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{3}\sin\frac{k\pi}{n}}+\cdots+\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$=2n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\times\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{3}\sin\frac{k\pi}{n}}+\cdots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$=\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$，故得證原命題。

(5) 由上述(1)中之(ii)，我們得知等式 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$ 必成立，故得證原命題。

Q.E.D.

由上述『引理一』與『問題四』，我們推測在『正 $2n-1$ 邊形』中應該也有類似的結果，驗證其結論如下：

定理二：

已知 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 爲一正 $2n-1$ 邊形，點 P 在正 $2n-1$ 邊形 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 的內部，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 、$\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$ 、…、$\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-3)}$、$P_{2+(i-1)(2n-3)}$、$P_{3+(i-1)(2n-3)}$、…、$P_{(2n-4)+(i-1)(2n-3)}$ 與 $P_{i(2n-3)}$ 等 $(2n-3)$ 個點，則

(1) $$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_{1+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{1+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{1+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{1+2(2n-3)}}}+\ldots\ldots\cdots+\frac{\overline{PP_{1+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{1+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$$ 。

(2) $$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_{2+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{2+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{2+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{2+2(2n-3)}}}+\cdots\ldots\ldots+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{2+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ 。

(3) 以 $\frac{n-1}{2}$ 是否爲整數分兩大類，詳述結果如下：

(i) 當 $\frac{n-1}{2}$ 是整數時，則我們有如下結論：

(a) 當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\ldots\ldots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ 。

(b) 當 $i\in\{\frac{n+1}{2}\}$，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\ldots\ldots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{i-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}+\sin\frac{(i-1)2\pi-\pi}{2n-1}}\text{。}$$

(c) 當 $i\in\{\frac{n+1}{2}+1,\frac{n+1}{2}+2,\cdots,n-2\}$ 且 $n\geq 7$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\sin\frac{2k\pi}{2n-1})+\sum_{j=1}^{i-\frac{n+1}{2}}(\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi-2j\pi}{2n-1})+\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi}{2n-1}}\text{。}$$

(d) 當 $i\in\{n-1\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\sin\frac{2k\pi}{2n-1})+\sum_{j=1}^{\frac{n-5}{2}}(\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi-2j\pi}{2n-1})+\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi}{2n-1}+\sin\frac{\pi}{2n-1}}\text{。}$$

(當 $n<7$ 時，$\sum_{j=1}^{\frac{n-5}{2}}(\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi-2j\pi}{2n-1})$ 項忽略，當 $n<5$ 時，$\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi}{2n-1}$ 項忽略)

(e) 當 $i\in\{n,n+1,\cdots,\frac{3n-7}{2}\}$ 且 $n\geq 7$ 時 ，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\sin\frac{2k\pi}{2n-1})+\sum_{j=1}^{\frac{3n-5}{2}-i}(\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi-2j\pi}{2n-1})+\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi}{2n-1}}\text{。}$$

(f) 當 $i\in\{\frac{3n-5}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\ldots\ldots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}+\sin\frac{(\frac{n-1}{2})2\pi-\pi}{2n-1}}\text{。}$$

(g) 當 $i\in\{\frac{3n-5}{2}+1,\frac{3n-5}{2}+2,\cdots,2n-3\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\ldots\ldots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{2n-2-i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\text{。}$$

(ii) 當 $\frac{n-1}{2}$ 不是整數時，則我們有如下結論：

(a) 當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ 。

(b) 當 $i\in\{\frac{n}{2}\}$ 且 $n\geq 4$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{i-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}+\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi}{2n-1}}$$ 。

(c) 當 $i\in\{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\cdots,n-2\}$ 且 $n\geq 6$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(\sin\frac{2k\pi}{2n-1})+\sum_{j=1}^{i-\frac{n}{2}}(\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi-2j\pi}{2n-1})+\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi}{2n-1}}$$ 。

(d) 當 $i\in\{n-1\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(\sin\frac{2k\pi}{2n-1})+\sum_{j=1}^{\frac{n-4}{2}}(\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi-2j\pi}{2n-1})+\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi}{2n-1}+\sin\frac{\pi}{2n-1}}$$ 。

(當 $n<6$ 時，$\sum_{j=1}^{\frac{n-4}{2}}(\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi-2j\pi}{2n-1})$ 項忽略，當 $n<4$ 時，$\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi}{2n-1}$ 項忽略)

(e) 當 $i\in\{n,n+1,\cdots,\frac{3n-6}{2}\}$ 且 $n\geq 6$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(\sin\frac{2k\pi}{2n-1})+\sum_{j=1}^{\frac{3n-4}{2}-i}(\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi-2j\pi}{2n-1})+\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi}{2n-1}}$$ 。

(f) 當 $i\in\{\frac{3n-4}{2}\}$ 且 $n\geq 4$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}+\sin\frac{(\frac{n-2}{2})2\pi+\pi}{2n-1}}$$ 。

(g) 當 $i\in\{\frac{3n-4}{2}+1,\frac{3n-4}{2}+2,\cdots,2n-3\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{\frac{\pi}{2}(2n-3)}{2n-1})}{\sum_{k=1}^{2n-2-i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\text{。}$$

證明：仿『定理一』之證明方法，我們可以證明該命題成立。 Q.E.D.

分區科展之後，我們又試著將平面上的結論推廣到立體空間中的『任意四面體』與『正多面體』，目前我們已經完成的有『任意四面體』、『正六面體』與『正八面體』的推論，如下之『引理三』、『定理三』與『定理四』。

在參考資料[1]中，曾提及『引理一』在立體空間中的推論，我們將其結果詳細描述如下：

引理三：

假設 $\Gamma: A-BCD$ 爲空間中一四面體，且 P 點爲四面體 Γ 內部一點，又直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 、$\overleftrightarrow{CP}$ 、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別與平面 E_{BCD} 、E_{ACD} 、E_{ABD} 、E_{ABC} 交於一點 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 ，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}=1\text{ 。}$$

證明：利用三角形的相似性質，將『兩線段比值』轉換成『兩三角錐體積比值』，四組『線段比值』相加後即可推證原命題成立。 Q.E.D.

我們試著考慮『引理三』在『正六面體』上的推論，而有了如下『定理三』的結果。

定理三：

已知正立方體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ ，且 P 點爲正立方體 Γ 內部一點，若 Γ 之稜長 $\overline{A_1A_2}=a$ 且 $\pi_1=\pi_{1265}$ 表示過 A_1、A_2、A_6 與 A_5 四點之平面，$\pi_2=\pi_{2376}$ 表通過 A_2、A_3、A_7 與 A_6 四點之平面，$\pi_3=\pi_{3487}$ 表示過 A_3、A_4、A_8 與 A_7 四點之平面，$\pi_4=\pi_{1485}$ 表通過 A_1、A_4、A_8 與 A_5 四點之平面，$\pi_5=\pi_{1234}$ 表示過 A_1、A_2、A_3 與 A_4 四點之平面，$\pi_6=\pi_{5678}$ 表通過 A_5、A_6、A_7 與 A_8 四點之平面，又

直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交平面 π_2 、π_3 與 π_6 於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交平面 π_3 、π_4 與 π_6 於 P_4 、P_5 與 P_6 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交平面 π_4 、π_1 與 π_6 於 P_7 、P_8 與 P_9 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交平面 π_1 、π_2 與 π_6 於 P_{10} 、P_{11} 與 P_{12} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交平面 π_2 、π_3 與 π_5 於 P_{13} 、P_{14} 與 P_{15} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交平面 π_3 、π_4 與 π_5 於 P_{16} 、P_{17} 與 P_{18} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_7P}$ 分別交平面 π_4 、π_1 與 π_5 於 P_{19} 、P_{20} 與 P_{21} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_8P}$ 分別交平面 π_1 、π_2 與 π_5 於 P_{22} 、P_{23} 與 P_{24} 三點，

如下圖 T3-1 所示，

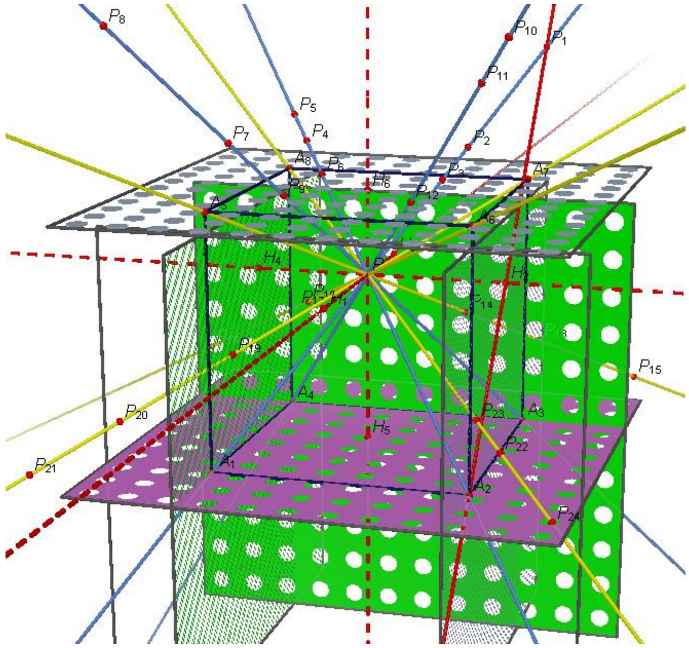

圖 T3-1

試證明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{A_kP_{i+3(k-1)}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{A_kP_{1+3(k-1)}}+\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{A_kP_{2+3(k-1)}}+\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{A_kP_{3+3(k-1)}}\right)=12$ 。

證明：

(i) 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$、$\overleftrightarrow{PH_2}$、$\overleftrightarrow{PH_3}$、$\overleftrightarrow{PH_4}$、$\overleftrightarrow{PH_5}$、$\overleftrightarrow{PH_6}$ 分別垂直於平面 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6 且分別交平面 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6 於 H_1、H_2、H_3、H_4、H_5、H_6 六點，

(ii) 由三角形相似性質知，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\overline{PP_1}}{A_1P_1}+\frac{\overline{PP_2}}{A_1P_2}+\frac{\overline{PP_3}}{A_1P_3}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{19}}}{A_7P_{19}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{A_7P_{20}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{A_7P_{21}}\right)&=\left(\frac{\overline{PH_2}}{A_1A_2}+\frac{\overline{PH_3}}{A_1A_4}+\frac{\overline{PH_6}}{A_1A_5}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{A_7A_8}+\frac{\overline{PH_1}}{A_7A_6}+\frac{\overline{PH_5}}{A_7A_3}\right)\\&=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)\\&=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)\\&=1+1+1=3\end{aligned}$$ 。

同理可證

$\left(\frac{\overline{PP_4}}{A_2P_4}+\frac{\overline{PP_5}}{A_2P_5}+\frac{\overline{PP_6}}{A_2P_6}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{22}}}{A_8P_{22}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{A_8P_{23}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{A_8P_{24}}\right)=3$，$\left(\frac{\overline{PP_7}}{A_3P_7}+\frac{\overline{PP_8}}{A_3P_8}+\frac{\overline{PP_9}}{A_3P_9}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{13}}}{A_5P_{13}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{A_5P_{14}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{A_5P_{15}}\right)=3$，

$\left(\frac{\overline{PP_{10}}}{A_4P_{10}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{A_4P_{11}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{A_4P_{12}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{16}}}{A_6P_{16}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{A_6P_{17}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{A_6P_{18}}\right)=3$，

將上述四個式子相加即得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{A_kP_{i+3(k-1)}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{A_kP_{1+3(k-1)}}+\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{A_kP_{2+3(k-1)}}+\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{A_kP_{3+3(k-1)}}\right)=12$

，得證原命題。 Q.E.D.

完成『引理三』在『正六面體』的推論之後，我們接著去考慮『引理三』在『正八面體』的推論，於是有了如下的結果。

定理四：

已知正八面體$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，且$P$點爲正八面體$\Gamma$內部一點，若頂點$A_i$到$\Gamma$不通過頂點$A_i$的四個平面的垂直距離爲$a$，且

$\pi_1=\pi_{123}$表示過A_1、A_2與A_3三點之平面，$\pi_2=\pi_{134}$表通過A_1、A_3與A_4三點之平面，

$\pi_3=\pi_{145}$表示過A_1、A_4與A_5三點之平面，$\pi_4=\pi_{152}$表通過A_1、A_5與A_2三點之平面，

$\pi_5=\pi_{623}$表示過A_6、A_2與A_3三點之平面，$\pi_6=\pi_{634}$表通過A_6、A_3與A_4三點之平面，

$\pi_7=\pi_{645}$表通過A_6、A_4與A_5三點之平面，$\pi_8=\pi_{652}$表通過A_6、A_5與A_2三點之平面，

又

直線$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交平面$\pi_6$、$\pi_5$、$\pi_8$與$\pi_7$於$P_1$、$P_2$、$P_3$與$P_4$四點，

直線$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_7$與$\pi_6$於$P_5$、$P_6$、$P_7$與$P_8$四點，

直線$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交平面$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_8$與$\pi_7$於$P_9$、$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$四點，

直線$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交平面$\pi_1$、$\pi_5$、$\pi_8$與$\pi_4$於$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$與$P_{16}$四點，

直線$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_6$、$\pi_5$與$\pi_1$於$P_{17}$、$P_{18}$、$P_{19}$與$P_{20}$四點，

直線$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_4$與$\pi_1$於$P_{21}$、$P_{22}$、$P_{23}$與$P_{24}$四點，

如下圖 T4-1 所示，

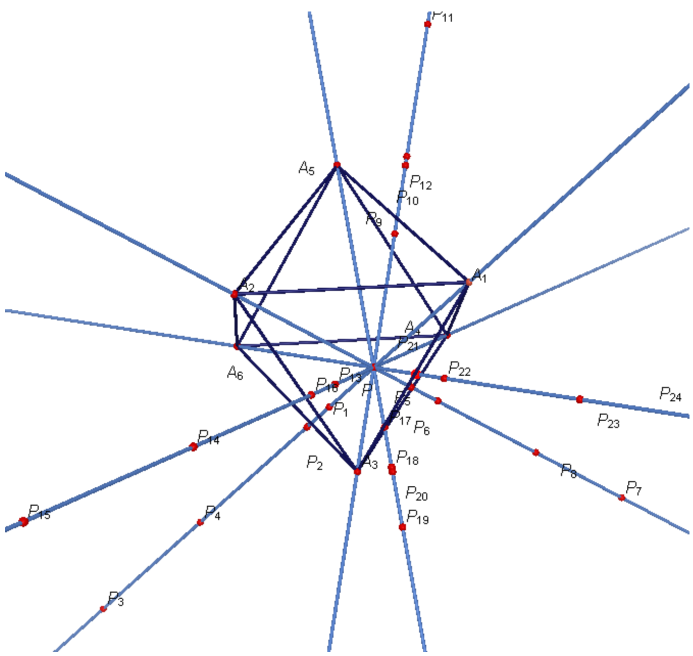

圖 T4-1

試證明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\overline{PP_{i+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$

證明:

(i) 過P點作直線$\overleftrightarrow{PH_1}$、$\overleftrightarrow{PH_2}$、$\overleftrightarrow{PH_3}$、$\overleftrightarrow{PH_4}$、$\overleftrightarrow{PH_5}$、$\overleftrightarrow{PH_6}$、$\overleftrightarrow{PH_7}$、$\overleftrightarrow{PH_8}$分別垂直於平面$\pi_1$、$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_5$、$\pi_6$、$\pi_7$、$\pi_8$且分別交平面$\pi_1$、$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_5$、$\pi_6$、$\pi_7$、$\pi_8$於$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$、$H_5$、$H_6$、$H_7$、$H_8$八點，

(ii) 由三角形相似性質知，

$$\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_6P_{21}}}+\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_6P_{22}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_6P_{23}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_6P_{24}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_8}}{a}+\frac{\overline{PH_7}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_8}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_7}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)=1+1+1+1=4$$

同理可證 $\left(\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_4P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_4P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_4P_{15}}}+\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_4P_{16}}}\right)=4$，

$\left(\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_3P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_3P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_5P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_5P_{18}}}+\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_5P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_5P_{20}}}\right)=4$，

將上述四個式子相加即得

$\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\overline{PP_{i+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$，得證原命題。

Q.E.D.

伍、　研究成果

1. 在平面上，已知ΔABC外部有一點P，連接直線$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$與$\overleftrightarrow{CP}$分別交三邊所在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$於P_1、P_2與P_3三點，過A點作平行直線$\overleftrightarrow{BC}$的直線L_A、過B點作平行直線$\overleftrightarrow{CA}$的直線L_B及過C點作平行直線$\overleftrightarrow{AB}$的直線L_C，使得L_B與L_C交於點A'、L_C與L_A交於點B'及L_A與L_B交於點C'，則
   (1) 若P點落在$\Delta A'BC$內部，如圖 1-1 所示，則$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$。
   (2) 若P點落在$\Delta AB'C$內部，如圖 1-2 所示，則$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$。
   (3) 若P點落在$\Delta ABC'$內部，如圖 1-3 所示，則$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。
   (4) 若P點不落在$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$與$\Delta ABC'$內部，如圖 1-4、1-5 與 1-6 所示，則
   $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$且$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$。
2. 承『問題一』，在平面上，已知ΔABC外部有一點P，連接直線$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$與$\overleftrightarrow{CP}$分別交三邊所在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$於P_1、P_2與P_3三點，又定義$R:=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}$，
   $R_A:=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}$，$R_B:=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}$，$R_C:=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}$，則$R, R_A, R_B, R_C$四個數值會有滿足一些等式關係，而等式關係會隨著$P$點所在位置不同而不同。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 7 頁**『問題二』**之結論)
3. 正方形內一定點與其頂點連線與其餘各邊之交點所形成之八個線段比值和為定值 4。
   (詳細的問題描述與結果請見文稿第 9 頁**『問題三』**之結論)

4. 正五邊形內一定點與其頂點連線與其餘各邊之交點所形成之十五個線段比值和為定值 $5+2\sqrt{5}$。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 10 頁**『問題四』**之結論)
5. 正六邊形內一定點與其頂點連線與其餘各邊之交點所形成之二十四個線段比值和為定值 18。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 13 頁**『問題五』**之結論)
6. 正八邊形內一定點與其頂點連線與其餘各邊之交點所形成之四十八個線段比值和為定值 $24+16\sqrt{2}$。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 15 頁**『問題六』**之結論)
7. 正 $2n$ 邊形內一定點與其頂點連線與其餘各邊之交點所形成之 $2n(2n-2)$ 個線段比值和為定值。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 18 頁**『定理一』**之結論)
8. 正 $2n$ 邊形內一定點與其頂點連線與其餘各邊之交點所形成之 $2n(2n-2)$ 個線段比值和為定值 $\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 18 頁**『定理一』**之結論)
9. 正 $2n$ 邊形內一定點與其頂點連線與其餘各邊之交點所形成之 $(2n-1)(2n-3)$ 個線段比值和為定值。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 23 頁**『定理二』**之結論)
10. 正六面體內一定點與其頂點連線與正六面體不過該頂點各面之交點所形成之二十四個線段比值和為定值 12。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 26 頁**『定理三』**之結論)
正八面體內一定點與其頂點連線與正八面體不過該頂點各面之交點所形成之二十四個線段比值和為定值 12。(詳細的問題描述與結果請見文稿第 28 頁**『定理四』**之結論)

陸、 結論與展望

在我們的論證過程中，首先將『引理一』三角形內的定點移至三角形外找出其定性幾何性質。接著讓定點在正多邊形的內部，也有類似的結論，我們主要從邊數較少的正多邊形開始著手，從正方形、正五邊形、正六邊形、正七邊形與正八邊形，一直到一般化的正 $2n$ 邊形與正 $2n-1$ 邊形，邊數不同，則數個線段比值相加後的定值也不同，所得到的結論大致上可以分成正偶數邊形與正奇數邊形這兩大類。研究過程中，利用 GeoGebra 去畫出各個圖形檢驗結果的正確性，每當發現結果如自己的猜測一般，就感到相當開心，然而電腦程式試驗的結果只能是輔助，最後仍然要用紙筆驗證自己猜測的規律，這些我們都一一如實的辦到了。

我們亦嘗試了『引理一』在任意四邊形中的推論，即讓定點 P 落在任意四邊形內部，發現線段比值和將不再是定值。另外，若讓定點 P 落在正多邊形的外部，則在我們『問題三』、『問題四』、『問題五』、『問題六』、『定理一』與『定理二』中之線段比值和亦不再是定值。

『正偶數邊形所得到的數個線段比值相加後之定值』與『正奇數邊形所得到的數個線段比值相加後之定值』雖然不盡相同，但其證明過程有些想法是類似的，延續這樣的思維與方法，在**分區科展**之後，我們又陸續完成『引理一』在空間中**『任意四面體』、『正六面體』與『正八面體』**的推論，盼望在未來可以順利完成『引理一』在『正十二面體』與『正二十面體』上的推論。而任意多邊形內具有這些性質的所有 P 點所形成的軌跡也是我們接下來想要探討的問題。

柒、 參考資料

[1] 初等幾何研究，左銓如・季素月 編著，九章出版社，1998。
[2] 平面幾何新路解題研究，張景中 著，九章出版社，2002。
[3] 中華民國第五十三屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱:『孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣』，作者:許喬婷，指導老師:鄭仕豐。
[4] 2014 年臺灣國際科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱:『孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中的推廣』，作者:許喬婷，指導老師:鄭仕豐。

【評語】040405

本件作品是將下面有關三角形的已知結果推廣:「一個三角形 ABC 內部有一定點 P,連接直線 $\overline{AP}$、$\overline{BP}$ 與 $\overline{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三條邊於 A'、B'與 C'三個點,則 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}=1$ 恆成立。」本件作品推廣的結果包括一般的正 n 邊形,只是這時候定值不再是 1,而是一個 n 的函數。如果討論的對象是任意多邊形,那就只有一部份的點 P 可以維持這個性質,另外,亦將結果推廣到任意四面體以及正多面體。

整體來說,本件作品對原來的定理完成一定程度的推廣,但是,如果能夠對任意多邊形達到此性質的點 P 的集合做一刻劃,將會使本論文的價值大大提高。另外,在推廣定理時,比值和的形式該如何決定,會連帶影響是否有漂亮結果;此研究未選擇適當的比值和的討論,使結果侷限於一些特例。